РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.Н. Бурков, Н.А. Коргин, Д.А. Новиков

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Под редакцией чл.-корр. РАН Д.А. Новикова

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов 658400 «Организация и управление наукоемкими производствами», специальности 073900 «Менеджмент высоких технологий», а также студентов технических и инженерно-экономических специальностей.

Москва – 2009

ББК 32.81
Б 91
УДК 519

Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А. **Введение в теорию управления организационными системами** / Под ред. чл.-корр. РАН Д.А. Новикова. – М.: Либроком, 2009. – 264 с.

Учебник представляет собой вводный курс по теории управления организационными системами, рассчитанный на студентов ВУЗов и аспирантов инженерных, управленческих и экономических специальностей.

Приводится общая модель управления организационными системами и технология решения соответствующих задач управления. Достаточно подробно рассматриваются следующие классы механизмов управления организационными системами:

– механизмы планирования;
– механизмы стимулирования;
– механизмы информационного управления;
– механизмы формирования оптимальных структур управления.

Каждая глава завершается списком задач и упражнений, приведены темы для самостоятельного изучения (и/или написания рефератов или выполнения курсовых работ). При формировании списков используемой и рекомендуемой для изучения литературы авторы стремились при наличии такой возможности приводить источники, тексты которых находятся в свободном доступе в Интернете.

Рецензенты:
– кафедра инновационного менеджмента МФТИ
(зав. кафедрой – д.т.н., проф. В.А. Ириков);
– д.т.н., проф. А.И. Орлов.

ISBN 978-5-397-00411-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий учебник представляет собой вводный курс, рассчитанный на студентов ВУЗов и аспирантов управленческих и экономических специальностей.

Структура изложения материала[1] такова (см. Рис. В.1).

В <u>главе 1</u> «Проблемы управления организационными системами» приводится общая постановка задачи управления организационными системами; кратко описываются модели индивидуального и коллективного принятия решений, лежащие в основе моделей организационных систем; вводится система классификаций задач управления организационными системами.

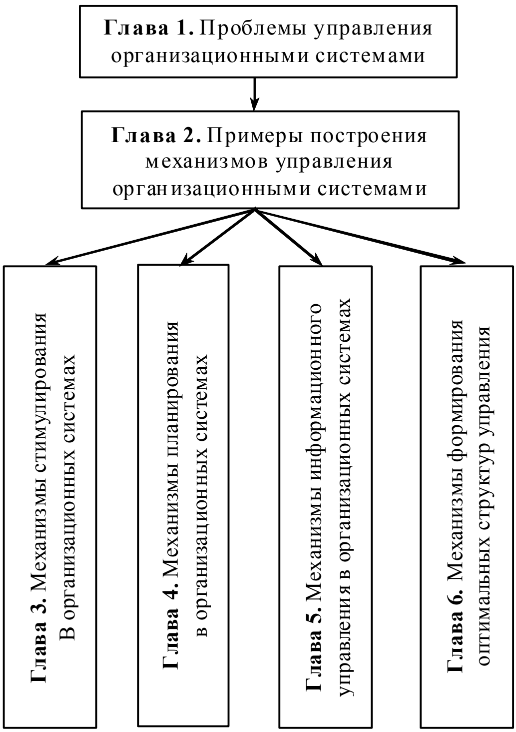


Рис. В.1. Структура книги

[1] *Оглавление настоящей работы может рассматриваться как учебная программа соответствующего курса.*

В главе 2 «Примеры построения механизмов управления организационными системами» в качестве иллюстрации рассматривается ряд простых механизмов управления, даются оценки их эффективности, приводятся примеры эффективных механизмов

В главе 3 «Механизмы стимулирования в организационных системах» приведены основные подходы и результаты исследования задач стимулирования – побуждения членов организации к совершению определенных действий.

В главе 4 «Механизмы планирования в организационных системах» описаны задачи планирования – принятия управленческих решений на основании сообщаемой подчиненными информации. При этом основной акцент делается на условиях обеспечения выгодности для участников организационных систем сообщения достоверной информации.

В главе 5 «Механизмы информационного управления в организационных системах» рассматриваются задачи формирования таких структур информированности управляемых субъектов, при которых принимаемые ими решения наиболее выгодны для управляющего органа.

В главе 6 «Механизмы формирования оптимальных структур управления» формулируются и решаются задачи анализа и синтеза структур управления – описываются: задача формирования организационных иерархий, модели организационных структур, общая модель иерархии управления, методы поиска оптимальных древовидных структур.

Все главы содержат значительное число примеров и завершаются списком задач и упражнений (всего их более сотни) по соответствующей тематике. В конце книги приведены темы для самостоятельного изучения (и/или написания рефератов или выполнения курсовых работ).

При формировании списков используемой и рекомендуемой для изучения литературы авторы стремились при наличии такой возможности приводить источники, тексты которых находятся в свободном доступе в Интернете.

В написании главы 5 принимал участие д.ф.-м.н. А.Г. Чхартишвили, глава 6 написана к.т.н. М.В. Губко и к.ф.-м.н. С.П. Мишиным. Авторы признательны рецензентам – д.т.н., проф. В.А. Ирикову и д.т.н., проф. А.И. Орлову за ценные замечания, а также техническому редактору Н.А. Новожениной за большой объем работ по оформлению книги.

Методические рекомендации. Прежде чем переходить к изложению основного материала работы, обсудим опыт преподавания теории управления организационными системами в высших учебных заведениях. С методической точки зрения рациональными представляются следующие состав и структура учебных курсов[2] (см. Рис. В.2).

1. Прикладная математика (системный анализ [5, 10], теория игр [4], теория графов [1], теория принятия решений [4, 9] – вводные курсы (каждый по одному семестру), дающие необходимый математический аппарат.

2. Теория управления организационными системами (один-два семестра) – курс, содержащий базовые модели и механизмы управления организационными системами.

3. Дополнительные курсы (по одному семестру каждый), которые либо демонстрируют применение теории в различных прикладных областях (управление проектами [2, 8], внутрифирменное управление и т.д.), либо посвящены углубленному изучению тех или иных классов теоретических моделей (кооперативные модели, управление оргструктурой, механизмы планирования, информационное управление и т.д.).

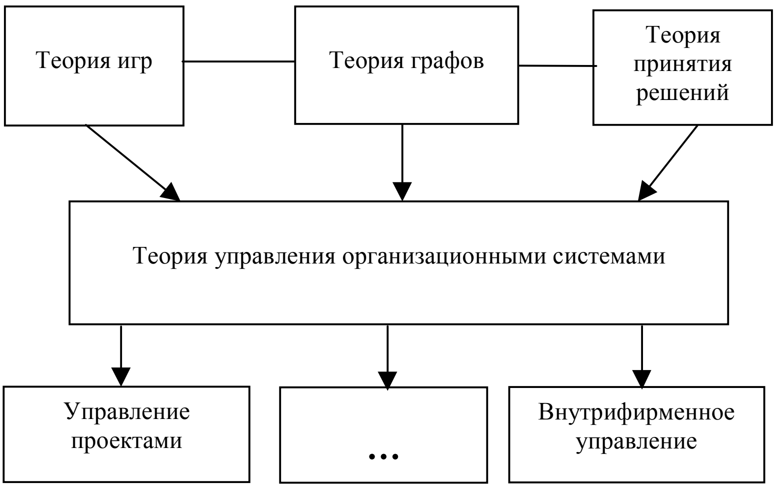


Рис. В.2. Структура учебных курсов

---

[2] *Предполагается знание студентами математики в объеме двух лет обучения в техническом или экономическом ВУЗе.*

Выше перечислен «максимальный» состав учебных курсов. Его ядром является курс теории управления организационными системами (настоящий учебник рассчитан либо на семестровый курс в формате спецкурса (32 часа), либо на семестровый курс лекций с практическими занятиями (32/32); двухсеместровому курсу соответствует настоящий учебник совместно с [3, 6]; в качестве справочника в обоих случаях может использоваться [7]). Состав других курсов может варьироваться в зависимости от специализации факультетов и кафедр.

С методической точки зрения можно порекомендовать максимальное использование в учебном процессе современных электронных ресурсов, посвященных теории и практике управления организационными системами (см. сноску 3).

Литература ко введению[3]

1. *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001.
2. *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997.
3. *Воронин А.А., Губко М.В., Мишин С.П., Новиков Д.А. Математические модели организаций. – М.: Ленанд, 2008.
4. *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.
5. *Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. – М.: Синтег, 2007.
6. *Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. – М.: Синтег, 1999.
7. *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: Физматлит, 2007.
8. *Новиков Д.А. Управление проектами: организационные механизмы. М.: ПМСОФТ, 2007.
9. *Орлов А.И. Теория принятия решений. – М.: Экзамен, 2005.
10. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989.

[3] *Работы, отмеченные звездочкой, можно найти в свободном доступе в электронной библиотеке на сайте www.mtas.ru.*

ГЛАВА 1. Проблемы управления организационными системами

Зачем изучать организации? Чтобы ими управлять? Чтобы управлять собой, работая в них? Чтобы в них жить! Действительно, организации являются таким же родовым признаком человека, как прямохождение, рука, речь, сознание, труд. Человек всю жизнь погружен в организации различной природы от семьи до глобальной цивилизации, ежедневно участвуя в их создании и испытывая их благотворное или губительное влияние.

Как любой продукт человеческой деятельности организации имеют двоякую природу: субъективную, обусловленную личностным творением, и объективную – обусловленную общественным сотворением и предназначением. Объективная природа организаций обусловлена еще и тем, что они – живые. Организации зачинаются, рождаются, взрослеют, стареют, и, наконец, умирают. Жизнь организаций часто течет незаметно, но иногда их кризисы влекут за собой драмы и трагедии личностей, народов и поколений.

Рассмотрим общепринятое содержание понятия «организация» – см. Рис. 1.1. В соответствии с определением, данным в [32], «*организация*»:

1) внутренняя упорядоченность, согласованность взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных частей целого, обусловленная его строением;

2) совокупность процессов или действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого;

3) объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил», то есть *механизмов функционирования* – см. [27] (механизм – «система, устройство, определяющее порядок какого-либо вида деятельности» [30, С. 283]).

Третье значение термина «организация» является определением *организационной системы*.

Применительно к организационным системам *механизм функционирования* – это совокупность правил, законов и процедур, регламентирующих взаимодействие участников организационной системы. Более узким является понятие *механизма управления* – совокупности процедур принятия управленческих решений в организациях.

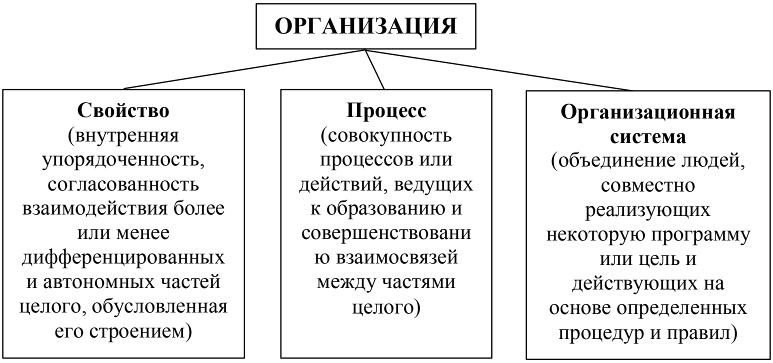


Рис. 1.1. Определение «организации»

Таким образом, механизмы функционирования и механизмы управления определяют, как ведут себя члены организации[4] и как они принимают решения. Именно наличие механизмов управления отличает организацию от группы (*группа* – совокупность людей, объединенных общностью интересов, профессии, деятельности и т.п.) и коллектива (*коллектив* – группа лиц, объединенных общей работой) – см. Рис. 1.2.

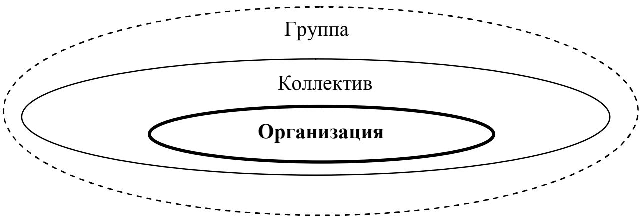


Рис. 1.2. Группа, коллектив и организация

Наличие в организации определенной совокупности конкретных механизмов управления привлекательно как с точки зрения управляющего органа – так как позволяет предсказать поведение управляемых субъектов, так и с точки зрения управляемых субъектов – так как делает предсказуемым поведение управляющего органа. То есть снижение неопределенности за счет использования механизмов

[4] *С этой точки зрения механизм управления можно рассматривать как синоним метода управления, так как и тот, и другой определяют,* ***как*** *осуществляется управление.*

управления является одним из существенных свойств любой организации как социального института.

Для того, чтобы управляющий орган – *центр* – выбрал ту или иную процедуру принятия решений (тот или иной механизм управления, то есть зависимость своих действий от целей организации и действий управляемых субъектов – *агентов*) он должен уметь предсказывать поведение агентов – их реакцию на те или иные управляющие воздействия. Экспериментировать в жизни, применяя различные управления и изучая реакцию подчиненных, не эффективно и практически никогда не представляется возможным. Здесь на помощь приходит *моделирование* – метод исследования систем управления на моделях (см. описание методов моделирования, а также проблем устойчивости и адекватности моделей, в [7]). Имея адекватную модель, можно с ее помощью проанализировать реакции управляемой системы (этап *анализа*), а затем выбрать и использовать на практике (этап *синтеза*) то управляющее воздействие, которое приводит к требуемой реакции. Подчеркнем, что в настоящей работе именно моделирование является основным методом исследования организаций.

Организационные системы как системы междисциплинарной природы. В настоящей работе речь идет об организационных системах. Возникает закономерный вопрос – какие еще бывают системы, и как организационные системы соотносятся с ними. Возможно следующее позиционирование организационных систем. Если взять в качестве основания классификации направленность человеческой деятельности: «природа – общество – производство» [14], то соответственно можно выделить:

– *организационные системы* (человек);
– *экологические системы* (природа);
– *социальные системы* (общество);
– *экономические* (*«технические»*) *системы* (производство).

На «стыке» этих четырех классов систем возникают следующие попарные комбинации – *системы междисциплинарной природы* (см. Рис. 1. 3)[5]:

- организационно-технические системы;
- социально-экономические системы;
- эколого-экономические системы;

[5] *Следует признать, что последние три класса систем пока не стали предметом активных исследований в теории управления.*

- нормативно-ценностные системы;
- ноосферные системы;
- социально-экологические системы.

Рис. 1. 3. Классификация систем междисциплинарной природы

Организационные системы, как включающие, как минимум, нескольких людей, также, наверное, имеет смысл рассматривать как системы междисциплинарной природы.

Немного истории. С точки зрения истории, в конце 1960-х годов XX века, на фоне бурного развития кибернетики, исследования операций, математической теории управления (теории автоматического регулирования) и интенсивного внедрения их результатов при создании новых и модернизации существующих технических систем, практически одновременно во многих научных центрах как в СССР, так и за рубежом, начали предприниматься попытки применения общих подходов теории управления для разработки математических моделей социальных и экономических систем (теория автоматического регулирования – ТАР, *теория активных систем* – ТАС, теория иерархических игр – ТИИ, Mechanism Design – MD) – см. Рис. 1.4.

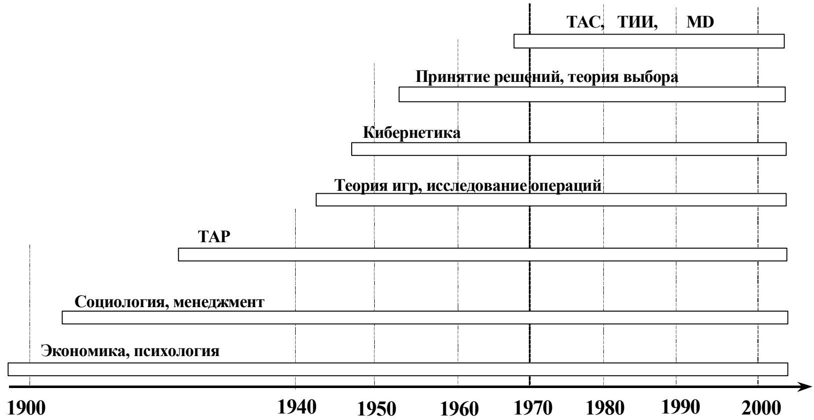


Рис. 1.4. Хронология развития представлений об организационных системах

На сегодняшний день интеграция этих подходов привело, в свою очередь, к созданию *теории управления организационными системами*, предмет которой – разработка организационных механизмов управления (получить первоначальное представление о современном состоянии этой теории можно из монографии [27]). В рамках этой теории созданы, исследованы и апробированы на практике десятки механизмов управления, которые находят применение при управлении системами самого разного масштаба и отраслевой специфики.

В настоящей главе, носящей вводный характер, приводится общая постановка задачи управления организационными системами (раздел 1.1); кратко описываются модели индивидуального (раздел 1.2) и коллективного (раздел 1.3) принятия решений, лежащие в основе моделей организационных систем; вводится система классификаций задач управления организационными системами (раздел 1.4).

1.1. Задачи управления организационными системами

Управленческая деятельность. Рассмотрим основные *структурные* (процессуальные) *компоненты* любой деятельности (*деятельность* – целенаправленная активность человека) [14] некоторого субъекта – см. Рис. 1. 5.

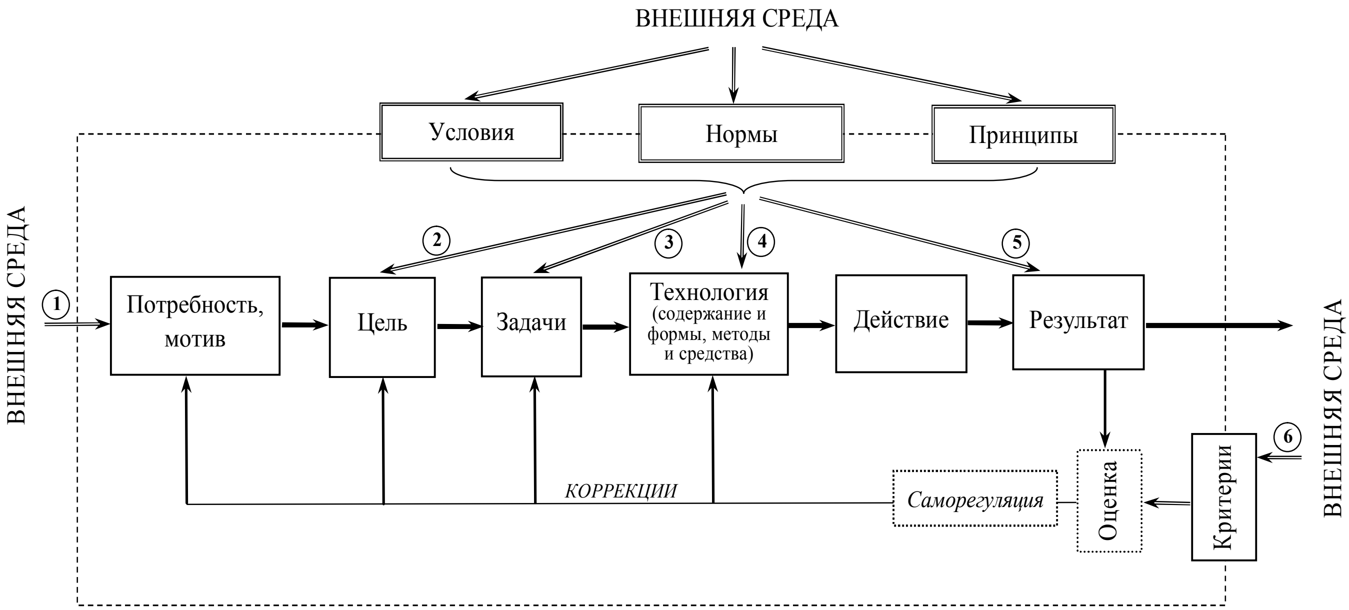


Рис. 1. 5. Структурные компоненты деятельности

Горизонтальная цепочка (жирные стрелки на Рис. 1. 5) «Потребность → мотив → цель → задачи → технология → действие → результат» соответствуют одному «акту» деятельности. Условно границы субъекта (индивидуального или коллективного) обозначены пунктирным прямоугольником.

Потребности определяются (см. например, [32, С. 518]) как нужда или недостаток в чем-либо, необходимом для поддержания жизнедеятельности организма, человеческой личности, социальной группы, общества в целом. Потребности социальных субъектов, что в данном случае нас интересует, – личности, социальных групп и общества в целом – зависят от уровня развития данного общества, а также от специфических социальных условий их деятельности (см. стрелку (1) на Рис. 1. 5).

Потребности конкретизируются, опредмечиваются в *мотивах*, являющихся побудителями деятельности человека, социальных групп, ради чего она и совершается [32, С. 389-390]. *Мотивация* есть процесс побуждения человека, социальной группы к совершению определенной деятельности (см. стрелку (1) на Рис. 1. 5), тех или иных действий, поступков.

Мотивы обусловливают формирование *цели* как субъективного образа желаемого *результата* ожидаемой деятельности, действия.

С учетом условий, норм и принципов деятельности цель конкретизируется в набор *задач*. Далее с учетом выбранной *технологии* (технология – это система условий, форм, методов и средств решения поставленной задачи), включающей *содержание* и *формы*, *методы* и *средства*, выбирается некоторое *действие*, которое с учетом воздействия окружающей среды приводит к определенному *результату* деятельности. Результат деятельности оценивается субъектом по собственным (внутренним) *критериям*, а элементами окружающей среды – по своим (внешним по отношению к субъекту) критериям.

Особое место в структуре деятельности занимают те компоненты, которые в случае индивидуального субъекта называются саморегуляцией, а в случае коллективного субъекта, коллективной деятельности – *управлением*. Саморегуляция представляет собой замкнутый контур регулирования. В процессе саморегуляции субъект на основании оценки достигнутых результатов корректирует компоненты своей деятельности (см. тонкие стрелки на Рис. 1. 5).

Понятие *внешней среды* (см. Рис. 1. 5) является важнейшей категорией системного анализа, который рассматривает, в частности, человеческую деятельность как сложную систему. Среда (внешняя среда) определяется как совокупность всех объектов/субъектов, не входящих в систему, изменение свойств и/или поведение которых влияет на изучаемую систему, а также тех объектов/субъектов, чьи свойства и/или поведение которых меняются в зависимости от поведения системы [6].

На Рис. 1. 5 отдельно выделены факторы, задаваемые внешней (по отношению к данному субъекту деятельности) средой:

– *критерии* оценки соответствия результата цели;

– принятые в обществе и в организации *нормы* (правовые, этические, гигиенические и т.п.) и *принципы* деятельности;

– *условия деятельности* [14]:

- мотивационные,
- кадровые,
- материально-технические,
- научно-методические,
- финансовые,
- организационные,
- нормативно-правовые,
- информационные.

Таким образом, мы рассмотрели основные характеристики деятельности и ее структурные компоненты. Теперь перейдем непосредственно к управлению.

Управление. Моделирование на уровне управляемой системы требует создания модели управления. Сложная иерархическая структура систем, разнообразие видов, методов, стилей, форм управления привели к такому же разнообразию соответствующих моделей. Именно модели управления чаще всего составляют основное содержание моделей организаций.

Переходя к разговору о моделях управления, нужно корректно определить, что понимается под управлением. Для этого приведем ряд распространенных определений:

Управление – «элемент, функция организованных систем различной природы: биологических, социальных, технических, обеспечивающая сохранение их определенной структуры, поддержание режима деятельности, реализацию программы, цели деятельности. [32, С. 704]».

Управление – «направление движением кого/чего-нибудь, руководство действиями кого-нибудь» [31, С. 683].

Управление – «воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения» [27, С. 9].

Существует и множество других определений, в соответствии с которыми управление определяется как: элемент, функция, воздействие, процесс, результат, выбор и т.п.

Мы не будем претендовать на то, чтобы дать еще одно определение, а лишь подчеркнем, что, если управление осуществляет субъект (а в организационных системах это именно так), то управление следует рассматривать как деятельность. А именно, в [14] *методология* определена как учение об организации деятельности, а *управление* – как вид практической деятельности по организации деятельности. Такой подход: управление – вид практической деятельности[6] (*управленческая деятельность*), многое ставит на свои места – объясняет «многогранность» управления и примиряет между собой различные подходы к определению этого понятия.

Поясним последнее утверждение. Если управление – это деятельность, то осуществление этой деятельности является функцией управляющей системы, процесс управления соответствует процессу деятельности, управляющее воздействие – ее результату и т.д. Другими словами, в организационных системах (где и управляющий орган и управляемая система являются субъектами – см. Рис. 1.7) **управление является деятельностью по организации деятельности** [14].

Уровень рефлексии можно наращивать и дальше: с одной стороны, в многоуровневой системе управления деятельность топ-менеджера можно рассматривать как деятельность по организации деятельности его непосредственных подчиненных, которая заключается в организации деятельности их подчиненных и т.д. С другой стороны, многочисленная армия консультантов (речь идет, прежде всего, об *управленческом консалтинге* – быстро разросшемся в последние годы институте консультантов, консалтинговых, аудиторских и других фирмах) представляет собой специалистов по организации управленческой деятельности.

---

[6] *Трактовка управления как одной из разновидностей практической деятельности на первый взгляд кажется неожиданной. Ведь управление традиционно воспринимается как нечто «высокое» и очень общее, однако деятельность управленца организована так же* (*по тем же общим законам*)*, как и деятельность любого специалиста-практика: учителя, врача, инженера и т.д. Более того, иногда «управление»* (*управленческая деятельность*) *и «организация»* (*как процесс, то есть деятельность по обеспечению свойства организации*) *рассматриваются рядоположенно, но и в этом случае методология как учение об организации любой деятельности определяет общие закономерности управленческой деятельности.*

Рассмотрим простейшую[7] входо-выходную модель системы, состоящей из управляющего органа – *центра* – и управляемого субъекта[8] – *агента* – см. Рис. 1.6. Имеются: на входе – управляющее воздействие и внешние воздействия, на выходе – действие управляемого субъекта (состояние управляемой системы). *Обратная связь* обеспечивает управляющий орган информацией о состоянии управляемой системы.

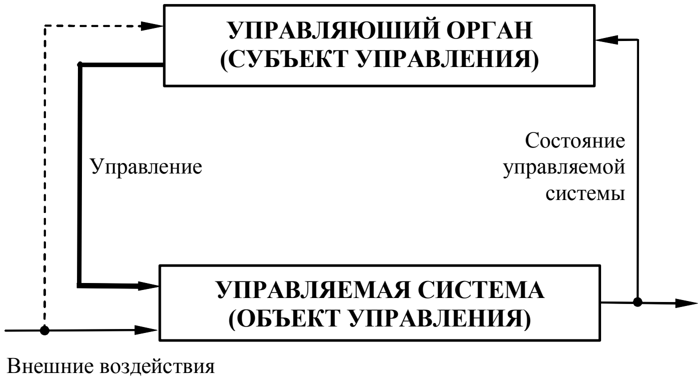


Рис. 1.6. Входо-выходная модель

Кто что выбирает из участников системы? Пусть состояние системы описывается *действием* агента $y \in A$, принадлежащим некоторому множеству допустимых действий A. Допустим, управление $u \in U$ принадлежит множеству допустимых управлений U. Пусть также задан *критерий эффективности функционирования* системы

---

[7] *«Простота» данной модели заключается в том, что в ней присутствует один управляющий орган и один объект управления. «Усложнение» за счет обобщения может производиться за счет увеличения числа управляющих органов, управляемых объектов, уровней иерархии и т.д. – см. разделы 1.3. и 1.4.*

[8] *Зададимся вопросом – в чем разница между управляемым субъектом и объектом управления? Термин «объект» часто применяется в теории управления и в принятия решений. Объект, по определению, не обладает активностью, в то время, как субъект активен и способен самостоятельно принимать решения. Поэтому можно применять оба термина, но, говоря «субъект», мы подчеркиваем, что речь идет о людях. Далее мы будем говорить, центр и агент, подразумевая активность и того, и другого.*

$K(u,y)$, который зависит от переменных, описывающих эту систему, то есть от управления и от состояния системы. В настоящей работе мы будем пользоваться при описании предпочтений участников и постановке задач управления скалярными моделями, то есть считать, что все функционалы отображают множества в числовую ось: $K(u,y): A \times U \to R^1$. То есть, многокритериальные задачи рассматривать мы не будем (у них есть своя специфика).

Предположим, что известна реакция управляемого субъекта на то или иное управление. Простейший вид такой реакции – когда состояние субъекта является известной функцией от управления: $y = G(u)$, где $G(\cdot)$ – модель управляемого субъекта, которая описывает его реакцию на управляющее воздействие. Коль скоро известна эта зависимость, если ее подставить в критерий эффективности функционирования, то получим функционал $\Phi(u) = K(u, G(u))$, который будет зависеть только от управления. Этот функционал называется *эффективностью управления*. Дальше задача заключается в поиске *оптимального управления*, то есть допустимого управления $u \in U$, обладающего максимальной эффективностью:

$$\Phi(u) \to \max_{u \in U}.$$

Это – задача синтеза оптимального управления, или просто «*задача управления*».

В свою очередь, базовая входо-выходная структура системы управления, приведенная на Рис. 1.6, основывается на схеме деятельности, приведенной на Рис. 1. 5, так как и управляющий орган, и управляемая система (управляемый субъект), – каждый – осуществляют соответствующую деятельность, которая может быть описана в рамках схемы Рис. 1. 5. В итоге получаем схему управленческой деятельности, представленную на Рис. 1.7.

При этом управляющий орган является с точки зрения управляемой системы частью внешней по отношению к ней среды (номера воздействий на Рис. 1. 5 и на Рис. 1.7 совпадают). Эта «внешняя среда» осуществляет целенаправленные воздействия (двойные стрелки (1)-(4) и (6) на Рис. 1. 5) – см. Рис. 1.7. Часть влияний внешней среды может носить нецеленаправленный (случайный, недетерминированный, неконтролируемый управляющим органом) характер. Подобные воздействия (отражаемые ниже природной или игровой *неопределенностью*) могут, наряду с действием управляемой системы, влиять на результат ее деятельности (двойная стрелка

(5) на Рис. 1. 5) – см. внешние воздействия на Рис. 1.7. Структуру, приведенную на Рис. 1.7, можно наращивать, добавляя уровни иерархии. Принципы описания управления в многоуровневых системах остаются такими же. Однако многоуровневые системы обладают своей спецификой, отличающей их от последовательного набора двухуровневых «блоков» (см. [16]).

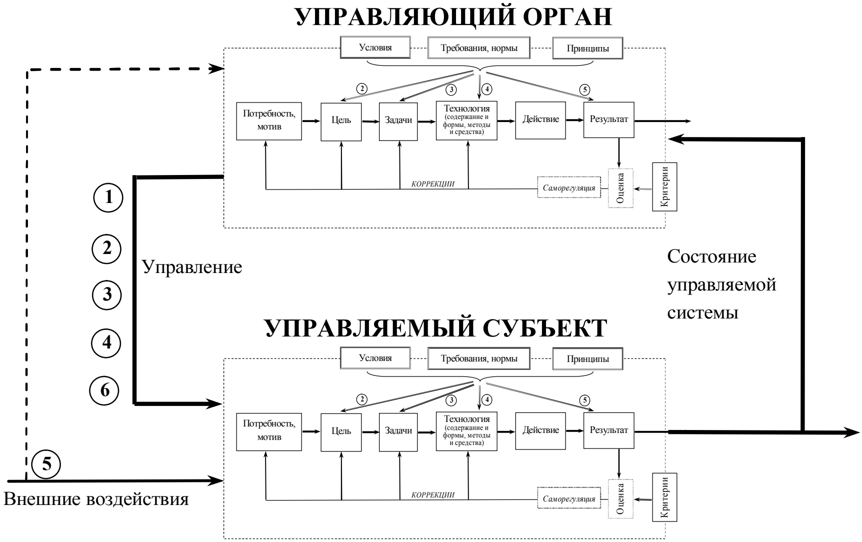


Рис. 1.7. Структура управленческой деятельности

Классификация управлений. Выбирая соответствующие основания классификации, для фиксированной системы[9] можно выделить следующие виды (методы) управления:

– *институциональное* (административное, командное, ограничивающее, принуждающее);

– *мотивационное управление* (побуждающее управляемых субъектов к совершению требуемых действий);

– *информационное управление* (убеждающее, основывающееся на сообщении информации и формировании убеждений, представлений и мотивов)[10];

[9] *Оговорка «для фиксированной системы» существенна, так как возможность влиять на состав и структуру управляемой системы порождает еще два вида управления (см. ниже) – управление составом и управление структурой.*

С точки зрения регулярности управляемых процессов можно выделить следующие типы управления:

– *проектное управление* (управление в динамике – изменениями в системе, инновационной деятельностью и т.д.)

и

– *процессное управление* (управление функционированием – «в статике» – регулярной, повторяющейся деятельностью при неизменных внешних условиях).

Для управления в динамике, в свою очередь, можно выделить *рефлекторное*[11] (*ситуационное*) *управление* и *опережающее управление*. И т.д., вводя различные основания классификаций можно расширять и детализировать список возможных видов и типов управления.

Обоснованием выделения именно приведенных выше видов (методов) управления является следующее. С точки зрения системного анализа любая система задается перечислением следующих её компонент: *состава, структуры и функций*[12]. Значит, и любая *организационная система* (ОС) определяется заданием [15]:

– *состава ОС* (участников, входящих в ОС, то есть ее *элементов*);

– *структуры ОС* (совокупности информационных, управляющих, технологических и других связей между участниками ОС);

– *множеств допустимых действий* (ограничений и норм деятельности) участников ОС, отражающих, в том числе, институциональные, технологические и другие ограничения и нормы их совместной деятельности;

– *предпочтений* участников ОС;

---

[10] *Иногда в литературе по менеджменту эти три вида управления называют методами, соответственно, организационного, экономического и социально-психологического управления.*

[11] *Рефлекторным называется управление, при котором управляющий орган реагирует на изменения или внешние воздействия по мере их появления, не пытаясь прогнозировать их или влиять на них. Ситуационным называется управление, в котором каждой типовой ситуации априори ставится в соответствие некоторое управляющее воздействие; каждая возникающая конкретная ситуация классифицируется как некоторая типовая, а затем реализуется соответствующее ей управляющее воздействие.*

[12] *С точки зрения теории принятия решений любая модель принятия решений включает, как минимум, множество альтернатив, из которого производится выбор в определенный момент времени; предпочтения, которыми руководствуется субъект, осуществляющий выбор; и информацию, которой он обладает.*

– *информированности* – той информации о существенных параметрах, которой обладают участники ОС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях.

Состав определяет, «кто» входит в систему, структура – «кто с кем взаимодействует, кто кому подчиняется и т.д.», допустимые множества – «кто что может», целевые функции – «кто что хочет», информированность – «кто что знает».

Управление ОС, понимаемое как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения, может затрагивать каждый из перечисленных ее параметров.

Следовательно, взяв за *основание системы классификаций* управлений ОС предмет управления – изменяемый в процессе и результате управления компонент ОС, получаем, что по этому основанию можно выделить (см. Рис. 1.8):

– *управление составом*;

– *управление структурой*;

– *институциональное управление* (управление ограничениями и нормами деятельности);

– *мотивационное управление* (управление предпочтениями и интересами);

– *информационное управление* (управление информацией, которой обладают участники ОС на момент принятия решений).

Рис. 1.8. Классификация видов (*методов*) *управления*

Совокупность перечисленных ранее видов управления (институциональное, мотивационное и информационное управление) отличается от приведенного выше их списка лишь добавлением таких видов, как управление составом и управление структурой. Отметим, что выделенные виды управления согласованы с принятой выше схемой структурных компонент деятельности (см. Рис. 1. 5). Действительно, воздействия внешней среды на потребности, мотивы и критерии оценки деятельности являются информационным управлением (см. двойные стрелки (1) и (6) на Рис. 1. 5), воздействия на цели – мотивационным управлением (см. двойную стрелку (2) на Рис. 1. 5), воздействия на задачи и технологии – институциональным управлением (см. двойные стрелки (3) и (4) на Рис. 1. 5).

Обсудим кратко специфику различных видов управлений[13].

Управление составом касается того, кто войдет в организацию, кого следует уволить, кого – нанять. Обычно к управлению составом относят и задачи обучения и развития персонала.

Задача *управления структурой* обычно решается параллельно с задачей управления составом и позволяет дать ответ на вопрос – кто какие функции должен выполнять, кто кому должен подчиняться, кто кого контролировать и т.д.

Институциональное управление является наиболее жестким и заключается в том, что управляющий орган целенаправленно ограничивает множества возможных действий и результатов деятельности подчиненных. Такое ограничение может осуществляться явными или неявными воздействиями – правовыми актами, распоряжениями, приказами и так далее или морально-этическими нормами, корпоративной культурой и т.д.

Мотивационное управление является более «мягким», чем институциональное, и заключается в целенаправленном изменении предпочтений подчиненных. Такое изменение может осуществляться введением системы штрафов и/или поощрений за выбор тех или иных действий и/или достижение определенных результатов деятельности.

Наиболее «мягким» (косвенным), по сравнению с институциональным и мотивационным, является *информационное управление*. В соответствии с введенной в [26] классификацией частными случаями информационного управления являются:

– *информационное регулирование*;

[13] *Естественно, на практике иногда трудно выделить в явном виде управление того или иного вида и/или типа, так как некоторые из них могут и должны использоваться одновременно.*

– *рефлексивное управление*;
– *активный прогноз*.

Формы управления. Выбирая различные основания классификации выделяют разные формы управления.

В зависимости от структуры системы управления можно выделять:

– *иерархическое управление* (система управления имеет иерархическую структуру, причем у каждого подчиненного имеется один и только один начальник);
– *распределенное управление* (у одного подчиненного может быть несколько начальников; пример – матричные структуры управления);
– *сетевое управление* (разные функции управления в различные моменты времени могут выполняться различными элементами системы).

В зависимости от числа управляемых субъектов можно выделять:

– *индивидуальное управление* (управление одним субъектом);
– *коллективное управление* (управление группой субъектов по результатам их совместной деятельности).

В зависимости от того, зависит ли управление от индивидуальных особенностей управляемого субъекта, можно выделять:

– унифицированное управление (когда одни и те же механизмы управления применяются к группе, в общем случае различных, субъектов);
– персонифицированное управление (когда управление зависит от индивидуальных особенностей управляемого субъекта).

Средства управления – приказы, распоряжения, указания, планы, нормы, нормативы, регламенты и т.д. – в настоящей работе не рассматриваются. Их подробное описание можно найти в любом учебнике по менеджменту.

Функции управления. Выделяют четыре *основные функции* управления: планирование, организация, стимулирование и контроль. Непрерывная последовательность реализации этих функций составляет цикл управленческой деятельности – см. Рис. 1.9.

Перечисленные четыре функции управления являются общими для процессного управления и проектного управления и соответствуют структурным компонентам деятельности. Поясним это утверждение.

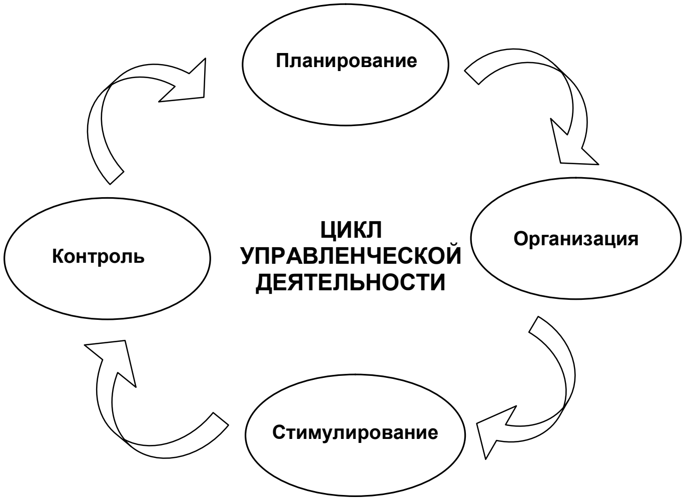


Рис. 1.9. Цикл управленческой деятельности

В *процессном управлении* выделяют следующие основные функции: *планирование*, *организация* (как процесс – см. три определения термина «организация», приведенные выше – Рис. 1.1), *мотивация* (стимулирование) и *контроль*.

В *проектном управлении* выделяют следующие фазы жизненного цикла проекта:

– *начальная фаза* (концепция): сбор исходных данных и анализ существующего состояния; определение целей задач, критериев, требований и ограничений (внешних и внутренних) проекта, экспертиза основных положений, утверждение концепции проекта;

– *фаза разработки*: формирование команды, развитие концепции и основного содержания проекта, структурное планирование, организация и проведение торгов, заключение договоров и субдоговоров с основными исполнителями, представление проектной разработки и получение ее одобрения;

– *фаза реализации* проекта: ввод в действие разработанной на предыдущих фазах системы управления проектами, организация выполнения работ, ввод в действие системы мотивации и стимулирования исполнителей, оперативное планирование, управление материально-техническим обеспечением, оперативное управление;

– *завершающая фаза*: планирование процесса завершения проекта, проверка и испытание результатов реализации проекта, подготовка персонала для эксплуатации результатов реализации проекта, их сдача заказчику, реализация оставшихся ресурсов, оценка результатов и подведение итогов, расформирование команды проекта.

Исходя из этих фаз, можно считать основными соответствующие им функции планирования, организации, стимулирования и контроля.

Наконец, выше выделены следующие структурные компоненты деятельности (см. Рис. 1. 5): *мотив, цель, технология* и *результат*. Им также можно поставить в соответствие (в зависимости от компонентов деятельности, являющихся предметом управления) четыре основные функции управления (см. Табл. 1.1).

Табл. 1.1. Типы и функции управления

Типы управления	**Функции управления**			
Процессное управление	планирование	организация	стимулирование	контроль
Проектное управление	концепция	разработка	реализация	завершение
Управляемые компоненты деятельности	цели	технология	мотивы	результаты

Следовательно, можно выделить следующие общие функции управления: *планирование*, *организация, стимулирование* и *контроль*.

Итак, выше приведена в общем виде формулировка задачи управления. Для того чтобы понять, как эта задача ставится и решается в каждом конкретном случае, рассмотрим общую технологию управления организационными системами.

Технология решения задач управления организационными системами. Под *технологией* понимается совокупность методов, операций, приемов и так далее, последовательное осуществление которых обеспечивает решение поставленной задачи. Отметим, что рассматриваемая ниже технология решения задач управления охватывает все этапы, начиная с построения модели ОС и заканчивая анализом эффективности внедрения результатов моделирования на практике (см. Рис. 1.10, на котором в целях наглядности опущены обратные связи между этапами).

Первый этап – построение модели – заключается в описании реальной ОС в формальных терминах, то есть задании состава и структуры ОС, целевых функций и множеств допустимых стратегий участников системы, их информированности, порядка функционирования, гипотез о поведении и т.д. На этом этапе существенно используется аппарат теории игр, в терминах которой, обычно и формулируется модель (см. раздел 1.3).

Рис. 1.10. Технология решения задач управления ОС

Второй этап – анализ модели – исследование поведения участников при тех или иных *механизмах управления*. Решение теоретико-игровой задачи анализа заключается в определении для фиксированного механизма управления стратегий агентов, которые являются равновесными при этом управлении.

Решив задачу анализа, то есть, зная поведение управляемых субъектов при различных управлениях, можно переходить к *третьему этапу* – решению, во-первых*, прямой задачи управления*, то есть задачи синтеза оптимальных управляющих воздействий, заключающейся в поиске допустимых управлений, имеющих максимальную эффективность, и, во-вторых, *обратной задачи управления* – поиска множества допустимых управлений, переводящих ОС в заданное состояние. Критерием эффективности управления является значение (максимальное или гарантированное) целевой функции управляющего органа на множестве решений игры агентов. Следует отметить, что, как правило, именно этот этап решения задачи управления вызывает наибольшие теоретические трудности и наиболее трудоемок с точки зрения исследователя.

Имея набор решений задачи управления, необходимо перейти к *четвертому этапу*, то есть исследовать их устойчивость. Исследование устойчивости подразумевает решение, как минимум, двух задач. Первая задача заключается в изучении зависимости оптимальных решений от параметров модели, то есть является задачей анализа *устойчивости решений* (корректности оптимизационной задачи, чувствительности, устойчивости принципов оптимальности и т.д.) в классическом понимании. Вторая задача специфична для математического моделирования. Она заключается в теоретическом исследовании *адекватности модели* реальной системе, которое подразумевает изучение эффективности решений, оптимальных в модели, при их использовании в реальных ОС, которые могут в силу ошибок моделирования отличаться от модели. Результатом решения задачи адекватности является *обобщенное решение задачи управления* – параметрическое семейство решений, обладающих заданной гарантированной эффективностью в определенном множестве реальных ОС [5, 17].

Итак, перечисленные выше четыре этапа заключаются в общем теоретическом изучении модели ОС. Для того чтобы использовать результаты теоретического исследования при управлении реальной ОС, необходимо произвести настройку модели, то есть идентифицировать моделируемую систему [17] и провести серию имитационных экспериментов – соответственно *пятый* и *шестой этапы*. Исходными данными для идентификации системы служат обобщенные решения, которые ограничиваются имеющейся информацией о реальной системе. Этап имитационного моделирования во многих случаях необходим по нескольким причинам. Во-первых, далеко не всегда удается получить аналитическое решение задачи синтеза оптимальных управлений и исследовать его зависимость от параметров модели. При этом имитационное моделирование может служить инструментом получения и оценки решений. Во-вторых, имитационное моделирование позволяет проверить справедливость гипотез (в первую очередь относительно принципов поведения участников системы: используемых ими процедур устранения неопределенности, правил рационального выбора и т.д.), принятых при построении и анализе модели, то есть дает дополнительную информацию об адекватности модели без проведения натурного эксперимента. И, наконец, в-третьих, использование деловых игр и имитационных моделей в учебных целях позволяет управленческому персоналу освоить и апробировать предлагаемые механизмы управления.

Завершающим является *седьмой этап* – этап внедрения, на котором производится обучение управленческого персонала, внедрение в реальную ОС разработанных и исследованных на предыдущих этапах механизмов управления с последующей оценкой эффективности их практического использования, коррекцией модели и т.д.

Обсудив технологию управления ОС, приведем общие подходы к решению теоретических задач управления.

Чтобы перейти к детализации задачи управления, необходимо вернуться к построению модели управляемого субъекта. Математическим описанием поведения людей занимается теория принятия решений и теория игр. Поэтому, сделаем маленький экскурс в эти теории для того, чтобы понять, какого рода известными моделями можно пользоваться.

1.2. Модели принятия решений

Для того, чтобы строить модели управления организационными системами необходимо иметь модели поведения людей, входящих в эти системы, то есть, иметь модели принятия людьми решений.

Как описывается поведение человека? В экономике с середины XIX века существует концепция максимизации полезности, то есть концепция экономического человека, который ведет себя таким образом, чтобы максимизировать свою полезность. Несмотря на всю ограниченность этой теории – не всегда понятно, что такое полезность, почему человек стремится ее максимизировать и т.д., – концепция оказалась плодотворной, и ничего лучшего пока не изобретено.

Пусть имеется один субъект (агент), который может выбирать действия из некоторого множества. Предположим, что предпочтения этого субъекта описываются *функцией полезности* $f(y): A \to \Re^1$ (или целевой функцией, функцией предпочтения – будем использовать эти термины как синонимы), которая отображает множество его *действий* (альтернатив) A на числовую ось $\Re^1$. Значения этой функции позволяют сравнивать разные альтернативы. Если взять некоторые два допустимых действия, то лучшим будет то, которое приводит к большему значению функции. Следовательно, агент будет максимизировать свою полезность и производить выбор из *множества выбора*, которое представляет собой множество максимумов его целевой функции: $P(f(\cdot), A) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in A} f(y)$. Значит, множество выбора агента зависит от его предпочтений $f(\cdot)$ и от того множества A, из которого он производит выбор.

Предположение, что агент производит выбор из множества выбора, то есть стремится максимизировать свою целевую функцию, называется *гипотезой рационального поведения*, которая заключается в том, что агент выбирает с учетом всей имеющейся у него информации наилучшую с его точки зрения допустимую альтернативу, то есть ту альтернативу, на которой достигается максимум его целевой функции.

Описывая модель поведения управляемого субъекта, зная, что управление – некоторое воздействие на него, в рамках этой модели видно, что воздействовать на субъекта можно, влияя на его целевую функцию (мотивационное управление) и влияя на то множество, из которого он делает выбор (институциональное управление).

<u>Пример 1.1.</u> Пусть агент – промышленное предприятие – осуществляет выбор своего действия – объема производимой им продукции $y \in A = [0; y_{max}]$, где y_{max} – максимально возможный при заданных ограничениях (технологических и др.) объем производства. Продукция предприятия продается по цене $\theta > 0$ за единицу, а производство требует затрат $y^2 / 2\,r$, где $r > 0$ – эффективность про-

изводства. Целевая функция предприятия (его прибыль) равна разности между доходом от продаж и затратами:

$$f(y) = \theta\, y - y^2 / 2\, r.$$

Если предприятие стремится производить продукцию в объеме, максимизирующем его прибыль, то оно выберет действие

$$y^*(\theta, r, y_{\max}) = \min\{y_{\max};\ \theta\, r\}.$$

Оптимальное действие предприятия зависит от: рыночной цены θ, эффективности производства r и технологических ограничений $y_{\max}$. ●[14]

Приведенная модель принятия решений простая, даже, наверное, слишком простая, и в жизни редко бывает так, что выбор субъекта однозначно определяет его выигрыш – иногда вмешиваются какие-то факторы, которые субъекту, принимающему решения, не подконтрольны. Попробуем учесть их в модели следующим образом: пусть существует неопределенный фактор $\theta \in \Omega$ – *состояние природы*. Предпочтения субъекта (агента) зависят от того, что выбирает он сам, и от этого состояния природы, то есть предпочтения определены на декартовом произведении множества допустимых действий и множества возможный состояния природы, а целевая функция отображает это декартово произведение в числовую ось: $f(y,\theta): A \times \Omega \to R^1$.

Записать такую же простую формулу, как и для предыдущего случая, для такой целевой функции нельзя, потому что, если агент будет выбирать действие, максимизирующее его целевую функцию, то максимум будет зависеть от того, какое значение принимает состояние природы. Для того чтобы описать принятие решений в условиях неопределенности, нужно ввести новую гипотезу – *гипотезу детерминизма*: субъект, принимая решение, стремится устранить неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности. Для этого он должен перейти от целевой функции, зависящей от неопределенных факторов, к целевой функции, которая зависит только от того, что он может выбрать сам.

Здесь возможны следующие варианты:

1) Подстановка какого-то конкретного значения $\hat{\theta}$ состояния природы в целевую функцию и поиск максимума $f(y,\hat{\theta})$ по y. Но

---

[14] *Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера, доказательства и т.д.*

не всегда просто ответить на вопрос – а какое конкретное значение $\hat{\theta}$ надо подставлять.

2) Предположим, что агент – пессимист и считает, что реализуется наихудшее состояние природы. Такой принцип принятия решений называется принципом *максимального гарантированного результата* и заключается в следующем: действие агента будет доставлять максимум его целевой функции при условии, что он рассчитывает на наихудшее для себя значение неопределенного параметра. Тогда он вычисляет сначала минимум по состоянию природы, а потом максимум по своему действию:

$$y^{г} \in \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \min_{\theta \in \Omega} f(y, \theta).$$

Преимущества данного принципа принятия решений: он дает оценку снизу значения целевой функции (если подставить действие агента в его целевую функцию, то меньше данного значения он не получит), то есть это – точка отсчета снизу. Он плох своей крайней пессимистичностью, так как, если природа не настроена против лица, принимающего решения (ЛПР), то вычисление минимума может дать сильно заниженную оценку.

3) Естественно, можно использовать и другую крайность – крайний оптимизм. То есть, рассчитывать на то, что природа к ЛПР благосклонна, и «выбирает» свое «действие», которое наиболее благоприятно для ЛПР. Тогда следует выбирать максимум целевой функции при условии реализации наилучшего состояния природы:

$$y^{o} \in \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \max_{\theta \in \Omega} f(y, \theta).$$

Такой принцип принятия решений называется *критерий оптимизма*: он дает оценку сверху. Этим он хорош, но этим он и плох. Крайний оптимизм, как и крайний пессимизм, в жизни редко встречаются!

Возможны любые комбинации этих критериев, можно брать их линейную свертку, то есть, балансировать между оптимизмом и пессимизмом.

Предположим теперь, что появилась дополнительная информация о значении неопределенного параметра θ, принадлежащего множеству Ω. Пусть известно распределение вероятностей $p(\theta)$ на этом множестве (соответствующая неопределенность называется *вероятностной*), тогда логично использовать это знание, и устранять неопределенность следующим образом: имеется целевая функция, зависящая от действия агента и значения неопределенного параметра. Взяв математическое ожидание по известному распределению, получим функцию *ожидаемой полезности* (ожидаемой с точки зрения математического ожидания) $w(y) = \int_{\Omega} f(y,\theta)p(\theta)d\theta$.

Теперь, устранив неопределенность взятием математического ожидания, снова получили детерминированную модель. Можно максимизировать функцию ожидаемой полезности, зависящей только от действия, выбором этого действия.

Пример 1.2. Предположим, что в условиях примера 1.1 ограничения на объем производства отсутствуют ($y_{max} = +\infty$), а относительно будущего значения рыночной цены имеется неопределенность: $\theta \in \Omega = [\theta^-; \theta^+]$. Обозначим $\hat{\theta} \in \Omega$ – значение цены продукции предприятия, которое сложится на момент продажи.

В соответствии с принципом максимального гарантированного результата предприятие должно ориентироваться на цену θ^- (так как именно это значение минимизирует его целевую функцию $f(y) = \theta\, y - y^2 / 2\, r$). Выбирая действие $y^г = \theta^-\, r$, предприятие получит прибыль $f^г = r\, \theta^- (\hat{\theta} - \theta^- / 2)$.

Действуя в соответствии с критерием оптимизма, предприятие буде рассчитывать на максимальную цену, выберет действие $y^0 = \theta^+\, r$ и получит прибыль $f^o = r\, \theta^+ (\hat{\theta} - \theta^+ / 2)$.

Если бы предприятию априори была известна рыночная цена $\hat{\theta}$, то есть если бы неопределенность отсутствовала, то оно бы выбрало действие $y^* = \hat{\theta}\, r$ и получило бы прибыль $f^* = r\, (\hat{\theta})^2 / 2$.

Если бы имела место вероятностная неопределенность – предприятию было бы, например, известно, что цена равномерно распределена на отрезке $[\theta^-; \theta^+]$, то, вычисляя математическое ожидание $w(y) = (\theta^- + \theta^+)\, y / 2 - y^2 / 2\, r$, оно выбрало бы действие $y^p = (\theta^- + \theta^+)\, r / 2$ и получило бы прибыль

$$f^p = [\hat{\theta} - (\theta^- + \theta^+) / 4]\, (\theta^- + \theta^+)\, r / 2.$$

Видно, что наличие неопределенности приводит к снижению прибыли предприятия по сравнению со случаем полной его информированности. Например, пусть $r = 1$, $\theta^+ = 4$, $\theta^- = 1$, $\hat{\theta} = 3$. Тогда

$$f^г = 2{,}5; f^o = 4; f^p = 4{,}375; f^* = 4{,}5. \bullet$$

Возможны и другие способы устранения неопределенности. Можно рассчитать риск – например, вероятность того, что значение целевой функции окажется меньше, чем заданное. И этот риск минимизировать, то есть использовать не первый момент распределения, а дисперсию и другие характеристики. Подходы могут быть разные, главное – устранить зависимость от неопределенного параметра, что необходимо в силу гипотезы детерминизма, которая требует, чтобы неопределенность была устранена (с учетом всей имеющейся информации!), а потом решения принимались в условиях полной информированности.

Возможна другая информация – могут быть известны значения функций принадлежности для состояний природы (нечеткая неопределенность). Соответствующие модели рассмотрены в [21], заниматься ими подробно мы не будем.

Будем усложнять ситуацию дальше. Мы начали с того, что была функция, зависящая только от действия агента, потом добавили неопределенность в виде параметра, описывающего внешнюю среду. Но агент взаимодействует с другими агентами, а значит, необходимо уметь описать это взаимодействие. Такими описаниями занимается теория игр.

1.3. Элементы теории игр

Теория игр описывает *игру* – такое взаимодействие субъектов, что выигрыш каждого из них в общем случае зависит от действий всех.

Формализуем эту ситуацию. Пусть задано множество *игроков* $N = \{1, 2, ..., n\}$. i-ый игрок выбирает действие y_i из множества своих допустимых действий $y_i \in A_i,\ i \in N$. Действия всех игроков называются *ситуацией игры*: $y = (y_1, ..., y_n)$. Целевая функция i-го игрока зависит от вектора действий всех игроков y и является отображением $f_i(y) : A' \to \Re^1$ множества, являющегося декартовым произведением множества допустимых действий всех игроков $A' = \prod_{i \in N} A_i$, в числовую ось. То есть каждой ситуации – комбинации действий игроков – соответствует некоторый выигрыш каждого из них. Совокупность $\Gamma_0 = \{N, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N}, \{A_i\}_{i \in N}\}$ множества игроков (агентов), целевых функций и допустимых множеств действий агентов называется *игрой в нормальной форме* при условии, что каждый из игроков выбирает свои действия однократно, одновременно с другими игроками и независимо (не имея возможности договариваться с ними о своих стратегиях поведения) – модель некооперативного поведения.

Рассмотрим целевую функцию i-го игрока и попробуем применить к ней гипотезу рационального поведения. Игрок рационален, i-ый игрок выбирает i-ую компоненту вектора y, и своим выбором пытается максимизировать свою целевую функцию: $f_i(y) \to \max$. Но то его действие, на котором достигается максимум его целевой функции, будет зависеть от выбора других агентов. Задача такого вида в некотором смысле бессмысленна, так как ее решением будет действие $y_i^*(y_{-i})$, зависящее от действий всех других игроков – его *оппонентов* – вектора $y_{-i} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$, который называется *обстановкой игры* для i-го игрока (агента).

Для того чтобы выбрать свое действие, агенту нужно знать, как будут себя вести остальные. Значит, нужно делать предположения о поведении остальных игроков. По аналогии с тем, как устранялась неопределенность в случае, когда решения принимал один субъект, здесь имеется множество игроков с так называемой *игровой неопределенностью*, то есть неопределенностью, порождаемой целенаправленным поведением других игроков. Каждый игрок не всегда может априори точно сказать, что сделают остальные. Рассмотрим возможные варианты.

1) Пусть i-ый игрок считает, что все остальные игроки играют против него. Это – критерий пессимизма, который соответствует тому, что есть i-ый игрок выбирает действие $y_i^{г} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{y_i \in A_i} \min\limits_{y_{-i} \in A_{-i}} f_i(y_i, y_{-i})$, где $A_{-i} = \prod\limits_{j \neq i} A_j$. Он считает, что остальные игроки, несмотря на свои собственные интересы, будут действовать против него, а уж выбором своего действия он будет максимизировать то, что зависит от него самого. Плох такой принцип принятия решений тем, что игрок забывает про то, что у остальных есть свои интересы, и, наверное, цель каждого игрока – максимизировать свою целевую функцию, а не «напакостить» оппоненту (это может быть частным случаем целевой функции, но, к счастью, не всегда в жизни так бывает).

Определенный выше вектор действий игроков называется *максиминным*, или *гарантирующим равновесием*. Это один из вариантов определения исхода игры. То есть, можно предполагать, что возможный вариант поведения игроков – выбор всеми гарантирующих стратегий, что реализует максиминное равновесие.

Но этот вариант не единственен. И основная проблема теории игр на сегодняшний день заключается в том, что не существует единой универсальной концепции *решения игры* – ее устойчивого в том или ином смысле исхода. В разных моделях используются разные предположения, которые приводят к различным концепциям равновесия. Поэтому рассмотрим некоторые другие варианты.

2) Представим себе такую ситуацию, что целевая функция i-го игрока $f_i(y)$ достигает максимума по его действию в точке, которая не зависит от действий других игроков. Это оптимальное действие, не зависящее от обстановки, называется *доминантной стратегией* агента. Формально: стратегия y_i^d будет доминантной стратегией, если какая бы обстановка не складывалась, его выигрыш будет максимальным при выборе именно доминантной стратегии:

$$\forall y_i \in A_i \ \ \forall y_{-i} \in A_{-i} \ \ f_i(y_i^d, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i}) .$$

Отметим, что в обеих частях неравенства фигурирует произвольная, но одна и та же обстановка.

Если у каждого игрока существует доминантная стратегия, то совокупность доминантных стратегий называется *равновесием в доминантных стратегиях* (РДС) $\{y_i^d\}_{i \in N}$. Это – идеальная ситуация для исследователя, описывающего математическую модель. Если существует равновесие в доминантных стратегиях, то каждый из игроков принимает решение независимо. А описывать независимое принятие решений гораздо проще. Но такая ситуация встречается очень редко.

3) Гораздо чаще существует *равновесие Нэша* (РН). Джон Нэш, американский математик, в начале 50-х годов XX века предложил следующее: устойчивым исходом взаимодействия агентов можно считать такой вектор их действий, от которого в одиночку никому не выгодно отклоняться. Это значит, что ни один из агентов, в одиночку меняя свою стратегию на другую, не может увеличить свой выигрыш при условии, что остальные своих стратегий не меняют.

Формальное определение равновесия Нэша $y^N \in A'$ таково: $\forall i \in N \ \ \forall y_i \in A_i \ \ f_i(y_i^N, y_{-i}^N) \geq f_i(y_i, y_{-i}^N)$, то есть для любого агента и для любого допустимого его действия выбор им равновесного по Нэшу действия дает ему выигрыш не меньший, чем при выборе любого другого действия при условии, что остальные игроки выбирают равновесные по Нэшу стратегии.

Пример 1.3. Рассмотрим двух агентов, представляющих подразделения некоторого предприятия. Каждый из агентов принимает решение о выборе неотрицательного объема производства. Продукция каждого из агентов продается на рынке по единичной цене. Затраты агента зависят от эффективности его производства (коэффициента r функции его затрат) и объема производства другого агента, причем чем выше объем производства оппонента, тем ниже затраты данного агента. Целевая функция i-го агента $f_i(y)$ представляет собой разность между его доходом y_i и затратами $c_i(y, r_i) = \dfrac{(y_i)^2}{2(r_i + \alpha y_{3-i})}$, $i = 1, 2$, где $\alpha \in [0; 1)$ – известная константа, отражающая степень взаимовлияния агентов.

Дифференцируя вогнутые по соответствующим переменным y_i целевые функции $f_i(y) = y - \dfrac{(y_i)^2}{2(r_i + \alpha y_{3-i})}$, $i = 1, 2$, приравнивая производные нулю и решая соответствующую систему уравнений относительно действий агентов, получаем равновесие Нэша игры агентов: $y_1^* = \dfrac{r_1 + \alpha r_2}{1 - \alpha^2}$, $y_2^* = \dfrac{r_2 + \alpha r_1}{1 - \alpha^2}$.

Видно, что с ростом степени взаимовлияния агентов их равновесные действия увеличиваются. •

Отличие между изложенными подходами заключается в том, что в определении равновесия в доминантных стратегиях фигурирует произвольная обстановка, то есть доминантная стратегия – наилучшая независимо от обстановки. А стратегия Нэша – наилучшая при «нэшевской» обстановке.

Равновесие Нэша хорошо тем, что в большинстве моделей оно существует. Недостатком его является то, что оно не всегда единственно. Представьте, если есть два равновесия, то как предсказать, в каком из них окажутся агенты? Нужны дополнительные предположения.

Кроме того, равновесие Нэша не устойчиво к отклонению двух и более игроков. По определению одному агенту не выгодно отклоняться, но это не значит, что если два агента договорились и одновременно отклонились, то они не смогут оба выиграть. То есть равновесие Нэша – существенно некооперативная концепция равновесия.

4) Помимо вышесказанного, необходимо ввести понятие точки Парето. Вектор действий агентов $y^P \in A'$, принадлежащий множеству A' допустимых векторов действий, будет *эффективным по Парето*, если для любого другого вектора действий найдется агент такой, что значение его целевой функции будет строго меньше, чем в точке Парето $\forall y \neq y^P \;\; \exists i \in N \;\; f_i(y) < f_i(y^P)$.

То есть точка Парето – такая точка, отклоняясь от которой, нельзя одновременно увеличить значения целевых функций всех игроков. Идея хороша тем, что позволяет утверждать, что если мы можем сделать лучше всем, то это надо делать. Любая разумная модель должна удовлетворять эффективности по Парето. Вопрос заключается в том, как соотносятся все вышеперечисленные стратегии с эффективностью по Парето, так как хочется, чтобы результат, соответствующий индивидуальным максимумам, был бы еще эффективным для общества в целом. Оказывается, что эффективность по Парето, к сожалению, никак не соотносится ни с одной из трех концепций решения игры, изложенных выше.

Пример 1.4. Рассмотрим хрестоматийный пример со следующими целевыми функциями. Пусть каждый игрок выбирает действия из отрезка $A_i = [0; 1]$. Выигрыш *i*-го агента – $f_i(y) = y_i + \sum_{j \neq i} (1 - y_j)$. Исследуем, существует ли в рассматриваемом примере равновесие в доминантных стратегиях или равновесие Нэша.

Из анализа целевой функции видно, что *i*-му агенту выгодно, максимизируя свою целевую функцию, выбирать максимальное значение своего действия, независимо от того, какие действия выбирают остальные агенты (производная целевой функции i-го агента по его действию строго положительна независимо от обстановки). Значит, каждый агент будет выбирать максимальное значение своего действия, то есть для него существует доминантная стратегия. Что бы не сделали остальные, он, увеличивая свое действие, выигрывает, а больше единицы он (в силу ограниченности множества его допустимых действий) выбрать не может, значит, $y_i^d = 1$.

Посчитаем выигрыш каждого агента от равновесия в доминантных стратегиях. Если все выбрали по единице, то каждый получил выигрыш, равный единице: $f_i(y^d) = 1$.

Рассчитаем вектор действий, эффективный по Парето. Это – вектор нулевых действий: $y_i^P = 0$. Если все агенты выбирают нулевые действия, выигрыш *i*-го агента равен $f_i(y^P) = n - 1$. Невозможно увеличить выигрыш одновременно всех агентов. Если мы хотим увеличить выигрыш *i*-го агента и начинаем увеличивать его действие, то тем самым уменьшаем выигрыши остальных, потому что это действие входит со знаком минус в целевые функции других агентов.

Если в рассматриваемой игре участвуют три или более агентов, то, выбирая действия, эффективные по Парето, они получают строго больше, чем выбирая доминантные стратегии, так как $n - 1 > 1$ при $n \geq 3$.

Спрашивается, будет ли точка Парето точкой равновесия Нэша (ведь любое РДС является равновесием Нэша), то есть рациональным исходом с точки зрения индивидуального поведения. Если кто-то из игроков выберет ненулевую стратегию, он выиграет. Поэтому он увеличит свое действие до единицы, остальные поступят аналогично, и все скатится к ситуации равновесия в доминантных стратегиях, которая никому не выгодна, но устойчива. •

Рассмотренный пример иллюстрирует, что устойчивость относительно индивидуальных отклонений никак не связана с эффективностью по Парето. Решить эту проблему можно следующим образом: если разыгрывается повторяющаяся игра, и игроки договариваются наказывать того, кто отклоняется от коллективного оптимума, то есть от равновесия по Парето, то оказывается, если наказание достаточно сильно, то каждый будет выбирать индивидуально устойчиво ту стратегию, которая выгодна для всех.

Существует другой вариант, как можно достичь того же. Если агенты равноправны, то можно принять решение назначить им начальника, который будет ответственен за то, чтобы они не отклонялись, не пытались локально увеличить свой выигрыш, а выбирали равновесие, эффективное по Парето. То есть функция начальника – предотвратить отклонения агентов от оптимума по Парето. В случае трансферабельной полезности можно даже рассчитать, сколько агенты могут выделить на содержание такого начальника (как разность между тем суммарным выигрышем, который они имели в точке Парето, и тем, что они в сумме имеют при равновесии в доминантных стратегиях). Подобные рассуждения являются одним из теоретико-игровых обоснований возникновения иерархий (см. [16]).

Иерархические игры. С точки зрения управления наибольший интерес представляют модели игр, в которых агенты принимают решения не одновременно, а последовательно, то есть, если имеются управляющий орган и управляемые субъекты, то сначала начальник определяет правила игры, а дальше субъекты принимают решения, исходя из этих правил. Такие игры называются иерархическими. По определению, *иерархическая игра* – игра с фиксированной последовательностью ходов.

Простейшая модель иерархической игры – игра двух лиц, в которой первый (делающий первый ход) игрок – центр (управляющий орган), второй игрок – агент (см. Рис. 1.11).

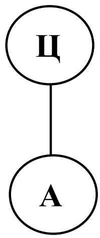


Рис. 1.11. Базовая структура «центр-агент»

Пусть целевая функция центра $\Phi(u, y)$ зависит от выбираемого им действия $u \in U$ и действия $y \in A$ агента, и целевая функция агента $f(u, y)$ зависит от тех же самых переменных. С одной стороны, если не введено условие последовательности выбора стратегий, то получается игра двух лиц в нормальной форме, тогда возможно достижение равновесия Нэша и т.п.

Предположим, что ситуация такова: центр выбрал своё действие и сообщил его агенту. Соответствующая игра называется *игрой* Γ_1 и ее исследование состоит в следующем – описать, каким образом будет вести себя агент, зная выбор центра.

Найдем множество тех действий, на которых достигается максимум целевой функции агента при фиксированном выборе центра: $P(u) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} f(u, y)$. Понятно, что это множество зависит от того выбора $u \in U$, который сделал центр. Другими словами, действие центра может интерпретироваться как «управление», так как от него зависит «состояние» агента. Если центр и агент знают целевые функции и допустимые множества друг друга, то центр может предсказать, как отреагирует агент: «если агент рационален, то в ответ на мое действие, он выберет одно из действий из множества действий, доставляющих максимум его целевой функции». Как же следует вести себя центру, чтобы побудить агента выбрать действие, нужное центру? Зная свой выигрыш $\Phi(u, y)$, который зависит от своего действия и действия агента, центр должен определить, какое действие выберет агент из известного множества $P(u)$.

Это множество может состоять из одной точки или из нескольких. Во втором случае следует ввести определенное предположение, как поведет себя агент. Типичных предположений два: критерии оптимизма и пессимизма (см. выше). Критерий оптимизма: агенту в принципе все равно (с точки зрения значений его целевой функции), какое действие из множества $P(u)$ выбирать. Центр может рассуждать так: если агенту все равно, какое действие выбирать, будем считать, что он выберет действие, которое выгодно мне. Это предположение соответствует принципу оптимизма в теории принятия решений (см. выше). Называется оно *гипотезой благожелательности*. То есть агент настроен благожелательно к центру и выбирает из множества действий, которые максимизируют его целевую функцию, то действие, которое наиболее выгодно для центра.

Если вычислить максимум функции $\Phi(u, y)$ по действию агента, то останется зависимость только от действий центра. Центр, как рациональный игрок, будет выбирать такое свое действие, которое максимизирует его целевую функцию. Значит, оптимальным «управлением» (решением иерархической игры) будет действие центра, которое доставляет максимум по множеству допустимых управлений от его выигрыша $\Phi(u, y)$, в который подставлен максимум по множеству реакций агента:

$$u^o \in \operatorname{Arg}\max_{u \in U} \max_{y \in P(u)} \Phi(u, y).$$

Пессимистический подход (принцип максимального гарантированного результата) – центр рассуждает так: агенту все равно, какое действие выбрать из множества $P(u)$, поэтому я буду ориентироваться на наихудший случай. Тогда решение следующее:

$$u_g \in \operatorname{Arg}\max_{u \in U} \min_{y \in P(u)} \Phi(u, y).$$

Т.е., центр вычисляет минимум своей целевой функции по действию агента из множества $P(u)$, а дальше максимизирует выбором своего действия.

Таким образом, мы получаем два различных решения игры. Первое определение решения игры называется *решением Штакельберга* (немецкий экономист, в 30-х годах XX века разработавший рассматриваемую модель игры). Второе решение называется решением *игры* Γ_1.

Рассмотрим теперь игру, когда центр сообщает агенту не конкретное значение управления, а то, каким будет управление в зависимости от действия агента.

Эта ситуация моделируется *игрой* Γ_2, которая имеет следующий вид: выбор центра является функцией от действия агента $u = \hat{u}(y)$. Дальнейшая логика рассуждений аналогична предыдущей: центр может предсказать, что в зависимости от той функции, которую он назначит, агент выберет действие, которое будет максимизировать его целевую функцию, в которую подставлен выбор центра: $P(\hat{u}(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} f(\hat{u}(y), y)$.

Зная это, центр может решать задачу, например, такую:

$$\min_{y \in P(\hat{u}(\cdot))} \Phi(\hat{u}(\cdot), y) \to \max_{\hat{u}(\cdot)}.$$

Данное выражение является стандартной записью простейшей *теоретико-игровой задачи управления* в организационной системе.

С содержательной точки зрения задача очень простая: есть два агента, известны их целевые функции, допустимые множества, нет никакой неопределенности.

С точки зрения математики: есть функционал, следует взять минимум этого функционала по переменной, которая принадлежит множеству, зависящему от искомой функции. Потом то, что получено, нужно максимизировать выбором этой функции.

Решение игры Γ_2 было найдено советским ученым Ю.Б. Гермейером [9], который доказал, что в случае, когда возможны побочные платежи (аддитивно входящие в целевые функции игроков), оптимальная стратегия центра состоит из двух режимов: *режима поощрения* (агент поощряется за выбор требуемых центру действий) и *режима наказания* (агент наказывается центром при выборе действий, невыгодных для последнего). Этот результат широко используется при решении задач стимулирования в организационных системах (см. главу 3).

Кроме того, можно построить игру Γ_3, в которой центр будет сообщать агенту зависимость управления от того, как в зависимости от управления будет вести себя агент. То есть стратегия агента становится функцией, а стратегия центра является функцией от этой функции (для сравнения: в игре Γ_1 имеем два скаляра, в игре Γ_2 – функцию и скаляр и т.д.).

Возможно построить игру Γ_4, где стратегия центра будет функцией от функции от функции от функции. То есть с точки зрения математики усложнять структуру выбираемых участниками действий можно до бесконечности, и можно строить игры любого сколь угодно большого порядка, только проинтерпретировать их будет сложно.

У игры Γ_3 простая интерпретация: начальник говорит подчиненному: «Я тебе выделяю ресурс, ты сообщи мне, как ты его будешь использовать в зависимости от того, сколько ресурса получишь. А в зависимости от этого, я буду его выделять».

У Γ_4 интерпретация уже сложнее. Возникает вопрос: а дает ли что-нибудь начальнику вложенность игр (рост «уровня рефлексии»). Например, выгоднее ли ему Γ_{106}, чем Γ_{1015}?

Н.С. Кукушкин доказал теорему [9], которая утверждает, что все четные игры вида Γ_{2k}, где $k = 1, 2, \ldots$, эквивалентны (с точки зрения выигрыша центра) игре Γ_2. Все нечетные игры Γ_{2k+1} эквивалентны игре Γ_3. То есть всю бесконечную совокупность иерархических игр порядка больше трех свели к двум играм – Γ_2 и Γ_3. Кроме этого, было доказано, что с точки зрения центра эффективность этих игр упорядочена следующим образом: $\Gamma_1 \le \Gamma_3 \le \Gamma_2$ [9].

Вывод из теоремы Кукушкина следующий: если центр может, то ему надо разыгрывать игру Γ_2, она для него наиболее выгодная и наиболее простая. Если не может, то игру Γ_3, если не может разыграть и ее, то – Γ_1. Играть же игры порядка 4 и выше не имеет смысла никогда!

Игры и структуры. Логичным продолжением перехода от игр в нормальной форме к иерархическим играм может быть следующее рассуждение: можно усложнять структуру дальше, но на самом деле существует единая технология описания теоретико-игровых задач управления в различных структурах.

Рассмотрим основную идею, которая позволяет видеть картину целиком и следить за логикой перехода от более простых к более сложным задачам, чтобы более сложная задача могла быть декомпозирована на более простые, и не казалась чем-то необычным.

Рассмотрим следующую картинку – см. Рис. 1.12. Одного субъекта (Рис. 1.12а) мы описывали с точки зрения гипотезы рационального поведения (ГРП), то есть агент стремится максимизировать свою функцию полезности, выбирая действие, которое доставляет максимум этой функции. Далее мы усложнили ситуацию и рассмотрели несколько субъектов на одном уровне (Рис. 1.12б). Описали это взаимодействие игрой $Г_0$ в нормальной форме. Затем была рассмотрена ситуация с двумя агентами, но взаимодействующими по вертикали (Рис. 1.12в). Описывается их взаимодействие игрой $Г_i$, где $i = 1, 2, 3$.

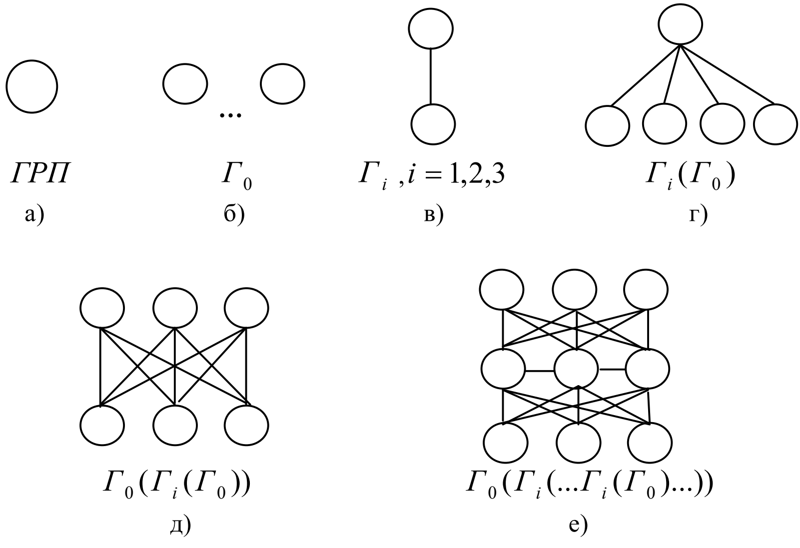


Рис. 1.12. Игры и структуры

Представим себе, что имеется структура «один начальник – несколько подчиненных» (Рис. 1.12г). Как ее можно описать? Взаимодействие агентов, находящихся на одном уровне, можно описывать игрой Γ_0. Взаимодействие «начальник-подчиненный» описывается игрой Γ_i. Тогда условно такую структуру можно представить игрой Γ_i, определенной «на игре» Γ_0. То есть это – иерархическая игра, но уже не на одном субъекте, который максимизирует свою целевую функцию, а на наборе субъектов, разыгрывающих свою игру.

Далее пусть есть несколько начальников (центров) и несколько подчиненных – агентов (Рис. 1.12д). В общем случае каждый связан с каждым. Как это можно отразить? На нижнем уровне агенты играют игру Γ_0. Над ними центры разыгрывают иерархическую игру Γ_i, но центры в свою очередь разыгрывают на своем уровне игру Γ_0. Получим игру $\Gamma_0(\Gamma_i(\Gamma_0))$.Такова конструкция: берется сложная структура и разбивается (декомпозируется) на более простые.

Можно взять более сложную структуру с более сложным взаимодействием (например, Рис. 1.12е). Это будет иерархическая игра между уровнями, на горизонтальных уровнях – обычная игра и т.д. Качественно ничего не меняется, усложняется только формальная задача, идеология описания остается та же.

1.4. Классификация задач управления организационными системами

Выше (в разделе 1.1) были выделены несколько видов управления:

Управление ОС, понимаемое как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения, может затрагивать каждый из следующих шести параметров ее модели:

1) *управление составом* [12, 16, 19, 23];

2) *управление структурой* [8, 18];

3) *институциональное управление* (управление ограничениями и нормами деятельности) [15, 23];

4) *мотивационное управление* [19, 23] (управление предпочтениями и интересами);

5) *информационное управление* (управление информацией, которой обладают участники ОС на момент принятия решений) [25, 26];

6) *управление порядком функционирования* (управление последовательностью получения информации и выбора стратегий участниками ОС) [18].

Следовательно, *первым основанием системы классификаций механизмов управления ОС* (процедур принятия управленческих решений) является *предмет управления* – изменяемый в процессе и результате управления компонент ОС. Итак, выше классификация управлений строилась на основании тех компонентов управляемой системы (точнее, ее модели), на которые оказывается воздействие при использовании управлений тех или иных типов: состав, структура, допустимые множества, целевые функции и информированность. Понятно, что изменения могут и должны касаться в общем случае всех перечисленных параметров, и поиск оптимального управления заключается в определении наиболее эффективной допустимой комбинации всех параметров ОС.

Тем не менее, традиционно в теории управления социально-экономическими системами рассматривается система вложенных задач управления (решения более «частных» задач используются при решении более «общих»). На сегодняшний день существуют два общих подхода к описанию модели ОС и постановке и решению задач управления – «снизу вверх» и «сверху вниз».

При использовании первого подхода («снизу вверх») сначала решаются частные задачи, а затем общие, использующие полученные решения частных задач. Например, частной задачей может быть разработка системы мотивации. Если она решена для любого состава участников ОС, то можно ставить задачу оптимизации состава – выбора такого состава, эффективность которого (при соответствующей оптимальной мотивации) максимальна. Достоинством такого подхода является его конструктивность, недостатком – высокая сложность, так как число вариантов решения задачи верхнего уровня может быть очень велико, а для каждого такого варианта необходимо решить соответствующий набор частных подзадач.

Бороться с этим недостатком можно, используя второй подход («сверху вниз»), в рамках которого сначала решаются задачи верхнего уровня, а полученные решения используются в качестве ограничений для решения более частных задач. Действительно, вряд ли руководитель крупной организации, создавая новый отдел, будет сначала детально продумывать регламенты взаимодействия сотрудников – скорее он возложит эту задачу на руководителя отдела, обеспечив его соответствующими ресурсами и полномочиями.

Построение эффективной системы управления организацией требует совместного использования обоих подходов как в теории, так и на практике.

Продолжим классификацию управлений организационными системами.

Расширениями *базовой модели* (см. Рис. 1.11 и Рис. 1.12в) являются:

1) *динамические ОС* (в которых участники принимают решения многократно – расширение по предмету управления «порядок функционирования»);

2) *многоэлементные ОС* (в которых имеется несколько агентов, принимающих решения одновременно и независимо, – расширение по предмету управления «состав»);

3) *многоуровневые ОС* (имеющие трех- и более уровневую иерархическую структуру – расширение по предмету управления «структура»);

4) *ОС с распределенным контролем* (в которых имеется несколько центров, осуществляющих управление одними и теми же агентами – расширение по предмету управления «структура»);

5) *ОС с неопределенностью* (в которых участники не полностью информированы о существенных параметрах – расширение по предмету управления «информированность»);

6) *ОС с ограничениями совместной деятельности* (в которых существуют глобальные ограничения на совместный выбор агентами своих действий – расширение по предмету управления «множества допустимых стратегий»);

7) *ОС с сообщением информации* (в которых одним из действий агентов является сообщение информации друг другу и/или центру – расширение по предмету управления «множества допустимых стратегий»).

Таким образом, *вторым основанием* системы классификаций может также служить основание расширения базовой модели – наличие или отсутствие:

1) динамики [22];
2) множества взаимосвязанных агентов [10, 23];
3) многоуровневости [8, 16, 18];
4) распределенного контроля [10, 24];
5) неопределенности [20, 21];
6) ограничений совместной деятельности [15, 23];
7) сообщения информации [13, 21, 29].

Третьим основанием системы классификаций является *метод моделирования*. По этому основанию можно выделить механизмы управления, основывающиеся на *оптимизационных*[15] [1, 4] и *теоретико-игровых моделях* [11].

Механизмы, основывающиеся на оптимизационных моделях, в свою очередь подразделяются на механизмы, использующие аппарат: *теории вероятностей* (в том числе теория надежности, теория массового обслуживания, теория статистических решений), *теории оптимизации* – линейное и нелинейное (а также стохастическое, целочисленное динамическое и др.) программирование, *дифференциальных уравнений, оптимального управления*; *дискретной математики* – в основном теория графов (транспортная задача, задача о назначении, выбор кратчайшего пути, календарно-сетевое планирование и управление, задачи о размещении, распределение ресурсов на сетях и т.д.).

Механизмы, основывающиеся на теоретико-игровых моделях в свою очередь подразделяются на механизмы, использующие аппарат: *некооперативных игр* [11, 19, 29], *кооперативных игр* [10], *повторяющихся игр* [22], *иерархических игр* [11, 21, 18] и *рефлексивных игр* [25, 26].

Четвертым основанием системы классификации механизмов управления ОС являются *функции управления*, реализацию которых призван обеспечить тот или иной механизм. В разделе 1.1 были перечислены четыре основных функции управления: планирование, организация, стимулирование и контроль.

Пятым основанием являются *задачи управления*, решение которых призван обеспечить тот или иной механизм управления ОС. В качестве значений признаков классификации целесообразно предложить выделенные в теории управления (хорошо исследованные как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения эффективности практического использования) механизмы [3], уже ставшие своего рода «ключевыми словами» (см. Табл. 1.2).

Отметим, что классификация, приведенная в Табл. 1.2, является достаточно условной, так как, с одной стороны, значениями признаков классификации являются подробно исследованные классы меха-

---

[15] *Суть оптимизационных моделей заключается в поиске оптимальных значений изменяемых параметров системы (то есть допустимых значений, наилучших с точки зрения заданного критерия). В теоретико-игровых моделях часть этих значений выбирают участники системы, обладающие собственными интересами, поэтому задача управления заключается в нахождении таких правил игры, в рамках которых управляемые субъекты выбирали бы требуемые значения.*

низмов управления, а, с другой стороны, один и тот же класс механизмов может использоваться для реализации нескольких различных функций управления.

Табл. 1.2. Функции и механизмы управления [27]

Функции управления	**Механизмы управления**
Планирование	механизмы распределения ресурса; механизмы активной экспертизы; механизмы внутренних цен; конкурсные механизмы; механизмы обмена.
Организация (как процесс)	механизмы смешанного финансирования; противозатратные механизмы; механизмы «затраты – эффект»; механизмы самоокупаемости; механизмы страхования; механизмы оптимизации производственного цикла; механизмы назначения.
Стимулирование	механизмы стимулирования за индивидуальные результаты; механизмы стимулирования за результаты коллективной деятельности; механизмы унифицированного стимулирования; механизмы «бригадной» оплаты труда; механизмы стимулирования в матричных структурах управления.
Контроль	механизмы комплексного оценивания; механизмы согласия; многоканальные механизмы; механизмы дополнительных соглашений.

Шестым основанием системы классификаций механизмов управления ОС служит масштаб реальных систем, для использования в которых в основном предназначен тот или иной механизм [3] (страна – регион – предприятие – структурное подразделение предприятия – первичный коллектив – индивидуум).

Седьмым основанием является отраслевая специфика (государственное управление, муниципальное управление, промышленность, строительство, сфера услуг и т.д.).

Отметим, что, с одной стороны, предложенные основания и значения признаков системы классификаций:

1) предмет управления;
2) основание расширения базовой модели;
3) метод моделирования;
4) функция управления;
5) задача управления;
6) масштаб реальных систем;
7) отраслевая специфика,

позволяют единообразно описывать как конкретные механизмы управления, так и их совокупности – комплексы механизмов управления. С другой стороны, необходимо подчеркнуть, что каждый конкретный механизм не всегда может быть однозначно отнесен к тому или иному классу – во многих случаях одни и те же механизмы могут решать различные задачи управления, использоваться в различных прикладных областях и т.д.

В последующих главах настоящей работы мы с той или иной степенью детализации рассмотрим[16] механизмы мотивационного управления (главы 3 и 4), информационного управления (глава 5) и управления структурами организационных систем (глава 6).

Задачи и упражнения к главе 1[17]

1.1 («Фермеры на общем поле»). Имеются n игроков ($N = \{1,\ldots,n\}$) с целевыми функциями $f_i(x) = x_i(nX - \sum_{j \in N} x_j)$, $x_i \in [0,+\infty)$, $i \in N$.

---

[16] *Таким образом, вне содержания настоящей работы остались механизмы институционального управления и механизмы управления составом организационных систем. Ознакомиться с ними заинтересованный читатель может в работах, соответствующие ссылки на которые приведены выше.*

[17] *Ссылки на литературу в тексте упражнения/задачи указывают работы, в которых можно найти ответ на соответствующий вопрос или решение соответствующей задач, или дополнительную информацию. Звездочкой помечены задачи повышенной трудности.*

1.1.1. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях для $n = 2$.

1.1.2. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях при произвольном числе игроков.

1.1.3. Найдите все оптимальные по Парето исходы для $n = 2$.

Подсказка: множество оптимальных по Парето исходов совпадает со множеством точек, на которых достигает максимума функция $\alpha\, f_1(x_1, x_2) + (1 - \alpha) f_2(x_1, x_2)$ *при различных* $\alpha \in [0; 1]$.

1.1.4. Найдите все оптимальные по Парето исходы для произвольного числа игроков.

1.1.5. Сравните суммарный выигрыш игроков в равновесии Нэша с суммарным их выигрышем в оптимальной по Парето точке.

1.1.6*. Найдите предел равновесных стратегий игроков с ростом *n*, предел их выигрышей, суммарного выигрыша и суммарного оптимального по Парето выигрыша.

На данном примере можно проиллюстрировать применение гипотезы слабого влияния (см. ниже).

1.1.7*. Докажите, что для произвольной игры множество оптимальных по Парето исходов совпадает с множеством точек, на которых достигает максимума функция $\sum_{i \in N} \alpha_i f_i(x)$ при различных $\alpha_i \in [0; 1]$ таких, что $\sum_{i \in N} \alpha_i = 1$.

Подсказка: воспользуйтесь определением оптимальности по Парето.

1.1.8*. Есть ли в рассматриваемой игре равновесия Нэша в смешанных стратегиях для $n = 2$?

Подсказка: воспользуйтесь линейностью целевой функции игрока по стратегиям противника и вогнутостью по своей стратегии.

1.2. Задана игра *n* лиц с целевыми функциями $f_i(x) = \alpha x_i - \beta \sum_{j \in N} x_j$ и стратегиями $x_i \in [0,1]$.

1.2.1. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях.

1.2.2. Найдите все равновесия в доминантных стратегиях.

1.2.3. Найдите все оптимальные по Парето ситуации.

1.2.4. При каких значениях параметров α и β равновесие Нэша оптимально по Парето?

1.3. Задана игра двух лиц в нормальной форме с функциями выигрыша игроков

$$f_1(x_1,x_2)=\begin{cases}2-x_1, \text{при } x_1+x_2\ge 0.8\\ 0 \quad \text{при } x_1+x_2<0.8\end{cases},\ x_1\in[0;1];$$

$$f_2(x_1,x_2)=\begin{cases}2-x_2, \text{при } x_1+x_2\ge 0.8\\ 0 \quad \text{при } x_1+x_2<0.8\end{cases},\ x_2\in[0;1].$$

Удалите доминируемые стратегии. Постройте множество недоминируемых по Парето исходов. Найдите равновесие в доминантных стратегиях (или показать, что оно отсутствует).

1.4 («Ящик Эджворта»). Два игрока могут обмениваться одним из двух видов ресурса. Начальное количество ресурсов у первого игрока $x_1^0=1$, $x_2^0=0$, у второго: $y_1^0=0$, $y_2^0=1$. Полезность первого игрока от обладания ресурсами: $f_1(x_1,x_2)=x_1(x_2+0.1)$, второго: $f_2(y_1,y_2)=(y_1+0.1)\ y_2$.

1.4.1. Найдите переговорное множество и контрактную кривую (множество оптимальных по Парето исходов обмена – *см. раздел 4.6*).

1.4.2. Найдите *равновесие Вальраса* данной игры (точка, в которой прямая цен касается одновременно линий уровня функций полезностей обоих игроков).

1.4.3. Найдите множество равновесий Нэша игры, в которой оба игрока одновременно называют объемы товаров для обмена, после чего сделка совершается при условии, что заявки совпали.

1.4.4. Найдите равновесия Штакельберга для игры, в которой сначала первый игрок предлагает объемы товаров для обмена, а второй игрок может или согласиться, или не согласиться на это предложение (в случае отказа обмен не происходит).

1.4.5. Найдите равновесия Штакельберга для игры, в которой сначала первый игрок заявляет цену, а второй игрок – объем первого товара для обмена по этой цене.

1.4.6*. Придумайте для данной постановки задачи игру, равновесие Нэша которой было бы единственно и совпадало бы с равновесием Вальраса (см. задачу 1.4.2).

1.5. Для игры в нормальной форме с матрицей

$$\begin{array}{cc} ({}_1\backslash{}^2) & \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (7;1) & (0;0) \\ (4;4) & (1;5) \end{pmatrix} \end{array}$$

найдите все равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

1.6. Для игры в нормальной форме с функциями выигрыша

$$f_1 = (x_1 + x_2)^2,\ x_1 \in [-1;\ 1],$$

$$f_2 = -(x_2 - x_1)^2,\ x_2 \in [-1;\ 1],$$

найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях.

1.7*. Для задачи 1.6 приведите пример равновесия Нэша в смешанных стратегиях (не совпадающего с ранее найденными).

1.8*. Для игры типа Г$_2$ с $f_1 = -(x_1 - 5)(x_2 - 5)$, $X_1^0 = [0;10]$, $f_2 = (x_1 - 5)(x_2 - 5)$, $X_2^0 = [0;10]$, постройте стратегию наказания $x_1^н(x_2)$, найдите L_2 и постройте множество D [11].

1.9*. Для игры типа Г$_2$ с $f_1 = x_2 - x_1$, $X_1^0 = [0;10]$, $f_2 = (x_1 - 5)(x_2 - 5)$, $X_2^0 = [0;10]$, найдите значение K и множество стратегий $x_1^{\varepsilon}(x_2)$, гарантирующих первому игроку выигрыш, не менее $K - \varepsilon$ [11].

1.10*. Для игры типа Г$_2$ с $f_1 = x_2 - x_1$, $X_1^0 = [0;10]$, $f_2 = (x_1 - 5)(x_2 - 5)$, $X_2^0 = [0;10]$ найдите значение M и постройте «стратегию наилучшего ответа» $x_1^{a\varepsilon}(x_2)$ [11].

1.11*. Приведите определения следующих понятий и содержательные примеры: организация, организационная система, механизм функционирования, механизм управления, моделирование, деятельность, мотив, цель, технология, управление, входо-выходная модель, эффективность управления, виды управления, типы управления, функции управления, методы управления, формы управления, технология управления, гипотеза рационального поведения, гипотеза детерминизма, гипотеза благожелательности, игра, обстановка игры, принцип максимального гарантированного результата, равновесие в доминантных стратегиях, равновесие Нэша, эффективность по Парето, иерархическая игра, равновесие Штакельберга, динамическая организационная система, многоэлементная организационная система, многоуровневая организационная система (*см. также глоссарий в* [27]).

Литература к главе 1

1. *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001.

2. *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997.
3. *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: Синтег, 1999. – 128 с.
4. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1972.
5. *Васильев Д.К., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А., Цветков А.В. Типовые решения в управлении проектами. – М.: ИПУ РАН, 2003.
6. Волкова В.Н., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа. Изд. 2-е. – СПб.: СПб.ГТУ, 1999.
7. *Воронин А.А., Губко М.В., Мишин С.П., Новиков Д.А. Математические модели организаций. – М.: Ленанд, 2008.
8. *Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ РАН, 2003.
9. *Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.
10. *Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. – М.: ИПУ РАН, 2003.
11. *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.
12. *Караваев А.П. Модели и методы управления составом активных систем. – М.: ИПУ РАН, 2003.
13. *Коргин Н.А. Механизмы обмена в активных системах. – М.: ИПУ РАН, 2003.
14. *Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. – М.: Синтег, 2007.
15. *Новиков Д.А. Институциональное управление организационными системами. – М.: ИПУ РАН, 2003.
16. *Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
17. *Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. – М.: ИПУ РАН, 1998.
18. *Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003.
19. *Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003.
20. *Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998.
21. *Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. – М.: Синтег, 1999.

22. *Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. – М.: ИПУ РАН, 2002.
23. *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. – М.: Апостроф, 2000.
24. *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. – М.: ИПУ РАН, 2001.
25. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз. – М.: ИПУ РАН, 2002.
26. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003.
27. *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: Физматлит, 2007.
28. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989.
29. *Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. – М.: ИПУ РАН, 2001.
30. Словарь иностранных слов. – М.: Русский язык, 1982.
31. Словарь русского языка С.И. Ожегова. М.: Русский язык, 1988.
32. Философский энциклопедический словарь. – М.: Сов. Энциклопедия, 1983.
33. *Цветков А.В. Стимулирование в управлении проектами. – М.: Апостроф, 2001.

ГЛАВА 2. Примеры построения механизмов управления организационными системами

В настоящей главе рассматривается ряд простых механизмов управления, даются оценки их эффективности, приводятся примеры эффективных механизмов.

2.1. Механизмы планирования

Распределение корпоративных заказов [1, 3]. Рассмотрим корпорацию, в которую входят n предприятий (Пр). Простейшая структура корпорации приведена на рисунке 2.1.

Органом управления корпорации является корпоративный центр (КЦ). В его функции входит установление корпоративных механизмов, разработка стратегии развития корпорации, распределение корпоративных заказов, распределение корпоративных финансов и т.д.

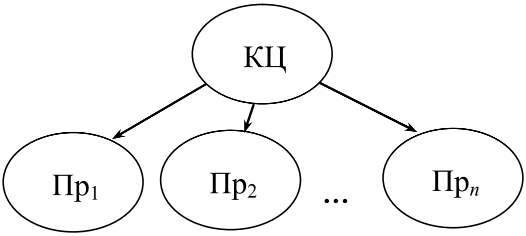


Рис. 2.1. Структура корпорации

Рассмотрим задачу планирования – распределения корпоративных заказов. Пусть корпорация получила заказ на производство продукции в количестве R единиц по договорной цене C. Продукция может производиться на каждом предприятии (такое объединение предприятий называется *горизонтальной интеграцией*). Задача планирования заключается в распределении заказа между предприятиями, так чтобы прибыль корпорации была максимальной. Обозначим x_i – величину заказа, полученную i-ым предприятием, $\varphi_i(x_i)$ – функция производственных издержек z_i. Для исследования свойств механизмов управления во многих случаях конкретный вид функции производственных издержек не имеет большого значения. Поэтому возьмем ее в простейшем виде (см. также модель в разделе 4.4):

(2.1) $\varphi_i(x_i) = x_i^2 \ / \ 2\, r_i,\ i = \overline{1,n}$.

где r_i – параметр, определяющий эффективность производства i-го предприятия. Эта функция удовлетворяет требованиям, обычно предъявляемым к функциям производственных издержек (возрастающая, выпуклая функция объемов производства). Прибыль (выигрыш, значение целевой функции) i-го предприятия составит:

(2.2) $f_i = C\, x_i - x_i^2 \ / \ 2\, r_i,\ i = \overline{1,n}$,

а суммарная прибыль корпорации:

(2.3) $\Phi = \sum_{i=1}^{n} f_i \ = C\, R - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2 r_i}$,

поскольку

(2.4) $\sum_{i=1}^{n} x_i \ = R$.

Так как договорная цена C и величина заказа R заданы, то задача максимизации прибыли корпорации сводится к задаче минимизации суммарных издержек:

(2.5) $Z = \sum_{i=1}^{n} z_i \ = \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2 r_i}$,

при ограничении (2.4).

Оптимальное решение этой задачи:

(2.6) $x_i^0 = \frac{r_i}{H} R,\ i = \overline{1,n}$,

где $H = \sum_{i=1}^{n} r_i$. То есть, заказ нужно распределять прямо пропорционально коэффициентам эффективности производства.

Проблема, однако, в том, что КЦ не знает точных значений $\{r_i\}$, а знает только область $[d; D]$ возможных значений. Необходимо устранить эту неопределенность. Простейший способ – это запросить информацию о коэффициентах эффективности у предприятий (предполагаем, что предприятия знают точные оценки своих коэффициентов эффективности). Такой способ получения информации называется *встречным*. Обозначим оценку коэффициента r_i, сообщаемую i-ым предприятием в КЦ через s_i. Эта оценка используется в законе планирования (2.6), то есть:

(2.7) $x_i = \frac{s_i}{S} R,\ i = \overline{1, n}$,

где $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$. Возникает вопрос, какую оценку s_i сообщает каждое предприятие, максимизируя собственную прибыль:

(2.8) $f_i = C\, x_i - x_i^2 \,/\, 2\, r_i = C\, \frac{s_i}{S} R - \frac{1}{2r_i} (\frac{s_i}{S})^2 R^2,\ i = \overline{1, n}$.

Определим план V_i, обеспечивающий максимальную прибыль предприятия (его легко найти, дифференцируя выражение (2.2)):

(2.9) $V_i = C\, r_i,\ i = \overline{1, n}$.

Пусть $\sum_{i=1}^{n} V_i = C\, H > R$, то есть сумма выгодных планов превышает величину заказа R. Если каждое предприятие сообщает истинную оценку $s_i = r_i$, то:

$$x_i = r_i\, R \,/\, H < C\, r_i = V_i,\ i = \overline{1, n},$$

то есть каждое предприятие получает план меньше оптимального.

Естественно, что в этом случае возникает тенденция завышения сообщаемых оценок. Если $C\, H >> R$, то в ситуации равновесия Нэша каждое предприятие сообщает максимальную оценку $s_i = D$, что приводит к: $x_i = R \,/\, n$, то есть заказ делится поровну между всеми предприятиями. Прибыль корпорации при этом равна:

$$\Phi = C\, R - \sum_{i=1}^{n} \frac{R^2}{2 r_i n^2}$$

и может быть существенно меньше, чем прибыль $\Phi_{\max}$ при оптимальном плане.

<u>Пример 2.1.</u> Пусть $n = 2$, $r_1 = 3$, $r_2 = 7$, $d = 3$, $D = 7$, $R = 100$, $C = 20$. Ищем оптимальный план и прибыль: $x_1^0 = 30$, $x_2^0 = 70$, $\Phi_{\max} = 1500$.

В ситуации равновесия Нэша: $s_1^* = s_2^* = 7$, $x_1 = x_2 = 50$. Прибыль корпорации: $\Phi \approx 1400$, то есть потери составили примерно 7 %. •

Как повысить эффективность планирования? Введем *внутреннюю* (*корпоративную, трансфертную*) *цену продукции*. Это цена, по которой КЦ как бы покупает продукцию у предприятий. Обозначим ее через λ. Внутренняя прибыль предприятия, равная

(2.10) $\pi_i = \lambda\, x_i - x_i^2 \,/\, 2\, r_i,\ i = \overline{1, n}$,
достигает максимума при плане
(2.11) $x_i = \lambda\, r_i,\ i = \overline{1, n}$.

Выберем λ, так чтобы сумма выгодных (при цене λ) планов равнялась величине заказа, то есть, из условия $\sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda\, H = R$ найдем $\lambda = R \,/\, H$.

Поскольку величина H корпоративному центру не известна, то возьмем вместо H сумму оценок S, то есть примем:
(2.12) $\lambda = R \,/\, S$.

Заметим, что внутренняя прибыль это не реальные деньги, а некоторый управленческий показатель. Поэтому реально полученную прибыль будем распределять прямо пропорционально внутренним прибылям:

(2.13) $$f_i = \frac{\pi_i}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} \Phi_0,$$

где Φ_0 – реальная прибыль корпорации. Выражения (2.11)-(2.13) определяют новый механизм планирования, который отличается от прежнего введением внутренней цены и распределением реальной прибыли прямо пропорционально внутренним прибылям.

Для оценки эффективности этого механизма подставим (2.11) и (2.12) в (2.10), а затем в (2.13):

(2.14) $$\frac{\lambda^2 (s_i - \frac{s_i^2}{2r_i})}{\sum_{j=1}^{n} \lambda^2 (s_j - \frac{s_j^2}{2r_j})} = \frac{\delta_i}{\sum_{j=1}^{n} \delta_{\mathrm{j}}} \Phi_0,$$

где $\delta_i = s_i (1 - \frac{s_i^2}{2r_i})$, $i = \overline{1, n}$.

Заметим, что (2.14) является возрастающей функцией δ_i. Поэтому максимум f_i достигается при максимуме δ_i. Максимум δ_i достигается при $s_i = r_i$, то есть при сообщении каждым предприятием достоверной оценки коэффициента эффективности. Таким образом, рассмотренный механизм является механизмом открытого управления (см. главу 4), то есть механизмом, в котором всем агентам выгодно сообщать достоверную информацию. Единственным недостатком механизма является перераспределение прибыли, которое может вызвать недовольство предприятий, у которых часть прибыли передают другим предприятиям. Однако в случае рассматриваемых функций производственных издержек никакого перераспределения прибыли не происходит. Действительно прибыль, полученная i-ым предприятием, равна $C\,x_i - x_i^2\ /\ 2\,r_i = \frac{r_i}{H}(CR - \frac{R^2}{2H})$. Прибыль, полученная после перераспределения, составит:

$$\frac{\delta_i}{\sum_{j=1}^{n}\delta_{\mathrm{j}}}(CR - \frac{R^2}{2H}) = \frac{r_i}{H}(CR - \frac{R^2}{2H}).$$

то есть, это – та же самая величина.

Подведем итоги. Предложенный механизм планирования имеет три замечательных свойства:

1) каждое предприятие сообщает достоверную информацию о функции производственных издержек. Другими словами, сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого предприятия;

2) корпоративный центр определяет оптимальные планы распределения заказа;

3) перераспределение прибыли отсутствует.

2.2. Механизмы налогообложения и ценообразования

Налоговые механизмы [2, 3] определяют долю прибыли (дохода, выручки), отдаваемую предприятием в виде налога. Эта доля называется *налоговой ставкой*. Простейшим механизмом является *налоговый механизм с постоянной налоговой ставкой*. Обозначим B – выручка, Z – затраты, Φ – прибыль, H – налог, α – ставка налога. Налог равен:

(2.15) $H = \alpha\ \Phi = \alpha\ (B - Z)$.

Налоговый механизм с постоянной налоговой ставкой стимулирует производителей производить подешевле, а продавать подороже (принцип «*дешево – дорого*»). В случае монопольного производителя это приводит к завышению цены продукции.

Для борьбы с этим явлением введем ограничения на рентабельность продукции. Если рентабельность превышает установленный предельный уровень P_0, то вся сверхприбыль изымается и к тому же производитель штрафуется за превышение предельной рентабельности. Очевидно, что в этом случае оптимальная стратегия предприятия состоит в работе с рентабельностью равной предельному уровню и продаже по максимальной цене. Требуемый уровень рентабельности обеспечивается за счет завышения затрат. Требуемый уровень затрат определяется из уравнения:

(2.16) $P_0 = (V - Z) / Z$,

где V – выручка от продажи по максимальной цене. Получаем:

(2.17) $Z = V (1 + P_0)$.

Таким образом, описанный механизм налогообложения стимулирует предприятие продавать подороже и производить, соответственно, подороже (принцип «*дорого-дорого*»). Какой из двух механизмов лучше – вопрос сложный. Первый стимулирует снижение издержек, и это плюс. Однако, при этом, растут сверхприбыли предприятий (особенно, монополистов), что приводит к инфляции, резкой разнице в доходах, и это минус. Второй механизм позволяет балансировать доходы и расходы, уменьшает различие между «богатыми» и «бедными», и это плюс. Однако экономика становится неэффективной (затратной) и это минус. Безусловно, обществу больше всего подошли бы механизмы налогообложения, действующие по принципу («*дешево-дешево*»), то есть стимулирующие предприятия дешево производить продукцию и дешево ее продавать. Такие механизмы были разработаны в Институте проблем управления РАН (*противозатратные механизмы налогообложения*). Идея в том, чтобы предельный уровень рентабельности сделать не постоянным, а зависящим от показателя *эффективности производства*, определяемого как отношение эффекта l к себестоимости C:

(2.18) $Э = l / C$.

На понятии *эффекта продукции* остановимся подробно. Эффект измеряет потребительную стоимость произведенной продукции. Под эффектом в нашем случае будем понимать величину выручки, определенную по лимитной цене l (максимальной цене, при которой продукция может быть реализована).

Очевидно, что с ростом эффективности норматив рентабельности ρ должен увеличиваться. Однако этого мало. Для того чтобы механизм ценообразования был противозатратным, необходимо, чтобы прибыль на единицу продукции $\pi = \rho(Э)\ C$ была убывающей функцией затрат (чем меньше затраты, тем больше прибыли). С другой стороны, цена $Ц = (1 + \rho)\,C$ должна быть возрастающей функцией затрат (чем меньше затраты, тем меньше цена). Из первого условия получаем:

$$\frac{d\pi}{dC} = \frac{d}{dC}\left[\rho\left(\frac{l}{C}\right)C\right] = \rho(Э) - Э\,\frac{d\rho(Э)}{dЭ} < 0,$$

а из второго:

$$\frac{dЦ}{dC} = \frac{d}{dC}\left[1 + \rho\left(\frac{l}{C}\right)C\right] = 1 + \rho(Э) - Э\,\frac{d\rho(Э)}{dЭ} > 0.$$

Оба эти неравенства можно записать в следующем виде:

(2.19) $0 < Э\,\dfrac{d\rho(Э)}{dЭ} - \rho(Э) < 1.$

Если обозначить $Э\,\dfrac{d\rho(Э)}{dЭ} - \rho(Э)$ через $h(Э)$, то неравенства (2.19) можно записать в форме дифференциального уравнения:

(2.20) $Э\,\dfrac{d\rho(Э)}{dЭ} - \rho(Э) = h(Э),$

где $h(Э)$ – произвольная функция, принимающая значения в интервале (0; 1). Данное дифференциальное уравнение легко решается. Для этого перейдем к другой функции: $u(Э) = \rho(Э) / Э$, $\rho(Э) = Э\,u(Э)$, $\dfrac{d\rho(Э)}{dЭ} = u(Э) + Э\,\dfrac{du(Э)}{dЭ}$. Подставляя в (2.20), получаем:

$$\frac{du(Э)}{dЭ} = h(Э) / Э^2,\ u(Э) = \int_1^Э \frac{h(y)}{y^2}\,dy.$$

Здесь используется условие $\rho(1) = 0$. Содержательно это означает, что продукт, для которого эффект равен затратам, не дает прибыли. Таким образом, получаем общий вид зависимости $\rho(Э)$, обеспечивающий противозатратность (по прибыли) механизма ценообразования: $\rho(Э) = Э \displaystyle\int_1^Э \frac{h(y)}{y^2}\,dy$.

Пример 2.2. Пусть $h(Э) = k$, $0 < k < 1$. В этом простейшем случае имеем: $\rho(Э) = Э \int_1^Э \frac{k}{y^2} dy = k\,(Э - 1)$. Цена будет определяться выражением: $Ц = [1 + k\,(Э - 1)]\,C + k\,l$, а прибыль: $\pi = Ц - C = k\,(l - C)$.

Легко видеть, что с уменьшением C цена также уменьшается, в то время как прибыль увеличивается. Заметим, что разность $(l - C)$ определяет «чистую» прибыль. Часть k этой прибыли выделяется предприятию как его прибыль, а остальная часть должна обеспечивать рост прибыли потребителя. Выбор зависимости $h(Э)$ производится из следующих соображений. Так как $\frac{d\pi}{dC} = h(Э)$, а $\frac{dЦ}{dC} = 1 - h(Э)$, то чем ближе $h(Э)$ к нулю, тем сильнее влияние уменьшения затрат на снижение цены и тем слабее влияние уменьшения затрат на рост прибыли. Наоборот, чем ближе $h(Э)$ к единице, тем слабее влияние уменьшения затрат на снижение цены, но тем сильнее влияние уменьшения затрат на рост прибыли предприятия. Чтобы обе тенденции были одинаково сильны, следует брать $h(Э) = 1/2$. •

Возможна другая стратегия – при больших затратах (малой эффективности) естественно в первую очередь стимулировать предприятие к снижению затрат, для чего целесообразно $h(Э)$ брать ближе к единице. Наоборот, при большой эффективности естественно стимулировать снижение цен, для чего $h(Э)$ следует брать ближе к нулю. Таким требованиям удовлетворяет, например зависимость $h(Э) = 1 / Э$. В этом случае:

$$\rho(Э) = Э \int_1^Э \frac{dy}{y^3} = (Э - 1/Э) / 2,$$

$$Ц = [1 + (Э - 1/Э) / 2]\,C = C + (l - C^2 / l) / 2,$$

$$\pi = (l - C^2 / l) / 2.$$

Описанный принцип создания противозатратных механизмов налогообложения можно применить и для *механизмов ценообразования*. Действительно, если взять формулу цены в виде $Ц = C\,(1 + \rho(Э))$, где $Э = l / C$, l – лимитная цена, C – себестоимость, а $\rho(Э)$ удовлетворяет условиям противозатратности (2.19), то с уменьшением себестоимости прибыль будет увеличиваться, а цена уменьшаться.

2.3. Многоканальные механизмы

В *автоматизированных системах управления* технологическими процессами (АСУ ТП) широко применяются так называемые «*советчики оператора*» [1, 3]. По сути дела, это – компьютерная программа, которая моделирует технологический процесс и после определенного периода обучения дает советы оператору по управлению процессом. На практике эффективность таких пассивных советчиков оказалась невысокой. Дело в том, что в период обучения советы компьютерной программы были не всегда хорошими, и опытный оператор переставал их воспринимать, хотя со временем управление, предлагаемое «советчиком» в штатных ситуациях, часто было лучше, чем управление оператора. Необходимо было предложить механизм, побуждающий оператора прислушиваться к рекомендациям «советчика». Были разработаны так называемые пересчетные модели, которые могли предсказать по результатам выход процесса: что было бы, если бы оператор принял рекомендации «советчика». Если рекомендации «советчика» приводили к лучшему результату, то оператор штрафовался, а если управление оператора было лучше чем рекомендации «советчика», то оператор премировался. Фактически было организовано соревнование между оператором и советчиком оператора. При внедрении таких «активных советчиков оператора» ситуация изменилась. Оператор стал во многих случаях следовать рекомендациям модели, особенно в штатных ситуациях. Внедрение таких двухканальных механизмов в черной металлургии дало значительный экономический эффект (эти работы были удостоены Государственной премии).

Описанный двухканальный механизм можно обобщить в различных направлениях. Во-первых, можно использовать не один советующий канал, а несколько (многоканальные механизмы), например, используя различные модели и методы моделирования. Во-вторых, такие активные советчики можно применять не только при управлении технологическими системами, но и в управлении социально-экономическими системами (советчик генерального директора, советчик министра и возможно даже Президента).

2.4. Механизмы стимулирования снижения издержек

Рассмотрим предприятие, состоящее из n подразделений. Поставим задачу разработки плана снижения издержек на определенную величину R [1, 6]. Обозначим x_i – план снижения издержек для i-го подразделения. Снижение издержек требует затрат на проведение соответствующих мероприятий. Обозначим через:

(2.21) $Z_i = \varphi_i(x_i)$,

затраты i-го подразделения на проведение мероприятий по снижению издержек на величину x_i.

Примем, что:

(2.22) $\varphi_i(x_i) = x_i^2 / 2\, r_i,\ i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим следующий механизм стимулирования снижения издержек (который очень похож на механизм распределения заказов в корпорации – см. раздел 2.1). Подразделение получает средства h_i из централизованного фонда прямо пропорционально величине издержек x_i, то есть:

(2.23) $h_i = \lambda\, x_i\ i = \overline{1, n}$,

где λ – норматив, общий для всех подразделений.

Формирование плана снижения издержек происходит на основе сообщаемых подразделениями оценок функций затрат. Примем, что каждое подразделение сообщает оценку s_i коэффициента r_i функции затрат (2.22). План $x = \{x_i\}$ определяется по формуле:

(2.24) $x_i = \dfrac{s_i}{S} R,\ i = \overline{1, n}$,

где $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$, а норматив λ равен:

(2.25) $\lambda = R / S$.

Проведем исследование описанного механизма. В качестве целевых функций подразделений примем разность средств, полученных из централизованного фонда, и затрат на проведение мероприятий по снижению издержек:

(2.26) $f_i = h_i - Z_i = \lambda\, x_i - x_i^2 / 2\, r_i,\ i = \overline{1, n}$.

Подставляя в (2.26) выражения (2.24) и (2.25), получаем:

(2.27) $f_i = \lambda^2 s_i (1 - \dfrac{s_i}{2r_i}) = (R / S)^2 s_i (1 - \dfrac{s_i}{2r_i}),\ i = \overline{1, n}$.

Заметим, что при достаточно большом числе подразделений влияние оценки s_i отдельного подразделения на норматив λ сравнительно мaло́. Поэтому достаточно обоснованным представляется предложение о том, что при сообщении оценки s_i предприятие не учитывает этого влияния (так называемая *гипотеза слабого влияния*). В этом случае максимум целевой функции (2.27) достигается при сообщении оценки: $s_i = r_i$, $i = \overline{1,n}$, то есть при сообщении достоверной информации о функции производственных издержек.

Если в корпорации имеется предприятие с относительно большой величиной коэффициента r_i, то для этого предприятия гипотеза слабого влияния уже не имеет места. Пусть это предприятие с номером 1, $r_1 > H - r_1$, то есть $r_1 > H / 2$. Для остальных предприятий гипотеза слабого влияния является достаточно обоснованной, и поэтому $s_i = r_i$, $i \neq 1$. Обозначим $H_1 = H - r_1$.

Для первого предприятия имеем: $f_1 = \left(\dfrac{R}{s_1 + H_1}\right)^2 (1 - \dfrac{s_1}{2r_1})\, s_1$.

Максимизируя по s_1, получаем:

(2.28) $s_1 = \dfrac{H_1\, r_1}{H_1 + r_1}$.

Если $r_1 >> H_1$, то есть первое предприятие является фактически монопольным предприятием в области снижения издержек, то $s_1 \approx H_1$, то есть монопольное предприятие сообщает оценку s_1 равную сумме коэффициентов r_i остальных предприятий.

Задачи и упражнения к главе 2

2.1. Докажите, что отмеченные в конце раздела 2.1 (см. также раздел 4.4) три свойства механизма планирования имеют место для любых функций производственных издержек типа Кобба-Дугласа:

$$z_i = \frac{1}{\gamma} x_i^{\gamma} r_i^{1-\gamma},\ i = \overline{1,n},\ \gamma > 1.$$

2.2. Оцените относительное увеличение суммарных затрат корпорации в условиях «уравниловки» (заказ делится поровну между всеми предприятиями).

2.3. Для механизма ценообразования $Ц = \sqrt{\ell c}$ определите *область противозатратности* (множество значений эффективности, для которых выполняется условие (2.19)).

2.4. Минимальная себестоимость продукции равна $c_{\min} = 100$, лимитная цена $l = 1000$, механизм ценообразования:

$$Ц = c + 0{,}2(1000 - c).$$

Определите оптимальную для предприятия цену.

2.5. Для модели раздела 2.4 оцените степень искажения данных для случая *n* одинаковых предприятий, если гипотеза слабого влияния не имеет места.

Литература к главе 2

1. *Бурков В.Н, Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977.
2. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981.
3. *Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы. Моделирование организационных механизмов. – М.: Наука, 1989.
4. Бурков В.Н., Ириков В.А. Модели и методы управления организационными системами. – М.: Наука, 1994.
5. *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997.
6. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять организациями. – М.: Синтег, 2004.

ГЛАВА 3. Механизмы стимулирования в организационных системах

В первой главе были выделены несколько видов управления – управление составом системы, ее структурой, институциональное, мотивационное и информационное управление. Наиболее подробно исследованным на сегодняшний день является мотивационное управление – управление интересами и предпочтениями участников ОС – поэтому начнем с рассмотрения моделей именно этого вида управления.

3.1. Постановка задачи стимулирования

Содержательная интерпретация мотивационного управления – *задача стимулирования*. Несмотря на то, что под мотивацией в общем случае понимается и материальная, и моральная сторона: поощрения, побуждения и т.д., к сожалению, формальных моделей того, как человек реагирует на моральное вознаграждение, на сегодняшний день почти нет. А математическая модель желательна для того, чтобы предсказывать поведение человека как реакцию на вознаграждение. Зато имеется модель материального воздействия. Можно строить аналогично и модели морального стимулирования. Но, если при построении модели материального стимулирования мы вводим вполне реальные предположения (например, предприятие стремится максимизировать прибыль), то при построении моделей морального стимулирования мы должны говорить, предположим, что на такие-то стимулы субъект будет реагировать так-то, а на такие-то – так-то. Это предположение обосновать уже сложно. Модели морального стимулирования более уязвимы для критики, а психология сегодня не дает нам должной основы. Поэтому будем описывать материальное стимулирование.

Рассмотрим систему, состоящую из одного центра (руководителя, начальника, заказчика) и одного агента (подчиненного, исполнителя), то есть приведенную на Рис. 1.11 (или Рис. 1.12в).

Агент выбирает действие $y \in A = R_1^+$. Содержательная интерпретация действия: отрабатываемые часы, объем выпускаемой продукции. Начальник выбирает управление, то есть зависимость вознаграждения агента от выбираемого последним действия. Эта зависимость называется *функцией стимулирования*. Модель организационной системы будем описывать по тем компонентам, которые перечислены в первой главе (состав, структура, целевые функции, допустимые множества, информированность, порядок функционирования). Состав: центр, агент. Структура двухуровневая: начальник – подчиненный (центр – агент). Центр выбирает стимулирование, агент выбирает действие. Допустимые множества: множество допустимых действий – положительная полуось: часы, штуки, килограммы и т.п. Функцию стимулирования $\sigma(y)$ будем считать неотрицательной и, когда это необходимо, дифференцируемой.

Целевая функция центра представляет собой разность между функцией дохода $H(y)$ (от деятельности подчиненного начальник получает доход (например, «продает на рынке» то, что произвел подчиненный)) и стимулированием $\sigma(y)$, которое выплачивается подчиненному:

$$\Phi(\sigma(\cdot), y) = H(y) - \sigma(y).$$

Целевая функция агента: то стимулирование, которое он получает, минус его затраты:

$$f(\sigma(\cdot), y) = \sigma(y) - c(y),$$

где $c(y)$ – функция затрат агента.

Предположим, что функция дохода неотрицательна при любом действии y и принимает максимальное значение при $y \neq 0$:

$$\forall\, y \geq 0 \;\; H(y) \geq 0,\; 0 \notin \operatorname{Arg}\max_{y \geq 0} H(y).$$

Относительно функции затрат предположим, что она неотрицательна, неубывающая и в нуле равна нулю: $\forall\, y \geq 0 \;\; c(y) \geq 0$, $c(0) = 0$. Последние два предположения не очень существенны с формальной точки зрения, но ноль – хорошая точка отсчета. Содержательная интерпретация: выбор агентом действия, равного нулю, то есть отказ от работы, соответствует нулевому объему работ. Логично взять и точку отсчета затрат, равной нулю. Проблемы идентификации задач стимулирования, например, в терминах предложения труда, подробно описаны в [1].

Сформулируем задачу управления: агент будет выбирать действия из множества тех действий, которые обеспечивают максимум его целевой функции: $P(\sigma(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{y \geq 0}\, [\sigma(y) - c(y)]$. Это – игра Γ_2 с побочными платежами (см. раздел 1.3). Реакция агента на управление – это множество тех действий, на котором достигается максимум целевой функции как разности между вознаграждением и затратами. Центр может предсказать поведение агента, следовательно, целевая функция центра зависит от действий и вознаграждения агента. Центр вычисляет минимум из всех действий агента по множеству всех действий, на которых максимальна целевая функция агента (это соответствует принципу максимального гарантированного результата), и дальше центр хочет максимизировать эту величину выбором функции стимулирования, то есть выбором зависимости вознаграждения от действий агента: $\min\limits_{y \in P(\sigma(\cdot))} \Phi(\sigma(\cdot), y) \to \max\limits_{\sigma(\cdot)}$. С формальной точки зрения даже при конкретном виде целевой функции задача получается сложная. Но можно сначала угадать решение, а потом доказать его оптимальность.

Утверждение 3.1. Предположим, что использовалась некоторая система стимулирования $\sigma(\cdot)$, такая, что при ее использовании центром агент выбирал действие $x \in P(\sigma(\cdot))$. Если взять другую систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, которая равна нулю всюду, кроме точки x, и равна старой системе стимулирования в точке x, то и при новой системе стимулирования это же действие агента будет доставлять максимум его целевой функции.

То есть, если центр использует некоторую систему стимулирования, и агент выбирает действие x, то центр говорит: «я меняю систему стимулирования и буду платить по-другому: вознаграждения не будет нигде, кроме точки x, а за эту точку я буду платить по-старому» (см. Рис. 3.1), то агент по-прежнему будет выбирать старое действие: $x \in P(\tilde{\sigma}(\cdot))$, где

$$\tilde{\sigma}(x, y) = \begin{cases} \sigma(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$$

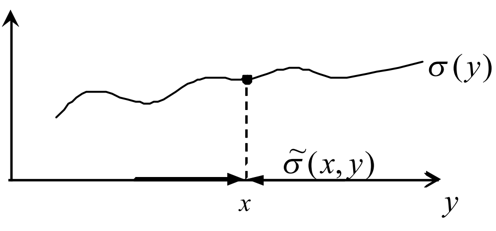


Рис. 3.1. Иллюстрация утверждения 3.1

Приведем формальное доказательство утверждения 3.1. Условие того, что выбор действия x доставляет максимум целевой функции агента при использовании системы стимулирования $\sigma(\cdot)$ можно записать в следующем виде: разность между стимулированием и затратами будет не меньше, чем при выборе любого другого действия: $\sigma(x) - c(x) \ge \sigma(y) - c(y) \;\; \forall y \in A$.

Теперь заменим систему стимулирования $\sigma(\cdot)$ системой стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, тогда получим следующее: в точке x система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$ по-прежнему равна системе стимулирования $\sigma(\cdot)$. В правой части т записана система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, которая равна нулю при $y \neq x$:

$$\sigma(x) - c(x) \ge 0 - c(y) \;\; \forall y \neq x .$$

Если выполнялась первая система неравенств, то выполняется и новая система неравенств, так как в ней ослабили правую часть – если разность между доходом и затратами составляет положительное число, то тем более она будет больше, чем ноль минус затраты. Следовательно, $x \in P(\tilde{\sigma}(\cdot))$. Таким образом, утверждение 3.1 доказано. •

С помощью утверждения 3.1 исследуем следующую ситуацию. Пусть центр использует некую систему стимулирования со сложной зависимостью вознаграждения агента от его действий. Утверждение 3.1 гласит, что центру достаточно воспользоваться классом систем стимулирования, в которых стимулирование отлично от нуля в одной точке. То есть центр может использовать систему стимулирования, которая называется *квазикомпенсаторной* и имеет следующий вид:

$$\sigma_K(x, y) = \begin{cases} \lambda, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases} .$$

Итак, для любой сложной системы стимулирования найдется компенсаторная система стимулирования, которая приведет к тому же выбору агента (то есть ничего не изменится ни для центра, ни для агента). Но ситуация существенно упростится с точки зрения сложности задачи стимулирования, и понимания агентом того, как и за что его стимулируют. Представьте, начальник говорит, что система стимулирования представляет собой «логарифм тангенса в квадрате», ни один подчиненный этого не поймет. Гораздо проще будет, если му скажут: «Давай подпишем контракт: тебе нужно выбрать такое действие, за него ты получишь вот столько, если выберешь другое, то ничего не получишь». Просто и понятно с точки зрения практики, а что это значит с точки зрения математики? Мы свели задачу поиска функции, принадлежащей множеству всех положительнозначных дифференцируемых функций, к задаче поиска двух чисел: действия x и вознаграждения λ, которое надо платить за выбор именно этого действия. Два числа найти проще, чем функцию!

Гипотеза благожелательности. Рассмотрим целевую функцию центра. Стимулирование агента входит в нее со знаком «-», то есть вознаграждение агента центр старается минимизировать (желательно чтобы подчиненный работал за минимально возможную оплату).

С точки зрения агента – наоборот. При фиксированных затратах он хотел бы получить побольше.

Но, несмотря на желание агента, имеется иерархия – решения первым принимает центр. Поэтому центр должен рассуждать так: сколько как минимум надо заплатить агенту за некое действие, чтобы он согласился его выполнить. Понятно, что центр должен «работать» на кривой затрат агента, то есть должен сказать агенту: «Ты выбираешь такое-то действие, я тебе за него компенсирую затраты. А за любое другое действие я тебе ничего не заплачу».

Компенсаторная система стимулирования принимает следующий вид: величина λ должна быть равна затратам агента, быть может, плюс еще что-то ($\delta \geq 0$). С точки зрения центра величину $\sigma(x) = c(x) + \delta$ надо сделать минимальной, то есть:

$$\sigma_K(x, y) = \begin{cases} c(x) + \delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$$

Целевая функция агента изображена на Рис. 3.2. К затратам, изображенным со знаком минус, добавляется следующая система стимулирования: в точке x центр выплачивает вознаграждение $c(x) + \delta$, а во всех остальных точках стимулирование равно нулю.

Вычитая из положительного стимулирования затраты, получаем, что целевая функция агента имеет следующий вид – жирная линия на Рис. 3.2. Она всюду равна отрицательным затратам, кроме точки x. В точке x она равна величине δ.

Определим значение $\delta \geq 0$. Оно должно быть минимальным с точки зрения центра. А дальше – ее значение зависит от того, как формулируется задача.

Если предполагается, что агент благожелательно относится к центру и готов среди двух точек, имеющих одинаковую для него предпочтительность, выбрать точку, наилучшую для центра, то достаточно положить константу δ равной нулю. Тогда, если $\delta = 0$, то точка максимума лежит на горизонтальной оси, максимум полезности агента (разности между стимулированием и затратами), равный нулю, будет достигаться в двух точках: 0 (ничего не делать) и точно такую же нулевую полезность агент получит в точке x – действии, которого хочет от него добиться центр. Во всех остальных случаях его полезность отрицательная. Множество максимумов целевой функции агентов состоит из двух точек, и, если агент благожелательно настроен к центру, то он выберет x (*гипотеза благожелательности*).

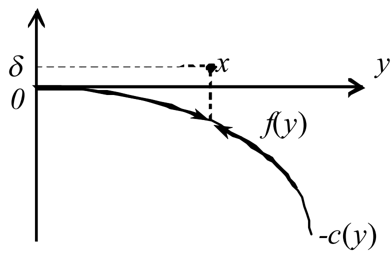


Рис. 3.2. Целевая функция агента

Если же центр не хочет рассчитывать на благожелательность агента, а хочет гарантировать, чтобы агент выбрал какое-то действие, отличное от нуля, ему достаточно положить δ, равной любому сколь угодно малому строго положительному числу, чтобы значение целевой функции агента в точке x было строго больше нуля. Другими словами, δ характеризует «различие» между принципами пессимизма и оптимизма. Различие это невелико, так как константа δ может быть выбрано сколь угодно малой.

Таким образом, мы сначала перешли от системы стимулирования общего вида к системе стимулирования, зависящей от двух скалярных параметров: точки плана – то, чего хочет центр добиться от агента, и вознаграждения агента λ. Потом нашли значение λ, равное затратам агента плюс δ. В этот параметр δ для любой задачи можно «зашить» любую «моральную» составляющую, то есть его можно интерпретировать, как *мотивационную надбавку*. С формальной точки зрения агент выбирает точку максимума своей целевой функции, но если $\delta = 0$, его полезность равна нулю независимо от того, не работает ли он вообще или выполняет план, то есть понятно, что в этом с точки зрения практики есть что-то подозрительное, так как, если не работает – получает ноль, и если работает – получает ноль. Тогда δ (мотивационная надбавка) показывает, сколько обещают человеку за то, что он работает, и работает именно в данной организации. Таким образом, все внемодельные мотивационные аспекты могут быть заложены в δ. Какая она должна быть – эта величина δ – это не математиков и экономистов, дело. Этими аспектами занимаются менеджмент и психология.

Принцип компенсации затрат. Предположим, имеется функция затрат агента $c(y)$ (см. Рис. 3.3), эта функция неотрицательна, в нуле равна нулю и не убывает. Неубывание означает, что чем больше агент работает, тем больше у него затраты. Предположим, что функция дохода центра $H(y)$ достигает максимума при ненулевых действиях агента. Это – существенное условие, так как если максимум дохода центра достигается при нулевых действиях агента, то нет и задачи стимулирования (побуждения к совершению определенных действий): зачем стимулировать агента, если максимум выигрыша центра достигается, когда агент ничего не делает.

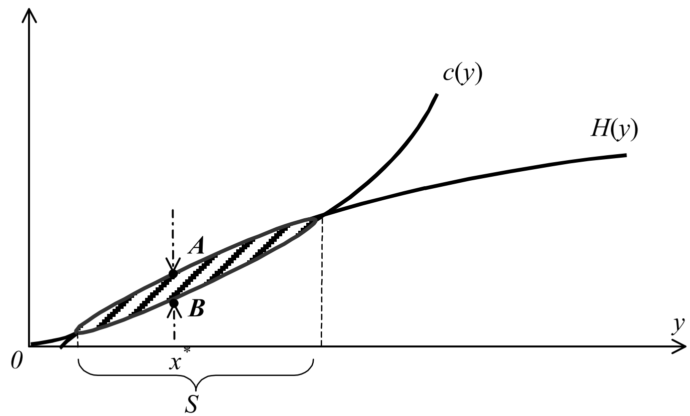


Рис. 3.3. Область компромисса в задаче стимулирования

Теперь рассмотрим эту ситуацию (см. Рис. 3.3) с точки зрения центра и агента. Ноль характеризуется тем, что, если агент ничего не делает, то его затраты равны нулю, и, если центр ему за это ничего не платит, то агент получает нулевую полезность. Таким образом, оценка снизу выигрыша агента – 0: ничего не делает, ничего не получает. Значит, агент согласится что-то делать, если вознаграждение, которое будет платить ему центр, будет не меньше, чем его затраты. Таким образом, имеется ограничение: вознаграждение должно быть не меньше затрат агента. Значит, агента устраивают все точки на Рис. 3.3, которые лежат выше функции затрат $c(y)$.

С точки зрения центра: центр может получить какую-то полезность в случае нулевого действия агента, то есть если он ничего ему не платит. И он точно не заплатит агенту больше, чем доход, который он получает от деятельности агента. То есть с точки зрения центра допустимыми являются комбинации действий и вознаграждений, расположенные ниже функции дохода центра $H(y)$ (см. Рис. 3.3).

Так как центр стремится минимизировать выплаты агенту при условии, что последний выбирает требуемое действие, оптимальная точка в рамках гипотезы благожелательности должна лежать на нижней границе области, заштрихованной на Рис. 3.3, то есть **стимулирование в точности должно равняться затратам агента**. Этот важный вывод получил название «*принцип компенсации затрат*». В соответствии с этим принципом, для того чтобы побудить агента выбрать определенное действие, центру достаточно компенсировать затраты агента.

Пересечение этих двух областей (выплат, бо́льших затрат агента и меньших дохода центра) дает нам некоторую область. Формально *множество реализуемых действий* $S = \{y \in A \mid H(y) \geq c(y)\}$ – множество таких действий агента, что доход от его деятельности не превосходит его затраты. Совокупность множества действий S и вознаграждений за эти действия, устраивающих одновременно и центра и агента (то есть размер вознаграждения должен быть не меньше затрат агента и не больше дохода центра) называется *областью компромисса*. Она заштрихована на Рис. 3.3.

Принцип декомпозиции и принцип агрегирования. Мы рассмотрели простейшую систему, состоящую из одного центра, из одного агента. Теперь усложним задачу. Рассмотрим систему, состоящая из нескольких агентов, подчиненных одному центру. То есть, от структуры, приведенной на Рис. 1.12в, перейдем к простейшей веерной структуре – см. Рис. 3.4 (и Рис. 1.12г).

Предположим, что затраты каждого агента зависят не только от его собственных действий, но и от действий других агентов. Соответственно вознаграждение будет зависеть от действий всех агентов.

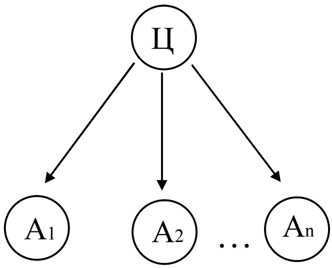


Рис. 3.4. Веерная структура

Есть параметр – план, и агенту платят в зависимости от выбранного им действия. Понятно, что не следует ничего платить, если агент выбирает действие, не равное соответствующей компоненте плана. Сколько ему нужно платить, если он выбирает действие, совпадающее с планом? Ему нужно платить что-то «около» его затрат, но затраты каждого агента зависят от действий всех агентов. Следует помнить, что следует платить так, чтобы агент выполнял план. Оказывается, нужно компенсировать агенту его затраты в случае, если он сделал то, что нужно, независимо от действий, выбранных другими агентами. В этом заключается *принцип декомпозиции* (см. раздел 3.3).

Рассмотрим ситуацию, когда центр не может наблюдать действие каждого агента в отдельности, а может наблюдать лишь некий агрегат – результат деятельности всего коллектива в целом. Какова должна быть система стимулирования в данном случае. Оказывается, что если центр может определить минимальные затраты, которые должны понести все агенты для достижения какого-либо общего результата, то эффективная система стимулирования будет иметь следующий вид – каждому агенту компенсируются его минимальные затраты, при условии, что результат коллективной деятельности удовлетворяет требованиям центра. Более того, оказывается, что центр не несет никаких потерь, не наблюдая индивидуальные действия каждого агента. То есть, для построения эффективной системы стимулирования не обязательно наблюдать индивидуальные действия каждого из агентов, достаточно лишь знать результат их общей деятельности и уметь вычислять минимальные затраты агентов на его достижение. В этом заключается *принцип агрегирования* [4].

3.2. Базовые механизмы стимулирования

Перечислим *базовые системы* (*механизмы*) *стимулирования* в одноэлементных детерминированных, то есть функционирующих в условиях полной информированности обо всех существенных внешних и внутренних параметрах, организационных системах (оптимальная базовая система стимулирования – компенсаторная (*К-типа*) – см. выше).

Скачкообразные системы стимулирования (*С-типа*) характеризуются тем, что агент получает постоянное вознаграждение (как правило, равное заранее установленному значению C) при условии, что выбранное им действие не меньше планового действия x, и нулевое вознаграждение при выборе меньших действий (Рис. 3.5):

(3.1.) $$\sigma_C(x, y) = \begin{cases} C, & y \geq x \\ 0, & y < x \end{cases}.$$

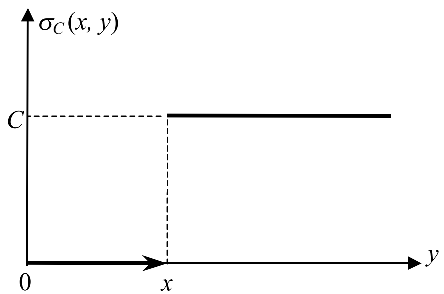


Рис. 3.5. Скачкообразная система стимулирования

Системы стимулирования С-типа содержательно могут интерпретироваться как *аккордные*, соответствующие фиксированному вознаграждению C при заданном результате (например, объеме работ не ниже оговоренного заранее, времени и т.д.). Другая содержательная интерпретация соответствует случаю, когда действием агента является количество отработанных часов, то есть вознаграждение соответствует, например, фиксированному тарифному окладу.

Пропорциональные (*линейные*) *системы стимулирования* (*L-типа*). На практике широко распространены системы оплаты труда, основанные на использовании постоянных ставок оплаты: повременная оплата подразумевает существование *ставки оплаты* единицы рабочего времени (как правило, часа или дня), сдельная оплата – существование ставки оплаты за единицу продукции и т.д. Объединяет эти системы оплаты то, что вознаграждение агента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объему выпущенной продукции и т.д.), а ставка оплаты $\lambda \geq 0$ является коэффициентом пропорциональности (Рис. 3.6):

(3.2) $\sigma_L(y) = \lambda\, y$.

При использовании пропорциональных (линейных) систем стимулирования и непрерывно дифференцируемой монотонной выпуклой функции затрат агента выбираемое им действие определяется следующим выражением: $y^* = c'^{-1}(\lambda)$, где $c'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции затрат агента. При этом затраты центра на стимулирование превышают минимально необходимые (равные компенсируемым затратам агента) на следующую величину: $y^* c'(y^*) - c(y^*)$. Например, если центр имеет функцию дохода $H(y) = b\,y,\ \ b > 0,$ а функция затрат агента выпукла и равна: $c(y) = a\,y^2,\ a > 0$, то при любом реализуемом действии агента центр при использовании пропорциональной системы стимулирования переплачивает ему ровно в два раза.

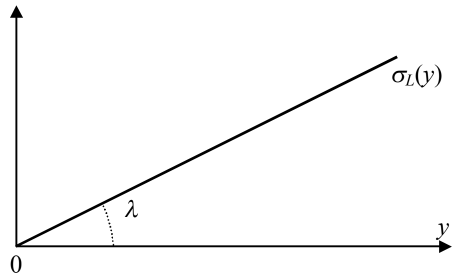


Рис. 3.6. Пропорциональная система стимулирования

Таким образом, при выпуклых функциях затрат агента эффективность пропорциональных систем стимулирования не выше, чем компенсаторных. График целевой функции агента при использовании центром пропорциональной системы стимулирования приведен на Рис. 3.7.

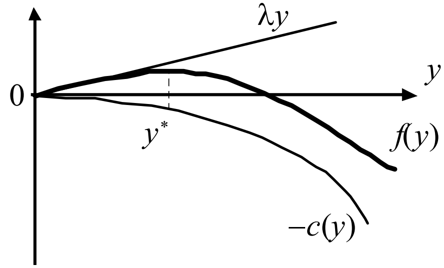


Рис. 3.7. Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования L-типа

Неэффективность пропорциональных систем стимулирования вида $\sigma_L(y) = \lambda\, y$ обусловлена требованием неотрицательности вознаграждений. Если допустить, что вознаграждение может быть отрицательным (при этом «отрицательный» участок функции стимулирования может не использоваться – см. Рис. 3.8): $\sigma_{LK}(y) = \sigma_0 + \lambda\, y$, где $\sigma_0 \leq 0$, то при выпуклых функциях затрат агента эффективность пропорциональной системы стимулирования $\sigma_{LK}(\cdot)$ может быть равна эффективности оптимальной (компенсаторной) системы стимулирования.

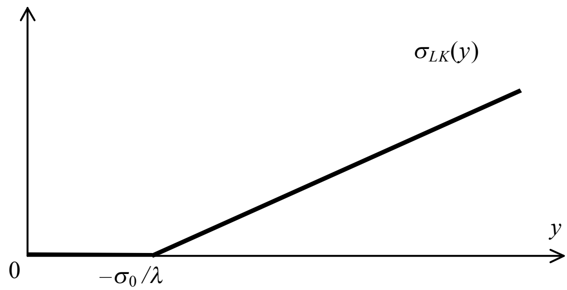


Рис. 3.8. «Линейная» функция стимулирования

Для обоснования этого утверждения достаточно воспользоваться следующими соотношениями (см. Рис. 3.9):

$$x^*(\lambda) = c'^{\,-1}(\lambda),\ \sigma_0(\lambda) = c(c'^{\,-1}(\lambda)) - \lambda\, c'^{\,-1}(\lambda).$$

Оптимальное значение λ^* ставки оплаты при этом выбирается из условия максимума целевой функции центра:

$$\lambda^* = \arg\max_{\lambda \geq 0}\ [H(x^*(\lambda)) - \sigma_{LK}(x^*(\lambda))].$$

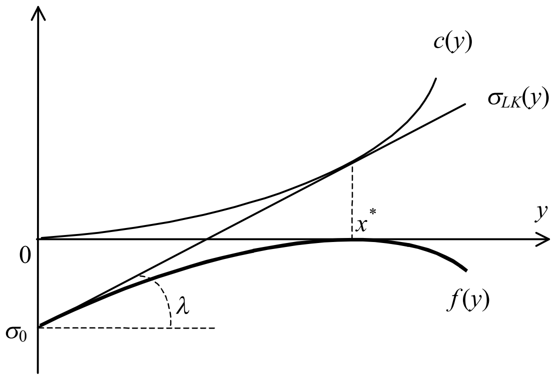


Рис. 3.9. Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования $\sigma_{LK}(\cdot)$

Системы стимулирования, основанные на перераспределении дохода **(***D-типа***)***,* используют следующую идею. Так как центр выражает интересы системы в целом, то можно условно идентифицировать его доход и доход от деятельности всей организационной системы. Поэтому возможно основывать стимулирование агента на величине дохода центра – положить вознаграждение агента равным определенной (например, постоянной) доле $\gamma \in [0; 1]$ дохода центра:

(3.3) $\sigma_D(y) = \gamma\, H(y)$.

Отметим, что системы стимулирования *C, L* и *D*-типа являются параметрическими: для определения скачкообразной системы стимулирования достаточно задать пару (x, C); для определения пропорциональной системы стимулирования достаточно задать ставку оплаты λ; для определения системы стимулирования, основанной на перераспределении дохода, достаточно задать норматив γ.

Перечисленные выше системы стимулирования являются простейшими, представляя собой элементы «конструктора», используя которые можно построить другие более сложные системы стимулирования – *производные* от базовых. Для возможности такого «конструирования» необходимо определить операции над базовыми системами стимулирования. Для одноэлементных детерминированных ОС достаточно ограничиться операциями следующих трех типов [3].

Первый тип операции – переход к соответствующей «*квази*»-*системе стимулирования* – вознаграждение считается равным нулю всюду, за исключением действия, совпадающего с планом. В детерминированных организационных системах «обнуление» стимулирования во всех точках, кроме плана, в рамках гипотезы благожелательности практически не изменяет свойств системы стимулирования, поэтому в ходе дальнейшего изложения мы не будем акцентировать внимание на различии некоторой системы стимулирования и системы стимулирования, получающейся из исходной применением операции первого типа.

Второй тип операции – разбиение множества возможных действий на несколько подмножеств и использование различных базовых систем стимулирования на различных подмножествах. Получающиеся в результате применения операции второго типа системы стимулирования называют *составными*. Примером составной системы стимулирования является система LL-типа, в которой при действиях агента, меньших некоторого норматива, используется одна ставка оплаты, а результаты, превосходящие норматив, оплачиваются по более высокой ставке.

Третий тип операции – алгебраическое суммирование двух систем стимулирования (что допустимо, так как стимулирование входит в целевые функции участников системы аддитивно). Результат применения операции третьего типа называют *суммарной системой стимулирования*.

Например, на Рис. 3.10 приведен эскиз системы стимулирования C+L-типа (сдельно-премиальная система оплаты труда [3]), получающейся суммированием скачкообразной и пропорциональной систем стимулирования.

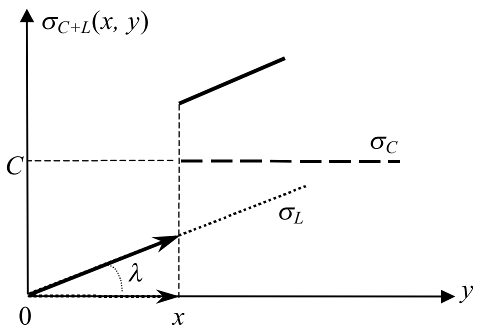


Рис. 3.10. Система стимулирования C+L-типа (*суммарная*)

Таким образом, *базовыми системами стимулирования* называют системы С-типа, К-типа, L-типа и D-типа, а также все производные от них (то есть получающиеся в результате применения операций перечисленных выше трех типов) системы стимулирования.

В [3] показано, что введенные базовые системы стимулирования достаточно полно охватывают все используемые на практике формы индивидуальной заработной платы.

Механизмы стимулирования в одноэлементной системе. Рассмотрим целевую функцию центра. Она представляет собой при использовании компенсаторной системы стимулирования с $\lambda = c(x) + \delta$ доход центра минус стимулирование агента: $\{H(x) - c(x) - \delta\}$. Если вознаграждение агента равно затратам, то выигрыш центра в зависимости от того, какое действие он побуждает выбирать агента, представляет собой разность между доходом центра и затратами. Следовательно, нужно выбрать x^*, который будет доставлять максимум по $x \in S$ разности $\{H(x) - c(x)\}$.

Таким образом, сначала имелась сложная система стимулирования – ее упростили до системы с двумя параметрами. Первый параметр рассчитали. Осталось найти второй параметр – план x^*. Он должен быть такой, чтобы максимизировать разность между доходом центра и системой стимулирования, равной в точности затратам агента. В результате оптимальным решением задачи стимулирования будет компенсаторная система стимулирования такого вида, в которой размер вознаграждения равен затратам агента, а *оптимальный план* равен плану, максимизирующему разность между доходом центра и затратами агента. Окончательно оптимальное решение будет выглядеть следующим образом:

$$x^* \in \operatorname{Arg}\max_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}.$$

Рассмотрим данное решение задачи поиска оптимального плана x^*. Это выражение означает, что разность между доходом центра и затратами агента – «толщина» области компромисса (см. Рис. 3.3) – максимальна. При дифференцировании в точке x^* угол наклона касательной к функции дохода центра будет равен углу наклона касательной к функции затрат агента. В экономике это интерпретируется как точка оптимума, в которой предельная производительность равна предельным затратам.

Значит, точка x^* является оптимальной с точки зрения центра и реализуется исход, определяемый точкой B на Рис. 3.3. Возможна другая ситуация. Рассмотрим модель, в которой первое предложение делает агент. Он предлагает центру: «я буду делать столько-то, а ты мне будешь платить столько-то». Если центр это устраивает, он соглашается.

Вопрос: что должен предложить агент? Агент должен предложить центру то же самое действие x^*, а плату запросить соответствующую точке А на Рис. 3.3. В этой ситуации всю «прибыль» $[H(x^*) – c(x^*)]$ будет забирать агент.

Другими словами, в данной игре выигрывает тот, кто делает ход первым. Если начальник, то он «сажает на ноль» подчиненного, если подчиненный, то он «сажает на ноль» начальника. В рамках формальной модели и тот, и другой на это согласятся.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть заданы целевые функции центра и агента, в которых фигурируют доход центра и затраты агента. Переменная – функция стимулирования – является внутренней характеристикой системы, отражающей взаимодействие между центром и агентом: сколько центр отдал, столько агент и получил. Если просуммировать целевые функции центра и агента, то сократятся значения функции стимулирования, и останется разность доходов и затрат. Значит действие x^*, которое является решением задачи стимулирования, максимизирует сумму целевых функций, то есть, действие агента, которое реализует центр, оптимально по Парето.

Можно ставить задачи определения конкретной точки внутри отрезка АБ на Рис. 3.3. Мы рассмотрели две крайности:

1) всю прибыль себе забирает центр;

2) всю прибыль забирает агент.

Возможно определение *компромисса* между ними, то есть центр и агент могут договориться делить эту прибыль, например, пополам. Тогда агент, кроме компенсации затрат, получает половину этой прибыли. Или другой принцип: фиксированный норматив рентабельности, то есть пусть стимулирование агента составляет не только затраты, а затраты, умноженные на единицу плюс норматив рентабельности. Аналогично анализируется большое количество модификаций задачи стимулирования.

Решение задачи найдено – компенсаторная система стимулирования с планом x^*. Единственно ли оно? Рассуждение очень простое: пусть есть функция затрат агента, и есть план x^*. Оптимальная система стимулирования – квазикомпенсаторная – побуждает агента выбирать x^*, и центр несет затраты на стимулирование в точности равные затратам агента.

Возьмем другие системы стимулирования, которые побуждают агента выбирать то же действие, а центр платить столько же. Для того чтобы такая система стимулирования существовала необходимо, чтобы функция стимулирования проходила через точку $(x^*, c(x^*))$.

Утверждение 3.2. Для того чтобы агент выбирал действие x^*, достаточно, чтобы функция стимулирования проходила через точку $(x^*, c(x^*))$, а во всех остальных точках была не больше, чем затраты агента.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Если взять любую систему стимулирования из изображенных на Рис. 3.11, то она тоже будет побуждать агента выбирать это действие, и центр будет платить столько же.

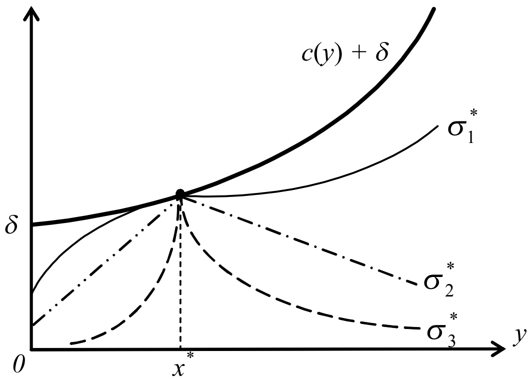


Рис. 3.11. Оптимальные системы стимулирования

Можно взять скачкообразную систему стимулирования – при действиях, меньших плана, вознаграждение равно нулю, выполнил план – получил вознаграждение не меньшее затрат (*аккордная оплата*). Можно выбрать монотонную систему стимулирования, которая проходит через точку $(x^*, c(x^*))$, и всюду лежит ниже затрат. То есть любая кривая, проходящая через точку $(x^*, c(x^*))$ и лежащая ниже функции затрат, будет решением задачи стимулирования.

В Табл. 3.1 приведены оценки сравнительной эффективности различных базовых систем стимулирования.

Табл. 3.1. Оценки сравнительной эффективности базовых систем стимулирования

	K	**C**	**L**	**LK**	**D**	**L+C**	**LL**
K	=	=	≥	=	≥	=	=
C	=	=	≥	=	≥	=	=
L	≤	≤	=	≤	?	≤	≤
LK	=	=	≥	=	≥	=	=
D	≤	≤	?	≤	=	≤	≤
L+C	=	=	≥	=	≥	=	=
LL	=	=	≥	=	≥	=	=

В данной таблице сравнительная эффективность семи базовых систем стимулирования (в предположении выпуклости и монотонности функции затрат агента), отражена следующим образом: если в ячейке стоит символ «≥», то эффективность системы стимулирования, соответствующей строке, не ниже эффективности системы стимулирования, соответствующей столбцу (аналогичный смысл имеют и другие неравенства; символ «?» означает, что сравнительная эффективность систем стимулирования L-типа и D-типа в каждом конкретном случае зависит от функции затрат агента и функции дохода центра).

Параметрическое представление целевых функций. До сих пор мы рассматривали задачи, в которых ограничения на класс целевых функций агентов (точнее – на функции стимулирования) отсутствовали. На практике нередко класс целевых функций агентов задан в параметрическом виде $f(x, y)$, где $x \in X$, X – множество значений параметра x. Представим $f(x, y)$ в виде

$$f(x, y) = h(y) - \chi(x, y)$$

где $h(y) = f(y, y)$, $\chi(x, y) = h(y) - f(x, y)$.

Параметр x естественно интерпретировать как плановое задание для агента (желательное для центра состояние агента), а $\chi(x, y)$ – как штраф при отклонении состояния от плана ($\chi(x, y) \geq 0$, ($\chi(x, x) = 0$). В этом случае задача стимулирования фактически становится задачей планирования в условиях полной информированности. Задача оптимального планирования становится игрой $Г_1$ (см. главу 1). Определение решения этой игры называется *принципом оптимального планирования с прогнозом состояния*. Множество

$$S_0 = \{x \mid \max_y f(x, y) = h(x)\}$$

называется множеством согласованных планов, а определение оптимального плана на множестве согласованных планов н*азывается принципом оптимального согласованного планирования.*

Возникает вопрос, в каких случаях принцип оптимального планирования с прогнозом состояний эквивалентен принципу оптимального согласованного планирования (в каких случаях оптимальный план будет выполнен). Наиболее известным и изящным достаточным условием согласованности является так называемое «неравенство треугольника» для функции штрафов [2]:

$$\forall\ x, y, z\ \ \chi(x, y) \le \chi(x, z) + \chi(z, y).$$

3.3. Механизмы стимулирования в многоэлементных системах

В разделах 3.1 и 3.2 мы рассмотрели организационную систему, состоящую из одного центра и одного агента, и решили для этой простейшей модели задачу стимулирования, в которой целевая функция центра представляла собой разность между доходом и затратами на стимулирование, выплачиваемыми агенту. Мы доказали, что оптимальной является компенсаторная система стимулирования, которая имеет следующий вид: агент получает вознаграждение, равное затратам, в случае выполнения плана и вознаграждение, равное нулю, во всех остальных случаях. Оптимальный план определялся как план, максимизирующий разность между доходом центра и затратами агента.

Давайте эту же задачу стимулирования с той же содержательной интерпретацией попробуем «продолжить» дальше и решить ее для более сложных случаев. Например, для системы, состоящей из нескольких агентов, подчиненных одному центру (Рис. 3.4).

Как отмечалось в первой главе, любая организационная система (точнее ее модель) описывается следующими параметрами: состав, структура, целевые функции, допустимые множества и информированность. Состав рассматриваемой системы понятен: центр и n агентов; структура представлена на Рис. 3.4 – все агенты на нижнем уровне, центр на верхнем уровне, всего уровней иерархии два. Целевые функции и допустимые множества:

$$y_i \in A_i,\ \sigma_i(y_i),\ i \in N = \{1, 2, \ldots n\}.$$

Будем считать, что i-ый агент выбирает действие y_i из множества A_i, центр выбирает стимулирование i-го агента $\sigma_i(y_i)$, которое зависит от действия, которое выбирает i-й агент, где i принадлежит множеству агентов N.

Целевая функция центра представляет собой разность между доходом $H(y)$, который он получает от деятельности агентов, где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in A' = \prod_{i \in N} A_i$ – вектор действий всех агентов, и суммарным стимулированием, выплачиваемым агентам, то есть суммой по всем агентам тех вознаграждений, которые он им выплачивает: $\Phi(\sigma(\cdot), y) = H(y) - \sum_{i \in N} \sigma_i(y_i)$.

Мы обобщили предыдущую более простую модель: целевая функция агента имеет тот же вид, только появляется индекс i. И таких целевых функций n штук, то есть i-ый агент получает стимулирование за свои действия от центра и несет затраты, зависящие только от его собственных действий:

$$f_i(\sigma(\cdot), y_i) = \sigma_i(y_i) - c_i(y_i), i \in N .$$

Сравним целевую функцию в предыдущей модели и целевую функцию, которая записана для веерной структуры с несколькими агентами. Стимулирование i-го агента зависит только от его собственных действий, затраты тоже зависят только от его собственных действий и целевая функция i-го агента зависит только от его стимулирования и от его собственных действий, то есть агенты между собой, фактически, не связанны. Итак, полноценной игры между агентами нет, потому что тот выигрыш, который получает любой агент, зависит только от того, что делает он сам и не зависит от того, что делают остальные.

Эта сложная система может быть разбита на n подсистем, каждая из которых имеет вид, приведенный на Рис. 1.11, и рассматривать их можно, в принципе, независимо. Применим для каждой из них по отдельности результат утверждений 3.1 и 3.2.

Из результатов анализа одноэлементной модели известно, что каждого из агентов можно стимулировать независимо, и каждому из них достаточно компенсировать затраты. Поэтому задачу можно решить так: известно, что доход центра будет $H(y)$, и заплатить он должен i-му агенту за выбор действия y_i ровно $c_i(y_i)$. Подставляем оптимальную систему стимулирования в целевую функцию центра, получаем разность $H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i)$. Ищем оптимальный план, который будет максимизировать целевую функцию центра на множестве допустимых векторов действия агентов:

$$H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i) \to \max_{y \in A'} .$$

Это – оптимизационная задача, и проблем с формальным решением этой задачи обычно не возникает.

Давайте посмотрим еще раз на полученный результат. Каким образом будет принимать решение отдельный агент? Его целевая функция зависит только от его собственного действия, и при известной системе стимулирования, сообщенной ему центром, он будет решать задачу выбора своего собственного действия, которое будет максимизировать его целевую функцию – разность между вознаграждением и затратами. Т.к. его целевая функция зависит только от его собственного действия, то выбираемое им действие не будет зависеть от того, что делают остальные агенты. В этом смысле агенты независимы, то есть у каждого есть доминантная стратегия. Получилось, что число агентов возросло, а никакого качественно нового эффекта не появилось – можно рассматривать взаимодействие между центром и агентами независимо. Поэтому продолжим усложнение модели.

Первым шагом усложнения будет введение ограничения на фонд заработной платы, потому что иначе агенты ничем не объединены. Такие организационные системы называются *системами со слабо связанными агентами*. Поэтому добавим ограничение фонда заработной платы R: $\sum_{i \in N} \sigma_i(y_i) \le R$. То есть наложим на стимулирование ограничение, что сумма вознаграждений, которые выплачиваются агентам, должна быть не больше, чем некоторая известная величина, которую содержательно можно интерпретировать как фонд заработной платы.

Посмотрим, что при этом изменится. Поведение агентов не изменится, потому что целевая функция каждого агента зависит только от его собственных действий. Изменится задача, которую должен решать центр. Центр знает, что при использовании оптимальной системы стимулирования он должен компенсировать затраты каждому агенту, но теперь у него есть дополнительное ограничение, и он должен проводить максимизацию не по всем векторам действий агентов, а только по тем из них, которые будут удовлетворять бюджетному ограничению. Задача меняется – нужно проводить максимизацию по множеству A' в пересечении с множеством таких векторов действий y, что сумма $\sum_{i \in N} c_i(y_i) \le R$, то есть, выполнено *бюджетное ограничение*.

С точки зрения центра по прежнему оптимально каждому из агентов компенсировать затраты на выполнение плана, то есть структура системы стимулирования сохраняется. Целевая функция агентов, по-прежнему, зависит только от системы стимулирования, которую задал центр, и от действия данного агента. И агента не волнует наличие бюджетного ограничения, он производит свой выбор при сообщенной ему системе стимулирования. Получили задачу условной оптимизации:

$$H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i) \to \max_{\{y \in A' | \sum_{i \in N} c_i(y_i) \le R\}}.$$

Все, задача стимулирования решена – она сведена к задаче условной оптимизации. Рассмотрим пример.

<u>Пример 3.1.</u> Пусть имеются два агента ($n = 2$), функция дохода центра представляет собой сумму действия агентов: $H(y) = y_1 + y_2$. Функция затрат i-го агента является квадратичной:

$$c_i(y_i) = \frac{y_i^2}{2r_i},\ i = 1,2,$$

где константа $r_i > 0$ может интерпретироваться как эффективность деятельности агента, его квалификация – чем больше квалификация, тем меньше затраты.

Целевая функция центра при использовании компенсаторной системы стимулирования – это сумма действий агентов минус сумма их затрат. Ее можно максимизировать по $y_1 \ge 0$ и $y_2 \ge 0$ при ограничении, что сумма компенсируемых затрат не больше, чем фонд заработной платы:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - \dfrac{y_1^2}{2r_1} - \dfrac{y_2^2}{2r_2} \to \max\limits_{(y_1, y_2) \ge 0}; \\ \dfrac{y_1^2}{2r_1} + \dfrac{y_2^2}{2r_2} \le R. \end{cases}$$

Задача стимулирования сводится к определению двух параметров: y_1 и y_2. Найдем эти параметры:

$$y_1^{\max} = r_1,\ y_2^{\max} = r_2,$$
$$\frac{(y_1^{\max})^2}{2r_1} + \frac{(y_2^{\max})^2}{2r_2} \le R.$$

Это безусловный максимум целевой функции: если продифференцировать по y_1, то получим $1 - y_1 / r_1$. Затраты первого агента равны $r_1 / 2$. Значит, если $\frac{r_1 + r_2}{2} \le R$, то оптимальное решение – $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$. Если $\frac{r_1 + r_2}{2} > R$, то бюджетное ограничение становится существенным и тогда можно пользоваться методом множителей Лагранжа.

Запишем лагранжиан:

$$(y_1 + y_2) - (1 + \mu)\left(\frac{y_1^2}{2r_1} + \frac{y_2^2}{2r_2}\right) - \mu R\,.$$

Дифференцируя его по y_1, получаем: $1 - (1 + \mu)\frac{y_1}{r_1}$. Приравнивая нулю, находим оптимальное действие в зависимости от множителя Лагранжа. Следовательно, $y_1 = (1 + \mu) r_1$. Аналогично $y_2 = (1 + \mu) r_2$. Подставляем в бюджетное ограничение, которое выполняется как равенство: $\frac{(1 + \mu)^2 r_1^2}{2r_1} + \frac{(1 + \mu)^2 r_2^2}{2r_2} = R$. Откуда $(1 + \mu) = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}$. Следовательно, оптимальное решение будет иметь следующий вид $x_i = r_i \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}$, $i = 1, 2$.

Итак, если фонд заработной платы меньше чем полусумма констант r_1 и r_2, то оптимально назначать планы $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$; если фонд заработной платы больше полусуммы r_1 и r_2, то оптимальны планы $x_i = r_i \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}$, $i = 1, 2$. Обратите внимание, что решение получилось непрерывным, т.е. при R, равном полусумме r_1 и r_2, решения «состыковываются». •

Отметим, что, рассматривая задачу стимулирования слабо связанных агентов, на самом деле 99 % процентов времени мы потратили на решение задачи согласованного планирования, то есть на решение соответствующей задачи условной оптимизации, которая к управлению «никакого отношения не имеет», потому что мы воспользовались готовым результатом, что в оптимальной компенсаторной функции стимулирования вознаграждение в точности равно затратам, и при ней агенты будут выполнять план.

Будем усложнять задачу дальше. Логика была такая: от одноэлементной системы перейти к такой, где все агенты были независимы и ограничений не было, затем добавить ограничение на фонд заработной платы. Предположим теперь, что агенты *сильно связаны*, и эту связь будем отражать следующим образом: предположим, что затраты каждого агента зависят не только от его собственных действий, но и от действий других агентов. Соответственно вознаграждение каждого агента будет зависеть от действий всех агентов.

Целевая функция центра:

$$\Phi(\sigma(\cdot), y) = H(y) - \sum_{i \in N} \sigma_i(y) ,$$

где $y = (y_1, ..., y_n)$, целевые функции агентов:

$$f_i(\sigma(\cdot), y) = \sigma_i(y) - c_i(y), i \in N .$$

Мы предположили, что на нижнем уровне агенты взаимодействуют таким образом, что затраты каждого зависят от вектора действий всех, и вознаграждение каждого, в общем случае, зависит от вектора действий всех. Это сильно осложняет дело, так как непосредственно воспользоваться результатом анализа одноэлементной модели уже невозможно.

Давайте формулировать задачу управления. Как агенты будут принимать решения? Первый ход делает центр: сообщает им систему стимулирования, то есть каждому агенту говорит зависимость вознаграждения от вектора действий всех агентов. Агенты это узнали, дальше они должны выбирать действия. Если выигрыш каждого зависит от действий всех, значит, имеет место игра. Исходом игры является ее равновесие, например, равновесие Нэша. Обозначим вектор-функцию стимулирования $\sigma(\cdot) = (\sigma_1(\cdot), ..., \sigma_n(\cdot))$, и запишем равновесие игры агентов в зависимости от системы стимулирования, которую использует центр:

$$E_N(\sigma(\cdot)) = \left\{ y^N \in A' \left| \begin{array}{l} \sigma_i(y^N) - c_i(y^N) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}^N) - c_i(y_i, y_{-i}^N) \\ \forall i \in N, \forall y_i \in A_i \end{array} \right. \right\}.$$

Теперь сформулируем задачу управления:

$$\min_{y \in E_N(\sigma(\cdot))} [H(y) - \sum_{i \in N} \sigma_i(y)] \to \max_{\sigma(\cdot)}.$$

Целевая функция центра зависит от функции стимулирования и от действий агентов. Агенты при фиксированной функции стимулирования выберут действия, являющиеся равновесием Нэша их игры. Возьмем гарантированный результат целевой функции центра по множеству равновесий Нэша игры агентов при заданной системе стимулирования. Эта конструкция будет уже зависеть только от функции стимулирования. Дальше нужно ее максимизировать выбором вектор-функции стимулирования, то есть центр должен найти такой набор стимулирований агентов, который бы максимизировал гарантированное значение его целевой функции на множестве равновесий Нэша игры агентов.

Вид этой задачи почти такой же, как и одноэлементной, только раньше (в одноэлементной системе) не было суммы и было множество максимумов целевой функции единственного агента. В многоэлементной системе вместо множества максимумов целевой функции агента появляется множество равновесий Нэша, и появляется сумма стимулирований агентов. Задача сложнá, так как мы сначала должны взять минимум некоторого функционала по множеству, которое зависит от вектор-функции, которая входит в этот функционал, а потом минимизировать выбором вектор-функции.

Если посмотреть на определение множества равновесий Нэша, то увидим, что это множество зависит от вектор-функции и определяется бесконечной системой неравенств. При решении сложных задач важно угадать решение. Решение этой задачи угадывалось достаточно долго – около 15 лет (сформулировали ее в 1984 году, а решение нашли в 1998). Идея на самом деле очень простая: если в одноэлементной задаче есть компенсаторная система стимулирования – простая и понятная, то какую надо придумать компенсаторную систему стимулирования для решения многоэлементной задачи?

Затраты агента зависят от того, что делает он сам, и от действий всех остальных агентов. Центр говорит: «выполняй план, обещаю компенсировать фактические затраты по выполнению плана, независимо от того, что сделают остальные агенты» (принцип декомпозиции – см. выше):

$$\sigma_i(x, y) = \begin{cases} c_i(x_i, y_{-i}), \; y_i = x_i; \\ 0, \; y_i \neq x_i. \end{cases}, \; i \in N.$$

Убедимся, что при такой системе стимулирования выполнение плана является равновесием Нэша. Для этого надо подставить эту систему стимулирования в определение равновесия Нэша и доказать, что вектор x является равновесием Нэша. При выполнении плана i-ый агент получает компенсацию затрат, и несет такие же затраты. В случае невыполнения плана он получает нулевое вознаграждение и несет какие-то затраты:

$$c_i(x_i, x_{-i}) - c_i(x_i, x_{-i}) \geq 0 - c_i(y_i, x_{-i}), \; y_i \neq x_i.$$

Получили выражение «минус затраты меньше нуля». Это неравенство будет выполняться при любых обстановках, то есть каждому агенту выгодно выполнять план, независимо от того, что делают другие. Вспомним, что доминантная стратегия агента – это такое его действие, которое доставляет максимум целевой функции, независимо от действий остальных агентов. В данном случае выполнение плана будет максимизировать целевую функцию агента независимо от действий остальных, то есть выполнение плана будет равновесием в доминантных стратегиях.

Итак, мы доказали, что предложенная компенсаторная система стимулирования реализует заданный вектор планов как равновесие в доминантных стратегиях игры агентов. Можно ли заставить агентов выбрать какой-либо вектор действий как равновесие их игры, и заплатить им в сумме меньше, чем сумма их затрат (целевая функция центра зависит от суммы стимулирований с минусом, хотелось бы эту сумму минимизировать). Штрафы центр не может накладывать, так как стимулирование неотрицательное (может наказать, только ничего не платя). Можно ли неотрицательным стимулированием побудить агентов выбрать какой-то вектор действий, и заплатить им сумму меньше, чем сумма их затрат. Утверждается, что нет!

Введем предположение, что затраты агента в случае выбора им нулевого действия равны ноль, независимо от того, что делают остальные: $\forall y_i \in A_i, \; c_i(0, y_{-i}) = 0, \; i \in N.$

Целевая функция каждого агента – вознаграждение минус затраты. Фиксируем некоторый вектор действий, который центр хочет от агентов добиться. Если сумма стимулирований по реализации этого вектора меньше чем сумма затрат агентов, то это значит, что найдется хотя бы один агент, у которого вознаграждение будет меньше затрат, что противоречит предположению о неотрицательности затрат и возможности каждого агента обеспечить себе нулевые затраты выбором нулевого действия.

Значит, помимо того, что компенсаторная система стимулирования реализует вектор планов как равновесие в доминантных стратегиях игры агентов, при этом центр платит минимально возможную величину. Значит, эта система стимулирования оптимальна. Осталось найти, каким должен быть вектор планов. Также как и в одноэлементной модели, нужно в целевую функцию центра подставить вместо стимулирования затраты агентов и минимизировать полученное выражение выбором плана:

$$\left[H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y) \right] \to \max_{y \in A'} .$$

То есть, нужно найти такое допустимое действие, которое максимизировало бы прибыль центра, и назначить это действие в качестве плана, подставив ее в систему стимулирования. Задача решена!

Обратите внимание, что здесь, как и в одноэлементной модели, как и в системе со слабо связанными агентами, имея результат об оптимальности компенсаторных систем стимулирования, дальше решаем только задачу планирования. В данном случае доказательство оптимальности декомпозирующей системы стимулирования было сложнее, чем в одноэлементной системе, потому что имеет место игра агентов. Но мы угадали решение, и эту игру как бы «декомпозировали на части», то есть за счет управления центр декомпозировал взаимодействие агентов. Использование таких управлений, которые декомпозируют взаимодействие агентов, превращают их игру в игру, в которой существует равновесие в доминантных стратегиях, называется *принцип декомпозиции игры агентов*.

3.4. Распределенный контроль

Усложним задачу дальше. Решим задачу управления для структуры, приведенной на Рис. 3.12. Такие структуры называются *системами с распределенным контролем*. Это – перевернутая веерная структура, в которой один агент подчинен нескольким начальникам.

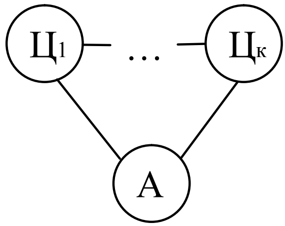


Рис. 3.12. Система с распределенным контролем

Ситуация достаточно распространена, в частности, в проектном управлении: агент, который работает по какому-то проекту, подчинен руководителю проекта; в то же время, он работает в подразделении и подчинен соответствующему функциональному руководителю. Или преподаватель работает на кафедре, а его приглашают читать лекции на другую кафедру или факультет.

Система с распределенным контролем характеризуется тем, что, если в веерной структуре имела место игра агентов, то в этой структуре имеет место игра центров. Если добавить сюда еще нескольких агентов, каждый из которых подчинен разным центрам, то получится игра и тех, и других на каждом уровне (см. Рис. 1.12д). Опишем модель, которая сложнее рассмотренной выше многоэлементной системы, так как, если игра агентов заключается в выборе действий, а действием был скаляр, то игра центров заключается в выборе функций стимулирования агента, зависящих от его действий, то есть в игре центров стратегией каждой из них является выбор функции. Целевые функции центров имеет следующий вид:

$$\Phi_i(\sigma(\cdot), y) = H_i(y) - \sigma_i(y_i),\ i \in K = \{1, 2, ..., k\};$$

и представляют собой разность между доходом и стимулированием, выплачиваемым агенту, где K – множество центров

Целевая функция агента: $f_i(\sigma(\cdot), y) = \sum_{i \in K} \sigma_i(y) - c(y)$, то есть он получает стимулирования от центров, которые суммируются, и несет затраты.

Предположим, что действия агента принадлежат множеству, которое будет уже не отрезком действительной оси (часы, шт. и т.д.), а может быть многомерным множеством (отражать разные виды деятельности), тогда функция затрат будет отображать множество действий во множество действительных чисел.

Определим множество выбора агента – множество максимумов его целевой функции в зависимости от стимулирования со стороны центров: $P(\sigma(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{y\in A}\left[\sum_{i\in K}\sigma_i(y) - c(y)\right]$.

Поведение агента понятно: в зависимости от вектора стимулирований агент будет выбирать действие, которое будет максимизировать его целевую функцию, представляющую собой разность между его суммарным вознаграждением и затратами.

Тогда центры должны решить, какое стимулирование назначать агенту. Причем, каждый должен решить сам, как ему управлять подчиненным, что ему обещать. Центры оказываются «завязанными» на одного подчиненного, и что он будет делать, зависит от того, что ему предложит каждый из центров.

Каждый из центров не может рассуждать по отдельности, то есть, если он попросит от агента что-то сделать, то тот не обязательно это сделает, так как другой центр может попросить от него другого и пообещает заплатить больше. Таким образом, центры вовлечены в игру и должны прийти к равновесию, подбирая соответствующие функции стимулирования и прогнозируя, какие действия в ответ на вектор стимулирований будет выбирать агент.

Задача достаточно громоздка, поэтому приведем несколько известных результатов, которые позволяют ее упростить.

Первый результат говорит следующее: если рассматривается игра центров, то в теории игр принято использовать два подхода: равновесие Нэша и эффективность по Парето. В системе с распределенным контролем множество равновесий Нэша пересекается с множеством Парето, то есть можно из множества равновесий Нэша выбрать такое, которое является эффективным по Парето. Есть теорема [5], которая гласит, что существует класс простых функций стимулирования, которые гарантируют Парето-эффективность равновесия Нэша игры центров. Эти функции стимулирования имеют компенсаторный вид: $\sigma_i(x,y) = \begin{cases}\lambda_i, & y = x\\ 0, & y \neq x\end{cases}, i \in K$.

Содержательно эта система стимулирования значит, что существует некоторое действие агента (план x), относительно которого центры договорились выплачивать агенту стимулирование в случае, если он выберет это действие. При этом i-ый центр платит λ_i за выполнение плана. В случае, если агент выполняет другое действие, то он не получает вознаграждения вовсе. Таким образом, этот результат позволяет нам перейти от игры центров, в которой стратегией каждого является выбор функции, к игре, в которой стратегией является выбор одного действия агента и размера вознаграждения. Причем, относительно вектора вознаграждений можно сказать следующее: посмотрим на целевую функцию агента: он получает сумму вознаграждений и несет какие-то затраты. Если затраты в нуле равны нулю, то с точки зрения агента сумма стимулирований должна быть не меньше, чем затраты: $\sum_{i \in K} \lambda_i \geq c(x)$.

С другой стороны, Парето-эффективными с точки зрения центров являются такие размеры вознаграждений, которые нельзя уменьшить, не изменив действия агента. Значит, сумма вознаграждений должна быть в точности равна затратам агента.

Пользуясь этим результатом, охарактеризуем равновесие игры центров, то есть найдем такие условия, при которых они договорятся, чего хотят добиться от агента. Для этого рассчитаем следующие величины: $W_i = \max_{y \in A} \left[H_i(y) - c(y) \right]$, $i \in K$.

Если i-ый центр сам взаимодействует (работает в одиночку) с агентом, то он будет использовать компенсаторную систему стимулирования, и прибыль, которую он получит, будет равна величине W_i (это следует из решения одноэлементной задачи – см. выше).

Запишем условия того, что каждому центру будет выгодно взаимодействовать с другими центрами (совместно управлять агентом), по сравнению с индивидуалистическим поведением, когда он говорит: пусть подчиненный работает только на меня. Запишем это условие следующим образом: $H_i(x) - \lambda_i \geq W_i, i \in K$. В случае если центры взаимодействуют друг с другом, i-ый центр получает доход $H_i(x)$ от выбора агентом действия x и платит агенту λ_i. При этом значение его целевой функции должно быть не меньше, чем если бы он взаимодействовал с агентом в одиночку, что дало бы ему полезность W_i. Кроме того, должно быть выполнено условие равенства суммы вознаграждений агента его затратам. Обозначим: $\Lambda = \left\{ x \in A, \vec{\lambda} \geq 0 \mid \sum_{i \in K} \lambda_i = c(x), H_i(x) - \lambda_i \geq W_i, i \in K \right\}$ – множество действий агента и векторов выплат его деятельности со стороны центров, таких, что сумма этих выплат в точности равна затратам агента по реализации этого действия, и каждый из центров получает выигрыш, не меньший, чем если бы он действовал в одиночку. Эта область представляет собой подмножество декартова произведения множества A на k-мерный положительный ортант.

Множество Λ есть *множество компромисса* для системы с распределенным контролем. Она содержательно похожа на область компромисса в игре одного центра и одного агента.

Утверждение 3.3.

1) Если область компромисса Λ не пуста, то имеет место *сотрудничество центров*: центры могут договориться, какой вектор действия агенту выбирать и кто сколько должен заплатить;

2) Возможна ситуация, когда эта область Λ пуста. Тогда это будет ситуация *конкуренции центров*.

В случае конкуренции исходом игры центров в содержательном смысле будет следующее: начальники между собой не договорились, как использовать подчиненного. Тогда первый начальник считает, что бы он хотел получить от подчиненного, действуя в одиночку. Аналогично поступают остальные. Каждый из начальников говорит подчиненному: «Давай ты будешь работать на меня – я тебе плачу столько-то». Начинает он с компенсации затрат. Каждый сказал, подчиненный сидит на нуле. Кто-то из начальников догадывается и говорит: «я тебе оплачу затраты и еще надбавку при условии, что ты будешь работать на меня». Это лучше для подчиненного, так как он получает не ноль, а что-то сверх компенсации затрат. Начинается конкуренция центров, каждый центр «перетягивает» на себя агента. В такой ситуации наилучшее положение – у агента. Из центров победит тот, у которого больше значение W_i, то есть параметр, характеризующий прибыль, которую получает центр от действий агента. Кто более эффективно взаимодействует с агентом, тот его и «переманит».

Если упорядочить центров в порядке убывания W_i: $W_1 \geq W_2 \geq \ldots \geq W_k$, то победит тот, у кого W_i максимально, заплатив агенту, помимо компенсации затрат, W_2 плюс бесконечно малую величину, чтобы переманить агента у (второго в данном упорядочении) центра.

Ситуация упорядочения центров по эффективности, когда побеждает тот, кто обладает максимальной эффективностью, причем побеждает по цене следующего за ним, называется *аукционным решением* (аукцион второй цены).

Найдем условия существования режима сотрудничества. Введем следующую величину: максимум суммарного выигрыша центров, то есть определим действие агента, которое доставляет максимум суммы доходов центров минус затраты агента:

$$W_0 = \max_{y \in A} \left[\sum_{i \in N} H_i(y) - c(y) \right].$$

Утверждение 3.4. Режим сотрудничества может быть реализован, то есть область компромисса не пуста, тогда и только тогда, когда сумма индивидуальных выигрышей центров от их деятельности по отдельности не больше, чем суммарный выигрыш системы при совместном взаимодействии центров: $\Lambda \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in K} W_i \leq W_0$.

Содержательная интерпретация утверждения 3.4 следующая: у системы должно существовать *свойство эмерджентности* (целое больше, чем сумма частей). В данном случае целое – сотрудничество центров – должно быть больше, чем сумма частей. То есть, если в системе присутствует синергетический эффект, то центры смогут прийти к компромиссу.

Задачи и упражнения к главе 3

3.1. В организационной системе, состоящей из одного центра и одного агента, функция затрат агента имеет вид $c(y) = y^2 / 2\,r$, $y \geq 0$, функция дохода центра – $H(y) = \alpha \sqrt{y}$. Запишите целевые функции центра и агента, «линеаризовав» функцию дохода центра [4].

3.2. В условиях задачи 1.1 $H(y) = y$ [4].

3.2.1. Решите задачу стимулирования в рамках гипотезы благожелательности. Нарисуйте область компромисса. Исследуйте, как изменятся результаты, если отказаться от гипотезы благожелательности.

3.2.2. Найдите зависимость границ области компромисса от величины резервной заработной платы агента.

3.2.3. Решите задачу стимулирования, если $y \in [0; A^+]$, где A^+ – известная положительная константа.

3.2.4. Решите задачу стимулирования, если размер вознаграждения ограничен сверху величиной $R > 0$.

3.2.5. Найдите оптимальные системы стимулирования C-типа, L-типа, D-типа, LL-типа, L+C-типа.

3.2.6. Найдите минимальные ограничения механизма стимулирования, необходимые для реализации заданного действия.

3.2.7. Зависит ли решение задачи определения оптимального плана от мотивационной надбавки δ?

3.2.8. Докажите, что в раках введенных в раздел 3.1 предположений вычисление максимума при определении оптимального плана x^* (см. раздел 3.2) можно осуществлять по всей положительной полуоси, а не по множеству S.

3.3. Найдите оптимальную систему стимулирования L-типа в случае вогнутой функции затрат агента [4].

3.4. Докажите эквивалентность представления целевой функции агента в виде «стимулирование минус затраты» и «доход минус штрафы». Проиллюстрируйте на примере задачи 1.2.

3.5*. Пусть у агента имеются два допустимых действия: $A = \{y_1; y_2\}$, $A_0 = \{z_1; z_2\}$, вероятности $P = \begin{Vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{Vmatrix}$, $1/2 < p \le 1$. Затраты агента по выбору первого и второго действия равны c_1 и c_2 соответственно, $c_2 \ge c_1$; ожидаемый доход центра от выбора агентом первого и второго действия – H_1 и H_2. Найдите оптимальный контракт [4].

3.6*. В дилемме «доход – свободное время» функция полезности $u(q, t) = \beta\, q\, t$, $t \in [0; 16]$, нетрудовые доходы равны q_0. Определите оптимальную с точки зрения агента продолжительность рабочего времени. Исследуйте эффекты дохода и замещения [4].

3.7. Исследуйте сравнительную эффективность систем стимулирования в задаче 3.2.5.

3.8. Для задачи 3.2.5 нарисуйте графики «доход – свободное время» [4].

3.9. Приведите примеры различных зависимостей желательной продолжительности рабочего времени от ставки оплаты [4].

3.10. Опросите нескольких человек и постройте по результатам опросов зависимости желательной продолжительности рабочего времени респондентов от ставки оплаты. Проинтерпретируйте результаты в терминах задачи стимулирования [4].

3.11. В организационной системе с одним центром и слабо связанными агентами функции затрат агентов: $c_i(y_i) = y_i^2 / 2\, r_i$, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, а функция дохода центра – $H(y) = \sum_{i \in N} \alpha_i y_i$, где $\{\alpha_i\}_{i \in N}$ – положительные константы. Решите задачу стимулирования при заданном ограничении сверху на фонд заработной платы. Найдите оптимальный размер фонда заработной платы [4].

3.12. Решите задачу стимулирования в системе с одним центром и двумя агентами, имеющими функции затрат: $c_i(y) = \frac{(y_i + \alpha\, y_{3-i})^2}{2r_i}$, $i = 1, 2$, где α – некоторый параметр, отражающий степень взаимозависимости агентов. Функция дохода центра – $H(y) = y_1 + y_2$, а фонд заработной платы ограничен величиной R [4].

3.13. Имеются два агента с функциями затрат $c_i(y_i) = y_i^2 / 2\, r_i$, $i = 1, 2$, а функция дохода центра равна сумме действий агентов. На индивидуальные вознаграждения наложены независимые ограничения (существует «вилка» заработной платы): $d_1 \le \sigma_1 \le D_1$, $d_2 \le \sigma_2 \le D_2$, и, кроме этого, существует одно глобальное (общее ограничение): $\sigma_2 \ge \beta\ \sigma_1$ (второй агент имеет более высокую квалификацию, чем первый: $r_2 \le r_1$, и поэтому за одни и те же действия должен получать большее вознаграждение: $\beta \ge 1$). Найдите оптимальное решение задачи стимулирования.

3.14. Найдите равновесие Нэша игры агентов в системе с одним центром и n агентами Целевая функция i-го агента $f_i(y, r_i)$ представляет собой разность между доходом $h_i(y)$ от совместной деятельности и затратами $c_i(y, r_i)$, где r_i – параметр эффективности (тип) агента, то есть $f_i(y, r_i) = h_i(y) - c_i(y, r_i)$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Функции дохода и затрат: $h_i(y) = \lambda_i\, \theta\, Y$, $i \in N$, $c_i(y, r_i) = \frac{y_i^2}{2(r_i \pm \beta_i \sum_{j \ne i} y_j)}$, $i \in N$, где $Y = \sum_{i \in N} y_i$, $\sum_{i \in N} \lambda_i = 1$. Для случая, когда в знаменателе стоит знак «–», предполагается, что $\sum_{j \ne i} y_j < \frac{r_i}{\beta_i}$. Решите задачу стимулирования в случае двух агентов, считая, что центр использует пропорциональные системы индивидуального стимулирования со ставками λ_1 и λ_2 [4].

3.15*. Найдите оптимальную аккордную систему стимулирования $\sigma_i(y_1, y_2) = \begin{cases} C_i, & y_1 + y_2 \ge x \\ 0, & y_1 + y_2 < x \end{cases}$ двух агентов, имеющих функции затрат $c_i(y_i) = y_i^2 / 2\, r_i$, где r_i – тип i-го агента, $y_i \in \Re_1^+$, $i = 1, 2$ [4].

3.16. Найдите оптимальную систему стимулирования за результат коллективной деятельности $z = \sum_{i \in N} y_i$, $H(z) = z$, агентов, имеющих функции затрат $c_i(y_i) = y_i^2 \ / \ 2\ r_i$, $i \in N$. Функция дохода центра $H(z) = z$ [4].

3.17. Решите задачу 3.16, если $c_i(y) = \dfrac{(y_i + \alpha\ y_{-i})^2}{2r_i}$, $i = 1, 2$.

3.18. Найдите оптимальную унифицированную систему стимулирования в условиях задачи 3.16 [4]..

3.19*. Найдите оптимальную унифицированную ранговую систему стимулирования трех агентов, когда функция дохода центра равна сумме действий агентов, а функции затрат агентов: $c_i(y_i) = k_i\, y_i$, $k_1 > k_2 > k_3$ [4].

3.20*. Найдите оптимальную соревновательную ранговую систему стимулирования в условиях задачи 3.19 [4].

3.21*. Найдите оптимальное число одинаковых агентов, имеющих функции затрат $c(y) = y^2 / 2\ \beta$, если доход центра пропорционален сумме действий агентов. Как изменится оптимальное решение, если целевую функцию центра домножить на убывающую функцию числа агентов (придумайте самостоятельно примеры таких функций и исследуйте их) [4].

3.22*. Решите задачу 3.21 (придумайте самостоятельно примеры и исследуйте их) в предположении, что для фиксированного множества агентов центр должен определить множество агентов, включаемых в состав системы и обеспечить им определенный уровень полезности, а остальным агентам (не включаемым в состав системы) он должен обеспечить другой фиксированный уровень полезности [4].

3.23. Найдите область компромисса для организационной системы с распределенным контролем, в которой $c(y) = y$, $H^i(y) = \alpha^i\ y$, $\alpha^i \geq 1$, $i \in K$, $k = 2$ [5].

3.24. Найдите область компромисса для организационной системы с распределенным контролем, в которой $k = 2$, $c(y) = y^2$, $H^1(y) = \beta - \alpha^1\ y$, $H^2(y) = \alpha^2\ y$ [5].

3.25. Найдите область компромисса для организационной системы с распределенным контролем, в которой $k = 2$, $c(y) = y$, $H^i(y) = y - y^2 / 2\ r^i$, $i \in K$ [5].

3.26*. Исследуйте в рамках задачи 3.24 целесообразность введения дополнительного уровня управления – метацентра [4, 5].

3.27*. Организационная система состоит из двух участников, имеющих целевые функции $W(z, y) = y - z$, $w(z, y) = z - y^2$ и выбирающих, соответственно, $z \geq 0$ и $y \geq 0$. Найти выигрыши участников в иерархических играх Γ_0-Γ_3 (см. главу 1) при условии, что правом первого хода обладает первый участник. Что изменится, если правом первого хода обладает второй участник [5]?

3.28*. Организационная система состоит из двух участников, имеющих целевые функции $f_i = y_i + \alpha_i (1 - y_{-i})$, $y_i \in [0; 1]$, $i = 1, 2$. Найдите выигрыши участников в иерархических играх Γ_0-Γ_3 (см. главу 1) с побочными платежами и без побочных платежей при различных правах первого хода [5].

3.29. Докажите, что «неравенству треугольника» удовлетворяют все функции штрафов, вогнутые на полуосях [2].

3.30*. Приведите определения следующих понятий и содержательные примеры: функция стимулирования, гипотеза благожелательности, мотивационная надбавка, область компромисса, принцип компенсации затрат, принцип декомпозиции, принцип агрегирования, система стимулирования (скачкообразная, компенсаторная, линейная, производная, составная), оптимальный план, система со слабо связанными агентами, бюджетное ограничение, система с распределенным контролем, режим сотрудничества, режим конкуренции.

Литература к главе 3

1. *Баркалов С.А., Новиков Д.А., Попов С.С. Индивидуальные стратегии предложения труда: теория и практика. – М.: ИПУ РАН, 2002.
2. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981.
3. *Кочиева Т.Б., Новиков Д.А. Базовые системы стимулирования. – М.: Апостроф, 2000.
4. *Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003.
5. *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. – М.: ИПУ РАН, 2001.

ГЛАВА 4. Механизмы планирования в организационных системах

В настоящей главе мы, так же, как и в предыдущей, будем рассматривать задачи мотивационного управления (в них управляющее воздействие направлено на целевые функции управляемых агентов). А именно, будем изучать класс задач, который условно называется механизмами планирования. Термин «планирование» употребляется в двух смыслах. Во-первых, план это – образ действий. В более узком смысле *план* это желательное с точки зрения центра состояние системы. Под *механизмом планирования* в теории управления понимается несколько более узкая вещь, а именно процедура определения планов в зависимости от сообщений агентов. Зачем же нужны сообщения агентов?

4.1. Информационная неопределенность в организационных системах

При рассмотрении в первой главе моделей принятия решений считалось, что имеет место гипотеза рационального поведения, то есть субъекты максимизируют свою полезность выбором тех действий, которые от них зависят. Кроме того, имеет место гипотеза детерминизма, в соответствии с которой субъект стремится устранить всю имеющеюся неопределенность и принимать решение в условиях полной информированности. Так, начальник, устанавливая какие-то параметры управляющего воздействия, то есть плана, должен принимать решение в соответствие с гипотезой детерминизма, устранив неопределенность. Что значит неопределенность? Это – недостаточная информированность, она может быть относительно существенных характеристик как окружающей среды, так и относительно управляемых субъектов. Понятно, что последние, как правило, лучше знают свои характеристики, чем их начальник. Поэтому, если у начальника не хватает информации для принятия решения, то у него есть несколько путей устранения неопределенности.

Возможный путь – использование максимального гарантированного результата, когда начальник рассчитывает на наихудшее значение параметров подчиненных. Но, возникает мысль: если подчиненные знают что-то лучше начальника, то ему следует их спросить о том, что он не знает. Он их спрашивает, они сообщают центру какую то информацию, на основе этой информации он принимает решение. Но подчиненные активны, они обладают своими интересами, в том числе для них те или иные управленческие решения центра могут быть предпочтительней в той или иной степени. Значит, имея возможность своими сообщениями влиять на те решения, которые центр будет принимать, они постараются сообщить ему такую информацию, чтобы центр принял наиболее выгодное для них решение. То есть та информация, которую агенты сообщат, вовсе необязательно будет достоверной.

Этот эффект искажения информации называется *эффектом манипулирования информацией*. Возникает вопрос, какие процедуры принятия решения будут *неманипулируемы*, то есть будут побуждать управляемых субъектов сообщать достоверную информацию? Желательно было бы использовать такие правила принятия решений, при которых управляемым субъектам было бы выгодно говорить правду. Вот этой задачей мы и будем заниматься в настоящей главе.

Условно между задачами планирования и стимулирования (рассмотренными в предыдущей главе) можно провести следующую аналогию – см. Табл. 4.1.

Табл. 4.1. Задачи стимулирования и планирования

	Стимулирование	**Планирование**
Стратегия агента	$y \in A'$	$s \in \Omega$
Управление	$\sigma(y)$	$\pi(s)$
Предпочтения агента	$f(y, \sigma(\cdot))$	$\varphi(s, \pi(\cdot))$

Почти любая задача управления в организационных системах в условиях неполной информированности центра может быть рассмотрена как задача планирования. При этом решение соответствующей задачи управления определяет план, назначаемый агентам для каждого возможного значения вектора их сообщений.

В разделе 1.2 перечислены основные методы устранения информационной неопределенности. Все эти методы могут быть использованы центром: в зависимости от той информации о состоянии природы, которой он обладает на момент принятия решений, выделяют:

1) *интервальную неопределенность* (центру известно только множество Ω возможных значений состояния природы);

2) *вероятностную неопределенность* (центру известно распределение вероятностей значений состояния природы на множестве Ω);

3) *нечеткую неопределенность* (центру известна функция принадлежности различных значений состояния природы на множестве Ω).

В настоящей главе мы в большинстве моделей (за исключением задачи теории контрактов) будем рассматривать интервальную неопределенность.

4.2. Постановка задачи управления в организационных системах с сообщением информации

Рассмотрим двухуровневую многоэлементную ОС, состоящую из центра и n агентов. Стратегией каждого из агентов является сообщение центру некоторой информации $s_i \in \Omega_i$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Центр на основании сообщенной ему информации назначает агентам *планы* $x_i = \pi_i(s) \in X_i \subseteq \Re^1$, где π_i: $\Omega \to X_i$, $i \in N$, – *процедура* (*механизм*) *планирования*, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \Omega = \prod_{i \in N} \Omega_i$ – вектор сообщений всех агентов.

Функция предпочтения агента, отражающая интересы агента в задачах планирования: $\varphi_i(x_i, r_i)$: $\Re^2 \to \Re^1$, зависит от соответствующей компоненты назначенного центром плана и некоторого параметра – *типа* агента. Под типом агента обычно понимается точка максимума его функции предпочтения, то есть наиболее выгодное с его точки зрения значение плана.

На момент принятия решений каждому агенту известны: процедура планирования, значение его собственного типа $r_i \in \Re^1$ (*идеальной точки, точки пика*), целевые функции и допустимые множества всех агентов. Центру известны зависимости $\varphi_i(x_i, \cdot)$ и множества возможных сообщений агентов и неизвестны точные значения типов агентов. Последовательность функционирования следующая: центр выбирает процедуру планирования и сообщает ее агентам, агенты при известной процедуре планирования сообщают центру информацию, на основании которой и формируются планы.

Так как решение, принимаемое центром (назначаемые агентам планы), зависит от сообщаемой агентами информации, последние могут воспользоваться возможностью своего влияния на эти решения, сообщая такую информацию, чтобы получить наиболее выгодные для себя планы. Понятно, что при этом полученная центром информация в общем случае может не быть истинной. Следовательно, возникает проблема манипулирования.

Как правило, при исследовании механизмов планирования, то есть в ОС с сообщением информации, вводится предположение, что функции предпочтения агентов *однопиковые* с точками пика $\{r_i\}_{i \in N}$, то есть функция предпочтения $\varphi_i(x_i, r_i)$ непрерывна, строго монотонно возрастает до единственной точки максимума r_i и строго монотонно убывает после нее. Это предположение означает, что предпочтения агента на множестве допустимых планов таковы, что существует единственное наилучшее для него значение плана – точка пика, степень же предпочтительности остальных планов монотонно убывает по мере удаления от идеальной точки – точки пика.

Будем считать, что агенты ведут себя некооперативно, выбирая доминантные или равновесные по Нэшу стратегии. Пусть s^* – вектор равновесных стратегий[18]. Очевидно, точка равновесия $s^* = s^*(r)$ в общем случае зависит от вектора $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ типов всех агентов.

Соответствующим механизму $\pi(\cdot): \Omega \to \Re^n$ *прямым механизмом* планирования $h(\cdot): \Re^n \to \Re^n$ называется механизм $h(r)=\pi(s^*(r))$, ставящий в соответствие вектору точек пика агентов вектор планов. Термин «прямой» обусловлен тем, что агенты сообщают непосредственно (прямо) свои точки пика (в исходном – непрямом – механизме $\pi(\cdot)$ они могли сообщать косвенную информацию). Если в соответствующем прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесной стратегией всех агентов, то такой механизм называется *эквивалентным прямым* (неманипулируемым) *механизмом*.

Рассмотрим возможные способы обеспечения достоверности сообщаемой информации. Наиболее очевидной является идея введения системы штрафов за искажение информации (в предположении, что центру в конце концов становятся известными истинные значения параметров $\{r_i\}_{i \in N}$). В [5] показано, что введением «достаточно сильных» штрафов действительно можно обеспечить достоверность сообщаемых оценок. Если отказаться от предположения, что центру

---

[18] *Если равновесий несколько, то необходимо ввести соответствие отбора равновесий, позволяющее из любого множества равновесий выбрать единственное.*

становятся известными $\{r_i\}_{i \in N}$, то возникает задача идентификации неизвестных параметров по имеющейся у центра информации и, следовательно, задача построения системы штрафов за косвенные показатели искажения информации [5].

Другим возможным способом обеспечения достоверности сообщаемой информации является использование *прогрессивных механизмов*, то есть таких механизмов, в которых функция φ_i при любой обстановке монотонна по оценке s_i, $i \in N$. Понятно, что если при этом справедлива «*гипотеза реальных оценок*»: $s_i \le r_i$, $i \in N$, то доминантной стратегией каждого агента будет сообщение $s_i = r_i$, $i \in N$ [5].

Условие совершенного согласования. Принцип открытого управления. Фундаментальным результатом теории активных систем является *принцип открытого управления* (ОУ) [1]. Основная его идея заключается в том, чтобы использовать процедуру планирования, максимизирующую целевую функцию каждого агента, в предположении, что сообщаемая агентами оценка достоверна. То есть центр идет навстречу агентам, рассчитывая на то, что и они его не «обманут» [3]. Это объясняет другое название механизма открытого управления – «*механизм честной игры*». Дадим строгое определение.

Условие:

$$\varphi_i(\pi_i(s), s_i) = \max_{x_i \in X_i(s_{-i})} \varphi_i(x_i, s_i),\ i \in N,\ s \in \Omega,$$

где $X_i(s_{-i})$ – *децентрализующее множество* – устанавливаемое центром множество планов, зависящее от обстановки $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ для i-го агента, $i \in N$, называется *условием совершенного согласования*.

Процедура планирования, максимизирующая целевую функцию центра $\Phi(\pi, s)$ на множестве планов, удовлетворяющих условиям совершенного согласования, называется *законом открытого управления*.

Имеет место следующий факт: для того чтобы сообщение достоверной информации было доминантной стратегией агентов, необходимо и достаточно, чтобы механизм планирования был механизмом открытого управления [1, 6, 17].

Приведенное утверждение не гарантирует единственности ситуации равновесия. Конечно, если выполнено условие благожелательности (если $s_i = r_i$, $i \in N$ – доминантная стратегия, то агенты будут сообщать достоверную информацию), то использование закона ОУ гарантирует достоверность сообщаемой агентами информации.

Приведем достаточное условие существования единственной ситуации равновесия вида $s_i = r_i,\ i \in N$, в системе с законом ОУ. Обозначим: $E_i(s_i) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x_i \in X_i} \varphi_i(x_i, s_i)$ – множество согласованных планов i-го агента. Будем считать, что для i-го агента выполнено *условие равноправия функций предпочтения*, если имеет место:

$$\forall\ s_i^1 \neq s_i^2 \in \Omega_{\text{i}}\ \ E_i(s_i^1) \cap E_i(s_i^2) = \varnothing,$$

то есть при любых допустимых несовпадающих оценках s_i^1 и s_i^2 соответствующие множества согласованных планов не пересекаются. Справедливо следующее утверждение [5]: условие равноправия функций предпочтения для всех агентов является достаточным условием единственности ситуации равновесия.

Необходимым и достаточным условием сообщения достоверной информации как доминантной стратегии при любых идеальных точках $r \in \Omega$ является существование множеств $\{X_i(s_{-i})\}_{i \in N}$, для которых выполнены условия совершенного согласования [1, 3]. Данное утверждение можно переформулировать следующим образом: если в исходном механизме планирования существует равновесие в доминантных стратегиях, то соответствующий прямой механизм будет неманипулируем.

Интересным и перспективным представляется предложенный в [17] *геометрический подход* к получению достаточных условий неманипулируемости путем анализа конфигураций *множеств диктаторства* (*диктаторами* называют агентов, получающих абсолютно оптимальные для себя планы), определяемых как множества таких значений типов агентов, что определенные агенты получают планы, строго меньшие оптимальных для них планов, равные оптимальным и строго бо́льшие. В рамках этого подхода уже удалось получить ряд конструктивных условий индивидуальной и коалиционной неманипулируемости механизмов планирования в ОС [17].

Оптимальность механизмов открытого управления в организационных системах с одним агентом. До сих пор мы интересовались в основном условиями сообщения достоверной информации. Возникает закономерный вопрос: как соотносятся такие свойства механизма функционирования, как неманипулируемость и оптимальность? Иначе говоря, всегда ли среди оптимальных механизмов найдется неманипулируемый и, соответственно, всегда ли среди неманипулируемых механизмов содержится хоть один оптимальный. Получить ответ на этот вопрос необходимо, так как, быть может, не обязательно стремиться к обеспечению достоверности информации, лишь бы механизм имел максимальную эффективность. Поэтому приведем ряд результатов по оптимальности (в смысле максимальной эффективности) механизмов открытого управления (см. также условия неманипулируемости ε-согласованных механизмов в [5]).

Известно [3], что в ОС с одним агентом для любого механизма существует механизм открытого управления не меньшей эффективности. Качественно этот факт объясняется тем, что для единственного агента децентрализующим множеством будет все множество его допустимых планов (другими словами, у одного агента всегда есть «доминантная» стратегия).

Для систем с бóльшим числом ($n \geq 2$) агентов вывод об оптимальности механизмов открытого управления справедлив лишь для ряда частных случаев. Например, аналогичные результаты были получены для механизмов распределения ресурса, для механизмов выработки коллективных экспертных решений (задач активной экспертизы) и механизмов внутренних цен, рассматриваемых в настоящей главе ниже, а также для ряда других механизмов планирования (см. обзор в [17]).

Полученные в теории активных систем результаты о связи оптимальности и неманипулируемости механизмов вселяют некоторый оптимизм, в том смысле, что эти два свойства не являются взаимно исключающими. В то же время, ряд примеров (см., например, [16, 17]) свидетельствуют о неоптимальности в общем случае механизмов, обеспечивающих сообщение агентами достоверной информации. Вопрос о соотношении оптимальности и неманипулируемости в общем случае остается открытым.

Выше при рассмотрении механизмов стимулирования в ОС *согласованными* были названы механизмы, побуждающие агентов к выполнению планов. В ОС, в которых стратегией агентов является выбор как сообщений, так и действий (комбинация задач стимулирования и планирования – см. формальное описание в [14]), механизмы, являющиеся одновременно согласованными и неманипулируемыми, получили название *правильных*. Значительный интерес представляет вопрос о том, в каких случаях оптимальный механизм можно искать в классе правильных механизмов. Ряд достаточных условий оптимальности правильных механизмов управления ОС приведен в [14, 17].

Гипотеза слабого влияния. Пусть часть плановых показателей λ в системе с большим числом агентов является общей для всех агентов, то есть номенклатура плана имеет вид: $\pi = (\lambda, \{x_i\}_{i \in N})$. Если искать управления λ, выгодные для всех агентов (как это делается при использовании принципа согласованного планирования), то возникает принципиальный вопрос о существовании решения.

Такого рода проблем не возникает в системах с большим числом агентов, когда влияние оценки отдельного агента на общее управление мало. Если при сообщении своей оценки s_i каждый агент не учитывает ее влияния на $\lambda(s)$, то считается выполненной *гипотеза слабого влияния* (ГСВ). При справедливости ГСВ необходимо согласовывать планы только по индивидуальным переменным. В [1] доказано, что если выполнена ГСВ и компоненты $x(s)$ плана удовлетворяют условиям совершенного согласования, то сообщение достоверной информации является доминантной стратегией.

Перейдем к рассмотрению ставших уже хрестоматийными механизмов планирования в многоэлементных ОС, для которых оптимален принцип открытого управления.

4.3. Механизмы распределения ресурса

Пусть какой-то ресурс имеется у центра, и он необходим агентам. Задача центра – распределить его между агентами. Если центр знает эффективность использования ресурса подчиненными, то задача заключается в том, как распределить ресурс, например, чтобы суммарный эффект от его использования был максимальным. Если агенты являются активными, а центр не знает эффективности использования ресурса, и спрашивает у них: кому сколько ресурса нужно, и кто как будет его использовать, то, если ресурс ограничен, то агенты в общем случае не сообщат честно, кому сколько нужно, и ресурсов на всех не хватит. В каких ситуациях управляющий орган может предложить такую процедуру, то есть правило распределения ресурсов между агентами, которая была бы неманипулируема, то есть такую процедуру, чтобы каждому из агентов было выгодно говорить правду, независимо от того, сколько ресурса ему надо?

Рассмотрим механизм распределения ресурсов $\pi(s)$, который обладает следующими свойствами:

1) процедура планирования непрерывна и монотонна по сообщениям агентов (монотонность означает, что чем больше просит агент ресурса, тем больше он его получает);

2) если агент получил некоторое количество ресурса, то он может, изменяя свою заявку, получить и любое меньшее количество ресурса;

3) если количество ресурса, распределяемое между группой агентов, увеличилось, то каждый из агентов этой группы получит не меньшее количество ресурсов, чем раньше.

Целевая функция агента $f_i(x_i, r_i)$ зависит от типа r_i данного агента, который в случае механизмов распределения ресурса будет рассматриваться как оптимальное количество ресурса для данного агента.

Допустим, что целевая функция агента имеет единственный максимум по x_i в точке пика. То есть агенту нужно некоторое количество ресурса, если ему недодают ресурса – его полезность при этом меньше, если ему дают лишний ресурс – его полезность тоже меньше. Единственным максимумом может быть и бесконечность, то есть целевая функция может монотонно возрастать. Такие функции предпочтения называются *однопиковые* (см. Рис. 4.1).

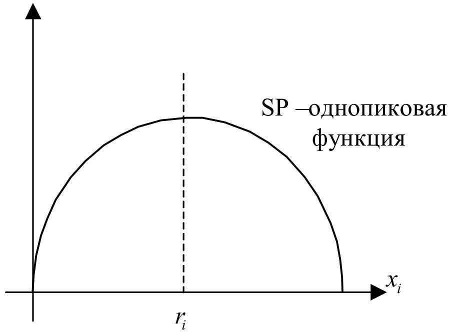


Рис. 4.1. Однопиковая функция

Рассмотрим сначала пример, а потом приведем общие результаты.

<u>Пример 4.1.</u> Пусть $n = 3$, $x_i = \pi_i(s) = \dfrac{s_i}{s_1 + s_2 + s_3} R$, R – количество ресурса, $s_i \in [0; R]$. Пусть $R = 1$; $r_1 = 0{,}3$; $r_2 = 0{,}4$; $r_3 = 0{,}5$. Имеем: $r_1 + r_2 + r_3 = 1{,}2 > R = 1$.

1) Пусть каждый агент сообщает правду, тогда:

$$s_i = r_i \Rightarrow x_1 = 0{,}25;\ x_2 = 0{,}333;\ x_3 \approx 0{,}4;$$

2) Пусть $s_i = R \Rightarrow x_i = \dfrac{R}{3} = 0{,}33 \in (r_1; r_2)$.

Первый агент решает задачу: $\dfrac{s_1}{s_1+2} = 0{,}3 \Rightarrow s_1 = 6/7$,

$$\Rightarrow s_1^* = 6/7;\ s_2^* = 1;\ s_3^* = 1 \Rightarrow x_1^* = 0{,}3;\ x_2^* = 0{,}35;\ x_3^* = 0{,}35.$$

Это – равновесие Нэша. •

Приоритетные механизмы. В приоритетных механизмах распределения ресурса, как следует из их названия, при формировании планов (решении о том, сколько ресурса выделить тому или иному агенту) в существенной степени используются показатели приоритета агентов. Приоритетные механизмы в общем случае описываются следующей процедурой:

$$x_i(s) = \begin{cases} s_i, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} s_j \le R \\ \min\{s_i, \gamma\eta_i(s_i)\}, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} s_j > R \end{cases},$$

где n – число агентов, $\{s_i\}_{i \in N}$ – их заявки, $\{x_i\}_{i \in N}$ – выделяемые количества ресурса, R – распределяемое количество ресурса, $\{\eta_i(s_i)\}_{i \in N}$ – функции приоритета агентов, γ – некоторый параметр.

Операция взятия минимума содержательно означает, что агент получает ресурс в количестве, не большем запрошенной величины. Параметр γ играет роль нормировки и выбирается из условия выполнения балансового (бюджетного) ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{s_i, \gamma\eta_i(s_i)\} = R,$$

то есть подбирается таким, чтобы при данных заявках и функциях приоритета в условиях дефицита распределялся в точности весь ресурс R.

Приоритетные механизмы, в зависимости от вида функции приоритета, подразделяются на **три класса** – *механизмы прямых приоритетов* (в которых $\eta_i(s_i)$ – возрастающая функция заявки s_i, $i \in N$), *механизмы абсолютных приоритетов*, в которых приоритеты агентов фиксированы и не зависят от сообщаемых ими заявок[19], и

---

[19] *Так как в механизмах абсолютных приоритетов планы, назначаемые агентам, не зависят от их заявок, то в рамках гипотезы благожелательности можно считать любой механизм абсолютных приоритетов нема-*

механизмы обратных приоритетов (в которых $\eta_i(s_i)$ – убывающая функция заявки s_i, $i \in N$). Рассмотрим последовательно механизмы прямых и обратных приоритетов.

Механизмы прямых приоритетов. Процедура распределения ресурса пропорционально заявкам, называется *механизмом пропорционального распределения*:

$$x_i(s) = \frac{s_i}{\sum_{j \in N} s_j} R .$$

Это – самый распространенный способ распределения ресурса. Видно, что данная процедура распределения ресурса удовлетворят условию нормировки. При любых комбинациях сообщений агентов распределяется в точности весь ресурс. Условия непрерывности и монотонности также выполнены.

Предположим, что сообщение каждого агента лежит в диапазоне от нуля до всего количества ресурсов, то есть, как минимум, агент может отказаться от ресурса, как максимум, может попросить весь ресурс, который имеется у центра.

Если агент получил некоторое количество ресурса, то, уменьшая заявку, в силу непрерывности и монотонности процедуры распределения ресурса, он всегда может получить меньшее количество, вплоть до нуля.

Если каждый агент скажет правду, сколько ему нужно, тогда он получит меньше, что логично, потому что ресурсов не хватает, агенты сказали правду и были «пропорционально урезаны».

Предположим, что игру центр разыгрывает неоднократно. На втором шаге агенты попросят больше. Если каждый будет просить максимально возможную заявку, то все получат поровну. Если кому-то этого много, то излишки он может отдать другому, но кому-то все равно не хватит.

Данный механизм является манипулируемым, потому что агентам невыгодно сообщать достоверную информацию о своих типах – тех количествах ресурса, которое им необходимо.

Итак, выше рассмотрен пример механизма распределения ресурса. Рассчитано равновесие. Запишем результаты исследования

нипулируемым. Недостатком этого класса механизмов можно считать то, что в них центр никак не использует информации, сообщаемой агентами.

таких механизмов в общем виде. Для этого попробуем сначала понять, какими свойствами характеризуется равновесие. Агентов можно разделить на две категории:

1) «*приоритетные*» *агенты* (*диктаторы*) – те, кто получают абсолютно оптимальные для себя значения плана, то есть планы, равные их типам (при механизме распределения ресурса – те агенты, которые получают ресурса ровно столько, сколько им нужно),

2) «*обделенные*» *агенты* – те, кому не хватает ресурса, те, кто хоть и просит по максимуму, но в равновесии получает меньше, чем ему нужно.

Следующие два свойства характеризуют равновесие.

Утверждение 4.1.

1) Если некоторый агент в равновесии получает строго меньше ресурса, чем ему необходимо: $x_i^* < r_i$, то в равновесии он запросит максимально возможное количество ресурса: $s_i^* = R$.

2) Если кто-то из агентов в равновесии просит строго меньше максимума: $s_i^* < R$, то это значит, что он получает количество ресурса, оптимальное для него: $x_i^* = r_i$, то есть является диктатором.

Введем определение *анонимного механизма* принятия решений, то есть механизма, симметричного относительно перестановок агентов. Анонимность – демократическое требование, например, в процедурах выборов она отражается в том, что на избирательном участке обмен между двумя избирателями пустыми бланками бюллетеней не меняет результата выборов. То есть все находятся в равных условиях. Тогда при перестановке местами агентов соответственно переставляются и планы этих агентов.

Утверждение 4.2.

1) Все анонимные механизмы распределения ресурса эквивалентны между собой, то есть приводят при одних и тех же предпочтениях агентов к одним и тем же равновесным количествам ресурса, которые они получают.

2) Так как механизм пропорционального распределения является анонимным (все агенты входят в него симметрично), а все анонимные механизмы эквивалентны между собой, то это значит, что все механизмы распределения ресурсов, которые являются анонимными, эквивалентны механизму пропорционального распределения.

Итак, любая анонимная процедура, удовлетворяющая перечисленным выше трем требованиям, приводит к одним и тем же результатам. А механизм пропорционального распределения (который является анонимным) достаточно прост по своему виду, поэтому прост и для исследования, и для агентов (ресурс делится пропорционально запросам).

Таким образом, утверждение 4.2 говорит, что не нужно выдумывать сложных механизмов распределения ресурса – если ограничиться классом анонимных механизмов, то достаточно рассмотреть механизм пропорционального распределения. Кроме того, оказывается, что механизм пропорционального распределения эквивалентен механизму последовательного распределения, рассчитать равновесие для которого совсем просто.

Механизмы последовательного распределения ресурса заключается в следующем. Это – прямой механизм, т.е. каждого агента спрашивают о том, сколько ресурса ему нужно.

Предположим, что агенты сделали свои сообщения. Упорядочим их по возрастанию сообщений (первый попросил меньше всех ресурса, потом второй и т.д.): $\tilde{r}_1 \le \tilde{r}_2 \le \ldots \le \tilde{r}_n$. Дальше применяем следующий *алгоритм последовательного распределения* (*положив* $x_i := 0,\ i \in N$):

Шаг 1. Если мы можем дать каждому агенту столько ресурса, сколько попросил первый агент, то даем всем по $\tilde{r}_1$ (если $n \cdot \tilde{r}_1 \le R$, то $x_i := x_i + \tilde{r}_1,\ \tilde{r}_i := \tilde{r}_i - r_1, i \in N;\ R = R - n \cdot r_1$). Если не можем, распределяем ресурс между всеми агентами поровну (если $n \cdot \tilde{r}_1 > R$, то $x_i := \dfrac{R}{n},\ i \in N$) и останавливаем алгоритм.

Шаг 2. Исключаем первого агента из рассмотрения, перенумеровываем агентов и возвращаемся к шагу 1.

<u>Пример 4.2.1.</u> Пусть $R = 1,\ r_1 = 0{,}3;\ r_2 = 0{,}4;\ r_3 = 0{,}5;\ 0{,}3 \le 0{,}4 \le 0{,}5.$ Предположим, что все агенты сообщили правду, тогда мы можем дать всем одновременно по минимуму – 0,3: $x_1 = 0{,}3;\ x_2 = 0{,}3;\ x_3 = 0{,}3.$

После первого шага: $r_1 = 0;\ r_2 = 0{,}1;\ r_3 = 0{,}2;\ R = 0{,}1.$ Первый агент удовлетворен полностью. Поэтому забываем про него и повторяем для тех, кому ресурс еще необходим. Остаток ресурса, равный 0,1, недостаточен для того, чтобы дать обоим агентам столько, сколько требует первый (бывший второй) – по 0,1, следовательно, мы должны остаток ресурса поделить поровну, т.е. по 0,05.

В результате второй агент получит 0,35, третий тоже 0,35:

$$x_2 := x_2 + \frac{0.1}{2} = 0{,}35. \bullet$$

Так работает механизм последовательного распределения. Понятно, что максимум через n шагов, где n – количество агентов, процедура остановится.

Легко показать (сделайте это самостоятельно), что в механизме последовательного распределения ресурса агентам выгодно сообщать достоверную информацию, т.е. сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Другими словами, механизм последовательного распределения является неманипулируемым прямым механизмом.

Рассмотрим на примере 4.2, может ли кто-то из агентов, сообщая неправду, улучшить свое положение?

Первый агент получает оптимальное количество ресурса, ему нет нужды искажать информацию. Предположим, что начинает изменять свое сообщение второй агент (завышает заявку или занижает). Если он будет уменьшать свою заявку, все изменится в тот момент, когда разность от сообщения окажется такой, чтобы, выдавая столько, сколько просит второй агент, нам хватало бы ресурса. Такая разность равна 0,05 (деление поровну). Это значит, что второй агент должен заявить 0,35. Если он заявляет 0,35, то он получает 0,35, что и получал до этого, т.е. никакой выгоды занижение ему не принесло. Если же он сообщит меньше, чем 0,35, то он и получит столько, сколько сообщит, т.е. меньше 0,35. Ему это не выгодно, т.к. в действительности ему требуется 0,4. Таким образом, уменьшать заявку ему не выгодно.

Если же он начинает просить больше, чем 0,4, то вообще ничего не изменится, т.к. на втором шаге ресурса и так не хватает, и его остаток делится поровну между вторым и третьим агентами.

Аналогично для других агентов показывается, что, увеличивая или уменьшая до определенного уровня заявку, они ничего для себя не меняют, а дальнейшее уменьшение заявки дает уменьшение количества получаемого ими ресурса.

Механизмы обратных приоритетов. Механизмы обратных приоритетов, в которых $\eta_i(s_i)$ является убывающей функцией s_i, $i \in N$, обладают рядом преимуществ по сравнению с механизмами прямых приоритетов. Проведем анализ механизма обратных приоритетов с функциями приоритета

$$\eta_i = A_i / s_i,\ i \in N,$$

где $\{A_i\}_{i \in N}$ – некоторые константы (отметим, что механизм обратных приоритетов не удовлетворяет условию монотонности). Величина A_i характеризует потери ОС, если i-й агент вообще не получит ресурса. Тогда отношение A_i / s_i определяет удельный эффект от использования ресурса. Поэтому механизмы обратных приоритетов иногда называют *механизмами распределения ресурса пропорционально эффективности* (ПЭ-механизмами).

Пример 4.2.2. Пусть имеются три агента ($n = 3$), $A_1 = 16$, $A_2 = 9$, $A_3 = 4$; $R = 18$. Предположим сначала, что целью агентов является получение максимального количества ресурса. Определим ситуацию равновесия Нэша. Легко заметить, что функция $x_i(s) = \min\{s_i, \gamma(A_i / s_i)\}$ достигает максимума по s_i в точке, удовлетворяющей условию $s_i = \gamma (A_i / s_i)$. Следовательно, $x_i^* = s_i^* = \sqrt{\gamma A_i}$.

Определим параметр γ из балансового ограничения $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sqrt{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i} = R$. Тогда $\gamma = \left(R \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i} \right)^2$.

Для рассматриваемого примера $\gamma = 4$, а равновесные заявки, определяемые из условия $x_i^* = s_i^* = R \dfrac{\sqrt{A_i}}{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{A_j}}$, равны: $s_1^* = 8$; $s_2^* = 6$, $s_3^* = 4$.

Проверим, что это действительно равновесие Нэша. Возьмем первого агента. Если он уменьшит свою заявку: $s_1 = 7 < s_1^*$, то $s_1 + s_2^* + s_3^* < R$. Следовательно, $x_1 = s_1 = 7 < x_1^*$. Если же $s_1 = 9 > s_1^*$, то $\gamma \approx 4{,}5$; $x_1 = 8 \equiv x_1^*$.

Легко показать [3], что вычисленные стратегии являются для агентов гарантирующими, то есть максимизируют их выигрыши при наихудших стратегиях остальных.

Если функции предпочтения агентов имеют максимумы в точках $\{r_i\}_{i \in N}$ и если $s_i^* > r_i$, то i-й агент закажет ровно r_i и столько же получит, так как при уменьшении заявки его приоритет возрастает.

Именно таким образом выделяется множество приоритетных потребителей ресурса. •

Более того, можно показать, что при достаточно большом числе агентов механизм обратных приоритетов со штрафами за несовпадение ожидаемого и планируемого эффектов оптимален в смысле суммарной эффективности [3].

4.4. Механизмы внутренних цен

Рассмотрим организационную систему, состоящую из центра и n агентов. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между вознаграждением, выплачиваемым i-му агенту, и квадратичными затратами, которые зависят от действия агента:

$$f_i(\lambda, y_i) = \lambda\, y_i - \frac{y_i^2}{2r_i}, \quad i \in N.$$

Рассмотрим следующую задачу: предположим, что центр хочет, чтобы агенты выбрали действия, сумма которых равна заданной величине R, то есть должно выполняться следующее условие:

$$\sum_{i \in N} y_i = R.$$

Например, центр хочет добиться выполнения подразделениями корпорации суммарного заказа R. Считается, что подразделения выпускают однородную продукцию, и в сумме надо добиться некоторого выпуска (данная задача в качестве примера рассматривалась в разделе 2.1, в настоящем разделе она описывается в рамках общей концепции исследования манипулируемости механизмов планирования). Это – первое ограничение.

Кроме того, центр хочет, чтобы заказ был выполнен с минимальными затратами (см. пример в разделе 2.1). То есть сумма затрат агентов должна быть минимальна: $\sum_{i \in N} \frac{y_i^2}{2r_i} \to \min$.

Но, центр имеет возможность управлять только путем выбора функции стимулирования, то есть зависимости вознаграждения агента от результатов его деятельности. Этот параметр λ, который называется *внутрифирменной ценой*, один и тот же для всех агентов. Агенты, зная этот параметр, будут выбирать действия, которые максимизируют их целевые функции. Агенты в данном случае независимы друг от друга, так как их целевые функции зависят только от их индивидуальных действий, поэтому задачей центра является выбор внутрифирменной цены таким образом, чтобы затраты агентов были минимальны, было выполнено суммарное действие, и агенты выбирали действия, исходя из максимизации своих целевых функций.

Опишем поведение агента, вычислив точку максимума его целевой функции. Целевая функция агента вогнутая, имеет единственный максимум. Продифференцировав, найдем зависимость действия, выбираемого агентом, от параметра λ: $y_i^*(\lambda) = r_i\ \lambda$, $i \in N$. Получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \lambda^2 \sum\limits_{i \in N} \dfrac{r_i}{2} \to \min \\ \lambda \sum\limits_{i \in N} r_i = R \end{cases}$$

Обозначим $\sum\limits_{i \in N} r_i = H$. В этой задаче не остается никаких свободных переменных, так как ограничение однозначно определит λ, а значение λ, определенное из ограничения, даст значение целевой функции: а именно, λ должно быть равно отношению $\lambda = \dfrac{R}{H}$. Оптимальным значением целевой функции является величина $\dfrac{R^2}{2H}$. То есть центр имеет полную централизацию, агентам назначаются планы, и агентам выгодно их выполнять. Остается только понять, какие планы назначать агентам, чтобы достичь минимума затрат агентов при выполнении программы суммарного выпуска. Решая эту задачу, получим следующее.

Запишем лагранжиан (μ – множитель Лагранжа):

$$\sum_{i \in N} \frac{y_i^2}{2r_i} - \mu\Big(\sum_{i \in N} y_i - R\Big) \to \min .$$

Тогда: $\dfrac{y_i}{r_i} - \mu = 0, \quad i \in N$, $y_i = \mu\, r_i$, $\mu = \dfrac{R}{H} = \lambda$.

Следовательно, $y_i^* = r_i \dfrac{R}{H}$, $i \in N$, то есть оптимальное действие агента пропорционально его типу.

Таким образом, сформулированы две разные задачи и получены одинаковые решения. Первая задача: центру необходимо выбрать такую внутрифирменную цену, чтобы сумма затрат агентов была минимальна, при условии, что агенты выбирают свои действия из условия максимизации своих целевых функций. Вторая задача: найти оптимальный набор планов, таких, что сумма этих планов равна R, а сумма затрат агентов минимальна. В результате множитель Лагранжа в этой задаче – внутрифирменная цена ($\mu = \lambda$). Интересно, что в данной модели оптимальной оказалась пропорциональная система стимулирования, и, более того, оптимальной оказалась система стимулирования, в которой ставки оплаты для всех агентов одинаковы (такая система стимулирования называется *унифицированной*). Ведь можно было бы каждому агенту назначать свою цену, но оптимальна одинаковая цена для всех агентов.

Известна следующая задача: выполняется некоторый проект и необходимо сократить критический путь (время выполнения проекта). Тогда тем агентам, кто выполняет критические операции, нужно дополнительно доплачивать, чтобы они сокращали время выполнения операций, а в сумме они должны сократить длительность проекта на заданную величину. Если участники проекта, выполняющие критические операции, имеют квадратичные затраты, а за единицу сокращения времени им платят λ, то получается такая же задача с аналогичным решением.

Естественно, результат, который мы получили: решения задач совпадают, оптимальным является система стимулирования, когда ставки всех агентов одинаковы (унифицированная система стимулирования) – справедлив только в рамках тех предположений, которые введены выше, а именно: в данной модели существенным является предположение о виде функций затрат агента (квадратичная функция). Это свойство степенных функций дает в экономико-математических моделях много хороших свойств:

1) оптимальность унифицированной системы стимулирования (оптимальность единой ставки оплаты);

2) возможность решения задач агрегирования, то есть, решая задачи минимизации затрат с данным набором агентов с характеристиками r_i, получили, что затраты на выполнение данного заказа имеют такой же вид, что и затраты одного агента с характеристикой H – все агенты могут быть заменены на одного агента, действие которого равно сумме их действий, и тип которого равен сумме их типов.

Такие свойства присущи квадратичным функциям, функциям типа Кобба-Дугласа: $\frac{1}{\alpha} r_i^{1-\alpha} y_i^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$. Это можно доказать и для функций более общего вида: $r_i \varphi(\frac{y_i}{r_i})$, где $\varphi(\cdot)$ – возрастающая выпуклая функция, равная нулю в нуле (докажите самостоятельно).

Выше считалось, что все параметры известны, и задача решалась в рамках предположения, что, в частности, известны параметры r_i функций затрат агентов. Рассмотрим задачу, когда информацией о типах агентов r_i центр не обладает. Обозначим s_i – сообщение i-го агента о своем типе.

Центр на основании сообщений агентов решает задачу планирования, то есть определяет, какими должны быть вектор планов $x(s)$ и значение внутрифирменной цены $\lambda(s)$ в зависимости от сообщений агентов.

Первое, что приходит в голову – воспользоваться решениями задач, которые получены при полной информированности о функциях затрат агентов. То есть центр может подставить сообщения агентов в параметры механизмов, которые мы определили, решая задачу в условиях полной информированности, и назначать планы в соответствии с полученными механизмами.

Данный путь приведет к тому, что значение λ будет следующим: $\lambda(s) = \frac{R}{\sum_{i \in N} s_i}$, план, назначаемый i-му агенту будет равен (подставляем вместо типов сообщения): $x_i(s) = \frac{s_i}{\sum_{j \in N} s_j} R$, $i \in N$.

Получили так называемый *механизм внутренних цен*, который похож на механизм пропорционального распределения ресурса. Но информация, сообщаемая центру, зависит от агентов. Рассмотрим их целевые функции, подставив в них зависимости $\lambda(s)$ и $x_i(s)$ для того, чтобы понять, будет ли агенту выгодно выполнять назначенный план, и какую информацию ему будет выгодно сообщать:

$$f_i(\lambda, s) = \frac{R^2 s_i}{(\sum_{j \in N} s_j)^2} - \frac{s_i^2 R^2}{2(\sum_{j \in N} s_j)^2 r_i} = \frac{R^2}{(\sum_{j \in N} s_j)^2}(s_i - \frac{s_i^2}{2r_i}), \ i \in N.$$

Получили целевую функцию, которая зависит не от действий, а от сообщений агентов. Какие сообщения будет делать агент, чтобы максимизировать свою целевую функцию?

Будем искать максимум целевой функции i-го агента по его сообщению s_i. Для дифференцирования неудобен знаменатель, так как он тоже включает в себя s_i. Избавляются от этого «недостатка» введением *гипотезы слабого влияния*: предположим, что агентов достаточно много, то есть так много, что каждый агент своим сообщением практически не влияет на общий для всех агентов управляющий параметр – внутрифирменную цену. Знаменатель целевой функции тогда не будет зависеть от сообщения отдельного агента (сумма сообщений является «константой»). Получим, что $s_i = r_i$, $i \in N$, то есть сообщение достоверной информации выгодно всем агентам – механизм является неманипулируемым. Итак, для механизма внутренних цен выполняется:

1) требование сообщения агентами достоверной информации;

2) балансовое ограничение: сумма действий равна требуемой величине;

3) суммарные затраты агентов минимальны.

4.5. Механизмы экспертизы

Экспертиза – выявление свойств объекта, процесса, явления путем опроса экспертов. Руководитель, принимающий решения, не может быть универсалом, обладать исчерпывающей информацией обо всех сторонах жизни, поэтому ему приходится привлекать экспертов.

Эксперты имеют свои предпочтения, поэтому может сложиться ситуация, когда при проведении экспертизы эксперт будет сообщать недостоверную информацию.

Это может происходить, например, в следующих случаях. Пусть собрались эксперты для принятия решения в некоторой области. В ходе обсуждения один из экспертов видит, что решение, которое они собираются принять, сильно отличается от того, что он считает нужным сделать. Например, принимают решения, куда вкладывать деньги университета. Один из деканов считает, что нужно покупать вычислительную технику. Но чувствует, что сейчас примут решение о ремонте. И если этот декан раньше считал, что 30 % можно потратить на ремонт, а 70 % – на закупку техники, то он скажет: «Ничего не нужно на ремонт, давайте все отдадим на компьютерную технику». Тем самым исказив информацию (сообщив не свое истинное мнение).

Это тем более существенно, если эксперты решают (или готовят информацию для принятия решений), как разделить деньги между ними или субъектами, интересы которых они лоббируют. Искажение может происходить по благородным и неблагородным мотивам. С точки зрения математического моделирования важно, что искажение информации может иметь место, если каждый из экспертов заинтересован в том, чтобы результат экспертизы (коллективное решение) был как можно ближе к его мнению.

Предположим, что результатом экспертизы является величина $x \in [d; D]$, s_i – сообщение i-го эксперта, $s_i \in [d; D]$, r_i – истинное мнение эксперта, $r_i \in [d; D]$. Результат экспертизы – известная функция от мнения экспертов – отображение (*процедура экспертизы*) $\pi(\cdot) : [d; D]^n \to [d; D]$ множества возможных сообщений во множество возможных решений.

Условия, налагаемые на механизм экспертизы:

1) непрерывность;
2) монотонность;
3) *условие единогласия*: $\forall a \in [d; D]$ $\pi(a, a, ..., a) = a$. Если все эксперты сообщили одно и то же мнение, то это мнение должно быть принято в качестве коллективного решения.

Рассмотрим сначала пример, а потом приведем общие результаты.

Пример 4.3. Пусть результат экспертизы лежит на отрезке [0; 1], и имеются три эксперта. Мнение первого эксперта – оцениваемая величина равна 0,3, второго – 0,5, третьего – 0,7. Процедура экспертизы: берется среднее арифметическое мнений экспертов. Такая функция удовлетворяет всем трем требованиям: легко убедиться, что среднее арифметическое непрерывно, монотонно и удовлетворяет условию единогласия. Итак:

$$x \in [0; 1],\ n = 3,\ r_1 = 0{,}3,\ r_2 = 0{,}5,\ r_3 = 0{,}7,$$

$$x = \pi(s) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} s_i .$$

Эксперты будут действовать следующим образом. Пусть все эксперты сообщили правду: $s_i = r_i$. Тогда принимаемое решение будет 0,5 (среднее арифметическое) $x(\vec{r}) = 0{,}5$. Посмотрим на поведение отдельных экспертов. Каждый эксперт хочет, чтобы результат экспертизы был как можно ближе к его мнению. Второй эксперт абсолютно удовлетворен, так как результат совпадает с тем, что он хочет. Первый недоволен, так как ему требуется меньший результат. Третий эксперт также недоволен, так как он хочет, чтобы результат был больше.

Следовательно, так как функция монотонна, то первый эксперт будет уменьшать сообщение, а третий – увеличивать. Пусть первый говорит 0, второй – 0,5, третий – 1. Тогда результат – 0,5, то есть не изменился, так как насколько первый уменьшил свое сообщение, настолько третий увеличил: $s_1 = 0$, $s_2 = 0{,}5$, $s_3 = 1$.

Данный вектор сообщений является равновесием Нэша игры экспертов, так как второй эксперт сообщение менять не будет, первый хотел бы сделать результат поменьше, но сделать этого не может, так как сообщает минимум, третий хотел бы сделать результат побольше, но сделать этого не может, так как сообщает максимум. Аналогично в других ситуациях равновесия: кто хочет меньше – не может, так как «упирается» в нижнее ограничение; кто хочет больше – не может, так как «упирается» в верхнее ограничение. •

Значит, в общем случае агенты сообщают недостоверную информацию. Спрашивается, можно ли сделать что-то, чтобы побудить их сообщать свои истинные мнения?

Утверждение 4.3. (аналогично утверждению 4.1 для механизмов распределения ресурса).

1) если в равновесии решение оказывается больше, чем мнение некоторых экспертов: $x^* > r_i$, то эти эксперты в равновесии будет сообщать минимальную оценку: $s_i^* = d$;

2) если в равновесии решение оказывается меньше, чем мнение некоторых экспертов: $x^* < r_i$, то эти эксперты в равновесии будет сообщать максимум: $s_i^* = D$;

3) если в равновесии некоторые эксперты сообщают мнение, не равное границам отрезков: $s_i^* \in (d; D)$, то это значит, что принимаемое решение их устраивает: $x^* = r_i$.

Опираясь на утверждение 4.3, можно построить равновесие в механизме экспертизы и исследовать его.

Упорядочим экспертов по возрастанию их мнений: $r_1 \le r_2 \le ... \le r_n$. В ситуации, если на отрезке [d; D] было принято некоторое решение, то в соответствии с утверждением 4.3 те эксперты, мнения которых расположены левее принятого решения, будут сообщать нижнюю границу, те, кто правее – верхнюю. Значит, вектор равновесных сообщений будет иметь вид:

$$s^* = (d, d, ..., d, s_k^*, D, D, ..., D).$$

Эксперты с «маленькими» номерами хотят сдвинуть равновесие влево и сообщают минимальные заявки; быть может, какой-то эксперт с номером k сообщает s_k^* из отрезка [d; D], эксперты с большими номерами хотят сдвинуть равновесие вправо и сообщают максимальные заявки.

Равновесное сообщение s_k^* должно быть таким, чтобы выполнялось: $\pi(d,...,d,s_k^*,D, ..., D) = r_k$.

Данное уравнение позволяет найти вектор равновесных сообщений агентов. Но здесь неизвестно, на какой позиции находится s_k: сколько агентов сообщают максимальное значение, а сколько – минимальное, а какой (один или ни одного) эксперт сообщает отличную от границ оценку. Если центр будет это знать, то, подставив s_k, решив это уравнение, он сможет найти вектор равновесных сообщений.

В рассмотренном выше примере k-ым экспертом является второй. Он рассчитывает, если первый говорит – 0, а третий – 1, то, что необходимо сказать ему, чтобы итоговое решение было 0,5? Сообщение должно быть 0,5. Такой эксперт называется диктатором. Чтобы найти его номер в общем случае, введем последовательность чисел:

$$w_i = \pi(\underbrace{d,...,d}_{i},\underbrace{D,...,D}_{n-i}), \quad i = \overline{0,n}.$$

Фиксируем число экспертов, сообщающих минимальные мнения, остальные сообщают максимальные. Варьируя число экспертов, которые сообщают минимальные заявки, от 0 до n, получаем убывающую последовательность точек. Точка w_0 совпадает с правой границей D, поскольку, если все сообщили правую границу, то в силу условия единогласия такое решение и будет принято. Аналогично, если все сообщили нижнюю оценку d, то решение равно $w_n = d$.

Имеются две последовательности чисел: первая – возрастающая последовательность истинных мнений экспертов $\{r_i\}$; вторая – убывающая последовательность точек $\{w_i\}$. Утверждается, что рано или поздно эти последовательности пересекутся. Найдем крайнюю правую точку пересечения этих последовательностей, то есть нужно взять минимум из этих двух чисел, соответствующих одному и тому же номеру, и взять максимум по всем номерам. Следовательно, существует эксперт с номером: $k = \max_{i=\overline{1,n}} \min (r_i, w_{i-1})$.

В рассмотренном выше примере: для первого агента – минимум из его мнения и его действия равен r_1, для второго – r_2, для третьего агента происходит «поворот» – минимум равен 1/3. Максимум из этих трех точек равен 0,5. Значит, формула дает номер того эксперта, который будет диктатором. В примере $k = 2$.

Предположим, что используется не исходный – π – механизм, а экспертам предлагается следующий *прямой механизм экспертизы*: итоговое мнение будет определяться по вашим сообщениями $\{\tilde{r}_i\}$ в соответствии с процедурой (где сообщения $\tilde{r}_i$ сначала упорядочиваются по возрастанию): $\hat{x}^* = \max_i \min(\tilde{r}_i, w_{i-1})$.

Утверждение 4.4. При использовании прямого механизма экспертизы сообщение достоверной информации является доминантной стратегией экспертов.

4.6. Базовая модель теории контрактов

Рассмотрим организационную систему, состоящую из центра и одного агента. Центр продает агенту некий товар в количестве q за сумму t. Функция полезности центра $\varphi_0(t,q) = t - C(q)$. Функция $C(q)$ – стоимость производства товара для центра – дважды дифференцируемая выпуклая функция, $C'(0) = 0$, $C'(\infty) = \infty$. Функция полезности агента $\varphi_1(t,q,\theta) = u(\theta,q) - t$. $\theta \in \Theta = [\underline{\theta};\overline{\theta}]$ – положительный параметр, *тип агента*. Функция $u(\theta,q)$ – полезность товара для агента – возрастает и вогнута по q и возрастает по θ.

Центру известно множество Θ и вероятностное распределение типа агента на этом множестве, причем интегральная функция распределения $F(\theta)$ дифференцируема – $f(\theta) = F_\theta(\theta)$.

Задача центра – максимизировать свою ожидаемую полезность:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [t(\theta) - C(q(\theta))] f(\theta) d\theta \to \max_{t(\cdot), q(\cdot)}$$

На основании *принципа выявления*[20] строится неманипулируемый механизм – *«меню» контрактов* $\{q(\cdot), t(\cdot)\}$, зависящий от сообщаемой агентом оценки своего типа.

Необходимые условия неманипулируемости механизма имеют следующий вид:

$$\begin{matrix} (IC_1) \\ (IC_2) \end{matrix} \quad \forall \theta \in \Theta, \begin{cases} \dfrac{dt}{d\theta}(\theta) = \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(q(\theta), \theta) \dfrac{dq}{d\theta}(\theta), \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial q \partial \theta}(q(\theta), \theta) \dfrac{dq}{d\theta}(\theta) \geq 0. \end{cases}$$

При выполнении *условий Спенса-Мирлиса* [19, 20]:

$$\forall q, \forall \theta \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial \theta}(q, \theta) > 0,$$

доказано, что функция $q(\theta)$ является неубывающей функцией своего аргумента.

Предполагается, что $\forall q, \forall \theta, \ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(q, \theta) > 0$. Вводится функция прибыли агента при использовании оптимального неманипулируемого механизма в зависимости от его типа – $v(\theta) = u(q(\theta), \theta) - t(\theta)$. Причем, при выполнении условия IC_1, $\forall \theta \in \Theta, \ \dfrac{dv}{d\theta}(\theta) = \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(q(\theta), \theta) > 0$. Поэтому, выполнение *условий индивидуальной рациональности* агента ($\forall \theta \in \Theta, v(\theta) \geq 0$) может

[20] *Принцип выявления – западный аналог принципа открытого управления (см. выше). Для систем с одним агентом эти принципы эквивалентны.*

быть обеспечено следующим образом – $v(\underline{\theta}) = 0$, из чего следует, что: $v(\theta) = \int\limits_{\underline{\theta}}^{\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta}(q(\tau),\tau)d\tau$, и $t(\theta) = u(q(\theta),\theta) - \int\limits_{\underline{\theta}}^{\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta}(q(\tau),\tau)d\tau$.

Задача центра (построение механизма, максимизирующего его прибыль) сводится к решению следующего уравнения:

$$\frac{\partial H}{\partial q}(q^*(\theta),\theta) = 0$$

при условии

(4.3) $\frac{dq^*}{d\theta}(\theta) \geq 0$,

где $H(q(\theta),\theta) = \varphi_0(q(\theta),t(\theta))$.

Возможны два случая: ограничение (4.3) выполняется всюду как строгое неравенство или при некоторых θ ограничение (4.3) выполняется как равенство.

Первый случай очень прост: множитель Лагранжа при ограничении (4.3) равен нулю и $q(\theta)$ определяется из условия $\frac{\partial H(q(\theta),\theta)}{\partial \theta} = 0$, то есть:

(4.4.) $C_q(q) = u_q(\theta, q(\theta)) - \frac{1}{h(\theta)} u_{q\theta}(\theta, q(\theta))$,

где $h(\theta) = \frac{f(\theta)}{1 - F(\theta)}$.

Каждый тип агентов получает свой контракт ($q(\theta)$ строго возрастает по θ). Таким образом, все типы, кроме самого высокого, получают уровень q меньше оптимального, а самый высокий тип получает эффективное количество.

Если же хотя бы при некоторых θ в ограничение (4.3) выполняется как равенство, ситуация гораздо сложнее. Для решения задачи нужно использовать принцип максимума Понтрягина. Рассмотрим динамическую задачу максимизации:

$$\max_{q(\theta)} = \int\limits_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} H(q(\theta),\theta) f(\theta) d\theta,$$

где θ — аналог времени, q – фазовая переменная, изменяющаяся по закону $\frac{dq}{d\theta} = \omega$, а ω – управление, ограниченное снизу: $\omega \geq 0$.

Как правило, задачу решают следующим образом. Сначала предполагают, что контракт разделяющий, и вычисляют $q(\theta)$ из (4.4). Если полученная функция $q(\theta)$ не убывает, то задача решена, оптимальный *контракт разделяющий*. Если же полученная функция имеет убывающие участки, но необходимо решать изложенную выше задачу оптимального управления. При этом некоторые агенты с различными типами получат одинаковые контракты, то есть равновесие частично *смешивающее*.

Пример 4.4. Пусть $C(q) = q^2 / 2$, $u(\theta, q) = \theta q$ а тип агента распределен равномерно на множестве допустимых значений –

$$f(\theta) = \frac{1}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}.$$

Тогда получаем, что

$$t(\theta) = \theta q(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\tau) d\tau,$$

а $q(\theta)$ определяется из решения уравнения 4.4:

$$q(\theta) = 2\theta - \overline{\theta}$$

С учетом требований $q(\theta) \geq 0$ - покупателю может продаваться лишь положительное количество товара получаем следующее меню контрактов: для $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta} / 2]$ - $\{0, 0\}$, для $\theta \in [\overline{\theta} / 2, \overline{\theta}]$ - $\{q(\cdot), t(\cdot)\}$:

$$q(\theta) = 2\theta - \overline{\theta},\ t(\theta) = \theta^2 - (\overline{\theta} - \utilde{\theta})\utilde{\theta},$$

где $\utilde{\theta} = \max[\underline{\theta}, \overline{\theta} / 2]$. •

Итак, стандартная модель теории контрактов, рассмотренная выше, может быть применена для формирования гибкой шкалы цен на товар производителя – монополиста. Выставляя на продажу различные модификации своей продукции по различным ценам (что и является тем самым «меню» контрактов) производитель охватывает различные группы пользователей. Классический пример такого товара – вино. Чем дольше срок его выдержки, тем выше качество вина. Ценители вина готовы покупать более качественное вино по более высокой цене, неискушенные потребители готовы довольствоваться менее качественным продуктом по более низкой цене.

Используя модель теории контрактов, производитель может оптимизировать свой ожидаемый доход от продажи своего товара.

Но, варьироваться может не только качество товара, но и его объем. Чем большее количество товара приобретает покупатель, тем ниже его удельная стоимость. Зависимость цены товара от приобретаемого количества и является тем самым меню контрактов, которое может быть получено с помощью стандартной модели теории контрактов. Основной проблемой, возникающей при решении практических задач, является идентификация понятия типа покупателя и возможных пределов его значений.

4.7. Конкурсные механизмы

Непрерывные конкурсы. При обсуждении механизмов обратных приоритетов подчеркивалось, что ресурс распределяется пропорционально эффективности $\xi_i = \varphi_i(x_i, r_i) / x_i$ его использования агентами. В конкурсном механизме ресурс получают только победители конкурса (на всех агентов ресурса может не хватить).

Предположим, что агенты сообщают центру две величины: заявку на ресурс s_i и оценку ξ_i ожидаемой эффективности его использования. Ожидаемый эффект для ОС в целом от деятельности i-го агента в этом случае равен: $w_i = \xi_i s_i$, $i \in N$. Упорядочим агентов в порядке убывания эффективностей: $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \ldots \geq \xi_n$.

Понятно, что агенты могут наобещать золотые горы, лишь бы получить финансирование. Поэтому при использовании конкурсных механизмов центр должен организовать действенную систему контроля за выполнением взятых обязательств. Введем систему штрафов: $\chi_i = \alpha\,(\xi_i s_i - \varphi_i(s_i))$, $\alpha > 0$, $i \in N$, пропорциональных отклонению ожидаемой эффективности $\xi_i s_i = w_i$ от реальной – $\varphi_i(s_i)$. Отметим, что величина $(\xi_i s_i - \varphi_i(s_i))$ характеризует обман, на который сознательно идет агент ради победы в конкурсе.

Целевая функция агента имеет вид:

$$f_i(\varphi_i, \xi_i) = \mu \varphi_i(s_i) - \alpha\left[\xi_i s_i - \varphi_i(s_i)\right], \; i \in N,$$

где μ – доля эффекта, остающаяся в распоряжении агентов (то есть $\mu\,\varphi_i(s_i)$ – его доход). Отметим, что агент штрафуется только в случае, если $\xi_i s_i > \varphi_i(s_i)$. Если реальная эффективность оказалась выше ожидаемой, то штрафы равны нулю.

Ресурс R, имеющийся в распоряжении центра, распределяется следующим образом: первый агент (агент, имеющий максимальную эффективность) получает ресурс в запрашиваемом объеме s_1. Затем получает ресурс (в объеме s_2) агент с меньшей (второй по величине) эффективностью и так далее, пока не закончится весь ресурс. То есть центр раздает ресурс в требуемом объеме в порядке убывания эффективностей до тех пор, пока не закончится ресурс. Агенты, получившие ресурс в полном объеме, называются *победителями конкурса*. Существенным при этом является то, что некоторые агенты (например, последний (в упорядочении по эффективности) из победителей конкурса) могут получить ресурс не в полном объеме и, тем не менее, принести определенный эффект. Поэтому рассматриваемые конкурсы называются *непрерывными*.

Отметим, что при использовании такой процедуры победа в конкурсе зависит только от величины эффективности ξ_i и не зависит от величины заявки s_i. Поэтому агенты будут стремиться максимизировать свои целевые функции, то есть закажут такое количество ресурса, чтобы в случае победы значение их целевой функции было максимально.

Обозначим m – максимальный номер агента, победившего в конкурсе (то есть победителями являются агенты с номерами $j = \overline{1, m}$). Нетрудно показать, что все победители сообщат одинаковые оценки эффективности, то есть $\xi_j^* = \xi^*$, $j = \overline{1, m+1}$. Более того, при достаточно общих предположениях о функциях штрафов конкурсные механизмы обеспечивают оптимальное распределение ресурса [3].

Дискретные конкурсы. Наблюдаемая в настоящее время распространенность, если не сказать «мода», использования на практике всевозможных конкурсов, а также приводимые для обоснования их целесообразности качественные рассуждения наталкивают на мысль – быть может честное соревнование действительно является панацеей от многих, если не всех, бед. На самом деле, формальный анализ конкурсных механизмов (которые в случае неделимых объектов конкурса называются *тендерами*, или *дискретными конкурсами*) показывает, что не все так просто.

Более корректно тендером (дискретным конкурсом) называется конкурс, в котором победители получают в точности заявленную величину (ресурса, финансирования, выгодный проект и т.д.), а проигравшие не получают ничего. Эффективность участника определяется как отношение оценки социально-экономического эффекта (известной, например, в результате объективной экспертизы) к сообщенной участником оценке (требуемого ресурса, затрат и т.д.). Основная идея *простых конкурсов* заключается в упорядочении участников в порядке убывания эффективностей и выделения им ресурса в требуемом объеме последовательно, пока не закончится весь ресурс. Победителями конкурса являются участники, получившие ресурс. К сожалению, гарантированная эффективность простых конкурсных механизмов равна нулю (точнее – может быть сколь угодно мала) [15].

Несколько лучше обстоит дело в *прямых конкурсных механизмах*, в которых организатор конкурса, используя сообщенные оценки, решает задачу о ранце [4] (ищет оптимальную с точки зрения суммарного эффекта комбинацию победителей) – гарантированная эффективность прямых конкурсов равна 0,5.

Подробное описание формальных моделей конкурсных механизмов приведено в [15].

Задачи и упражнения к главе 4

4.1. Два агента – например, регионы, разделенные рекой – финансируют строительство моста через эту реку. Затраты на строительство этого моста $c = 1$. Используется следующий механизм распределения затрат. Каждый агент сообщает оценку s_i своего дохода h_i от использования моста. Мост строится только когда $s_1 + s_2 \geq c$.

4.1.1. 1) Покажите, что, если истинные дохода агентов равны 1.4 и 0.6, соответственно, и используется принцип пропорционального распределения затрат $x_i(s) = \dfrac{s_i}{s_1 + s_2} c$, то сообщение истинных доходов не является равновесием Нэша.

2) Найдите все равновесия Нэша.

3) Найдите оптимальные стратегии при условии, что агенты знают истинные доходы друг друга и один из них обладает правом первого хода.

4.1.2. Предложите и исследуйте в условиях задачи 4.1 механизм распределения затрат, отличный от пропорционального [2, 3].

4.1.3. Существует ли для пропорционального механизма распределения затрат эквивалентный механизм открытого управления (ОУ) [15].

4.2*. Приведите пример многоэлементной организационной системы с сообщением информации, в которой не существует эквивалентного прямого механизма [16, 17].

4.3. На примере задачи стимулирования в организационной системе с одним агентом в условиях неполной информированности центра о типе агента $r \geq 0$: $\varphi(y) = y - \sigma(y)$ – функция предпочтения центра; $f(y, r) = \sigma(y) - \dfrac{y^2}{2r}$ – функция предпочтения агента; покажите возможность построения для произвольного механизма планирования механизма открытого управления не меньшей эффективности [3, 10].

Какова будет эффективность системы, если центру достоверно известны типы агентов?

4.4. Целевые функции агентов имеют вид $f_i(\lambda, x_i, r_i) = \varphi_i(x_i, r_i) - \lambda\ x_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\varphi_i(x_i, r_i)$ – функции эффекта, вогнутые по получаемому количеству ресурса x_i, λ – цена за ресурс.

Покажите, что при гипотезе слабого влияния механизм ОУ оптимален по критерию суммарного эффекта [3].

4.5*. Докажите что, если в многоэлементной организационной системе с квазиоднопиковыми функциями предпочтения агентов назначаемые им планы монотонны по их сообщениям и зависят от единственного скалярного параметра, выбираемого центром, то для любого механизма существует неманипулируемый механизм не меньшей эффективности [17].

4.6. Организационная система состоит из центра и 5 агентов. Множество возможных значений типов агентов (количество ресурса, при котором достигается максимальное значение функции полезности агента) – $\Omega = [0; 10]$. Центр обладает ресурсом в количестве $R = 10$. Определите равновесную по Нэшу ситуацию для механизма прямых приоритетов

$$x_i = \begin{cases} s_i, \sum\limits_i s_i \leq R, \\ \dfrac{s_i}{\sum\limits_i s_i} R, \sum\limits_i s_i > R, \end{cases} \tag{4.5}$$

где s_i – сообщение i-го агента центру о своем типе, при следующих значениях типов агентов:

1) $r = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;
2) $r = \{1, 1, 2, 8, 8\}$;
3) $r = \{5, 6, 7, 8, 9\}$;
4) $r = \{7, 8, 9, 9, 9\}$;
5) $r = \{1, 1, 2, 3, 4\}$.

4.7*. Проанализируйте, чем качественно отличаются равновесия, соответствующие пп. 1-4 задачи 4.6.

4.8. Определите равновесную по Нэшу ситуацию для механизма распределения ресурса по принципу прямых приоритетов:

$$(4.6)\quad x_i = \begin{cases} s_i, \sum\limits_i s_i \le R \\ \min(s_i, \gamma\eta_i(s_i)), \sum\limits_i s_i > R \end{cases},$$

где $\eta_i(s_i) = A_i s_i$, $\gamma : \sum\limits_i \min(s_i, \gamma\eta_i(s_i)) = R$. Функции полезности агентов: $\varphi_i(x_i, r_i) = 2\sqrt{r_i x_i} - x_i$, $i = \overline{1, n}$.

4.9*. Взяв числовые значения, соответствующие пп. 1-4 задачи 4.6, проанализируйте, чем качественно отличаются равновесия, соответствующие механизмам распределения ресурса (4.5) и (4.6).

4.10. Исследуйте эффективность следующего механизма распределения ресурсов: $s_i = \min(s_i, A_i\gamma(s_i))$, где $\gamma(s) : \sum\limits_i x_i = R$, предполагая, что $\sum\limits_i r_i > R$, $A_i > 0$. Исследуйте неманипулируемость данного механизма.

4.11. Докажите, что все анонимные механизмы распределения ресурса, удовлетворяющие предположениям, введенным в разделе 4.3, эквивалентны [2].

4.12*. Для следующего механизма распределения ресурса между двумя агентами:

$$x_1 = \frac{3}{2}\frac{s_1}{\frac{3}{2}s_1 + s_2},\ x_1 = \frac{s_1}{\frac{3}{2}s_1 + s_2},\ s_i \in [0, 1],\ i = \overline{1, 2},$$

постройте *множества диктаторства* на плоскости векторов $r = (r_1; r_2)$ точек пика функций полезности агентов [17].

4.13. Для механизма активной экспертизы $\pi(s)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i$ с пятью экспертами определите равновесную по Нэшу ситуацию, если множество возможных значений заявок экспертов $\Omega=[10,20]$, а истинные мнения экспертов имеют следующие значения:

1) r = {10, 10, 15, 20, 20};

2) r = {10, 12, 13, 17, 18};

3) r = {15, 15, 16, 19, 20}.

Докажите утверждение 4.4 и проиллюстрируйте на данном примере.

4.14*. Докажите, что процедура активной экспертизы $\pi(s)$, оптимальная в смысле близости к среднему арифметическому: $\pi^0(s)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i$, заключается в разбиении отрезка [d; D] на n равных отрезков [3].

Функции полезности экспертов: $\varphi_i(x,r_i)=-|x-r_i|$, $i=\overline{1,n}$. Истинные мнения экспертов: $r_i\in[d;D]\,,i=\overline{1,n}$. Сообщаемая экспертами оценка: $s_i\in[d;D]\,,i=\overline{1,n}$.

Оптимальность процедуры активной экспертизы $\pi^*(s)$ в смысле близости к процедуре $\pi^0(s)$ понимается как $\max\limits_{r\in[d,D]}|\pi^*(s^*)-\pi^0(s)|\to\min$, где s* – равновесные сообщения экспертов.

4.15*. Постройте последовательность $\{w_i\}$ и выпишите вид эквивалентного прямого механизма для процедуры активной экспертизы, оптимальной в смысле близости (см. задачу 4.14) к [3]:

$$\pi^0(s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i s_i\text{, где }0\le\alpha_i\le1,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\ s_i\in[0,1].$$

4.16*. Для заданного механизма активной экспертизы с двумя экспертами постройте на плоскости $r=(r_1,r_2)$ векторов точек пика функций предпочтения экспертов множества диктаторства [17]:

$$x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i^2}\,,\ s_i\in[0,1],\ r_i\in[0,1],\ i=\overline{1,2}.$$

4.17. В оргсистеме с n агентами, имеющими функции затрат типа Кобба-Дугласа с параметрами $\alpha=2$, $r=1$, центр выплачивает вознаграждение агентам пропорционально объемам выполненных работ: $\sigma_i = \lambda\, y_i$. Общий объем работ R_0 фиксирован.

Постройте механизм распределения объемов работ на основании внутренних цен. Определите цены объемов работ для каждого агента в зависимости от его заявки.

Исследуйте манипулируемость механизма внутренних цен в случаях а) гипотеза слабого влияния не выполнена и б) гипотеза слабого влияния выполнена.

Что изменится, если функции затрат агентов линейны? Вогнуты?

4.18. Для оргсистемы, состоящей из трех агентов, имеющих функции затрат $c_i(y_i, r_i) = \dfrac{y_i^2}{2r_i}$ $r_i \in \Omega = [0, 1]$, $i = \overline{1, 3}$, и центра, которому необходимо, чтобы агенты выполнили объем работ $R = 1$:

1) постройте механизм внутренних цен;

2) определите равновесные по Нэшу заявки агентов;

3) оцените эффективность механизма внутренних цен;

Вектор типов агентов: $r = \{0.3, 0.6, 0.8\}$, центру известно только множество Ω возможных значений типов агентов.

Какова будет эффективность системы, если центру достоверно известны типы агентов?

4.19*. Представьте задачу распределения ресурсов как задачу обмена, и постройте модель соответствующей обменной схемы [10].

4.20*. Представьте задачу стимулирования как задачу обмена, и постройте модель соответствующей обменной схемы [10].

4.21*. Постройте механизм открытого управления $\pi(s) = (x_1(s), x_2(s))$ для задачи обмена в оргсистеме с одним агентом в условиях неполной информированности центра о типе агента $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, $r_{\min} > 0$. Считайте, что: $f_0(x_1, x_2) = x_2 - x_1$ – функция полезности центра; $f_1(x_1, x_2, r) = x_1 - \dfrac{x_2^2}{2r}$ – функция полезности агента.

Задача центра – максимизация ожидаемой полезности от обмена $Ef_0(\pi(s)) \to \max\limits_{\pi(s)}$.

Центру известно вероятностное распределение типов агента на отрезке $[r_{\min}, r_{\max}]$: $F(r) = \dfrac{r - r_{\min}}{r_{\max} - r_{\min}}$;

Весь ресурс первого типа в неограниченном количестве сосредоточен у центра, весь ресурс второго типа в неограниченном количестве сосредоточен у агента.

4.22*. Постройте соответствующий прямой механизм планирования для механизма:

$$g_1(s) = s_1 + 2\, s_2,\ g_2(s) = s_1 + s_2,\ s_i \in [0, 1],\ i = \overline{1, 2},\ (r_1, r_2) \in R^2,$$

и докажите его неманипулируемость, используя метод множества диктаторства [17]. Найдите равновесные по Нэшу сообщения агентов в зависимости от вектора (r_1, r_2) их типов.

4.23. Центр предполагает построение механизма планирования объемов работ начальника отдела $i = 1$ и подчиненных $i = 2, 3$ согласно следующему механизму планирования: $s_i \in [0; 1]$, $x_i > 0$, $g_1(s) = s_1 + \alpha(s_2 + s_3)$, $g_i(s) = \beta s_1 + s_i$, $\alpha > 0$, $\beta < 1/4$. Коэффициенты α и β характеризуют влияние увеличения заявок на объем работ подчиненных на план работ начальника и наоборот.

Определите, при каких условиях для такого механизма планирования возможно построение эквивалентного прямого механизма.

4.24*. Механизм планирования в системе с двумя агентами имеет следующий вид:

$$g_1(s) = s_1 + \cos(\frac{3\pi}{2} s_2),\ g_2(s) = s_1 + s_2,\ s_i \in [0, 1],\ i = \overline{1, 2}.$$

Покажите, что для данного механизма невозможно построить эквивалентный прямой механизм.

Найти множество возможных сообщений агентов, максимально близкое к начальному, для которого становится возможным построение эквивалентного прямого механизма планирования [17].

4.25. Докажите, что механизм последовательного распределения ресурса является эквивалентным прямым механизмом для анонимного механизма пропорционального распределения ресурса.

4.26*. Исследуйте манипулируемость и эффективность механизмов обратных приоритетов [3].

4.27*. Приведите определения следующих понятий и содержательные примеры: механизм планирования, манипулирование информацией, неманипулируемый механизм, прямой механизм, функция предпочтения, тип агента, принцип открытого управления, децентрализующие множества, условие совершенного согласования, гипотеза слабого влияния, однопиковая функция, механизм пропорционального распределения, диктатор, анонимный механизм, механизм последовательного распределения, механизм внутренних цен, внутрифирменная цена, функция Кобба-Дугласа, механизм экспертизы, условия Спенса-Мирлиса, условие индивидуальной рациональности, конкурсный механизм, конкурс (непрерывный, дискретный, прямой, простой)

Литература к главе 4

1. *Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977.
2. *Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А., Юсупов Б.С. Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике. – М.: ИПУ РАН, 1997.
3. *Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. – М.: Наука, 1989.
4. *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001.
5. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981.
6. *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: Синтег, 1999.
7. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. – М.: Наука, 1990.
8. *Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.
9. Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. – М.: Прогресс, 1979.
10. *Коргин Н.А. Механизмы обмена в активных системах. – М.: ИПУ РАН, 2003.
11. Крылов В.Ю. Методологические и теоретические проблемы математической психологии. – М.: Янус-К, 2000.
12. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. – М.: Мир, 1990.
13. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.
14. *Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998.
15. *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: Физматлит, 2007.

16. *Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. – М.: Синтег, 1999.
17. *Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. – М.: ИПУ РАН, 2001.
18. Рыков А.С. Модели и методы системного анализа: принятие решений и оптимизация. – М.: МИСИС, 2005.
19. Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
20. Salanie B. The Economies of Contracts. MIT Press, 1997.

ГЛАВА 5. Механизмы информационного управления в организационных системах

Управлением, в соответствии с определением, приведенным выше, называется воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения. Управляемая система с заданными составом и структурой – множество рациональных агентов, принимающих самостоятельные решения о выбираемых действиях – в рамках теоретико-игровой модели описывается множеством агентов N, совокупностью их целевых функций $(f_i(\cdot))_{i \in N}$, допустимых множеств $(X_i)_{i \in N}$ и информированностью I. Значит, управление фиксированным множеством агентов может заключаться в воздействии на: целевые функции (*мотивационное управление* [17]), допустимые множества (*институциональное управление* [15]) и информированность (*информационное управление* [19, 20]). В настоящей главе более подробно рассматривается именно информационное управление.

5.1. Модель информационного управления

С теоретико-игровой точки зрения задача управления состоит в том, чтобы сформировать для управляемых субъектов (агентов) такую игру, чтобы ее исход был наиболее благоприятным для управляющего органа (центра). Соответственно, задачу информационного управления можно неформально (качественно) сформулировать следующим образом: найти такую структуру информированности, чтобы исход рефлексивной игры (см. раздел 5.2) агентов (информационное равновесие) был бы наиболее благоприятен для центра.

Перейдем к формальной постановке задачи. Пусть на множестве действий реальных агентов и структур информированности задана целевая функция центра $\Phi(x, I)$. Пусть, далее, центр может сформировать любую структуру информированности из некоторого множества $\mathfrak{I}'$. При структуре информированности $I \in \mathfrak{I}'$ вектор действий реальных агентов является элементом множества равновесных векторов [31] $\Psi_X(I)$. Множество $\Psi_X(I)$ может быть пустым, тогда центр, ввиду отсутствия равновесия, не может рассчитывать на тот или иной исход игры. Поэтому введем множество допустимых структур, для которых существует хотя бы одно равновесие: $\mathfrak{I} = \{I \in \mathfrak{I}' \mid \Psi_X(I) \neq \varnothing\}$.

Если при заданной структуре $I \in \mathfrak{I}$ множество равновесных векторов $\Psi_X(I)$ состоит более чем из одного элемента, то обычно (см., например, [2, 3, 36]) принимается одно из следующих двух предположений:

1) *гипотеза благожелательности* (ГБ), состоящая в том, что у центра есть возможность обеспечить выбор агентами «нужного» равновесия;

2) *принцип максимального гарантированного результата* (МГР), состоящий в том, что центр рассчитывает на наихудшее для себя равновесие игры агентов.

В соответствии с ГБ и МГР получаем, соответственно, постановку задачи информационного управления в двух вариантах:

(5.1) $\max\limits_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow[I \in \mathfrak{I}]{} \max;$

(5.2) $\min\limits_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow[I \in \mathfrak{I}]{} \max.$

Разумеется, в случае, когда для любого $I \in \mathfrak{I}$ множество $\Psi_X(I)$ состоит ровно из одного элемента, (5.1) и (5.2) совпадают.

Задачу (5.1) (либо (5.2)) будем называть задачей информационного управления в форме целевой функции.

Опишем теперь задачу информационного управления в несколько иной постановке, не зависящей от целевой функции центра. Пусть центр стремится добиться от агентов выбора вектора действий $x \in X'$. Зададимся вопросом: для каких векторов x и каким образом (то есть при помощи формирования какой структуры I) центр может это сделать? Иначе говоря, вторая возможная постановка задачи информационного управления состоит в нахождении *множества достижимости* – множества векторов $x \in X'$, для каждого из которых множество структур $\Psi_I(x) \cap \mathfrak{I}$

(5.3) непусто,

либо

(5.4) состоит ровно из одного элемента,

а также соответствующих допустимых структур информированности $I \in \Psi_I(x) \cap \mathfrak{I}$ для каждого такого вектора x. Условие (5.3) соответствует ГБ, условие (5.4) – МГР.

Задачу (5.3) (либо (5.4)) будем называть задачей информационного управления в форме множества достижимости.

Еще раз подчеркнем, что вторая постановка не зависит от целевой функции центра и отражает лишь его возможность при помощи информационного управления привести систему в то или иное состояние.

Как в первой, так и во второй постановке центр может либо интересоваться, либо не интересоваться стабильностью (см. раздел 5.3) получившегося информационного равновесия. Если требуется осуществить стабильное информационное управление, то есть привести систему в стабильное информационное равновесие, то в приведенных выше постановках требуется заменить Ψ на Ψ^s, а термины «равновесие» и «равновесный» – на «стабильное равновесие» и «стабильно-равновесный» соответственно.

Моделирование информационного управления. Предлагаемая модель информационного управления представлена на Рис. 5.1.

Модель включает в себя агента (агентов) и управляющий орган – центр. Каждый агент характеризуется циклом «информированность агента $\rightarrow$ действие агента $\rightarrow$ наблюдаемый агентом результат $\rightarrow$ информированность агента», и у разных агентов эти три компоненты цикла являются, вообще говоря, различными. В то же время, и это отражает надпись «*Агент*(*ы*)» на Рис. 5.1, можно считать этот цикл общим для всей управляемой подсистемы, то есть для всего набора агентов.

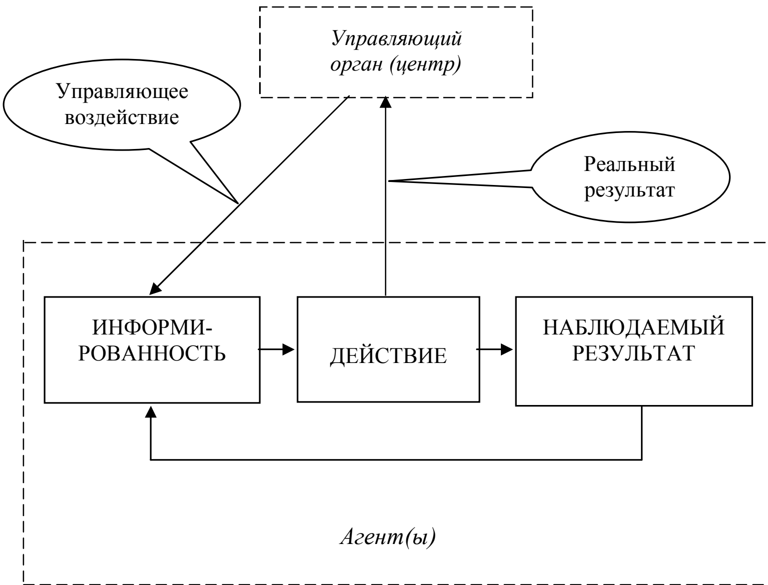


Рис. 5.1. Модель информационного управления

Что касается взаимодействия агента (агентов) и центра, то оно характеризуется:

1) информационным воздействием центра, формирующим ту или иную информированность агента (агентов)[21];

2) реальным результатом действия агента (агентов), который оказывает влияние на интересы центра.

Обсудим модель, изображенную на Рис. 5.1, более подробно.

Математическим аппаратом, моделирующим теоретико-игровое взаимодействие агентов, являются *рефлексивные игры*, в которых агенты выбирают действия на основе своих *структур информированности* – иерархии представлений о существенных параметрах ситуации («состоянии природы»), представлений о представлениях оппонентов (других агентов) и т.д. Таким образом, в терминах рефлексивных игр информированность агента моделируется при помощи его структуры информированности (соответственно, информированность всей управляемой подсистемы моделируется при помощи структуры информированности игры, являющейся объединением структур информированности агентов).

Исходя из своей структуры информированности, агент выбирает то или иное действие. Для заданной структуры информированности действия агентов являются компонентами *информационного равновесия*, являющегося решением рефлексивной игры. Информационное равновесие является обобщением равновесия Нэша – наиболее распространенной концепции решения некооперативных игр. Информированность агента о ситуации и о представлениях оппонентов может быть, вообще говоря, неадекватной. Поэтому наблюдаемый агентом результат рефлексивной игры может как соответствовать его ожиданиям, так и не соответствовать им. Соответствие определяется двумя факторами:

1) насколько адекватно информирован агент на момент выбора своего действия;

2) насколько подробную информацию о результатах игры он наблюдает.

Например, наблюдаемым результатом может быть значение его целевой функции, действия оппонентов, истинное значение неопре-

---

[21] *Отметим, что можно рассматривать и воздействие центра на наблюдаемый агентом* (*агентами*) *результат, то есть «центр* $\rightarrow$ *наблюдаемый результат» на Рис. 5.1. Однако это рассмотрение* (*в некотором смысле сближающее информационное управление с мотивационным*) *выходит за рамки настоящей работы.*

деленного параметра и пр. В общем случае агент наблюдает значение некоторой функции, зависящей от состояния природы и действий оппонентов. Эта функция называется *функцией наблюдения*, и воздействие ее значения на информированность отображено на рисунке фрагментом «наблюдаемое действие $\to$ информированность». Если все агенты наблюдают именно тот результат, на какой рассчитывают (то есть реальное значение функции наблюдения каждого агента равно ожидаемому), то естественным является предположение о том, что структура информированности не меняется. В этом случае информационное равновесие является *стабильным* (см. ниже).

Рассмотрим теперь взаимодействие агентов с центром. Осуществляя информационное управление, центр стремится к максимизации своей полезности (разумеется, это относится и к другим типам управления). Если считать, что центр может сформировать любую структуру информированности из некоторого допустимого множества, то задачу информационного управления можно сформулировать следующим образом: найти такую структуру информированности из допустимого множества структур, чтобы полезность центра в информационном равновесии была максимальной (быть может, с учетом затрат центра на формирование структуры).

Подчеркнем следующее важное обстоятельство: в рамках предлагаемой модели мы исходим из предположения о том, что центр может сформировать у агентов *любую* структуру информированности. За рамками наших рассмотрений остается вопрос о том, каким образом центру следует «убедить» агентов в том, что имеют место те или иные состояния природы и представления оппонентов.

Можно, однако, в рамках рассматриваемой модели классифицировать способы управляющего воздействия на информированность агентов для формирования той или иной структуры. Такими способами являются:

1) *информационное регулирование* – целенаправленное влияние на информацию о состоянии природы;

2) *рефлексивное управление* – целенаправленное влияние на информацию о представлениях оппонентов;

3) *активный прогноз* – целенаправленное сообщение информации о будущих значениях параметров, зависящих от состояния природы и действий агентов.

Классификация задач информационного управления. В данной главе рассматриваются двухуровневые ОС с одним центром и многими агентами в условиях неполной информированности агентов – каждый из субъектов может иметь свои представления о природе.

Задачу информационного управления будем рассматривать

1) в форме целевой функции либо множества достижимости;

2) с использованием гипотезы благожелательности (ГБ) либо принципа максимально гарантированного результата (МГР);

3) с требованием стабильности или без требования стабильности.

Выбор одного из этих восьми вариантов определяется конкретной моделируемой ситуацией. Однако в любом случае необходимым (и, как показывает опыт, наиболее сложным и трудоемким для исследователя) этапом является установление связи между структурой информированности и вектором действий агентов, то есть исследование информационного равновесия.

5.2. Рефлексивные игры

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, ..., n\}$ агентов. Если в ситуации присутствует неопределенный параметр $\theta \in \Omega$ (будем считать, что множество Ω является общим знанием), то *структура информированности* I_i (как синоним будем употреблять термины *информационная структура* и иерархия представлений) i-го агента включает в себя следующие элементы. Во-первых, представление i-го агента о параметре θ – обозначим его θ_i, $\theta_i \in \Omega$. Во-вторых, представления i-го агента о представлениях других агентов о параметре θ – обозначим их θ_{ij}, $\theta_{ij} \in \Omega$, $j \in N$. В-третьих, представления i-го агента о представлении j-го агента о представлении k-го агента – обозначим их θ_{ijk}, $\theta_{ijk} \in \Omega$, j, $k \in N$. И так далее.

Таким образом, структура информированности I_i i-го агента задается набором всевозможных значений вида $\theta_{ij_1 \dots j_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{i_1 \dots i_l} \in \Omega$.

Аналогично задается *структура информированности I игры* в целом – набором значений $\theta_{i_1 \dots i_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 \dots j_l} \in \Omega$. Подчеркнем, что структура информированности I «недоступна» наблюдению агентов, каждому из которых известна лишь некоторая ее часть (а именно – I_i).

Таким образом, структура информированности – бесконечное n-дерево (то есть тип структуры постоянен и является n-деревом), вершинам которого соответствует конкретная информированность реальных и фантомных агентов.

Рефлексивной игрой Γ_I называется игра, описываемая следующим кортежем:

(5.5) $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, I\}$,

где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, Ω – множество возможных значений неопределенного параметра, I – структура информированности.

Таким образом, рефлексивная игра [20] является обобщением понятия игры в нормальной форме, задаваемой кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}\}$, на случай, когда информированность агентов отражена иерархией их представлений (информационной структурой I). В рамках принятого определения «классическая» игра в нормальной форме является частным случаем рефлексивной игры – игры с общим знанием. В «предельном» случае – когда состояние природы является общим знанием – предлагаемая в настоящей работе концепция решения рефлексивной игры (информационное равновесие – см. ниже) переходит в равновесие Нэша.

Совокупность связей между элементами информированности агентов можно изобразить в виде дерева (см. Рис. 5.2). При этом структура информированности i-го агента изображается поддеревом, исходящим из вершины θ_i.

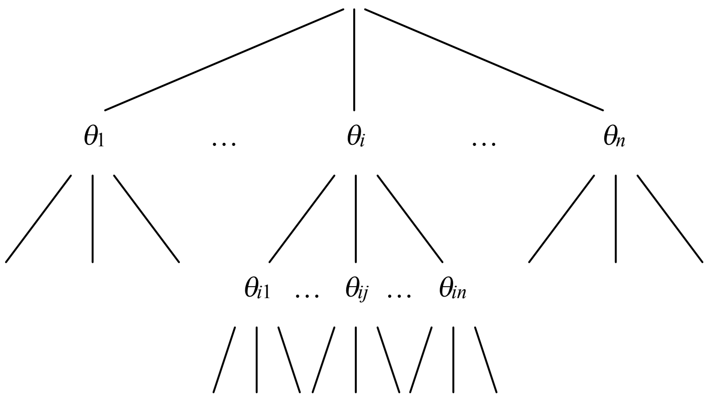


Рис. 5.2. Дерево информационной структуры

Сделаем важное замечание: в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением «точечной» структуры информированности, компоненты которой состоят лишь из элементов множества Ω. (Более общим случаем является, например, интервальная или вероятностная информированность.)

Стратегическая и информационная рефлексия. Итак, рефлексивной является игра, в которой информированность игроков не является общим знанием. С точки зрения теории игр и рефлексивных моделей принятия решений целесообразно разделять стратегическую и информационную рефлексию [30].

Информационная рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие игроки). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений игрок не принимает.

Иными словами, информационная рефлексия относится к информированности агента о природной реальности (какова игра), и о рефлексивной реальности (какой видят игру другие).
Информационная рефлексия логически предшествует рефлексии несколько иного рода – стратегической рефлексии.

Стратегическая рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты (другие игроки) в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии.
Таким образом, информационная рефлексия имеет место только в условиях неполной информированности, и ее результат используется при принятии решений (в том числе – при стратегической рефлексии). Стратегическая рефлексия имеет место даже в случае полной информированности, предваряя принятие игроком решения о выборе действия (стратегии). Другими словами, информационная и стратегическая рефлексии могут изучаться независимо, однако в условиях неполной информированности обе они имеют место.

Далее для формулировки некоторых определений и свойств нам понадобятся следующие обозначения:

Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N;

Σ – объединение Σ_+ с пустой последовательностью;

$|\sigma|$ – количество индексов в последовательности σ (для пустой последовательности принимается равным нулю), которое выше было названо длиной последовательности индексов.

Если θ_i – представления i-го агента о неопределенном параметре, а θ_{ii} – представления i-го агента о собственном представлении, то естественно считать, что $\theta_{ii} = \theta_i$. Иными словами, i-й агент правильно информирован о собственных представлениях, а также считает, что таковы и другие агенты и т.д. Формально это означает, что выполнена *аксиома автоинформированности*, которую далее будем предполагать выполненной:

$$\forall\, i \in N\; \forall\, \tau, \sigma \in \Sigma\; \theta_{\tau ii\sigma} = \theta_{\tau i\sigma}.$$

Эта аксиома означает, в частности, что, зная θ_τ для всех $\tau \in \Sigma_+$ таких, что $|\tau| = \gamma$, можно однозначно найти θ_τ для всех $\tau \in \Sigma_+$ таких, что $|\tau| < \gamma$.

Наряду со структурами информированности I_i, $i \in N$, можно рассматривать структуры информированности I_{ij} (структура информированности j-го агента в представлении i-го агента), I_{ijk} и т.д. Отождествляя структуру информированности с характеризуемым ею агентом, можно сказать, что, наряду с *n реальными* агентами (*i-агентами*, где $i \in N$) со структурами информированности I_i, в игре участвуют *фантомные агенты* (*τ-агенты*, где $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \geq 2$) со структурами информированности $I_\tau = \{\theta_{\tau\sigma}\}$, $\sigma \in \Sigma$. Фантомные агенты, существуя в сознании реальных агентов, влияют на их действия, о чем пойдет речь далее.

Определим фундаментальное для дальнейших рассмотрений понятие тождественности структур информированности.

Структуры информированности I_λ и I_μ ($\lambda, \mu \in \Sigma_+$) называются *тождественными*, если выполнены два условия:

1) $\theta_{\lambda\sigma} = \theta_{\mu\sigma}$ для любого $\sigma \in \Sigma$;

2) последние индексы в последовательностях λ и μ совпадают.

Будем обозначать тождественность структур информированности следующим образом: $I_\lambda = I_\mu$.

Первое из двух условий в определении тождественности структур прозрачно, второе же требует некоторых пояснений. Дело в том, что далее мы будем обсуждать действие τ-агента в зависимости от его структуры информированности I_τ и целевой функции f_i, которая как раз определяется последним индексом последовательности τ. Поэтому удобно считать, что тождественность структур информированности означает в том числе и тождественность целевых функций.

Назовем λ-агента τ-субъективно *адекватно информированным* о представлениях μ-агента (или, короче, о μ-агенте), если

$$I_{\tau\lambda\mu} = I_{\tau\mu} (\lambda,\ \mu \in \Sigma_+,\ \tau \in \Sigma).$$

Будем обозначать τ-субъективную адекватную информированность λ-агента о μ-агенте следующим образом: $I_\lambda >_\tau I_\mu$.

Понятие тождественности структур информированности позволяет определить их важное свойство – сложность. Заметим, что наряду со структурой I имеется счетное множество структур I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, среди которых можно при помощи отношения тождественности выделить классы попарно нетождественных структур. Количество этих классов естественно считать *сложностью структуры информированности*.

Будем говорить, что структура информированности I имеет *конечную сложность* $\nu = \nu(I)$, если существует такой конечный набор попарно нетождественных структур $\{ I_{\tau_1},\ I_{\tau_2},\ \ldots,\ I_{\tau_\nu} \}$, $\tau_l \in \Sigma_+$, $l \in \{1, \ldots, \nu\}$, что для любой структуры I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_{τ_l} из этого набора. Если такого конечного набора не существует, будем говорить, что структура I имеет бесконечную сложность: $\nu(I) = \infty$.

Структуру информированности, имеющую конечную сложность, будем называть *конечной* (еще раз отметим, что при этом дерево структуры информированности все равно остается бесконечным). В противном случае структуру информированности будем называть *бесконечной*.

Ясно, что минимально возможная сложность структуры информированности в точности равна числу участвующих в игре реальных агентов (напомним, что по определению тождественности структур информированности они попарно различаются у реальных агентов).

Любой набор (конечный или счетный) попарно нетождественных структур I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, такой, что любая структура I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, тождественна одной из них, называется *базисом* структуры информированности I.

Если структура информированности I имеет конечную сложность, то можно определить максимальную длину последовательности индексов γ такую, что, зная все структуры I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \gamma$, можно найти и все остальные структуры. Эта длина в определенном смысле характеризует ранг рефлексии, необходимый для описания структуры информированности.

Будем говорить, что структура информированности I, $\nu(I) < \infty$, имеет *конечную глубину* $\gamma = \gamma\,(I)$, если:

1) для любой структуры I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \le \gamma$;

2) для любого целого положительного числа ξ, $\xi < \gamma$, существует структура I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, не тождественная никакой из структур I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \xi$.

Если $\nu(I) = \infty$, то и глубину будем считать бесконечной: $\gamma(I) = \infty$.

Понятия сложности и глубины структуры информированности игры можно рассматривать τ-субъективно. В частности, глубину структуры информированности игры с точки зрения τ-агента, $\tau \in \Sigma_+$, будем называть *рангом рефлексии* τ-агента.

Граф рефлексивной игры. Если структура информированности имеет конечную сложность, то можно построить *граф рефлексивной игры*, наглядно показывающий взаимосвязь между действиями агентов (как реальных, так и фантомных), участвующих в равновесии.

Вершинами этого ориентированного графа являются действия x_τ, $\tau \in \Sigma_+$, отвечающие попарно нетождественным структурам информированности I_τ, или компоненты структуры информированности θ_τ, или просто номер τ реального или фантомного агента, $\tau \in \Sigma_+$.

Между вершинами проведены дуги по следующему правилу: к каждой вершине $x_{\sigma i}$ проведены дуги от $(n - 1)$ вершин, отвечающих структурам $I_{\sigma ij}$, $j \in N \setminus \{i\}$. Если две вершины соединены двумя противоположно направленными дугами, будем изображать одно ребро с двумя стрелками.

Подчеркнем, что граф рефлексивной игры соответствует системе уравнений (5.6) (то есть определению информационного равновесия), в то время как решения ее может и не существовать.

Итак, граф G_I рефлексивной игры Γ_I (см. определение рефлексивной игры выше), структура информированности которой имеет конечную сложность, определяется следующим образом:

1) вершины графа G_I соответствуют реальным и фантомным агентам, участвующим в рефлексивной игре, то есть попарно нетождественным структурам информированности;

2) дуги графа G_I отражают взаимную информированность агентов: если от одного агента (реального или фантомного) существует путь к другому агенту, то второй адекватно информирован о первом.

Если в вершинах графа G_I изображать представления соответствующего агента о состоянии природы, то рефлексивная игра Γ_I с конечной структурой информированности I может быть задана кортежем $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, G_I\}$, где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, G_I – граф рефлексивной игры.

Отметим, что во многих случаях рефлексивную игру более удобно (и наглядно) описывать именно в терминах графа G_I, а не дерева информационной структуры (см. ниже примеры графов рефлексивных игр).

5.3. Информационное равновесие

Если задана структура I информированности игры, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и фантомных). Выбор τ-агентом своего действия x_τ в рамках гипотезы рационального поведения определяется его структурой информированности I_τ, поэтому, имея перед собой эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить это его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет рефлексию). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Набор действий x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, называется *информационным равновесием* [30], если выполнены следующие условия:

(5.6) 1) структура информированности I имеет конечную сложность ν;

2) $\forall \lambda, \mu \in \Sigma \;\; I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$;

3) $\forall\, i \in N$, $\forall\, \sigma \in \Sigma$

$$x_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg}\max_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i1}^*, \ldots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^* \ldots, x_{\sigma i, n}^*) .$$

Первое условие в определении информационного равновесия означает, что в рефлексивной игре участвует конечное число реальных и фантомных агентов.

Второе условие отражает требование того, что одинаково информированные агенты выбирают одинаковые действия.

И, наконец, третье условие отражает рациональное поведение агентов – каждый из них стремится выбором собственного действия максимизировать свою целевую функцию, подставляя в нее действия других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента в рамках имеющихся у него представлений о других агентах.

В соответствии с условием 2, для определения информационного равновесия требуется решить, казалось бы, бесконечное (счетное) число уравнений и получить столько же значений x_τ^*. Однако оказывается, что на самом деле число уравнений и значений конечно.

<u>Утверждение 5.1.</u> Если информационное равновесие x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, существует, то оно состоит из не более чем ν попарно различных действий, а в системе (5.6) содержится не более чем ν попарно различных уравнений.

Доказательство. Пусть x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, – информационное равновесие. Тогда из конечности структуры информированности и условия 2 сразу следует, что попарно различных чисел x_τ^* не более ν.

Рассмотрим две любые тождественные структуры информированности: $I_\lambda = I_\mu$. Соответственно, имеем $\theta_\lambda = \theta_\mu$ и $x_\lambda^* = x_\mu^*$. Далее, для любого $i \in N$ справедливо $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$, следовательно, $x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$. Поэтому два уравнения системы (5.6), у которых в левой части стоят действия x_λ^* и x_μ^*, тождественно совпадают. Так как имеется ν попарно различных структур информированности, количество попарно различных условий (5.6) не превышает ν. •

Таким образом, для нахождения информационного равновесия x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, достаточно записать ν условий (5.6) для каждого из ν попарно различных значений x_τ^*, отвечающих попарно различным структурам информированности I_τ.

Если все агенты являются одинаково информированными, то сложность структуры информированности минимальна и равна числу агентов. В этом случае система (5.6) переходит в определение равновесия Нэша, а информационное равновесие – в равновесие Нэша.

Итак, в случае, когда все реальные агенты являются одинаково информированными (то есть рефлексивная реальность является общим знанием), информационное равновесие переходит в равновесие Нэша (фантомных агентов «не возникает»).

Информационное равновесие (см. (5.6)) является достаточно громоздкой конструкцией, и сразу увидеть связь между информационной структурой и информационным равновесием зачастую бывает затруднительно. Удобным языком описания взаимной информированности агентов и выразительным средством анализа свойств информационного равновесия является граф рефлексивной игры, описанный выше.

Рассмотрим несколько примеров нахождения информационного равновесия с помощью графа рефлексивной игры.

Примеры 5.1, 5.2. В этих примерах участвуют три агента с целевыми функциями следующего вида:

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$; $\theta \in \Omega = \{1, 2\}$.

Содержательно, x_i – объем выпуска продукции i-м агентом, θ – спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж (см. модели олигополии Курно в [1, 35, 36]), а второе слагаемое – как затраты на производство.

Для краткости будем называть агента, считающего, что спрос низкий ($\theta = 1$), пессимистом, а считающего, что спрос высокий ($\theta = 2$) – оптимистом. Таким образом, в примерах 5.1, 5.2 ситуации различаются лишь вследствие различных структур информированности.

Пример 5.1. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы.

В соответствии со свойством 2 определения информационного равновесия, аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий x_σ^*.

Видно, что любая структура информированности тождественна одной из трех, образующих базис: $\{I_1, I_2, I_3\}$. Поэтому сложность данной структуры информированности равна трем, а глубина равна единице. Граф рефлексивной игры изображен на Рис. 5.3.

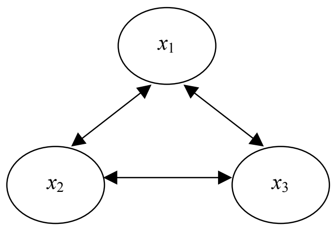


Рис. 5.3. Граф рефлексивной игры в примере 5.1

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. (5.6)):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_1^* - x_2^*}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_2^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

Таким образом, действия агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими:

$$x_1^* = x_2^* = 1/2,\ x_3^* = 0.\ \bullet$$

<u>Пример 5.2.</u> Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами. Первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте.

Сложность данной структуры информированности равна пяти, а глубина равна двум [20]. Граф рефлексивной игры изображен на Рис. 5.4.

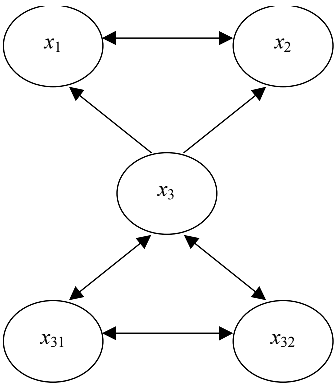


Рис. 5.4. Граф рефлексивной игры в примере 5.2

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. (5.6)):

$$
\begin{cases}
x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\
x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\
x_3^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\
x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\
x_{32}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3},
\end{cases}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{cases}
x_1^* = \dfrac{9}{20}, \\
x_2^* = \dfrac{9}{20}, \\
x_3^* = \dfrac{1}{5}, \\
x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\
x_{32}^* = \dfrac{1}{5}.
\end{cases}
$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими:

$$x_1^* = x_2^* = 9/20,\ x_3^* = 1/5.$$

Отметим, что лишь изменением информированности (переходом от информационной структуры Рис. 5.3 к структуре Рис. 5.4) удалось увеличить как суммарный объем выпускаемой агентами продукции, так и их суммарный выигрыш. •

Стабильное информационное равновесие. Одной из особенностей «классического» равновесия Нэша является его самоподдерживающийся характер – если игра повторяется несколько раз и все игроки, кроме i-го, выбирают одни и те же равновесные действия, то и i-му нет резона отклоняться от своего равновесного действия. Это обстоятельство очевидным образом связано с тем, что представления всех игроков о реальности адекватны – значение состояния природы является общим знанием.

В случае информационного равновесия ситуация, вообще говоря, может быть иной. Действительно, в результате однократного разыгрывания игры может оказаться, что какие-то из игроков (или даже все) наблюдают не тот результат, на который они рассчитывали. Это может быть связано как с неверным представлением о состоянии природы, так и с неадекватной информированностью о представлениях оппонентов. В любом случае, самоподдерживающийся характер равновесия нарушается – если игра повторяется, действия игроков могут измениться.

Однако в некоторых случаях самоподдерживающийся характер равновесия может иметь место и при различных (и, вообще говоря, неверных) представлениях агентов. Говоря неформально, это происходит тогда, когда каждый агент (как реальный, так и фантомный) наблюдает тот результат игры, которого ожидает. Для формального изложения нам понадобится дополнить описание рефлексивной игры.

Напомним, что рефлексивная игра задается кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, I\}$, где $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество участников игры (игроков, агентов), X_i – множество допустимых действий i-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, I – структура информированности. Дополним эту конструкцию набором функций $w_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to W_i$, $i \in N$, каждая из которых отображает вектор (θ, x) в элемент w_i некоторого множества W_i. Этот элемент w_i и есть то, что i-й агент наблюдает в результате разыгрывания игры.

Функцию $w_i(\cdot)$ будем называть *функцией наблюдения* i-го агента [31]. Будем считать, что функции наблюдения являются общим знанием среди агентов.

Если $w_i(\theta, x) = (\theta, x)$, то есть $W_i = \Omega \times X'$, то i-й агент наблюдает как состояние природы, так и действия всех агентов. Если, напротив, множество W_i состоит из одного элемента, то i-й агент ничего не наблюдает.

Пусть в рефлексивной игре существует информационное равновесие x_τ, $\tau \in \Sigma_+$ (напомним, что τ – произвольная непустая конечная последовательность индексов из N). Зафиксируем $i \in N$ и рассмотрим i-го агента. Он ожидает в результате игры пронаблюдать величину:

(5.7) $w_i\,(\theta_i, x_{i1}, ..., x_{i,i-1}, x_i, x_{i,i+1}, \ldots, x_{in})$.

На самом же деле он наблюдает величину:

(5.8) $w_i\,(\theta, x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Поэтому требование стабильности для i-агента означает совпадение величин (5.7) и (5.8) (напомним, что эти величины являются элементами некоторого множества W_i).

Пусть величины (5.7) и (5.8) равны, то есть i-агент и после разыгрывания игры не сомневается в истинности своих представлений. Однако является ли это достаточным основанием для того, чтобы он и в следующий раз выбрал то же действие x_i? Ясно, что ответ отрицательный, что продемонстрируем на следующем примере.

Пример 5.3. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Omega = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$), приведенными на Рис. 5.5,

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (0,1) & (1,2) \\ (1,1) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 5.5. Матрицы выигрышей в примере 5.3

а граф рефлексивной игры имеет вид, изображенный на Рис. 5.6.

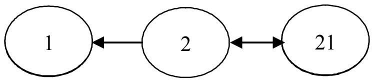


Рис. 5.6. Граф рефлексивной игры в примере 5.3

Пусть при этом $\theta = \theta_1 = 1$, $\theta_2 = \theta_{21} = 2$, и каждый агент наблюдает свой выигрыш (то есть функция наблюдения агента совпадает с его функцией выигрыша). Ясно, что информационным равновесием является набор $x_1 = x_2 = x_{21} = 2$, то есть первый и второй агенты, а также 21-агент и все прочие фантомные агенты выбирают вторые действия. Однако реальное состояние природы $\theta = 1$ становится известным второму агенту после розыгрыша игры (и получения им выигрыша 0 вместо ожидаемого 2). Поэтому в следующий раз второй агент выберет действие $x_2 = 1$, что побуждает и первого агента изменить свое действие (выбрать $x_1 = 1$). •

Таким образом, для стабильности равновесия необходимо чтобы и ij-агент, $i, j \in N$, наблюдал «нужную» величину. Он ожидает в результате игры пронаблюдать:

(5.9) $w_j\,(\theta_{ij}, x_{ij1}, \ldots, x_{ij,j-1}, x_{ij}, x_{ij,j+1}, \ldots, x_{ijn})$.

На самом же деле (то есть i-субъективно, ведь ij-агент существует в сознании i-агента) он наблюдает величину:

(5.10) $w_j\,(\theta_i, x_{i1}, \ldots, x_{i,j-1}, x_{ij}, x_{i,j+1}, \ldots, x_{in})$.

Поэтому требование стабильности для ij-агента означает совпадение величин (5.9) и (5.10).

В общем случае, то есть для τi-агента, $\tau i \in \Sigma_+$, условие стабильности определим следующим образом.

Информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, будем называть *стабильным* при заданной структуре информированности I, если для любого $\tau i \in \Sigma_+$ выполняется

(5.11) $w_i(\theta_{\tau i}, x_{\tau i1}, \ldots, x_{\tau i,i-1}, x_{\tau i}, x_{\tau i,i+1}, \ldots, x_{\tau in}) =$

$$= w_i(\theta_\tau, x_{\tau 1}, \ldots, x_{\tau,i-1}, x_{\tau i}, x_{\tau,i+1}, \ldots, x_{\tau n}).$$

Информационное равновесие, не являющееся стабильным, будем называть *нестабильным*. В частности, информационное равновесие в примере 5.3 является нестабильным.

<u>Утверждение 5.2.</u> Пусть структура информированности I имеет сложность ν и существует информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$. Тогда система соотношений (5.11) содержит не более чем ν попарно различных условий.

Доказательство. Рассмотрим две любые тождественные [20] структуры информированности: $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$. Поскольку $x_{\tau i}$ – равновесие, имеем $\theta_{\lambda i} = \theta_{\mu i}$, $x_{\lambda i} = x_{\mu i}$, $I_{\lambda ij} = I_{\mu ij}$, $x_{\lambda ij} = x_{\mu ij}$ для любого $j \in N$. Поэтому условия стабильности (5.11) для λi- и μi-агентов тождественно совпадают. Так как имеется ν попарно различных структур информированности, количество попарно различных условий (5.11) не превышает ν. •

Истинное и ложное информационные равновесия. Стабильные информационные равновесия будем разделять на два класса – истинные и ложные равновесия. Определение предварим примером.

<u>Пример 5.4.</u> Рассмотрим игру, в которой участвуют три агента с целевыми функциями:

$$f_i(r_i, x_1, x_2, x_3) = x_i - \frac{x_i(x_1 + x_2 + x_3)}{r_i},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$. Целевые функции являются общим знанием с точностью до типов агентов – параметров $r_i > 0$. Вектор $r = (r_1, r_2, r_3)$ типов агентов может интерпретироваться как состояние природы. При этом здесь и далее подразумевается, что свой собственный тип известен каждому агенту достоверно.

Граф рефлексивной игры имеет вид, изображенный на Рис. 5.7, при этом $r_2 = r_3 = r$, $r_{21} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = c$. Общим знанием является следующее: каждый игрок знает свой тип и наблюдает сумму действий оппонентов.

Нетрудно вычислить единственное информационное равновесие этой игры:

(5.12) $x_2 = x_3 = (3r - 2c) / 4$,

$x_{21} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = (2c - r) / 4$,

$x_1 = (2r_1 - 3r + 2c) / 4$.

Условия стабильности (см. (5.11)) в данном случае выглядят следующим образом:

(5.13) $x_{21} + x_{23} = x_1 + x_3$, $x_{31} + x_{32} = x_1 + x_2$.

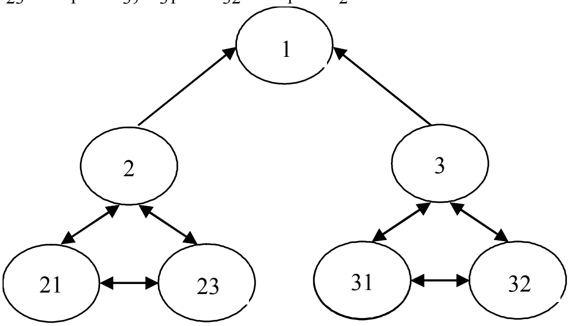


Рис. 5.7. Граф рефлексивной игры в примере 5.4

Записаны условия для 2- и 3-агентов, поскольку для 1-, 21-, 23-, 31-, 32-агентов они тривиальны.

Подставляя (5.12) в (5.13), получаем, что необходимым и достаточным условием стабильности является равенство:

(5.14) $2c = r_1 + r$.

Пусть условие (5.14) выполнено. Тогда равновесные действия реальных агентов таковы:

(5.15) $x_2 = x_3 = (3r - r_1) / 4$, $x_1 = (3r_1 - 2r) / 4$.

Предположим теперь, что типы агентов стали общим знанием (см. Рис. 5.8).

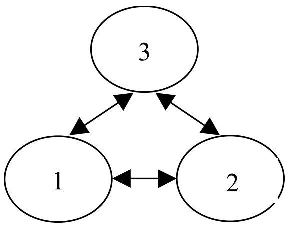


Рис. 5.8. Общее знание в примере 5.4

Нетрудно убедиться, что в случае общего знания единственным равновесием будет (5.15). •

Таким образом, при выполнении условия (5.14) имеет место несколько парадоксальная ситуация. Представления второго и третьего агентов не соответствуют действительности (Рис. 5.7), однако их равновесные действия (5.15) в точности такие, как были бы в случае одинаковой информированности (Рис. 5.8). Назовем такое стабильное информационное равновесие истинным.

Пусть набор действий $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Будем называть его *истинным* равновесием, если набор $(x_1, \dots, x_n)$ является равновесием в условиях общего знания о состоянии природы θ (или о наборе $(r_1, \dots, r_n)$ типов агентов).

Из определения, в частности, следует, что в условиях общего знания любое информационное равновесие является истинным. Рассмотрим еще один случай, когда этот факт имеет место.

Утверждение 5.3. Пусть целевые функции агентов имеют вид:

$$f_i\,(r_i, x_1, \dots, x_n) = \varphi_i\,(r_i, x_i, y_i(x_{-i})),$$

а функции наблюдения – вид $w_i(\theta, x) = y_i(x_{-i}),\ i \in N.$ Содержательно это означает следующее: выигрыш каждого агента зависит от его типа, его действия и функции наблюдения, зависящей от действий остальных агентов (но не от их типов). Тогда любое стабильное равновесие является истинным.

Доказательство. Пусть $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, – стабильное информационное равновесие, и условия утверждения выполнены. Тогда для любого $i \in N$ имеем:

$$x_i \in \operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} f_i(r_i, y_i, x_{i,-i}) = \operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} \varphi_i\,(r_i, y_i, y_i(x_{i,-i})).$$

В силу стабильности справедливо равенство:

$$y_i(x_{i,-i}) = y_i(x_{-i}),$$

поэтому:

$$x_i \in \operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} \varphi_i\,(r_i, y_i, y_i(x_{-i})) = \operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} f_i(r_i, y_i, x_{-i})\,.$$

Последнее соотношение означает (в силу произвольности $i \in N$), что набор $(x_1, \dots, x_n)$ является равновесным при полной информированности. •

Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, называется *ложным*.

Таким образом, ложное равновесие – это такое стабильное информационное равновесие, которое не является равновесием в случае одинаковой информированности агентов (в условиях общего знания).

Пример 5.5. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Omega = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$) на Рис. 5.9.

$$
\begin{array}{cc}
\theta = 1 & \theta = 2 \\
\begin{pmatrix} (2,2) & (4,1) \\ (1,4) & (3,3) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (2,2) & (0,3) \\ (3,0) & (1,1) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Рис. 5.9. Матрицы выигрышей в примере 5.5

Пусть, далее, в реальности $\theta = 2$, однако оба агента считают общим знанием $\theta = 1$. Каждый агент наблюдает пару (x_1, x_2), которая и является функцией наблюдения.

Информационным равновесием является выбор каждым агентом действия 1. Если бы общим знанием было бы реальное состояние природы, равновесным был бы выбор каждым агентом действия 2. Таким образом, выигрыши агентов в информационном равновесии оказываются бóльшими, чем если бы общим знанием было реальное состояние природы. •

Информационные воздействия. В данном пункте выделены некоторые способы осуществления центром информационного воздействия на агентов с целью формирования той или иной структуры информированности. Эти способы – информационное регулирование, рефлексивное управления, активный прогноз.

Таким образом, в контексте описанной ранее модели информационного управления данный пункт соответствует цепи «центр → информированность агента (агентов)» (см. Рис. 5.1). Отдавая себе отчет в тех ограничениях, которые присущи математическому моделированию человеческого поведения (и, в частности, теоретико-игровому подходу к информационному управлению), рассмотрим возможные виды информационных воздействий.

В [23, с. 133] приведена следующая классификация информационных воздействий:

1) входные данные – «сухие» факты;

2) входные данные – логически обоснованные выводы, аналитические суждения, опирающиеся на определенный набор фактов;

3) входные данные – эмоционально окрашенные утверждения, опирающиеся на «хорошо/плохо», «морально/аморально», «нравственно/безнравственно» и т. п.

Согласно [25, с. 203], новая информация, на основании которой агенты принимают решения, делится на

4) жесткую, содержащую только реальные данные и факты;

5) мягкую, которая включает прогнозы и оценки.

Очевидна аналогия между пунктами (1) и (4), а также (2) и (5). О них речь пойдет несколько ниже, а сейчас остановимся подробнее на пункте (3).

В пункте (3) речь идет, по сути дела, об этическом аспекте информации и, соответственно, об этическом аспекте тех или иных решений. По-видимому, единственной пока попыткой формального описания этого аспекта являются работы В.А Лефевра, а также других авторов, развивающих предложенную им модель этического выбора – см. [6, 7-12, 28, 33, 34] и др. В этих работах предполагается, что принимающий решение агент осуществляет *рефлексию первого рода* [20], то есть занимает позицию наблюдателя по отношению к своему поведению, своим мыслям и чувствам [14]. В агенте существует несколько соотнесенных друг с другом уровней, в частности, уровень, «отвечающий» за этический аспект выбора. Итоговое решение агента определяется как влиянием внешней среды, так и состоянием этих уровней.

В теории игр (а также и в данной работе) агент понимается как индивид, то есть «неделимый», и осуществляет *рефлексию второго рода* – относительно принятия решений оппонентами. Поэтому, оставив пункт (3) за рамками наших рассмотрений, обратимся к пунктам (1), (4) и (2), (5).

Структура информированности i-го агента (см. выше) включает в себя представления:

1) о состоянии природы (θ_i);

2) о представлениях оппонентов ($\theta_{i\sigma}$, $\sigma \in \Sigma_+$).

Сообщение как первого, так и второго может быть элементом информационного воздействия. Иными словами, центр может сообщить агенту (агентам) информацию как о состоянии природы (то есть о значении неопределенного параметра), так и о представлениях оппонентов.

Соответственно, получаем следующие виды информационных воздействий (см. [19]):

(i) информационное регулирование;

(ii) рефлексивное управление.

Они примерно соответствуют пунктам (1), (4).

Что касается пунктов (2), (5), то им примерно соответствует такой вид информационного воздействия, как

(iii) активный прогноз,

представляющий собой сообщение информации о будущих значениях неких параметров, зависящих от состояния природы и действий агентов [19].

5.4. Прикладные модели информационного управления

«Принцип дефицита». Книга американского психолога Р. Чалдини [29] посвящена описанию и классификации стереотипов поведения, которым зачастую следуют люди, принимая те или иные решения. Эти стереотипы представляют собой некие «программы», которые «включаются» при определенных обстоятельствах и предопределяют действия человека, в том числе и явно иррациональные действия. Р. Чалдини выделяет шесть «фундаментальных психологических принципов, которые лежат в основе человеческого поведения»: принцип последовательности, принцип взаимного обмена, принцип социального доказательства, принцип авторитета, принцип благорасположения, принцип дефицита (с. 13 – здесь и далее до конца раздела будем ссылаться на работу [29], указывая лишь страницу). Остановимся на последнем из этих принципов.

Суть *принципа дефицита* состоит в следующем: «ценность чего-либо позитивного в наших глазах существенно увеличивается, если оно становится недоступным» (с. 222). В частности, это относится к дефицитной информации, причем «эксклюзивная информация является более убедительной (с. 235). В качестве одного из подтверждений этого тезиса приводится следующий эксперимент, проведенный изучавшим психологию бизнесменом, владельцем компании, импортирующей в США говядину.

«Торговые агенты позвонили, как обычно, постоянным клиентам компании – закупщикам говядины для супермаркетов и других точек, торгующих продуктами в розницу, и одним из трех способов предложили им сделать заказ. Одни клиенты услышали предложение, сделанное в стандартной форме. Другим клиентам дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены в ближайшие несколько месяцев. Третья группа клиентов получила те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок, так как эти сведения поступили из надежного, но засекреченного источника.

… По сравнению с клиентами, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме, те клиенты, которым было также сказано о дефиците говядины, заказали ее в два раза больше… Клиенты, которые решили, что владеют «исключительной» информацией…приобрели в шесть раз больше говядины, чем клиенты, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме. Очевидно, сообщение о том, что информация о дефиците сама является дефицитной, сделала данную информацию особенно убедительной» (с. 235–236).

Не подвергая сомнению справедливость выводов Р. Чалдини, попробуем взглянуть на ситуацию несколько по-иному и объяснить действия клиентов компании, исходя из теоретико-игровой модели.

Итак, пусть имеется n клиентов компании – далее будем называть их агентами – принимающих решение об объемах закупки говядины. Будем считать, что число агентов n достаточно велико, все агенты идентичны и конкурируют по Курно при линейной зависимости цены от предложения. Это означает, что целевые функции агентов выглядят следующим образом:

$$f_i(x_1,...,x_n) = (Q - \sum_{j \in N} x_j)\, x_i - c x_i,$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, …, n\}$, $c \geq 0$. Содержательно, x_i – объем продаж агента за рассматриваемый период времени, $(Q - \sum_{j \in N} x_j)$ – цена, которая при этом устанавливается на рынке, c – оптовая цена, по которой агенты закупают товар. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж, а второе слагаемое – как затраты на закупку товара.

Дифференцируя целевые функции, приравнивая производные к нулю и решая получившуюся систему, можно найти равновесные действия агентов в условиях общего знания:

(5.16) $x_i = \dfrac{Q - c}{n + 1}$, $i \in N$,

(по предположению все агенты идентичны, поэтому их равновесные действия одинаковы). Такова ситуация в отсутствии информационного воздействия. Агенты первого типа, которым было сделано предложение в стандартной форме, закупили товар в объеме (5.16), рассчитывая реализовать его в данный период времени.

Рассмотрим теперь поведение агентов второго типа, которым было сообщено, что поставки будут сокращены. Можно предположить, что они считали этот факт общим знанием. В таком случае для них рациональным действием было закупить в два раза больше товара, чтобы иметь возможность реализовать его в следующий период времени в том же равновесном количестве (5.16) (и одновременно заниматься поисками других поставщиков).

Наконец, рассмотрим поведение агентов третьего типа, которым было сообщено, что поставки будут сокращены и эта информация доступна лишь некоторому числу агентов. Для таких агентов, возможно, рационально предположить следующее. Существуют два типа агентов – неинформированные и информированные (инсайдеры), к которым агенты третьего типа относят себя. Неинформированные агенты в данном периоде будут реализовывать товар в объеме (5.16), а в следующем, не имея товара, прекратят участие в игре. Таким образом, число игроков в следующем периоде (равное числу инсайдеров) сократится с n до некоторого числа kn, $k < 1$, где k – доля инсайдеров. Тогда в следующем периоде равновесным будет действие:

$$(5.17)\quad x_i' = \frac{Q-c}{kn+1}.$$

Сравнивая (5.16) и (5.17) легко видеть, что при больших n имеет место соотношение:

$$\frac{x_i'}{x_i} = \frac{n+1}{kn+1} \approx \frac{1}{k}.$$

Поэтому агенты третьего типа закупали товар в объеме $(x_i + x_i')$, т. е. в $1/k + 1$ раз больше, чем агенты первого типа. Если доля инсайдеров составляет, с точки зрения агентов третьего типа, пятую часть от общего числа агентов (то есть $k = 1/5$ и этот факт субъективно является общим знанием), то получаем:

$$x_i + x_i' = 6x_i.$$

В этом случае рациональным для агентов третьего типа является закупка в 6 раз большего объема товара, чем для агентов первого типа. Таким образом, при сделанных предположениях мы получаем именно тот результат, который описан в книге [29].

Аккордная оплата труда. Рассмотрим организационную систему, состоящую из центра и n агентов, осуществляющих совместную деятельность.

Стратегией i-го агента является выбор действия $y_i \in X_i = \Re^1_+$, $i \in N$, стратегией центра – выбор системы стимулирования, определяющей размер вознаграждения каждого агента в зависимости от результата их совместной деятельности. Предположим, что технология взаимодействия агентов такова, что для достижения требуемого результата необходимо, чтобы сумма их действий была не меньше заданной величины $\theta \in \Omega$. В этом случае i-й агент получает от центра фиксированное вознаграждение σ_i, $i \in N$, в случае же $\sum_{i \in N} y_i < \theta$ вознаграждение каждого агента равно нулю.

Реализация действия $y_i \geq 0$ требует от i-го агента затрат $c_i(y, r_i)$, где $r_i > 0$ – его тип (параметр, описывающий индивидуальные характеристики), $i \in N$.

Относительно функций затрат агентов предположим, что $c_i(y, r_i)$ – непрерывная возрастающая по y_i и убывающая по r_i функция, причем $\forall\ y_{-i} \in X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$, $\forall\ r_i > 0$ $c_i(0, y_{-i}, r_i) = 0$, $i \in N$.

Описанную модель взаимодействия будем далее называть игрой «*Аккордная оплата труда*». Определим множество индивидуально рациональных действий агентов:

$$IR = \{y \in X' = \prod_{i \in N} X_i \mid \forall\ i \in N\ \sigma_i \geq c_i(r_i)\}.$$

Если затраты агентов сепарабельны, то есть затраты $c_i(y_i, r_i)$ каждого агента зависят только от его собственных действий и не зависят от действий других агентов, получаем, что $IR = \prod_{i \in N} [0; y_i^+]$, где:

$$y_i^+ = \max\ \{y_i \geq 0 \mid c_i(y_i, r_i) \leq \sigma_i\},\ i \in N.$$

Обозначим:

$$Y(\theta) = \{y \in X' \mid \sum_{i \in N} y_i = \theta\},$$

$$Y^*(\theta) = \operatorname{Arg} \min_{y \in Y(\theta)} \sum_{i \in N} c_i(y, r_i).$$

Рассмотрим последовательно различные варианты информированности агентов о значении параметра $\theta \in \Omega$. Как мы увидим, даже небольшое усложнение структуры информированности может существенно изменить множество информационных равновесий рассматриваемой рефлексивной игры.

Вариант I. Предположим, что значение $\theta \in \Omega$ является общим знанием. Тогда равновесием игры агентов является параметрическое равновесие Нэша, принадлежащее множеству:

(5.18) $E_N(\theta) = IR \cap Y(\theta)$.

Определим также множество эффективных по Парето действий агентов:

(5.19) $Par(\theta) = IR \cap Y^*(\theta)$.

Так как $\forall\ \theta \in \Omega\ Y^*(\theta) \subseteq Y(\theta)$, то из (5.18) и (5.19) следует, что множество эффективных по Парето действий является одним из равновесий Нэша. Но множество равновесий Нэша может оказаться шире – в частности, при $\theta \geq \max\limits_{i \in N} y_i^+$ оно всегда содержит вектор нулевых действий.

Пусть функции затрат агентов являются функциями затрат типа Кобба–Дугласа: $c_i(y_i, r_i) = r_i\ \varphi(y_i / r_i)$, где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, удовлетворяющая равенству $\varphi(0) = 0$.

Тогда эффективной по Парето является единственная точка: $y^*(\theta) = \{\, y_i^*(\theta)\}$, где $y_i^*(\theta) = \theta\, r_i / \sum\limits_{j \in N} r_j$, $i \in N$.

Вычислим $y_i^+ = r_i\ \varphi^{-1}(\sigma_i / r_i)$, $i \in N$, тогда при:

(5.20) $\sigma_i \geq r_i\ \varphi(\theta / \sum\limits_{j \in N} r_j)$, $i \in N$,

множество Парето не пусто.

Множества равновесий Нэша в игре $n = 2$ агентов для двух значений θ: $\theta_2 > \theta_1$ приведены на Рис. 5.10 (точка (0; 0) является равновесием Нэша в обоих случаях).

Итак, мы рассмотрели простейший вариант информированности агентов, соответствующий ситуации, когда значение параметра $\theta \in \Omega$ является общим знанием. Рассмотрим следующий (в порядке возрастания сложности структуры информированности агентов) вариант информированности, в рамках которого общим знанием являются индивидуальные представления $\{\theta_i\}$ агентов о значении параметра $\theta \in \Omega$.

Вариант II. Предположим, что представления агентов о неопределенном параметре попарно различны, но при этом являются общим знанием. Иными словами, имеет место асимметричное общее знание.

Не ограничивая общности, занумеруем агентов таким образом, чтобы их представления возрастали: $\theta_1 < \ldots < \theta_n$. Структура возможных равновесий в этой ситуации описывается следующим утверждением.

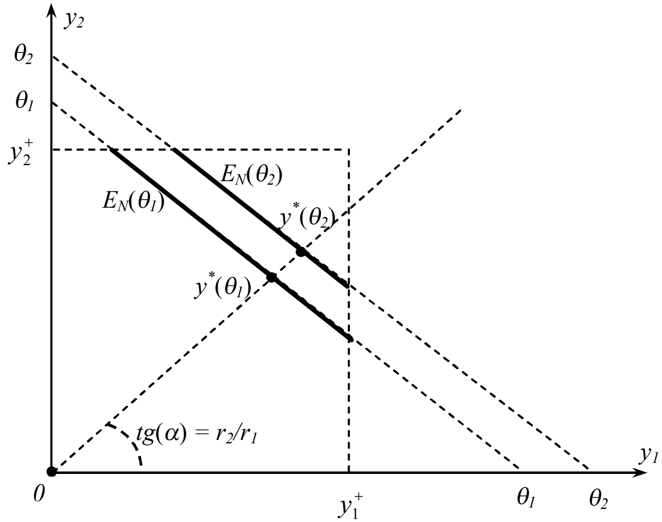


Рис. 5.10. Параметрическое равновесие Нэша игры агентов

<u>Утверждение 5.4.</u> В игре «Аккордная оплата труда», для которой $\theta_i \neq \theta_j$ при $i \neq j$, равновесными (в зависимости от соотношения между параметрами) могут быть следующие $n + 1$ исходов: $\{y^* \mid y_i^* = 0,\ i \in N\}$; $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0,\ i \in N,\ i \neq k\}$, $k \in N$. Содержательно это означает следующее: либо никто не работает, либо работает один k-й агент, выбирая действие θ_k.

Доказательство. Пусть вектор действий $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ является равновесием (очевидно, при этом $y_i^* \leq y_i^+$ для любого $i \in N$). Пусть существует такое $k \in N$, что $y_k^* > 0$. Покажем, что в этом случае $\sum_{i \in N} y_i^* = \theta_k$.

Действительно, если $\sum_{i \in N} y_i^* < \theta_k$, то k-й агент не рассчитывает на получение вознаграждения и, следовательно, может увеличить свой (субъективно ожидаемый) выигрыш с отрицательного до нулевого, выбрав нулевое действие. Если же $\sum_{i \in N} y_i^* > \theta_k$, то k-й агент рассчитывает на получение вознаграждения, однако он может увеличить свой выигрыш, выбрав вместо y_k^* действие $\max\{0, \theta_k -$

$\sum_{i \in N \setminus \{k\}} y_i^*$ $\} < y_k^*$. Таким образом, при $\sum_{i \in N} y_i^*$ $\neq \theta_k$ k-й агент может увеличить свой выигрыш, что противоречит равновесности вектора y^*.

Мы показали, что, если $y_k^* > 0$, то $\sum_{i \in N} y_i^*$ $= \theta_k$. Но в силу условия $\theta_i \neq \theta_j$, $i \neq j$, это равенство может выполняться лишь для одного $k \in N$. Поэтому если $y_k^* > 0$, то $y_i^* = 0$ для всех $i \neq k$. При этом, очевидно, $y_k^* = \theta_k$. •

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких соотношениях между параметрами θ_i, y_i^+, $i \in N$, реализуется каждое из равновесий, перечисленных в формулировке утверждения 5.9. Вектор (0, …, 0) является равновесным в случае, когда никакой i-й агент не может собственными усилиями выполнить достаточную (с его точки зрения) для получения вознаграждения работу (либо это усилие составляет в точности y_i^+, так что выигрыш i-го агента остается нулевым). Это условие формально записывается следующим образом: $y_i^+ \leq \theta_i$ для любого i. Вектор $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0,\ i \neq k\}$ является равновесным, если $\theta_k \leq y_k^+$, а все агенты с номерами $i > k$, считая, что вознаграждения не будет, являются недостаточно эффективными, чтобы собственными усилиями компенсировать величину $\theta_i - \theta_k$. Формально: $\theta_k + y_i^+ \leq \theta_i$ для любого $i > k$.

Возможные равновесия в игре двух агентов изображены на Рис. 5.11. Заметим, что, в отличие от варианта I, существует область, в которой равновесие отсутствует.

Рассмотрим теперь общий случай, когда представления агентов могут и совпадать: $\theta_1 \leq \ldots \leq \theta_n$. В этом случае может появиться целая область равновесий, аналогично варианту I. Пусть, например, выполняются соотношения $\theta_m = \theta_{m+1} = \ldots = \theta_{m+p}$, $\theta_i \neq \theta_m$ при $i \notin \{m, \ldots, m+p\}$. Тогда при выполнении условий $\sum_{k=m}^{m+p} y_k^* \geq \theta_m$ и $\theta_m + y_i^+ \leq \theta_I$, $i > m$, равновесным является любой вектор y^*, для которого: $\sum_{k=m}^{m+p} y_k^* = \theta_m$, $y_k^* \leq y_k^+$, $k \in \{m, \ldots, m+p\}$; $y_i^* = 0$, $i \notin \{m, \ldots, m+p\}\}$.

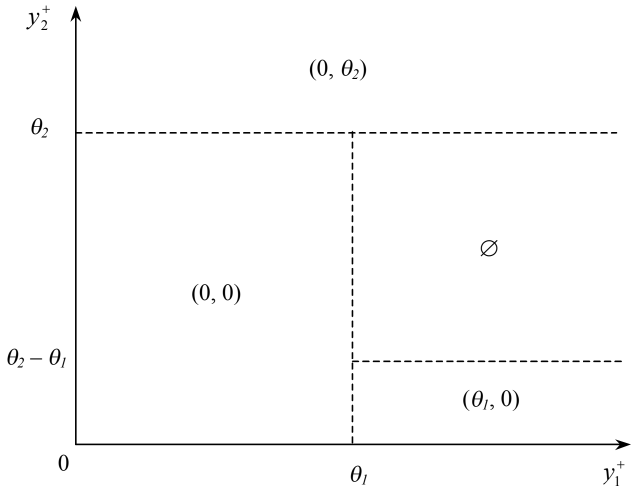


Рис. 5.11. Равновесия в игре двух агентов
(*область, где равновесия нет, обозначена символом* «$\varnothing$»)

Содержательно это означает, что в равновесии всю работу выполняют агенты, которые одинаково представляют себе необходимый для получения вознаграждения объем работы.

Вариант III. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину 2, но каждый агент считает, что играет в игру с асимметричным общим знанием. В этом случае множество возможных равновесных ситуаций становится максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.5. В игре «Аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два (при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием), что вектор y^* является единственным равновесием.

Доказательство. Достаточно для каждого $i \in N$ положить

$$\theta_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0; \\ y_i^+ + \varepsilon, & y_i^* = 0 \end{cases}$$

(здесь ε – произвольное положительное число) и выбрать любые $\theta_{ij} > \sum_{i \in N} y_i^+$, $j \in N \setminus \{i\}$. Тогда i-й агент ожидает от оппонентов нулевых действий, а его собственным субъективно равновесным действием является y_i^*. •

Замечание 1. Построенное в доказательстве утверждения 5.10 равновесие является (объективно) Парето-эффективным, если сумма $\sum_{i \in N} y_i^*$ равна истинному значению неопределенного параметра θ.

Замечание 2. Действие $y_i^* = y_i^+$ является равновесным, если $\theta_i = y_i^+$. Однако при этом равновесным будет и действие $y_i^* = 0$ – в обоих случаях субъективно ожидаемый i-м агентом выигрыш равен нулю.

Вариант IV. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину два, и на нижнем уровне имеется симметричное общее знание. Иными словами, каждый фантомный агент считает: неопределенный параметр равен θ, и это общее знание.

Оказывается, что и в этом случае множество равновесных ситуаций является максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.6. В игре «Аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два с симметричным общим знанием на нижнем уровне, что вектор y^* является единственным равновесием.

Доказательство. Возьмем любое значение $\theta > \sum_{i \in N} y_i^+$ и будем считать, что это значение является общим знанием среди фантомных агентов. Тогда единственным равновесием в игре фантомных агентов является выбор каждым из них нулевого действия.

Далее, для каждого $i \in N$ положим:

$$\theta_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0, \\ y_i^+ + \varepsilon, & y_i^* = 0, \end{cases}$$

где ε – произвольное положительное число. Тогда, как нетрудно видеть, наилучшим ответом i-го агента на ожидаемые им нулевые действия оппонентов является выбор действия y_i^*. •

Замечания 1 и 2, сделанные при анализе варианта III, можно повторить дословно и для варианта IV.

Таким образом, мы исследовали структуру информационных равновесий игры «Аккордная оплата труда» при различных вариантах информированности агентов. Полученные результаты полностью подтверждают интуитивно правдоподобный качественный вывод: в коллективе работников совместная работа возможна (является равновесной) лишь в том случае, когда имеется общее знание о том, какой объем работ необходимо выполнить для получения вознаграждения.

Рассмотрим теперь вопрос о стабильности информационного равновесия. Анализ проведем для варианта II, когда имеет место асимметричное общее знание. Будем считать, что в результате игры общим знанием среди агентов становится факт выплаты или невыплаты вознаграждения.

Равновесие (0, …, 0), очевидно, стабильно в любом случае: никто не работает, не ожидает получить вознаграждение и не получает его.

Равновесие вида $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0,\ i \in N,\ i \neq k\}$, $k \in N$, в случае $\theta_1 < \ldots < \theta_n$ возможно, как было показано выше, при $\theta_k \leq y_k^+$, $\theta_k + y_i^+ \leq \theta_i$ для любого $i > k$. Тогда i-агенты с номерами $i \leq k$ ожидают выплаты вознаграждения, а с номерами $i > k$ – не ожидают. Поэтому единственная возможность стабильности – условие $k = n$. Таким образом, получаем условие стабильности:

(5.21) $\theta_n \leq y_n^+$.

Аналогично при $\theta_1 \leq \ldots \leq \theta_{m-1} < \theta_m = \ldots = \theta_n$ стабильным является любой набор

$$\{y^* \mid \sum_{k=m}^{n} y_k^* = \theta_m,\ y_k^* \leq y_k^+,\ k \in \{m, \ldots, n\};\ y_i^* = 0,\ i \notin \{m, \ldots, m+p\}\}.$$

В соответствии с утверждением 5.10, центр может при помощи информационного управления (в частности, путем формирования структуры, при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием) добиться от агентов любого набора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$. Оказывается, что существует и стабильное информационное управление, обеспечивающее этот результат. Покажем это для $y_i^* > 0$.

Пусть задан набор $y^* \in \prod_{i \in N} (0; y_i^+)$, $\sum_{i \in N} y_i^* \geq \theta$. Положим для каждого $i \in N$ $\theta_i = y_i^*$ и для каждого $j \in N \setminus \{i\}$ возьмем любые θ_{ij} такие, что $\theta_{ij} < \theta_i$. Тогда для i-агента субъективно выполнено условие стабильности (5.21) и y_i^* – его единственное равновесное действие. При этом

1) работа будет выполнена, и агенты получат вознаграждение;

2) получение вознаграждения будет ожидаемым исходом для всех реальных и фантомных агентов.

Содержательно, ситуация при этом возникает следующая: каждый агент считает, что именно он выполнил всю работу и что это – общее знание.

Коррупция. Рассмотрим следующую теоретико-игровую модель *коррупции*. Пусть имеются n агентов – чиновников, дополнительный доход каждого из которых пропорционален сумме полученных им взяток $x_i \geq 0$, предложение которых будем считать неограниченным, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$. Пусть каждый из n агентов характеризуется своим типом $r_i > 0$, $i \in N$, и тип агента достоверно ему известен, но не известен остальным агентам. Содержательно тип агента может интерпретироваться как субъективное восприятие им «силы» штрафов.

За коррупционную деятельность ($x_i \geq 0$), вне зависимости от ее размера, на агента может быть наложен штраф $\chi_i(x, r_i)$, зависящий от действий $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re_+^n$ всех агентов и типа данного агента.

Таким образом, целевая функция i-го агента имеет вид:

(5.22) $f_i(x, r_i) = x_i - \chi_i(x, r_i),\ i \in N.$

Относительно функции штрафов предположим, что она имеет вид:

(5.23) $\chi_i(x, r_i) = \varphi_i(x_i, Q_i(x_{-i}), r_i).$

Содержательно предположение (5.23) означает, что штраф, накладываемый на i-го агента, зависит от его действия и от агрегированной обстановки $Q_i(x_{-i})$ (которая может интерпретироваться как «общий уровень коррумпированности остальных чиновников» с точки зрения i-го агента).

Предположим, что число агентов и общий вид целевых функций являются общим знанием, а относительно параметра $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Re^n_+$ каждый из агентов имеет иерархию представлений: r_{ij} – представление i-го агента о типе j-го агента, r_{ijk} – представление i-го агента о представлениях j-го агента о типе k-го агента и т.д., $i, j, k \in N$.

Предположим также, что агенты наблюдают общий уровень коррумпированности. Поэтому стабильность информационного равновесия будет иметь место при любых представлениях о типах реальных или фантомных оппонентов, таких, что соответствующее информационное равновесие приводит к одному и тому же значению агрегата $Q_i(\cdot)$ для любого $i \in N$.

Тогда, как нетрудно видеть, для целевых функций агентов (5.22), (5.23) выполнены условия утверждения 5.8. Поэтому для любого числа агентов и любой структуры информированности все стабильные равновесия в рассматриваемой игре являются истинными. Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 5.7. Пусть набор действий x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, – стабильное информационное равновесие в игре (5.22), (5.23). Тогда это истинное равновесие.

Следствие. Уровень коррумпированности в стабильной ситуации не зависит от взаимных представлений коррупционеров о типах друг друга. При этом не важно, являются ли сами эти представления истинными или ложными.

Отсюда вытекает, что невозможно повлиять на уровень коррумпированности лишь путем изменения взаимных представлений. Поэтому любое стабильное информационное управление приводит к одному и тому же уровню коррумпированности.

Предположим, что:

$$\varphi_i(x_i, Q_i(x_{-i}), r_i) = x_i\,(Q_i(x_{-i}) + x_i) / r_i,\ Q_i(x_{-i}) = \sum_{j \neq i} x_j,\ i \in N,$$

и все типы одинаковы: $r_1 = \ldots = r_n = r$. Тогда, как нетрудно убедиться, равновесные действия агентов таковы: $x_i = \dfrac{r}{n+1}$, $i \in N$, а общий уровень коррумпированности составляет $\sum_{i \in N} x_i = \dfrac{nr}{n+1}$.

Изменить последнюю величину можно, лишь повлияв непосредственно на типы агентов.

Биполярный выбор. Рассмотрим ситуацию, когда агенты из бесконечно большой «популяции» осуществляют выбор между двумя альтернативами, которые будем для общности называть позитивным и негативным полюсами. Это может быть кандидат на выборах (голосовать «за» или «против»), продукт или услуга (покупать или нет), этический выбор (поступить «хорошо» или «плохо») и пр.

В силу бесконечности числа агентов будем считать, что при решении задачи управления всей «популяцией» выбор каждого конкретного агента не играет роли, а важна доля агентов, выбирающих позитивный полюс. Иначе это можно сформулировать следующим образом: действием «агрегированного» агента является вероятность x выбора им позитивного полюса.

Примем следующие предположения:

1) существует n различных типов агентов;

2) доля агентов i-го типа составляет α_i, $0 \le \alpha_i \le 1$;

3) действие агента i-го типа задается *функцией реакции на ожидание:*

$$\pi(p),\ \pi : [0, 1] \to [0, 1],$$

где p – ожидаемая агентами вероятность выбора позитивного полюса произвольным агентом из «популяции». Иными словами, если агент ожидает, что доля выбравших позитивный полюс составляет p, то его действие x_i определяется следующим образом:

$$x_i = \pi_i(p).$$

4) пункты 1–3 являются общим знанием среди агентов.

Пусть $x_i \in [0, 1]$ – действие агента i-го типа. Тогда доля выбравших позитивный полюс составляет: $p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$.

Определим *равновесие биполярного выбора* как набор действий x_i, удовлетворяющих системе соотношений:

(5.24) $x_i = \pi_i(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j)$, $i = 1, \ldots, n$.

В качестве отступления заметим, что соотношения (5.24) являются одной из возможностей описания биполярного выбора. Другие возможные подходы обсуждаются, например, в работах В.А. Лефевра [11], Т.А. Таран [28] и др. В этих работах предполагается, что принимающий решение агент осуществляет *рефлексию первого рода* [20], т.е. занимает позицию наблюдателя по отношению к своему поведению, своим мыслям и чувствам. Иными словами, в нем существует несколько соотнесенных друг с другом уровней, а итоговое решение определяется как влиянием внешней среды, так и состоянием этих уровней. В данной же работе агент понимается как индивид, т.е. «неделимый», и осуществляет *рефлексию второго рода* – относительно принятия решений оппонентами.

Вернемся к обсуждению равновесия биполярного выбора. Заметим, что выражения (5.24) задают отображение единичного гиперкуба $[0, 1]^n$ на себя:

$$(5.25)\ (x_1,\ldots, x_n) \to (\pi_1(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j),\ldots,\ \pi_n(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j)).$$

Если функции $\pi_i(\cdot)$ непрерывны (что представляется довольно естественным предположением), то и отображение (5.25) непрерывно. Тогда по теореме о неподвижной точке (см., например, [21]) у системы (5.24) имеется хотя бы одно решение.

Приведем пример. Пусть существуют агенты трех типов ($n = 3$), действия которых определяются следующими функциями:

$$\pi_1(p) \equiv 1,\ \ \pi_2(p) = p,\ \ \pi_3(p) \equiv 0.$$

Содержательно: агенты первого типа независимо ни от чего выбирают позитивный полюс, агенты третьего типа – негативный. Что касается агентов второго типа, то они колеблются, и их действия совпадают с ожидаемым действием «популяции» в целом.

Система (5.24) в данном случае сводится к соотношениям:

$$x_1 = 1,\quad x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,\quad x_3 = 0,$$

откуда (здесь и далее полагаем, что $0 < \alpha_i <1$, $i = 1, 2, 3$):

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2},\ \ x_3 = 0.$$

При этом:

$$(5.26)\ p = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}.$$

Предположим теперь, что некий управляющий орган – центр – имеет возможность повлиять на ситуацию и стремится увеличить вероятность позитивного выбора в «популяции» в целом (т.е. величину p). Для этого центр может повлиять на агентов второй либо третьей группы (агенты первой группы и так выбирают $x_1 = 1$). Пусть центр может повлиять на третью группу, переведя долю y ее членов во вторую и затратив некий ресурс (например, финансовый) в объеме $C_2\,y$. Центр может также повлиять на вторую группу, изменив представления ее членов об α_3 (независимо от фактического значения этого параметра). Именно, влияние состоит в формировании у второй группы следующего представления: «доля x членов третьей группы перешли во вторую». Затраты на формирование такого представления составляют $C_1\,x$.

Иными словами, центр может изменить либо реальную, либо «фантомную», воображаемую долю агентов третьего типа. При этом совокупный ресурс (бюджет), которым располагает центр, составляет C.

Задача центра состоит в следующем: распределить ресурс C (т.е. выбрать доли x и y) таким образом, чтобы вероятность p была максимальной. Формально оптимизационная задача центра ставится следующим образом (см. (5.26)):

$$(5.27)\ p(x, y) = \alpha_1 + (\alpha_2 + y\,\alpha_3)\ \frac{\alpha_1}{1-(\alpha_2 + x\alpha_3)} \to \max$$

при ограничениях:

$$(5.28)\ C_1\,x + C_2\,y \le C,\ \ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1.$$

Легко видеть, что задача (5.27) сводится к максимизации функции $\varphi(x, y) = \dfrac{\alpha_2 + y\alpha_3}{1-(\alpha_2 + x\alpha_3)}$, которая возрастает по обоим аргументам x и y, поэтому первое из ограничений (5.28) обращается в равенство. Итак, задача свелась к нахождению максимума функции

$$\psi(x) = \frac{\alpha_2 + \alpha_3(C - C_1 x)/C_2}{1-(\alpha_2 + x\alpha_3)} = \frac{1}{C_1 C_2}\ \frac{\alpha_2 C_2 / C_1 + \alpha_3 C / C_1 - x\alpha_3}{1-\alpha_2 - x\alpha_3}.$$

Нетрудно видеть, что функция $\psi(x)$ является монотонно возрастающей (соответственно, монотонно убывающей или константой), если выражение:

$$(5.29)\ \frac{\alpha_2 C_2}{C_1} + \frac{\alpha_3 C}{C_1} - (1 - \alpha_2)$$

положительно (соответственно, отрицательно или равно нулю).

Введем обозначения: $k_1 = \dfrac{C_1}{C}$, $k_2 = \dfrac{C_2}{C}$. Тогда условие положительности выражения (5.29) запишется в виде:

$$(5.30)\ \alpha_3 > k_1 - \alpha_2\,(k_1 + k_2).$$

Далее будем предполагать, что $C_1 > C$ и $C_2 > C$. Содержательно это означает, что у центра не так много ресурсов, чтобы всех агентов третьего типа «превратить» в агентов второго типа. При этом оптимальным будет такой выбор центра, когда весь ресурс вкладывается в увеличение либо реальной, либо воображаемой (при выполнении (5.30)) доли агентов второго типа.

Зависимость оптимального выбора центра от параметров (α_2, α_3) изображена на Рис. 5.12.

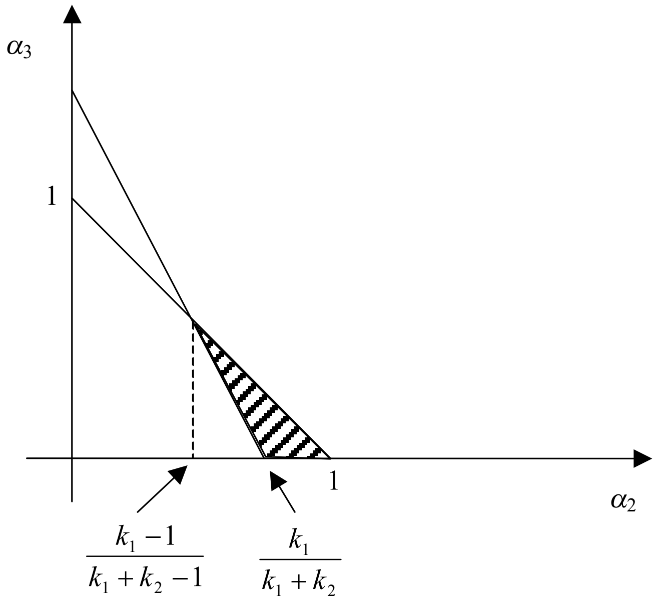


Рис. 5.12. Оптимальный выбор центра

На Рис. 5.12 заштрихована область, где выполнено условие (5.30), т.е. оптимально для центра весь ресурс направить на изменение представлений:

(5.31) $x = \dfrac{C}{C_1}$, $y = 0$.

Решение (5.31) отвечает ситуации, когда доля α_2 агентов второго типа достаточно велика. Из Рис. 5.12 видно, что если $\alpha_2 > \dfrac{k_1}{k_1 + k_2}$, то решение (5.31) всегда оптимально. Если же:

(5.32) $\dfrac{k_1 - 1}{k_1 + k_2 - 1} < \alpha_2 < \dfrac{k_1}{k_1 + k_2}$,

то решение (5.31) оптимально при достаточно больших α_3. Содержательно последний случай означает следующее: при некотором диапазоне значений параметра α_2 (т.е. при выполнении (5.32)) оптимально влиять на представления, когда они слишком пессимистичны (т.е. когда α_3 достаточно велико и, следовательно, велика вероятность p выбора негативного полюса).

В заключение отметим, что рассмотрен простейший случай информационного управления в условиях биполярного выбора. Дальнейшее развитие модели (увеличение числа типов агентов, усложнение структуры информированности, усложнение функций реакции на ожидание) и ее сопоставление с наблюдаемыми результатами действий экономических (покупатели) и политических (избиратели) агентов представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

Реклама товара. В настоящем подразделе рассматриваются модели информационного управления, осуществляемого средствами массовой информации (СМИ), на примере *рекламы* и *предвыборных технологий*.

Предположим, что имеется агент – объект информационного воздействия. Цель воздействия – сформировать у агента определенное отношение к конкретному объекту или субъекту.

В случае рекламы агентом является потребитель, а объектом – товар или услуга [27]. Требуется, чтобы потребитель приобрел данный товар или услугу.

В случае предвыборных технологий агентом является избиратель, а субъектом – кандидат. Требуется, чтобы избиратель проголосовал за данного кандидата [32].

Рассмотрим i-го агента. Всех остальных агентов объединим в одного, для обозначения которого будем использовать индекс j. Пусть $\theta \in \Omega$ – объективная характеристика объекта, неизвестная достоверно ни одному из агентов. В качестве характеристик могут выступать потребительские свойства товаров, качества кандидатов и т.д.

Обозначим $\theta_i \in \Omega$ – представления i-го агента об объекте, $\theta_{ij} \in \Omega$ – его представления о представлениях об объекте j-го агента, и т.д.

Предположим для простоты, во-первых, что множество возможных действий каждого агента состоит из двух действий: $X_i = X_j = \{a; r\}$, где действие a (accept) соответствует приобретению товара или услуги, голосованию за рассматриваемого кандидата и т.д., а действие r (reject) – отказу от приобретения товара или услуги, голосованию за других кандидатов и т.д. Во-вторых, предположим, что множество Ω состоит из двух элементов, характеризующих качества объекта – g (good) и b (bad), то есть $\Omega = \{g; b\}$.

Рассмотрим последовательно (в порядке усложнения) ряд моделей поведения агента.

Модель 0 (рефлексия отсутствует). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множества Ω свойств объекта во множество X_i действий агента, то есть B_i: $\Omega \to X_i$. Примером такого отображения может служить следующее: $B_i(g) = a$, $B_i(b) = r$, то есть если агент считает, что товар (кандидат) хороший, то он его приобретает (отдает за него свой голос), и отвергает в противном случае.

В данной модели информационное управление заключается в формировании у агента представлений об объекте, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$. (Напомним, что в настоящей работе технологии информационного воздействия (то есть способы формирования требуемых представлений) не рассматриваются – см. их описание в [4, 27, 32].)

Модель 1 (первый ранг рефлексии). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Omega \ni \theta_i$ свойств объекта и $\Omega \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов – во множество X_i его действий, то есть B_i: $\Omega \times \Omega \to X_i$. Примерами такого отображения могут служить следующие:

$$B_i(g, g) = a, \quad B_i(g, b) = a, \quad B_i(b, g) = r, \quad B_i(b, b) = r,$$

и

$$B_i(g, g) = a, \quad B_i(g, b) = r, \quad B_i(b, g) = a, \quad B_i(b, b) = r.$$

В первом случае агент ориентируется на собственное мнение, во втором – на мнение других агентов («общественное мнение»).

В данной модели информационное воздействие является рефлексивным управлением. Посредством него у агента формируются представления об объекте и о представлениях других агентов, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо в первом случае сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$, θ_{ij} – любое, а во втором случае – $\theta_{ij} = g$, θ_i – любое.

Следует подчеркнуть, что в информационном управлении посредством СМИ не всегда воздействие направлено на формирование непосредственно θ_{ij} – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно – у агента формируются представления о поведении (выбираемых действиях) других агентов, по которым данный агент может восстановить их представления. Примерами косвенного формирования представлений θ_{ij} могут служить рекламные лозунги «Новое поколение выбирает Pepsi», «В то время, когда все настоящие мужики …», обращение к мнению авторитетных людей и т.д.; информация о том, что по опросам общественного мнения значительное число избирателей собирается поддержать данного кандидата и т.д.

Модель 2 (второй ранг рефлексии). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Omega \ni \theta_i$ свойств объекта, $\Omega \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов и $\Omega \ni \theta_{iji}$ – представлений агента о представлениях других агентов о его собственных представлениях – во множество X_i его действий, то есть B_i: $\Omega \times \Omega \times \Omega \to X_i$. Примером такого отображения, в котором проявляются отличные от нулевой и первой моделей свойства, может служить следующее:

$$\forall\ \theta \in \Omega \quad B_i(\theta, \theta, g) = a, \quad B_i(\theta, \theta, b) = r.$$

В данном случае агент следует своей «социальной роли» и производит выбор, которого от него ожидают другие агенты.

В рассматриваемой модели информационное воздействие является рефлексивным управлением и заключается в формировании у агента представлений о представлениях других агентов о его собственных представлениях, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_{iji} = g$.

Следует подчеркнуть, что информационное воздействие не всегда направлено на формирование непосредственно θ_{iji} – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно: у агента формируются представления о том, что другие агенты ожидают от него определенных действий. Речь идет о так называемом социальном влиянии, многочисленные примеры которого можно найти в учебниках по социальной психологии [4].

Примерами косвенного формирования представлений θ_{iji} могут служить лозунги «Ты записался добровольцем?», «А ты купил (сделал) …?», «В Вашем положении (при Вашем статусе) …?» и т.д.; информация о том, что по опросам общественного мнения большинство представителей социальной группы, к которой принадлежит (или с которой идентифицирует себя) агент, собирается поддержать данного кандидата и т.д.

Таким образом, мы рассмотрели простейшие модели информационного управления посредством СМИ, сформулированные в терминах рефлексивных моделей принятия решений и структур информированности. Во всех этих моделях ранг рефлексии не превышал двух (исключением является, наверное, очень редко встречающаяся на практике ситуация, когда информационное воздействие направлено на формирование сразу всей информационной структуры, например путем навязывания «общего знания» – «Голосуй сердцем!», «… – наш выбор!» и т.д.).

Представить себе реальные ситуации, в которых информационное воздействие направлено на более глубокие компоненты структуры информированности, затруднительно. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является изучение формальных моделей информационного управления (и технологий этого управления) агентами, осуществляющими коллективное принятия решений в условиях взаимосвязанной информированности.

Предположим теперь, что имеется два типа агентов: агенты первого типа склонны приобретать товар независимо от его рекламы, агенты второго типа в отсутствии рекламы приобретать товар не склонны. Обозначим $\theta \in [0; 1]$ – долю агентов первого типа.

Агенты второго типа, доля которых есть $1 - \theta$, подвержены влиянию рекламы, но не осознают этого. Социальное влияние [4] отразим следующим образом: будем считать, что агенты второго типа с вероятностью $p(\theta)$ выбирают действие a и с вероятностью $1 - p(\theta)$ выбирают действие r. Зависимость $p(\cdot)$ – вероятности выбора – от доли агентов, склонных приобретать товар, отражает нежелание агентов быть «белыми воронами».

Если истинная доля θ агентов первого типа является общим знанием, то агенты ожидают, что именно θ агентов приобретут товар, а фактически наблюдают, что товар приобрели:

(5.33) $x(\theta) = \theta + (1 - \theta)\, p(\theta)$

агентов (напомним, что мы предположили, что влияние рекламы не осознается агентами). Так как $\forall\ \theta \in [0; 1]\ \ \theta \le x(\theta)$, то косвенное социальное влияние оказывается самоподтверждающим – «Смотрите, оказывается, склонны приобретать товар больше людей, чем мы считали!».

Проанализируем теперь асимметричную информированность. Так как агенты первого типа выбирают свои действия независимо, то можно считать их адекватно информированными как о параметре θ, так и о представлениях агентов второго типа.

Рассмотрим модель информационного регулирования, в которой центр, проводящий рекламную акцию, формирует у агентов второго типа представления θ_2 о значении параметра θ.

Сделав маленькое отступление, обсудим свойства функции $p(\theta)$. Будем считать, что $p(\cdot)$ – неубывающая на [0; 1] функция, такая, что $p(0) = \varepsilon$, $p(1) = 1 - \gamma$, где ε и δ – константы, принадлежащие единичному отрезку, такие, что $\varepsilon \le 1 - \delta$. Содержательно ε соответствует тому, что некоторые агенты второго типа «ошибаются» и, даже если считают, что все остальные агенты имеют второй тип, то приобретают товар. Константа δ характеризует в некотором смысле подверженность агентов влиянию – у агента второго типа имеется шанс быть самостоятельным и, даже если он считает, что все остальные агенты приобретут товар, отказаться от покупки. Частный случай $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$ соответствует независимым агентам второго типа, отказывающимся от приобретения товара.

Так как агенты не подозревают о наличии манипуляции со стороны центра (см. принцип доверия в [19]), то они ожидают увидеть, что θ_2 агентов приобретут товар. Фактически же его приобретут:

(5.34) $x(\theta,\ \theta_2) = \theta + (1 - \theta)\, p(\theta_2)$.

Если доход центра пропорционален доле агентов, приобретающих товар, а затраты на рекламу $c(\theta,\ \theta_2)$ являются неубывающей функцией θ_2, то целевая функция центра (разность между доходом и затратами) в отсутствии рекламы равна (5.33), а в ее присутствии:

(5.35) $\Phi(\theta,\ \theta_2) = x(\theta,\ \theta_2) - c(\theta,\ \theta_2)$.

Следовательно, эффективность информационного регулирования можно определить как разность между (5.35) и (5.33), а задачу информационного регулирования записать в виде:

(5.36) $\Phi(\theta,\ \theta_2) - x(\theta) \to \max\limits_{\theta_2}$.

Обсудим теперь ограничения задачи (5.36). Первое ограничение: $\theta_2 \in [0; 1]$, точнее: $\theta_2 \geq \theta$.

Рассмотрим пример: пусть $p(\theta) = \sqrt{\theta}$, $c(\theta, \theta_2) = (\theta_2 - \theta) / 2\sqrt{r}$, где $r > 0$ – размерная константа. Тогда задача (5.36) имеет вид:

(5.37) $(1 - \theta)\,(\sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta}) - (\theta_2 - \theta) / 2\sqrt{r} \to \max\limits_{\theta_2 \in [\theta; 1]}$.

Решение задачи (5.37) имеет вид: $\theta_2(\theta) = \max\{\theta;\ r\,(1 - \theta)^2\}$, т.е. при $\theta \geq \frac{(2r+1) - \sqrt{4r+1}}{2r}$ информационное регулирование для центра не имеет смысла (затраты на рекламу не окупаются, так как достаточная доля агентов приобретает товар в отсутствие рекламы).

Наложим теперь дополнительно к $\theta_2 \in [\theta; 1]$ требование стабильности информационного регулирования, а именно, в предположении наблюдаемости доли агентов, приобретающих товар, будем считать, что агенты второго типа должны наблюдать значение доли агентов, приобретающих товар, не меньшее, чем им сообщил центр, то есть условие стабильности имеет вид: $x(\theta, \theta_2) \geq \theta_2$.

Подставляя (5.34), получим:

(5.38) $\theta + (1 - \theta)\,p(\theta_2) \geq \theta_2$.

Следовательно, оптимальным стабильным решением задачи информационного регулирования будет решение задачи максимизации (5.36) при ограничении (5.38).

В заключение настоящего раздела отметим, что в рассматриваемом примере любое информационное регулирование будет стабильным в смысле (5.38). Если же понимать под стабильностью полное совпадение ожидаемых и наблюдаемых агентами результатов (то есть потребовать выполнение (5.38) как равенства), то единственным стабильным информационным регулированием будет сообщение центра, что все агенты являются агентами первого типа, то есть $\theta_2 = 1$ (что чаще всего и имеет место в рекламе).

Качественное обсуждение. Методы информационного управления, описанные в настоящей главе, являются наиболее тонкими, изощренными, «рискованными» по сравнению с прочими, поскольку информированность (мнения, убеждения) обычно смоделировать сложнее, чем, например, оргструктуру организации или даже мотивационную структуру субъекта. Более того, методы информационного управления могут применяться как «надстройка» над любыми другими методами, так как в результате применения управления в организационной системе формируется равновесие, зависящие от информированности всех участников системы. А воздействие на структуру информированности может позволить управлять равновесием, повышая эффективность функционирования системы с точки зрения лица, принимающего решения.

В рамках принятой в рефлексивных играх модели принятия решений действия агента определяются не чем иным, как его информированностью о состоянии природы и представлениях оппонентов (других агентов). Поэтому весьма важным является вопрос о том, каким образом информационные воздействия центра влияют на эти представления. Иными словами, вопрос состоит в следующем: как формируется информационная структура игры в зависимости от тех или иных информационных воздействий центра.

Здесь необходимо признать, что сколько-нибудь исчерпывающий ответ на этот вопрос, по видимому, невозможно получить, оперируя исключительно математическими (и, в частности, теоретико-игровыми) моделями. Это обусловлено в первую очередь тем, что процесс усвоения человеком той или иной информации в очень большой степени обусловлен факторами социально-психологического порядка. Как отмечено в [5, с. 81], «секрет высокоэффективного информационного управления – обращение к бессознательному, в использовании приемов снятия барьеров восприятия и преодоления естественной толерантности человека к восприятию нового».

Понятно, с какими трудностями связана формализация этого процесса, когда речь идет о принятии решения умным и рациональным агентом (intelligent rational decision-maker [36, p. 1]) – «главным героем» работ по теории игр. Все разработанные на данный момент концепции решения игры основываются, явно или неявно, на уже существующей к моменту начала игры структуре информированности[22]. Что было «до начала игры», как сложилась та или иная информированность – этот вопрос остается за рамками обсуждения. По-видимому, здесь проходит некая граница между реальным человеком и модельным «умным рациональным агентом».

Выше была приведена классификация информационных воздействий.

---

[22] *Не являются исключением и многошаговые игры, где в ходе разыгрывания игры может происходить изменение информированности участников (в том числе в силу информационного обмена между ними) – ведь и у многошаговой игры существует некий начальный момент и, соответственно, начальная информированность участников.*

Напомним пример, ставший основой модели «Принцип дефицита» (см. раздел 5.4). В [29, с. 235] описан психологический эксперимент, проведенный изучавшим психологию бизнесменом, владельцем компании, импортирующей в США говядину. «Торговые агенты позвонили, как обычно, постоянным клиентам компании – закупщикам говядины для супермаркетов и других точек, торгующих продуктами в розницу, и одним из трех способов предложили им сделать заказ. Одни клиенты услышали предложение, сделанное в стандартной форме. Другим клиентам дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены в ближайшие несколько месяцев. Третья группа клиентов получила те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок, так как эти сведения поступили из надежного, но засекреченного источника.

… По сравнению с клиентами, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме, те клиенты, которым было также сказано о дефиците говядины, заказали ее в два раза больше… Клиенты, которые решили, что владеют «исключительной» информацией… приобрели в шесть раз больше говядины, чем клиенты, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме».

В этом примере отчетливо видно осуществление информационного регулирования («поставки импортной говядины будут сокращены») и рефлексивного управления («поставки импортной говядины будут сокращены… мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок»).

Приведем пример активного прогноза. В [13, с. 162] описывается следующий эффект. «Вечером 6 января 1981 года Джозеф Гранвилл, известный советник по капиталовложениям во Флориде, отправил своим клиентам телеграмму: «Цены на акции резко упадут; продавайте завтра». Очень скоро все узнали о совете Гранвилла, и 7 января стало самым черным днем во всей истории Нью-йоркской фондовой биржи. По общему мнению, акции потеряли в цене около 40 миллиардов долларов».

Еще пример активного прогноза [26, с. 51]: «Если влиятельные эксперты, выполняя заказ главы государства, находящегося в конфликтных отношениях с высшим органом законодательной власти, спрогнозировали неизбежность досрочного роспуска парламента, то это могло подвигнуть заказчика именно к такому развитию событий, хотя реально оставались возможности для реализации иного сценария».

В заключение данного раздела отметим, что на сегодняшний день существует несколько трактовок терминов «рефлексия» и «рефлексивное управление». В том числе, в рамках подходов школы В.А. Лефевра см. [6, 7-12, 24, 28, 33, 34] и др. (см. также [14]),.

Успешность практического применения методов информационного управления в решающей степени зависит от адекватности моделей

1) текущей информированности агентов;

2) зависимости информационной структуры от сообщений (и иных действий) центра.

Задачи и упражнения к главе 5

5.1. В игре участвуют три агента с целевыми функциями следующего вида (олигополия Курно с нулевыми затратами на производство): $f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)\, x_i$, где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$; $\theta \in \Omega = \{1, 2\}$.

Содержательно, x_i – объем выпуска продукции i-м агентом, θ – величина, характеризующая спрос на производимую продукцию. Для краткости будем называть агента, считающего, что спрос низкий ($\theta = 1$), пессимистом, а считающего, что спрос высокий ($\theta = 2$) – оптимистом.

Постройте граф рефлексивной игры и найдите информационное равновесие в следующих ситуациях:

5.1.1. Первый и второй агенты оптимисты и считают всех трех агентов одинаково информированными оптимистами. Третий агент пессимист и считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами.

5.1.2. Первый и второй агенты оптимисты и считают всех трех агентов одинаково информированными оптимистами. Третий агент пессимист и адекватно информирован о первых двух.

5.1.3. Первый агент считает общим знанием, что спрос будет низким; второй агент считает общим знанием, что спрос будет высоким. Третий агент оптимист и адекватно информирован о первых двух.

5.1.4. Каждый из агентов является оптимистом и считает, что остальные двое считают общим знанием низкий спрос.

5.2. Пусть в игре участвуют два агента с целевыми функциями $f_i(\theta, x_1, x_2) = (\theta - x_1 - x_2)\, x_i$, где $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$; $\theta \geq 0$.

Приведите пример информационной структуры, в котором первый агент адекватно информирован о втором, представление первого агента о неопределенном параметре соответствует действительности, однако в равновесии второй агент получает больший выигрыш, чем первый.

5.3. Приведите пример ситуации с тремя участниками и неопределенным параметром θ, в которой в действительности имеет место $\theta = \theta_0$ и общим знанием среди агентов является $\theta = \theta_1 \neq \theta_0$.

5.4. Приведите пример ситуации с тремя участниками и неопределенным параметром θ, в которой в действительности имеет место $\theta = \theta_0$ и если бы общим знанием среди агентов было бы $\theta = \theta_0$, то выигрыш всех агентов в равновесии был бы меньше, чем в исходной ситуации.

5.5. Проанализируйте, как в примерах 5.1 и 5.2 информированность влияет на действия и выигрыши агентов.

5.6. В условиях примера 5.2 все трое агентов оптимисты, первый и второй взаимно информированы, второй и третий также взаимно информированы. По мнению первого агента, третий считает всех троих одинаково информированными пессимистами; также и первый агент, по мнению третьего, считает всех троих одинаково информированными пессимистами. Нарисуйте граф рефлексивной игры. Найдите информационное равновесие [20].

5.7. Пусть в ситуации участвуют два государства (A и B) и агент, который, будучи высокопоставленным чиновником государства A является одновременно осведомителем государства B, о чем государству A неизвестно. Нарисуйте граф рефлексивной игры [20].

5.8. Пусть в условиях задачи 5.7 агент на самом деле работает на государство A, а государству B передает лишь соответствующим образом обработанные сведения. Нарисуйте граф рефлексивной игры [20].

5.9. Играя в прятки, первый агент прячется в одной из нескольких комнат разной освещенности, а другой агент должен выбрать ту комнату, где будет его искать. Степени освещенности всех комнат являются общим знанием. Стратегии агентов следующие. Ищущий при прочих равных условиях предпочитает искать, где светлее (там проще найти). Прячущемуся понятно, что в более темной комнате шансов найти его меньше, чем в освещенной. Возрастание ранга рефлексии означает, что агенту становится понятно, что это понятно и его противнику, и т.д. Каковы максимальные целесообразные ранги рефлексии агентов [20]?

5.10*. Продавец и покупатель, имеющие иерархию взаимных представлений о ценности продаваемого товара, должны придти к соглашению о цене, по которой произойдет сделка купли-продажи. Постройте модель. Найдите информационное равновесие [21, 31].

5.11*. Пусть в модели активной экспертизы (см. раздел 4.5) организатор экспертизы имеет возможность сформировать у экспертов представления о мнениях друг друга. Какой диапазон коллективных решений может быть реализован как информационное равновесие рефлексивной игры экспертов [31]?

5.12*. Постройте и исследуйте модель формирования команды – множества агентов, выборы которых согласованы с иерархией их взаимных представлений друг о друге [18].

5.13*. В условиях модели упражнения 5.12 исследуйте, как информированность агентов о действиях и результатах деятельности других членов команды влияет на скорость формирования команды [16].

5.14*. Для модели распределения ресурса (см. раздел 4.3) исследуйте, при каких взаимных представлениях агентов о необходимых им количествах ресурса существует стабильное информационное равновесие. В каких случаях это равновесие истинное? Докажите, что стабильные неадекватные представления могут существовать только относительно агентов, не входящих в число «диктаторов» [21].

5.15*. Приведите определения следующих понятий и содержательные примеры: множество достижимости, рефлексия (первого рода, второго рода, информационная, стратегическая), рефлексивная игра, структура информированности, информационное равновесие (стабильное, нестабильное, истинное, ложное), функция наблюдения, информационное регулирование, рефлексивное управление, активный прогноз, аксиома автоинформированности, фантомный агент, сложностью структуры информированности, глубина структуры информированности, ранг рефлексии, граф рефлексивной игры, равновесие биполярного выбора.

Литература к главе 5[23]

1. Автономов В.С. Модель человека в экономической науке. – СПб.: Экономическая школа, 1998.
2. *Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. – М.: ИПУ РАН, 2003.
3. *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.
4. Зимбардо Ф., Ляйппе М. Социальное влияние. – СПб.: Питер, 2000.
5. Информационное общество: Информационные войны. Информационное управление. Информационная безопасность / Под ред. М.А. Вуса. С.–Пб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1999.
6. Крылов В.Ю. Методологические и теоретические проблемы математической психологии. М.: Янус-К, 2000.
7. Лефевр В.А. Исходные идеи логики рефлексивных игр / Материалы конференции «Проблемы исследования систем и структур». М.: Издание АН СССР, 1965.
8. *Лефевр В.А. Конфликтующие структуры. – М.: Советское радио, 1973.
9. Лефевр В.А. Комический субъект. М.: Институт психологии РАН, 1997.
10. Лефевр В.А. Формула человека. Контуры фундаментальной психологии. – М.: Прогресс, 1991.
11. Лефевр В.А. Алгебра совести. – М.: «Когито-Центр», 2003.
12. Лефевр В.А. Рефлексия. – М.: «Когито-Центр», 2003.
13. Майерс Д. Социальная психология. СПб.: Питер, 2001.
14. *Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. – М.: Синтег, 2007.
15. *Новиков Д.А. Институциональное управление организационными системами. – М.: ИПУ РАН, 2003.
16. *Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. – М.: Физматлит, 2008.

[23] *Проблемы построения моделей информационного управления и моделей иерархических структур привлекли внимание исследователей сравнительно недавно, и в этих областях еще не сложилась «каноническая библиография». Поэтому списки литературы к настоящей и последующей главе гораздо объёмнее списков литературы к предыдущим главам.*

17. *Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003.
18. *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: Физматлит, 2007.
19. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз. – М.: ИПУ РАН, 2002.
20. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003.
21. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Прикладные модели информационного управления. – М.: ИПУ РАН, 2004.
22. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. – М.: Наука, 1977.
23. Расторгуев С.П. Философия информационной войны. М.: Вузовская книга, 2001. – 468 с.
24. Рефлексивные процессы / Спецвыпуск журнала «Прикладная эргономика». 1994. № 1.
25. Рудык Н.Б. Поведенческие финансы или между страхом и алчностью. – М.: Дело, 2004.
26. Симонов К.В. Политический анализ. – М.: Логос, 2002. – 152 с.
27. Сэндидж Ч., Фрайбургер В., Ротцолл К. Реклама: теория и практика. – М.: Прогресс, 1999.
28. Таран Т.А. Логические модели рефлексивного выбора // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С. 103 – 117.
29. Чалдини Р. Психология влияния. – СПб.: Питер, 2001.
30. *Чхартишвили А.Г. Информационное равновесие / Управление большими системами. 2003. № 3. С. 100 – 119.
31. *Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели информационного управления. – М.: ПМСОФТ, 2004.
32. Шейнов В.П. Скрытое управление человеком (психология манипулирования). – М.: Издательство АСТ, 2002.
33. Шеманов А.Ю. Самоидентификация на пороге «осевых времен» (к интерпретации модели рефлексии В. Лефевра) / От философии жизни к философии культуры. СПб., 2001. С. 137 – 158.
34. Шрейдер Ю.А. Человеческая рефлексия и две системы этического сознания // Вопросы философии. 1990. № 7. С. 32 – 42.
35. Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
36. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. – London: Harvard Univ. Press, 2001.

ГЛАВА 6. Механизмы формирования оптимальных структур управления

В настоящей главе формулируются и решаются задачи анализа и синтеза структур управления; в том числе, описываются: задача формирования организационных иерархий (раздел 6.1), модели организационных структур (раздел 6.2), общая модель иерархии управления (раздел 6.3), методы поиска оптимальных древовидных структур (раздел 6.4).

6.1. Задачи формирования организационных иерархий

Как изучать организации? Этот на первый взгляд простой и даже странный вопрос (ведь организации изучаются с античных времен) при ближайшем рассмотрении оказывается совсем не простым и вполне уместным. Дело в том, что организации – пожалуй, самая сложная, разнообразная, изменчивая и, как следствие, наименее изученная из известных в настоящее время «форм жизни».

Разнообразие типов, видов, форм организаций растет постоянно и ускоренно, что не позволяет создать в настоящее время сколько-нибудь общей концепции или теории. Даже наиболее постоянные из известных типов организаций, такие как семья, этнос, государство, претерпевают в последние десятилетия столь значительные изменения, что описывающие их теории часто противоположны.

Что же касается организаций, связанных с производственной деятельностью, то их изменение является прямым следствием их существования, точнее – следствием расширенного воспроизводства. Стремительно развивающиеся в последние десятилетия глобальные сетевые (в том числе, виртуальные) организации, на наших глазах объединяющиеся в интернет-сообщества, создающие интернет-экономику и интернет-культуру, то есть – глобальный интернет-социум, служат ярким примером сказанного.

Формальные модели организаций начали активно разрабатываться с середины XX века вследствие, с одной стороны, практической потребности управления все усложняющимися экономическими, социальными и военными организациями, а с другой стороны, – появления новой научной методологии исследования сложных систем – системного подхода и *системного анализа*. С этого времени организации являются предметом приложения и источником развития математических методов (таких как методы оптимизации, исследование операций, теория игр и др.).

Происшедшая в то же время компьютерная революция создала техническую базу нового математического метода – математического моделирования с его новым исследовательским аппаратом – численным экспериментом, и одной из задач численных экспериментов стало моделирование функционирования организаций.

Созданные к настоящему времени модели организаций, в основном, можно разделить на «экономические» и «инженерные».

В течение первой половины XX века происходил непрерывный процесс формализации экономической науки, который в результате привел к созданию развернутой математической теории экономического равновесия. Однако довольно скоро стало ясно, что эта теория, во-первых, не может объяснить многих наблюдаемых на реальных рынках эффектов, а, во-вторых, почти не рассматривает закономерности внутренней организации экономических субъектов – фирм [30, 39, 41]. Последовательное совершенствование экономической теории во второй половине XX века привело к осознанию важности информационных аспектов функционирования экономических систем, таких, например, как асимметричная информированность агентов и ограниченные их возможности по обработке информации и принятию решений. В числе прочего неоклассическая экономическая теория позволила пролить свет на роль и место иерархических организаций в процессах производства и распределения благ.

Параллельно с развитием *математической экономики* первая половина XX века была отмечена бурным прогрессом *теории управления техническими системами*. Развитие авиации и ракетной техники, связанное с созданием и эксплуатацией сложнейших технических систем, породило насущную необходимость в формальных моделях организации их разработки и функционирования. Моделирование сложной технической системы невозможно без ее декомпозиции на более простые подсистемы, позволяющей сначала исследовать поведение изолированных подсистем, а затем описать их взаимосвязи [4]. Многоуровневая декомпозиция позволяет представить сложный объект в виде иерархии вложенных друг в друга более простых частей, задающих его структуру, и от того, насколько удачно выбрана структура проектируемой системы, во многом зависят и ее эксплуатационные характеристики [2]. Поэтому количество исследований, посвященных методам оптимизации структуры технических систем, непрерывно росло. Успешное применение результатов этих работ в практике проектирования и управления техническими системами породило стремление расширить область их применения на организационные [5] и биологические [1] системы, что, в числе прочего, и было реализовано в ходе развития новых научных направлений – *кибернетики* [16] и *теории систем* [4, 7].

В настоящее время наблюдается сближение позиций экономического и инженерного направлений в моделировании организаций. Не последнюю роль в этом сыграло развитие информационных технологий и вычислительной техники. Оказалось, что связанная с обработкой информации работа распределенных вычислительных систем во многом напоминает работу менеджеров в организациях, и в настоящее время многие экономисты (см., например, [26, 28, 45, 50]) используют при моделировании организационных иерархий терминологию и результаты, пришедшие из инженерных наук, в частности, информатики. Таким образом, можно говорить о появлении синтетических теорий, объединяющих достоинства инженерного и экономического подходов.

Любая экономическая система состоит из множества организованных некоторым образом *агентов* (сотрудников)[24]. Благодаря организации сотрудники действуют на основе определенных процедур и правил (*механизмов*), что позволяет достичь цели системы.

Специализация сотрудников *организации* повышает их эффективность по сравнению с множеством одиночных (неорганизованных) агентов. Однако взаимодействие сотрудников с различной специализацией должно быть скоординировано для достижения общей цели. Это фундаментальная проблема любой организации, поскольку координация требует усилий, направленных на планирование совместной работы, контроль ее результатов, согласование целей отдельных сотрудников и т.д. Для реализации управленческих функций в организации создается *иерархия*[25].

С одной стороны, иерархия повышает эффективность взаимодействия сотрудников, например, с помощью планирования и контроля материальных, информационных и других потоков. С другой стороны, реализация управленческих функций требует затрат. В современных экономических системах доля менеджеров, выпол-

---

[24] *Ниже термины «организация» и «экономическая система» используются как синонимы.*

[25] *Сотрудники на более высоких уровнях иерархии обладают бóльшими правами, чем сотрудники нижних уровней, что позволяет системе достичь цели даже в случае конфликтов.*

няющих только управленческие функции, достигает 40 % (см., например, [45]). Поэтому одним из ключевых факторов эффективности экономической системы является оптимальность иерархии управления.

В реальных организациях возможности эксперимента со структурой управления очень ограничены, поэтому важное значение приобретают модели, которые позволяют выбрать эффективную организационную иерархию, а также обосновать необходимость и направление ее реформирования при изменении условий функционирования организации.

Классификация моделей иерархических структур. Подходы к формулировке и решению задач формирования организационных иерархий весьма разнообразны. Не в последнюю очередь это связано со сложностью описываемого объекта. Разобраться во всем многообразии моделей помогает их классификация. В литературе встречаются несколько принципов систематизации моделей формирования организационных структур. Так, ряд классификаций основывается на формальных характеристиках моделей: используемом математическом аппарате, типах рассматриваемых структур и т.п.

Например, в [24] выделяются четыре основных подхода к построению моделей формирования организационных структур. Первый подход основан на построении графа декомпозиции целей и задач организации[26]. Во втором подходе считается, что задача организации состоит в максимизации некоторого критерия эффективности – ее «целевой функции». В силу сложности этой функции, задачу максимизации приходится декомпозировать и поручать решение частных задач отдельным подразделениям организации. Формирование организационной структуры сводится к поиску допустимой декомпозиции, минимизирующей потери эффективности. В третьем подходе строится функция, напрямую определяющая зависимость эффективности функционирования организации от структурных характеристик организационной иерархии и ищется иерархия, максимизирующая/минимизирующая эту функцию. Четвертый подход связан с количественной оценкой взаимосвязей между элементами

[26] *В общей теории систем считается, что структура организации во многом обусловлена структурой этого графа. Задача формирования организационной структуры при этом сводится к решению задачи назначения – распределения подцелей по подразделениям и сотрудникам организации.*

системы и иерархической группировкой наиболее сильно связанных элементов в подразделения.

Еще одна система классификации, основанная на таких формальных характеристиках моделей, как цель исследования, целенаправленность системы и отдельных ее элементов, однородность элементов, количество уровней организационной структуры, и т.п., рассмотрена в [13]. Эта довольно подробная система классификаций позволяет разбить все множество моделей на большое количество классов и анализировать, например, степень похожести моделей по различным признакам классификации (в [13] приведена классификация по этой системе примерно сотни работ различных авторов).

Другие известные системы классификации базируются не на формальных, а на содержательных характеристиках моделей. Наиболее типичным признаком классификации являются задачи, решаемые *менеджерами* – элементами иерархии управления[27]. Среди этих задач Р. Раднер [45] выделяет следующие:

1) наблюдение за внешней средой и результатами предыдущих действий;
2) обработка и передача информации;
3) принятие решений;
4) контроль;
5) решение кадровых вопросов;
6) обучение и разъяснение;
7) планирование;
8) решение проблем;
9) убеждение, принуждение и целеполагание.

Похожая классификация предлагается и в [33].

Далее в настоящем разделе на примере модели надстройки иерархии управления над технологической сетью проиллюстрируем основные термины и понятия, связанные с организационными структурами.

Задача надстройки иерархии управления над технологической сетью [12, 21]. Пусть $N = \{w_1, \ldots, w_n\}$ – множество *исполнителей*, которые могут взаимодействовать друг с другом. Через w_{env} будем обозначать *внешнюю среду*, взаимодействующую с исполни-

[27] *Задачи, решаемые менеджерами, могут быть положены в основу классификации моделей формирования иерархий потому, что в рамках одной модели обычно рассматривается только один из видов управленческой работы – тот, который авторы модели принимают за наиболее важный.*

телями. Иногда исполнители будут обозначаться через $w, w', w'' \in N$.

Функцией потока называется следующая функция:

(6.1) $f : (N \cup \{w_{env}\}) \times (N \cup \{w_{env}\}) \to R_+^p$,

то есть для каждой пары исполнителей $w', w'' \in N$ вектор $f(w', w'')$ определяет *интенсивность потоков* между w' и w''. Этот вектор содержит p неотрицательных компонент. Каждая компонента определяет интенсивность одного типа взаимодействия исполнителей (материальный, информационный или прочий тип потока). Таким образом, технология взаимодействия исполнителей определяет функцию потока f или взвешенную *технологическую сеть* (N, f). Технологическая сеть считается *неориентированной*, то есть $\forall w', w'' \in N \;\; f(w', w'') = f(w'', w')$.

Будем говорить, что между парой исполнителей отсутствует *связь* тогда и только тогда, когда поток между исполнителями нулевой. Предполагаем, что сеть не содержит петель, то есть для любого исполнителя w выполнено $f(w, w) = 0$.

Рассмотрим пример. Пусть $N = \{w_1, w_2, w_3\}$ и $p = 1$, то есть имеются трое исполнителей и потоки одного типа. Будем считать, что в технологической сети имеются четыре связи $f(w_{env}, w_1) = \lambda$, $f(w_1, w_2) = \lambda$, $f(w_2, w_3) = \lambda$, $f(w_3, w_{env}) = \lambda$, где λ – вектор интенсивности потока. Эта технологическая сеть изображена на рисунке 6.1. Данный пример может соответствовать производственной линии («бизнес-процессу»). Исполнитель w_1 принимает сырье от поставщика, проводит первичную обработку и передает результат исполнителю w_2. Тот выполняет очередную технологическую операцию и передает результат далее. Последний исполнитель (в примере – w_3), выполнив последнюю технологическую операцию, отгружает продукцию потребителю.

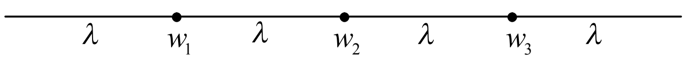


Рис. 6.1. Симметричная производственная линия

Сеть с исполнителями $N = \{w_1, \ldots, w_n\}$ и потоками $f(w_{env}, w_1) = \lambda$, $f(w_{i-1}, w_i) = \lambda$ для всех $2 \le i \le n$,

$f(w_n, w_{env}) = \lambda$ будем ниже называть *симметричной производственной линией*[28], а λ – *интенсивностью линии*.

Обозначим через M конечное множество *менеджеров*, управляющих взаимодействием исполнителей. Менеджеры обычно будут обозначаться через $m, m', m'', m_1, m_2, \ldots \in M$.

Пусть $V = N \cup M$ – все множество *сотрудников* организации (исполнителей и менеджеров). Рассмотрим множество *ребер подчиненности* $E \subseteq V \times M$. Ребро $(v, m) \in E$ означает, что сотрудник $v \in V$ является *непосредственным подчиненным* менеджера $m \in M$, а m – *непосредственным начальником* сотрудника v. Таким образом, ребро направлено от непосредственного подчиненного к его непосредственному начальнику.

Сотрудник $v \in V$ является *подчиненным* менеджера $m \in M$ (менеджер m является *начальником* сотрудника v), если существует цепочка ребер подчиненности из v в m. Будем также говорить, что начальник *управляет* подчиненным, или подчиненный *управляется* начальником. Дадим строгое определение иерархии.

Определение 6.1. Ориентированный граф $H = (N \cup M, E)$ с множеством менеджеров M и множеством ребер подчиненности $E \subseteq (N \cup M) \times M$ назовем *иерархией, управляющей множеством исполнителей N*, если граф H ацикличен, любой менеджер имеет подчиненных и найдется менеджер, которому подчинены все исполнители. Через $\Omega(N)$ обозначим множество всех иерархий.

Ацикличность означает, что не существует «порочного круга» подчиненности, в котором каждый менеджер является одновременно и начальником, и подчиненным всех остальных. Определение 6.1 также исключает ситуации, в которых имеются «менеджеры» без подчиненных, так как это противоречит роли менеджера, который должен управлять некоторыми сотрудниками.

Существование менеджера, которому подчинены все исполнители, означает, что у любого множества исполнителей найдется общий начальник, то есть иерархия способна управлять взаимодействием всех исполнителей.

Рис. 6.2 иллюстрирует введенное определение. Исполнители на нем изображены темными кружками и пронумерованы арабскими цифрами, а менеджеры изображены светлыми кружками и пронуме-

---

[28] *Все остальные потоки подразумеваются равными нулю.*

рованы латинскими цифрами. Графы а)-в) являются иерархиями, управляющими множеством исполнителей $N = \{1, \dots, 4\}$. Определенные таким образом иерархии позволяют описывать часто встречающиеся в практике управления эффекты, например, межуровневое взаимодействие, когда менеджер непосредственно управляет и другими менеджерами, и исполнителями (менеджер II иерархии б), а также множественное подчинение, когда сотрудник имеет более одного непосредственного начальника (менеджер I в иерархии б), исполнитель 3 в иерархии в). Определение 6.1 допускает наличие в иерархии нескольких менеджеров, не имеющих начальников (менеджеры II и III иерархии б), а также менеджеров, имеющих единственного непосредственного подчиненного (менеджер III иерархии б).

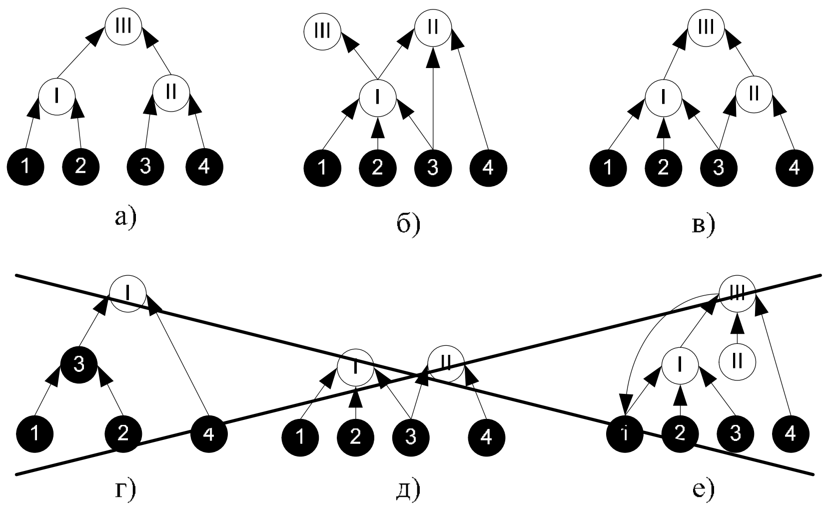


Рис. 6.2. К определению иерархии

В то же время, графы г)-е) иерархиями не являются. В графе г) исполнитель с номером 3 имеет подчиненных, в графе д) нет топ-менеджера, который управлял бы всеми исполнителями, в графе е) менеджер II не имеет подчиненных, кроме того, этот граф содержит цикл $1 \to \mathrm{I} \to \mathrm{III} \to 1$.

Определим несколько частных видов иерархии и введем важное понятие нормы управляемости.

<u>Определение 6.2</u>. Иерархию назовем *деревом*, если в ней только один менеджер m не имеет начальников, а все остальные сотрудники

имеют ровно одного непосредственного начальника. Менеджера *m* будем называть корнем дерева.

На рисунке 6.4 а) изображен пример дерева. Напротив, иерархия 6.4 б) деревом не является, так как в ней один менеджер имеет двух непосредственных начальников.

Определение 6.3. Иерархию назовем *r*-иерархией, если у каждого ее менеджера не более *r* непосредственных подчиненных, где $r > 1$ – целое число. *r*-иерархию, которая является деревом, назовем *r*-деревом.

В литературе по менеджменту часто используется термин «*норма управляемости*» – максимальное количество непосредственных подчиненных, которыми может управлять один менеджер. Определение *r*-иерархии соответствует норме управляемости, равной *r*. В силу леммы 6.2 в дереве норма управляемости не превосходит *n*. Максимальную среди всех деревьев норму управляемости имеет *двухуровневая иерархия*, в которой одному менеджеру непосредственно подчинены все исполнители.

Определение 6.4 [9]. *Двухуровневой* (*веерной*) *иерархией* называется иерархия с единственным менеджером, который непосредственно управляет всеми исполнителями.

Определение 6.5 [9]. *Последовательной иерархией* называется 2-иерархия, в которой каждый менеджер непосредственно управляет, как минимум, одним исполнителем.

Основным для организационных структур понятием является понятие сферы ответственности менеджера (его обязанностей). Для формализации «роли» менеджера в организации введем понятие *группы, управляемой менеджером*.

Группой исполнителей $s \subseteq N$ называется любое непустое подмножество множества исполнителей.

По определению 6.1 в любой иерархии *H* каждый менеджер имеет, по крайней мере, одного непосредственного подчиненного. Начав с любого менеджера *m*, мы можем двигаться по иерархии «сверху вниз» к подчиненным менеджера *m*. В итоге можно определить множество исполнителей, подчиненных менеджеру *m*. Будем называть это множество *подчиненной группой исполнителей* и обозначать $s_H(m) \subseteq N$. Будем также говорить, что менеджер *m управляет группой исполнителей* $s_H(m)$. Ниже в обозначении группы $s_H(m)$ будем опускать нижний индекс, если ясно, о какой иерархии идет речь.

Также будем считать, что исполнитель $w \in N$ «управляет» простейшей группой $s_H(w) = \{w\}$, состоящей из него самого.

На рис. 6.3. плоскость соответствует технологической сети, над которой надстраивается иерархия. Над плоскостью изображена часть иерархии, подчиненная менеджеру m. Она состоит из непосредственных подчиненных менеджера m и подчиненных, которыми менеджер m не управляет непосредственно. Подчиненная группа исполнителей $s_H(m)$ обведена на рисунке эллипсом.

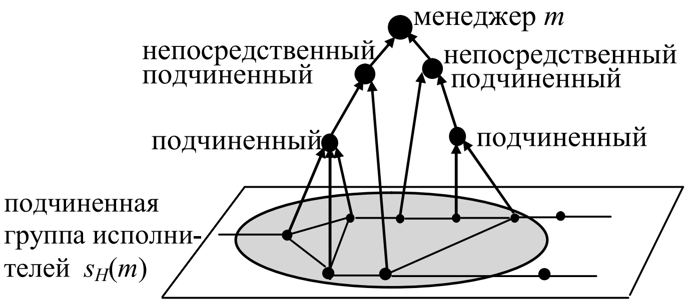


Рис. 6.3. Менеджер и подчиненная ему группа исполнителей

Сформулируем простую лемму [21], необходимую для дальнейшего изложения.

<u>Лемма 6.1.</u> Для любой иерархии H и любого менеджера $m \in M$ выполнено $s_H(m) = s_H(v_1) \cup \ldots \cup s_H(v_k)$, где $v_1, \ldots, v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m. Для любого подчиненного v менеджера m выполнено $s_H(v) \subseteq s_H(m)$.

Проиллюстрируем результат леммы на примере. На рисунке 6.4 а) менеджеру m непосредственно подчинены менеджеры m_1 и m_2. Менеджеру m подчинена группа $s(m)=\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Менеджерам m_1 и m_2 подчинены группы $s(m_1)=\{w_1, w_2\}$ и $s(m_2)=\{w_3, w_4\}$ соответственно. Таким образом, группа $s(m)$ разбивается на две подгруппы $s(m_1)$ и $s(m_2)$: $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}=\{w_1, w_2\}\cup\{w_3, w_4\}$. В данном примере подгруппы не пересекаются. В общем случае, как показано на рисунке 6.4 б), пересечения могут иметь место.

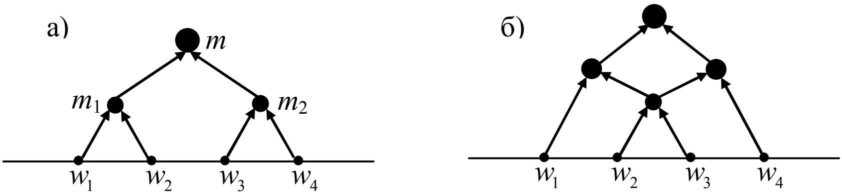


Рис. 6.4. Примеры иерархий над производственной линией

Сформулируем полезную лемму [21] – критерий древовидности иерархии.

Лемма 6.2. Пусть в иерархии H только один менеджер не имеет начальников. Иерархия H будет деревом тогда и только тогда, когда непосредственные подчиненные любого менеджера управляют непересекающимися группами исполнителей.

Таким образом, при наличии единственного менеджера без начальников в дереве и только в нем непосредственные подчиненные любого менеджера не «дублируют» обязанности друг друга, то есть не управляют одним и тем же исполнителем.

В рассматриваемой модели объем выполняемой менеджером работы определяется потоками технологической сети между исполнителями управляемой им группы и потоками между управляемой группой исполнителей и остальной организацией. Считается, что любой менеджер выполняет обязанности двух типов:

1) Управляет теми потоками внутри подчиненной группы, которые не управляются подчиненными менеджерами. Например, на рисунке 6.4 а) менеджер m управляет потоком $f(w_2, w_3)$.

2) Участвует в управлении потоками между подчиненной группой и всеми остальными исполнителями, внешней средой. Эта компонента потока указана в приведенных выше выражениях в скобках. Например, на рисунке 6.4 а) менеджер m_1 участвует в управлении потоками $f(w_{env}, w_1)$ и $f(w_2, w_3)$.

Введем формальное определение обязанностей менеджера.

Определение 6.6. В иерархии $H \in \Omega(N)$ менеджер m выполняет обязанности двух типов:

1) Управляет потоками $f(w', w'')$ между подчиненными исполнителями $w', w'' \in s_H(m)$, которые не управляются ни одним из

подчиненных менеджера *m*. Сумму таких потоков назовем *внутренним потоком* менеджера *m* и обозначим $F_H^{\text{int}}(m)$.

2) Участвует в управлении потоками $f(w', w'')$ между подчиненным исполнителем $w' \in s_H(m)$ и неподчиненным исполнителем $w'' \in N \setminus s_H(m)$ или внешней средой $w'' = w_{env}$. Сумму таких потоков назовем *внешним потоком* менеджера *m* и обозначим $F_H^{ext}(m)$.

Таким образом, менеджер управляет внутренним потоком и участвует в управлении внешним. *Потоком менеджера* назовем сумму его внутренних и внешних потоков.

Из определения 6.6 следует, что внешний поток менеджера *m* равен:

$$(6.2)\quad F_H^{ext}(m) = \sum_{\substack{w' \in s_H(m),\\ w'' \in (N \setminus s_H(m)) \cup \{w_{env}\}}} f(w', w'').$$

Величина внутреннего потока определяется следующей леммой.

<u>Лемма 6.3.</u> [21]. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m в иерархии *H*. Тогда внутренний поток менеджера *m* равен:

$$(6.3)\quad F_H^{\text{int}}(m) = \sum_{\substack{\{w', w''\} \subseteq s_H(m),\\ \{w', w''\} \not\subset s_H(v_j) \text{ для всех } 1 \le j \le k}} f(w', w'').$$

Таким образом, при суммировании потоков $f(w', w'')$ внутри группы $s_H(m)$ достаточно проверить, чтобы поток не входил в группы, управляемые непосредственными подчиненными. В этом и только в этом случае поток не будет управляться ни одним подчиненным менеджера, то есть будет входить в его внутренний поток.

Получим, что при заданных *N* и *f* внутренний и внешний поток менеджера *m* зависит только от $s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)$, то есть от групп исполнителей, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера *m*.

По определению 6.1 в любой иерархии *H* найдется менеджер *m*, управляющий всеми исполнителями (топ-менеджер). Поэтому **каждый поток внутри технологической сети управляется либо топ-менеджером, либо его подчиненными**. Таким образом, любая иерархия обеспечивает управление всеми потоками.

Однако в различных иерархиях различается количество менеджеров и «нагрузка» каждого из менеджеров. Поэтому из всего множества иерархий $\Omega(N)$ необходимо выбрать иерархию, наилучшую с точки зрения некоторого критерия. В качестве такого критерия рассмотрим управленческие расходы – суммарные затраты на содержание всех менеджеров иерархии. В базовой модели будем считать, что затраты на содержание менеджера зависят только от суммы потоков, которыми он управляет, и в управлении которыми он участвует. Сформулируем строгое определение.

Определение 6.7. Затратами менеджера $m \in M$ в иерархии $H \in \Omega(N)$ назовем величину:

(6.4) $c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)) = \varphi(F_H^{\text{int}}(m) + F_H^{ext}(m))$,

где $v_1, \ldots, v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m, $s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)$ – управляемые ими группы, $\varphi : R_+^p \to R_+$ – монотонно неубывающая по всем переменным функция, ставящая в соответствие вектору $F_H^{\text{int}}(m) + F_H^{ext}(m)$ затраты менеджера.

Суммарные затраты всей иерархии складываются из затрат менеджеров. Оптимальной будет та иерархия, которая минимизирует суммарные затраты. Дадим строгое определение.

Определение 6.8. Затратами иерархии $H = (N \cup M, E) \in \Omega(N)$ назовем сумму затрат всех ее менеджеров[29]:

(6.5) $c(H) = \sum_{m \in M} c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)) = \sum_{m \in M} \varphi(F_H^{\text{int}}(m) + F_H^{ext}(m))$,

где $v_1, \ldots, v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m.

Оптимальной иерархией назовем иерархию H^*, затраты которой минимальны: $H^* \in \operatorname{Arg}\min_{H \in \Omega} c(H)$.

Считаем, что после нахождения оптимальной иерархии можно принять на работу менеджеров, которые будут выполнять свои обязанности, если им компенсировать их затраты (например, выплачивать зарплату)[30]. Разумеется, для этого необходима полная информация о функции затрат. Ниже функция $c(\cdot)$ затрат менеджера предполагается известной. Эта функция может определяться непосредственно по данным о затратах менеджеров. Кроме того, можно рассматривать некоторые «типичные» функции затрат (например,

---

[29] *В выражении* (6.5) *и ниже одной и той же буквой* $c(\cdot)$ *обозначается и функция затрат иерархии, и функция затрат менеджера.*

[30] *Затраты могут включать не только зарплату менеджера, но и затраты на организацию его работы – рабочее место, обслуживающий персонал и т.д.*

ниже исследуется степенная функция). При этом подбираются параметры, при которых значения функции в наибольшей степени соответствуют реальным затратам менеджеров[31].

Очевидно, что даже в простейших случаях множество всевозможных иерархий настолько обширно, что отыскание оптимальной иерархии методом перебора всех вариантов требует огромных вычислительных ресурсов. Ниже будут изложены методы, которые при определенных ограничениях позволяют найти оптимальную иерархию, либо сузить множество иерархий, в котором содержится оптимальная.

<u>Утверждение 6.1.</u> [21]. Для любой иерархии $H_1 \in \Omega(N)$ найдется иерархия $H_2 \in \Omega(N)$, имеющая не бóльшие затраты ($c(H_2) \le c(H_1)$), и удовлетворяющая следующим свойствам:

(i) все сотрудники управляют различными группами исполнителей;

(ii) только один менеджер не имеет начальников. Этому менеджеру подчинены все остальные менеджеры и все исполнители;

(iii) среди сотрудников, непосредственно подчиненных одному менеджеру, ни один не управляет другим.

Если H_1 – r-иерархия, дерево или r-дерево, то и H_2 будет соответственно r-иерархией, деревом или r-деревом.

Доказательство утверждения 6.1 основано на последовательном перестроении H_1 без увеличения затрат. В итоге перестроений получаем иерархию H_2, которая удовлетворяет условиям (i)-(iii). Для r-иерархии, дерева и r-дерева перестроения не изменяют вида иерархии[32].

Условие (i) означает отсутствие полного дублирования, при котором два менеджера управляют одной и той же группой исполнителей. На рисунке 6.6 а) приведен пример подобного дублирования. Два менеджера управляют одной и той же группой $\{w_1, w_2, w_3\}$. При этом один них может быть удален, а всем его непосредственным начальникам можно подчинить другого менеджера без увеличения затрат. В частности, из условия (i) следует, что **у любого менеджера имеется не менее двух непосредственных подчиненных** (иначе в

---

[31] *Затраты могут измеряться, например, в денежном эквиваленте приложенных усилий, исходя из средней заработной платы менеджеров на соответствующих позициях.*

[32] *Отметим, что утверждение 6.1 остается верным не только для рассматриваемой частной модели, но и в более общих случаях* (*см. раздел 6.3*).

силу леммы 6.1 он управлял бы той же группой, что и его единственный непосредственный подчиненный).

В соответствии с условием (ii) найдется только один менеджер m, который не имеет начальников. Этому менеджеру подчинены все исполнители ($s_{H_2}(m) = N$) и все остальные менеджеры иерархии. Будем называть *m высшим менеджером* или *топ-менеджером*.

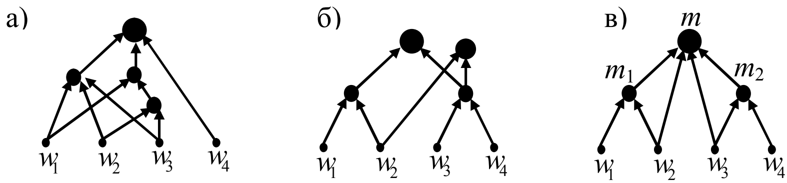


Рис. 6.6. Иерархии а)-в) нарушают свойства (i)-(iii) утверждения 6.1 соответственно

Условие (ii) соответствует практике построения организаций, при которой только один высший менеджер может принимать решения, обязательные для всех сотрудников (например, может разрешить конфликт между любыми сотрудниками). На рисунке 6.6 б) приведен пример, в котором два менеджера не имеют начальников, то есть нарушается условие (ii). Очевидно, что «лишний» менеджер может быть удален без увеличения затрат иерархии.

Условие (iii) можно интерпретировать следующим образом. Пусть менеджер m_1 непосредственно подчинен менеджеру m. Тогда m непосредственно не управляет подчиненными менеджера m_1. Это соответствует «нормальному» функционированию организации, при котором менеджер управляет всеми подчиненными сотрудниками через непосредственных подчиненных, а не напрямую. На рисунке 6.6 в) приведен пример, в котором высший менеджер m непосредственно управляет исполнителями w_2 и w_3, несмотря на то, что ими уже управляют непосредственные подчиненные m_1 и m_2 менеджера m. Ребра (w_2, m) и (w_3, m) могут быть удалены без увеличения затрат иерархии.

Из утверждения 6.1 следует, что найдется оптимальная иерархия, удовлетворяющая условиям (i)-(iii)[33]. Этот факт позволяет в

[33] *Если в качестве H_1 рассмотреть оптимальную иерархию, то по утверждению 6.1 иерархия H_2 удовлетворяет условиям (i)-(iii) и имеет не бóльшие затраты. Следовательно, H_2 – оптимальная иерархия.*

ряде случаев значительно упростить задачу поиска оптимальной иерархии, поскольку можно не рассматривать иерархии, нарушающие хотя бы одно из условий (i)-(iii).

Кроме того, утверждение 6.1 позволяет доказать следующий факт. Если существует оптимальная *r*-иерархия, дерево или *r*-дерево, то существует оптимальная иерархия соответствующего вида, удовлетворяющая условиям (i)-(iii).

Рассмотрим условие, при котором оптимальна простейшая двухуровневая иерархия .

Утверждение 6.2. [21]. Пусть функция затрат $\varphi(\cdot)$ субаддитивна, то есть для всех $x, y \in R_+^p$ выполнено неравенство $\varphi(x+y) \le \varphi(x) + \varphi(y)$. Тогда оптимальна двухуровневая иерархия.

Условие субаддитивности означает, что затраты $\varphi(x+y)$ одного менеджера на управление суммарным потоком $x+y$ не больше, чем затраты двух менеджеров на управление частями этого потока x и y. В этом случае оптимальна простейшая двухуровневая иерархия, в которой все потоки управляются одним менеджером.

Из утверждения 6.2 следует, что вогнутость функции затрат влечет оптимальность двухуровневой иерархии, если все потоки технологической сети однотипны (то есть вектор потока содержит одну компоненту).

В небольших организациях весьма распространены двухуровневые иерархии (так называемые «простые структуры» [18]). При росте организации единственный менеджер чрезмерно загружен, что вынуждает его принимать на работу «помощников» – переходить к многоуровневой иерархии.

Одним из интересных вопросов является оптимальность древовидной иерархии, которая встречается в реальных организациях наиболее часто. Пример 6.1 ниже показывает, что иногда оптимальная иерархия не является деревом.

Пример 6.1 (снижение затрат при множественном подчинении для несимметричной линии). Пусть в несимметричной производственной линии имеется четыре исполнителя и потоки $f(w_{env}, w_1) = 3$, $f(w_1, w_2) = 1$, $f(w_2, w_3) = 5$, $f(w_3, w_4) = 1$, $f(w_4, w_{env}) = 3$. Рассмотрим следующую функцию затрат менеджера: $\varphi(x) = x^3$ (x – величина потока менеджера) – см. выражение (6.4). Оптимальная иерархия для этого примера изображена на рисунке 6.7. Обозначим ее через

H. У менеджера m_1 два непосредственных начальника, то есть в оптимальной иерархии имеет место множественное подчинение.

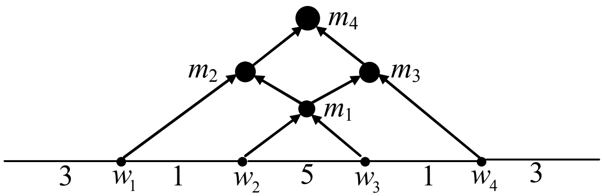


Рис. 6.7. Пример оптимальной иерархии, управляющей несимметричной производственной линией

Определим потоки каждого менеджера:

$$m_1\text{: } c(\{w_2\}, \{w_3\}) = \varphi[F_H^{\text{int}}(m_1) + (F_H^{ext}(m_1))] = [5 + (1+1)]^3 = 343;$$

$$m_2\text{: } c(\{w_1\}, \{w_2, w_3\}) = \varphi[F_H^{\text{int}}(m_2) + (F_H^{ext}(m_2))] = [1 + (3+1)]^3 = 125;$$

$$m_3\text{: } c(\{w_4\}, \{w_2, w_3\}) = \varphi[F_H^{\text{int}}(m_3) + (F_H^{ext}(m_3))] = [1 + (1+3)]^3 = 125;$$

$$m_4\text{: } (\{w_1, w_2, w_3\}, \{w_2, w_3, w_4\}) = \varphi[F_H^{\text{int}}(m_4) + (F_H^{ext}(m_4))] = [0 + (3+3)]^3 = 216.$$

Таким образом, затраты всей иерархии составят:

$$c(H) = c(\{w_2\}, \{w_3\}) + c(\{w_1\}, \{w_2, w_3\}) + c(\{w_4\}, \{w_2, w_3\}) + \\ + c(\{w_1, w_2, w_3\}, \{w_2, w_3, w_4\}) = 343 + 125 + 125 + 216 = 809.$$

Убедимся, что найденные затраты являются минимально возможными. Пусть H^* – оптимальная иерархия, удовлетворяющая условиям (i)-(iii) утверждения 6.1. В H^* должен быть хотя бы один менеджер m нижнего уровня, которому не подчинены другие менеджеры.

Если m управляет тремя или более исполнителями, то величина потока m не менее 10. Таким образом, затраты m не менее 1000, что больше, чем $c(H) = 809$. Следовательно, m управляет ровно двумя исполнителями.

Если m управляет двумя исполнителями, идущими в производственной линии не подряд (например, w_1 и w_3), то $F_{H^*}^{\text{int}}(m) = 0$, то есть m не управляет ни одним внутренним потоком, а лишь участвует в управлении внешними. Тогда можно удалить менеджера m, подчинив исполнителей из $s_{H^*}(m)$ непосредственным начальникам m, причем их затраты не изменятся, что противоречит оптимальности H^*. Таким образом, менеджеру m могут быть подчинены только два исполнителя, идущие в линии подряд.

Если менеджеру m подчинены исполнители w_1 и w_2 (или w_3 и w_4), то его затраты составляют $9^3 = 729$. Кроме того, высший менеджер по крайней мере участвует в управлении внешними потоками, следовательно его затраты не менее $6^3 = 216$. То есть в этом случае $c(H^*) > 729 + 216 = 945$, что противоречит оптимальности H^*. Таким образом, в H^* имеется ровно один менеджер m нижнего уровня. Менеджер m управляет исполнителями w_2 и w_3, то есть наибольшим потоком $f(w_2, w_3) = 5$.

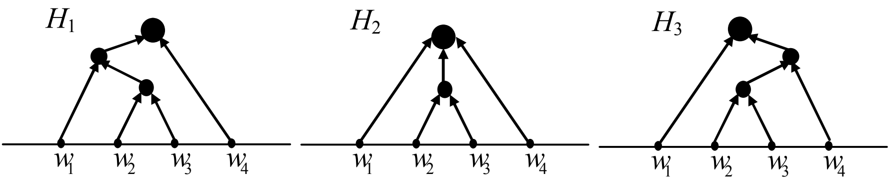


Рис. 6.8. Неоптимальные иерархии над несимметричной производственной линией

Рассматриваемый пример иллюстрирует общее правило: **потоки наибольшей интенсивности должны управляться на нижних уровнях иерархии**. Это правило отмечается во многих работах по менеджменту на основании опыта исследования реальных организаций (см., например, [18]). В примере рассмотрен предельный случай, в котором для управления наибольшим потоком специально должен быть выделен менеджер нижнего уровня.

Так как m – единственный менеджер нижнего уровня, то он подчинен всем остальным менеджерам иерархии[34]. Тогда исполнители w_2 и w_3 непосредственно подчинены только менеджеру m, так как иначе нарушается условие (iii) утверждения 6.1. То есть после назначения менеджера m оптимальная иерархия H^* надстраивается над 3 сотрудниками: w_1, m, w_4. Тогда кроме иерархии H (см. рисунок 67) имеем три варианта иерархии, удовлетворяющие условиям (i)-(iii) утверждения 6.1. Эти иерархии изображены на рисунке 6.8.

[34] *Каждому отличному от m менеджеру m' непосредственно подчинен некоторый менеджер m'' (иначе m' – менеджер нижнего уровня, то есть $m' = m$). Если $m'' \neq m$, то можно повторить рассуждения. В итоге дойдем до m, то есть докажем его подчиненность менеджеру m'.*

Легко вычислить, что $c(H_1) = c(H_3) = 811$, $c(H_2) = 855$. В силу того, что $c(H) = 809$, все иерархии на рисунке 6.8 неоптимальны, следовательно, $H = H^*$ – единственная оптимальная иерархия[35]. •

Итак, рассмотренный пример показывает, что для технологической сети общего вида *среди деревьев может не быть оптимальных иерархий.* Ниже оптимальность древовидной иерархии доказана для симметричной производственной линии. Кроме того, в общей модели найдено достаточное условие оптимальности древовидной иерархии. В этих условиях найти оптимальную иерархию позволяют алгоритмы поиска дерева с минимальными затратами [9].

Пример 6.2. *Снижение управленческих затрат при росте организации*. Рассмотрим несимметричную производственную линию из четырех исполнителей с потоками $f(w_{env}, w_1) = 1$, $f(w_1, w_2) = 5$, $f(w_2, w_3) = 1$, $f(w_3, w_4) = 5$, $f(w_4, w_{env}) = 1$ и функцией затрат иерархии $\varphi(x) = x^2$ (x – величина потока менеджера). Сначала предположим, что к организации относятся только исполнители w_2 и w_3, то есть рассмотрим технологическую сеть $N = \{w_2, w_3\}$. Тогда существует только одна иерархия, удовлетворяющая условиям утверждения 6.1. Эта иерархия изображена на рисунке 6.9 а).

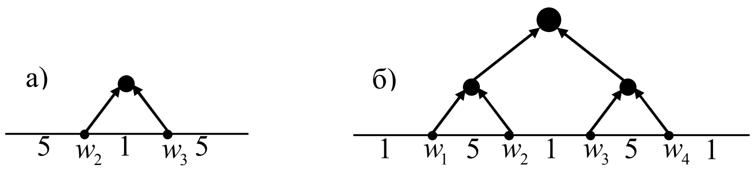


Рис. 6.9. Рост организации
с одновременным снижением затрат на управление

Предположим, что мы имеем возможность расширить организацию, включив в нее еще двух исполнителей w_1 и w_4. Содержательно это можно интерпретировать следующим образом. Например, крупная компания оптовой торговли покупает фирму-производителя товара («исполнителя» w_1) и сеть розничных магазинов («исполнителя» w_4), стремясь управлять всей линией от производства до конечной реализации товаров. Большой поток $f(w_1, w_2) = 5$ может соответствовать, например, потоку информации, который связан с

---

[35] *Имеются в виду иерархии, удовлетворяющие условиям* (*i*)-(*iii*) *утверждения 6.1.*

проблемами компании при взаимодействии с производителем (скажем из-за большого количества брака). Аналогично, большой поток $f(w_3, w_4) = 5$ может быть связан с проблемами взаимодействия с розничной сетью, например, с большим числом возвратов товара покупателями.

Таким образом, после расширения организация будет управлять технологической сетью $N = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. При этом имеется возможность перестроить иерархию управления так, как показано на рисунке 69 б). То есть нанять двух менеджеров нижнего уровня, которые будут ответственны за управление большими потоками. Сравним затраты иерархий:

a) $(5 + 1 + 5)^2 = 121$,

b) $(1 + 5 + 1)^2 + (1 + 5 + 1)^2 + (1 + 1 + 1)^2 = 49 + 49 + 9 = 107$.

Таким образом, затраты на управление могут снизиться при расширении технологической сети (включении новых исполнителей – части внешней среды). Это может служить одной из причин покупки нового бизнеса, который неприбылен сам по себе, но позволяет снизить расходы на управление основным бизнесом. На практике имеется множество подобных фактов. Например, в России в 90-х годах XX века многие заводы пищевой промышленности трансформировались в вертикально интегрированные агропромышленные компании после покупки сельхозпредприятий своего региона, которые не были прибыльными, но позволяли обеспечить бесперебойную поставку дешевого сырья.

Пример 6.3 (многокомпонентные потоки). В силу утверждения 6.2 двухуровневая иерархия оптимальна при вогнутой функции затрат и однокомпонентных потоках. Покажем, что для многомерных потоков это в общем случае не так. Рассмотрим двухкомпонентный поток ($p = 2$). Первая компонента соответствует материальным потокам, вторая – информационным. Предположим, что $N = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ и технологическая сеть выглядит так, как показано на рисунке 6.10.

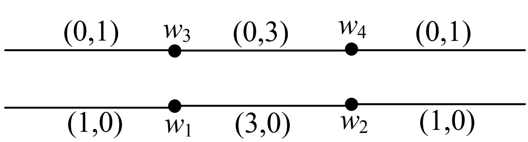


Рис. 6.10. Пример технологической сети с двухкомпонентными потоками

Исполнитель w_1 получает сырье, выполняет технологическую операцию и передает полуфабрикаты исполнителю w_2, который производит сборку готового продукта и его отгрузку клиенту. Величина потока может, например, соответствовать количеству наименований передаваемых материалов. Исполнитель w_1 получает сырье одного типа и производит из него три типа деталей. Исполнитель w_2 получает эти детали, собирает их и отгружает один тип продукта. Таким образом, внутренний поток $f(w_1,w_2)$ превосходит внешние потоки $f(w_{env}, w_1)$ и $f(w_2, w_{env})$.

Исполнитель w_4 ведет переговоры с заказчиками, готовит и заключает договора поставки продукции, учитывает оплату и отгрузку продукции и т.п.

Данные о необходимом объеме производства исполнитель w_4 передает исполнителю w_3. На основании полученных данных исполнитель w_3 размещает заказы сырья, ведет учет его поступления, обеспечивает расчеты и т.п. Также исполнитель w_3 может передавать исполнителю w_4 информацию, необходимую для расчета стоимости и срока выполнения заказа.

Внутренний поток информации $f(w_3, w_4)$ может превышать внешние потоки $f(w_{env}, w_3)$ и $f(w_4, w_{env})$, например, за счет большого количества внутренних документов.

Предположим, что функция затрат менеджера имеет вид $\varphi(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$, где (x, y) – вектор потока менеджера. Эта функция вогнута, что может соответствовать ситуации, в которой менеджеры не сильно загружены и увеличение управляемого потока снижает затраты на единицу потока. Слагаемое $\sqrt{xy}$ может соответствовать специализации менеджеров. Оно равно нулю, если менеджер управляет только потоком одного типа, например производством или документооборотом. В этом случае менеджер становится специалистом в соответствующей области и может управлять потоком с минимальными затратами. Если же менеджер вынужден управлять потоками обоих типов, то его затраты повышаются за счет снижения специализации.

На рисунке 6.11 а) изображена двухуровневая иерархия H_1. В ней поток единственного менеджера равен (5, 5), то есть затраты иерархии равны $c(H_1) = \varphi(5,5) = 2\sqrt{5} + 5$.

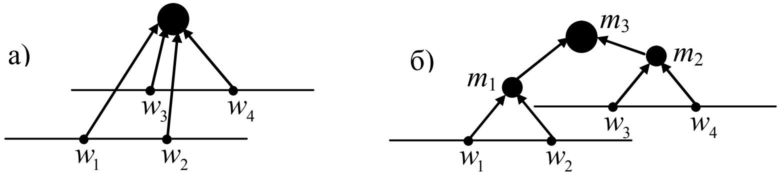


Рис. 6.11. a) – неоптимальная двухуровневая иерархия
b) – иерархия со специализированными менеджерами m_1 и m_2

Рассмотрим иерархию H_2 с тремя менеджерами, которая изображена на рисунке 6.11 б). Менеджер m_1 управляет только производством, то есть исполнителями w_1 и w_2. Поток менеджера m_1 равен (5, 0). Затраты менеджера m_1 равны $\varphi(5, 0) = \sqrt{5}$. Аналогично, менеджер m_2 управляет только документооборотом, то есть исполнителями w_3 и w_4. Поток менеджера m_2 равен (0, 5). Затраты менеджера m_2 равны $\varphi(0, 5) = \sqrt{5}$. Высшему менеджеру m_3 подчинены менеджеры m_1 и m_2. Менеджер m_3 не вникает в детали потоков внутри технологической сети, а лишь участвует в управлении потоками между технологической сетью и внешней средой, то есть взаимоотношениями с клиентами и поставщиками. Затраты менеджера m_3 равны $\varphi(2, 2) = 2\sqrt{2} + 2$. Таким образом, $c(H_2) = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 2$.

В итоге имеем $c(H_2) < c(H_1)$, то есть **при многокомпонентных потоках за счет назначения нескольких специализированных менеджеров можно снизить затраты иерархии даже в случае вогнутой функции затрат**. •

Описанная модель управления технологическими потоками позволяет в ряде случаев аналитически исследовать изменение иерархии, управляющей относительно простой технологической сетью. В частности в [21] исследованы условия оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархии. Не вдаваясь в детали исследования конкретной модели, перейдем к систематическому обзору подходов к математическому моделированию иерархий.

6.2. Модели организационных структур[36]

В настоящем разделе проводится обзор математических моделей формирования организационных иерархий. Описываемые подходы разбиваются на так называемые «*линии исследований*» – группы взаимосвязанных публикаций, авторы которых либо развивают общую модель, либо, наоборот, дискутируют друг с другом. Преимущество такого разбиения состоит в его большей историчности – оно позволяет проследить развитие во времени подходов к исследованию задач формирования организационных иерархий (недостатком же является некоторая эклектичность). На основе анализа литературы были выделены следующие линии исследований:

1) многоуровневые симметричные иерархии;
2) иерархии знаний;
3) многоуровневые иерархии обработки информации;
4) иерархии и теория команд;
5) иерархии принятия решений;
6) иерархии и теория контрактов;
7) общая модель поиска оптимальных иерархий.

Специфика каждого из этих направлений описывается ниже.

Многоуровневые симметричные иерархии. В основу рассматриваемого ниже направления легла модель организационной структуры как последовательности иерархически упорядоченных *уровней управления*. Ее особенностью является то, что длина «цепочки подчинения» между любым *конечным исполнителем* (находящимся на нижнем уровне иерархии) и *топ-менеджером* (находящимся на самом верхнем уровне иерархии) одинакова, что позволяет называть такие иерархии «симметричными».

Проблемы, рассматриваемые в работах данного подхода, родились из дискуссии, имевшей место в экономической литературе в первой половине XX века [30, 37, 39] и посвященной факторам, ограничивающим рост фирмы. Ее результатом стало представление о том, что основным подобным фактором является ограниченность индивидуальных возможностей владельца фирмы по координации и контролю деятельности исполнителей и связанная с этим необходимость делегирования соответствующих полномочий *менеджерам среднего звена*. Именно потери, связанные с функционированием

[36] *Материал данного раздела основан на обзоре* [11] *и воспроизводится с разрешения автора.*

иерархии менеджеров (не только чисто финансовые расходы на их содержание, но и снижение производительности из-за т.н. *потери контроля*), и являются тем фактором, который в результате может перевесить выгоды большого размера фирмы – концентрацию технологий и капитала, нивелирование рисков и т.п. Однако будут ли эти потери достаточно существенными, чтобы привести к невыгодности неограниченного роста фирмы? Ответ на этот вопрос потребовал разработки формальных моделей организационных иерархий.

В модели М. Бекманна [25] структура управления фирмы моделируется последовательностью иерархических уровней, пронумерованных сверху вниз начиная с нулевого. На i-м уровне находятся L_i менеджеров, каждый из которых получает вознаграждение за свою работу в размере w_i. Отношение L_{i+1}/L_i, то есть числа менеджеров на двух соседних уровнях, определяет так называемую *норму управляемости* – по сути, среднее количество *непосредственных подчиненных* у каждого менеджера уровня i.

О. Вильямсон в известной статье [51] делает вывод о том, что уменьшение эффективности управления с ростом фирмы неизбежно. Ведь при расширении фирмы топ-менеджер вынужден получать меньше информации о «старой» ее части, чтобы иметь время ознакомиться с данными о «новой» части, и его приказы становятся все менее детальными. Решая задачу максимизации прибыли фирмы – разности между выручкой и затратами – Вильямсон получает приближенную формулу для оптимального количества уровней иерархии, а, значит, и оптимального размера фирмы, превышение которого не выгодно.

Г. Кальво и С. Веллиц в [29] считают, что функцией менеджеров иерархии является *мониторинг* интенсивности работы своих непосредственных подчиненных, и потеря контроля, приводящая к ограниченности размера фирмы, может иметь или не иметь места в зависимости от специфики используемой процедуры мониторинга. В этой модели менеджеры по результатам наблюдения за действиями своих непосредственных подчиненных могут назначать им линейные штрафы за «недоработку». При этом интенсивность мониторинга определяется уровнем усилий самого менеджера и его нормой управляемости (количеством непосредственных подчиненных).

В статье М. Керена и Д. Левхари [38] рассматривается модель иерархической фирмы, в которой время планирования (и, соответственно, принятия решений) определяется суммарным временем принятия решений уровнями иерархии и напрямую влияет на объем производства. При довольно реалистичных предположениях о параметрах модели показывается, что средние *затраты на единицу продукции* возрастают с ростом размера фирмы, то есть предел ее роста существует.

В своей статье Керен и Левхари для поиска оптимальной иерархии довольно изящно использовали аппарат теории оптимального управления. Его применение подробно описано в более поздней работе Ч. Киана [44]. Модель Киана объединяет в себе отдельные черты всех рассмотренных выше работ.

Несколько особняком в череде публикаций, посвященных моделям симметричных многоуровневых иерархий, стоит статья Ш. Розена [46], в которой изучается не отдельная фирма, а целый *рынок*, включающий и фирмы, и менеджеров.

Среди российских ученых, в настоящее время развивающих модели симметричных многоуровневых иерархий, отметим А.П. Михайлова [19], однако предметом его работ является не поиск оптимальных иерархий, а закономерности динамических процессов перераспределения власти между уровнями фиксированной административной (властной) иерархии.

Выводами линии исследований относительно основных характеристик оптимальных иерархий являются:

1) каковы бы ни были функции, выполняемые менеджерами, вид оптимальной иерархии, ее затраты, а также эффективность функционирования организации существенно зависят от используемых механизмов управления (планирования, стимулирования, контроля и т.д.);

2) при рационально организованной иерархии управления возможен неограниченный рост фирмы (точнее, ее размер ограничивается другими факторами, не связанными с затратами на управление, например ограниченным объемом рынков);

3) более способные менеджеры обычно занимают в иерархии более высокие позиции и получают за свою работу большее вознаграждение.

Иерархии знаний. В рамках данной линии исследований считается, что основной задачей менеджеров является решение проблем, возникающих в процессе функционирования организации. Решать проблемы менеджерам помогают их знания и опыт. Общеизвестна эффективность *специализации*, концентрации отдельного сотрудника на решении лишь определенного класса проблем. В то же время, специализация порождает проблемы *координации*, поиска специалиста, который может решить конкретную проблему. Как оказывается, организация сотрудников в форме иерархии представляет собой весьма эффективный способ такой координации. Главной проблемой при построении иерархии является поиск компромисса между эффективностью использования знаний и затратами на координацию.

В модели [32], предложенной Л. Гарикано, для успешной реализации технологического процесса, помимо привычных факторов производства (таких, как материалы, оборудование, капитал), требуются еще и знания сотрудников, проявляющиеся в их умении решать проблемы.

Произвольная организация может не иметь ничего общего с иерархией, поскольку в ней, вообще говоря, отсутствуют понятия подчинения и разделения труда на производство и управление. Однако Гарикано показывает, что в оптимальной организации сотрудники специализируются либо на производственной деятельности, либо на «решении проблем». Только один класс выполняет производственные задачи (сотрудников этого класса логично называть исполнителями, а остальных – менеджерами).

Похожие иерархии менеджеров, решающих проблемы, рассматривались А. Беггсом в [26].

Общие выводы рассмотренной линии исследований состоят в следующем:

1) главная задача менеджеров состоит в решении проблем, возникающих в процессе функционирования организации;

2) иерархическая структура управления является эффективным способом организации процесса решения проблем;

3) управленческая деятельность требует специфических навыков, и выгодность разделения сотрудников организации на менеджеров и исполнителей обусловлена получаемым при этом выигрышем от специализации;

4) роль нижних уровней иерархии состоит в том, чтобы освободить менеджеров более высоких уровней от «текучки» и позволить им сконцентрироваться на решении сложных проблем.

Многоуровневые иерархии обработки информации. Существенным ограничением рассмотренных выше моделей является представление об иерархии как о последовательности взаимоподчиненных уровней. Подход к моделированию организационных иерархий, лишенный этого недостатка, развивается в работах Р. Раднера, Т. Ван Зандта и других ученых и основан на аналогии между работой организационных иерархий и вычислительных сетей. В рамках этого подхода предполагается, что основной функцией менеджеров в организациях является *обработка информации*.

В [45] считается, что основные характеристики процесса обработки информации, приводящие к затратам, а потому нуждающиеся в экономии – это общее время вычисления функции и количество процессоров. Задача состоит в том, чтобы при заданном количестве суммируемых элементов n и фиксированном количестве процессоров P построить *эффективную* вычислительную сеть (организационную иерархию), то есть сеть, минимизирующую время суммирования.

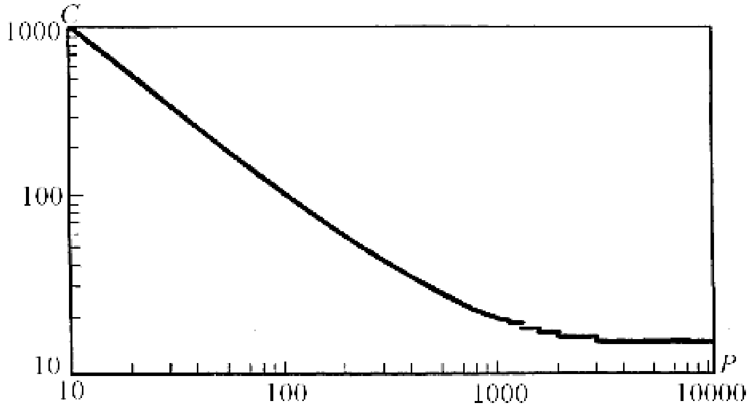


Рис. 6.12. Зависимость времени вычисления от количества процессоров при n = 10000 (*логарифмическая шкала*)

Однако обычно в организациях данные необходимо обрабатывать в т.н. *систолическом режиме*, когда отдельные *когорты* (cohorts) данных прибывают периодически. Ван Зандт в [50] показал, что в этом случае эффективная иерархия состоит из набора оптимальных деревьев для обработки одной когорты и механизма, передающего очередные когорты данных на обработку этим деревьям по мере их освобождения.

Статья П. Болтона и М. Деватрипонта [28] является дальнейшим развитием подхода Раднера и Ван Зандта. В этой модели организация функционирует в непрерывном времени, новая когорта данных доступна в любой момент, и задача состоит лишь в том, чтобы суммировать все элементы данных, с определенной частотой собирая их «в руках» топ-менеджера.

Подытожим выводы этой линии исследований:

1) при условии, что основная задача менеджеров – обработка информации, иерархичность структуры управления является следствием невыгодности дублирования их работы;

2) число менеджеров и количество уровней управления неизбежно растут с ростом организации, так же как и время ее реакции на изменение внешних условий;

3) эффективное распределение работы между менеджерами предполагает выравнивание их информационной нагрузки;

4) имеется тенденция к разделению уровней иерархии – ограничению взаимодействия между менеджерами различных уровней.

Иерархии и теория команд. Базовая модель теории команд (см. обзор в [22]) представляет собой нечто среднее между классической задачей оптимизации и задачами, рассматриваемыми в рамках теории игр. Имеется *команда* агентов, каждый из которых выбором своего действия стремится максимизировать общий критерий эффективности. Проблема состоит в том, что значение критерия, помимо действий агентов, зависит от состояния природы, представления о котором у агентов могут различаться. Задача заключается в координации решений, принимаемых агентами, то есть в предложении рациональных правил выбора действий с учетом их представлений.

Ж. Кремер в [31] рассматривает фирму, состоящую из n производственных единиц (т.н., *заводов*), производящих несколько видов продукции (товаров). Продукция одних заводов может использоваться другими заводами в качестве исходного сырья, то есть реализация технологического процесса фирмы предполагает *трансферты* товаров между заводами. В простейшем случае, когда спрос на продукцию и функции затрат заводов известны точно, задача координации состоит в определении объемов производства и трансфертов, минимизирующих суммарные производственные затраты при условии удовлетворения спроса.

Однако в реальности точная подстройка трансфертов под конкретную реализацию случайных факторов может быть невозможной в масштабе всей фирмы. Тогда приходится разбивать фирму на более мелкие *объединения*, состоящие из одного или нескольких заводов. При фиксированном разбиении множества заводов на объединения задача координации оперативно решается в рамках каждого объединения после того, как реализуются значения случайных *природных факторов*, и становится известным спрос на продукцию объединения. Объемы же трансфертов между объединениями должны быть зафиксированы заранее, до момента реализации случайных факторов. Задача поиска оптимальной организации, таким образом, сводится к выбору наилучшего допустимого[37] разбиения заводов на объединения.

Основная идея статьи [31] состоит в том, что в первую очередь между собой должны объединяться технологически наиболее сильно связанные заводы, трансферты между которыми подвержены наиболее сильным колебаниям при изменении случайных факторов. Недостатком модели является то, что она рассматривает лишь организации с единственным промежуточным уровнем управления – уровнем объединений. Введение новых промежуточных уровней в модели Кремера бессмысленно.

Помимо ограниченности количества уровней иерархии модель Кремера обладает еще одним существенным недостатком. Из нее следует, что с ростом размеров объединений эффективность организационной структуры растет. При этом упускаются из виду временные и финансовые затраты, связанные с получением достоверной информации о параметрах заводов в большом объединении. В подходе, предложенном Дж. Геанакоплосом и П. Милгромом [34], эти затраты фигурируют в явном виде, что позволяет сделать норму управляемости внутренним параметром модели.

Основные выводы по рассматриваемой линии исследований:

1) иерархическая структура управления представляет собой компромисс между сложностью координации большого количества подразделений и затратами на содержание промежуточных звеньев управления,

2) сложность координации может быть обусловлена неполной информированностью о значимых параметрах управляемых подразделений,

3) в более крупные объединения в первую очередь объединяются наиболее сильно связанные между собой подразделения.

Иерархии принятия решений. Управление организацией – это, прежде всего, принятие разнообразных решений, и именно *принятие решений*, по мнению многих авторов, является основной задачей менеджеров. Качество выработанных ими решений, в ко-

[37] *Допустимые разбиения могут, например, ограничивать сверху количество заводов, входящих в одно объединение.*

нечном счете, определяет эффективность функционирования организации вообще и организационной структуры в частности.

В модели Р.К. Саха и Дж. Стиглица [48, 49] организация занимается анализом потока *проектов*. С некоторой вероятностью каждый проект может быть «хорошим» (приносить прибыль), или «плохим» (приносить убыток). Задача организации состоит в отборе хороших проектов для их дальнейшей реализации. Оценку проектов осуществляют менеджеры. Отдельный менеджер может допускать ошибки, рекомендуя к реализации плохие проекты или отклоняя хорошие. С целью повышения эффективности отбора предлагается принимать решение о реализации проекта на основе коллективного мнения менеджеров, для чего может быть сформирована одна из трех организационных структур: *комитет*, *иерархия* или *полиархия*. В [47] с использованием этой модели исследуется влияние организационной структуры на квалификацию составляющих ее менеджеров.

Три рассмотренные организационные формы можно комбинировать, строя из них более сложную организационную структуру: рассматривать, например, иерархии, каждый элемент которой представляет собой комитет; исследовать иерархии полиархий или полиархии иерархий. Подобные организационные структуры рассматриваются Я. Иоаннидесом в [36].

Совершенно другую модель иерархии, принимающей решения, предлагают О. Харт и Дж. Мур в [35]. В их модели иерархия, состоящая из m идентичных менеджеров, надстраивается над фиксированным множеством *активов*. Активом считается объект, использование которого по отдельности или в комбинации с другими активами может приносить организации прибыль. Таким образом, любой набор активов представляет собой потенциальный проект, который организация может реализовать.

Каждому менеджеру дается в управление непустое подмножество активов $A_i \subseteq N$. С вероятностью $p(A_i)$ менеджер может иметь *идею* по поводу использования этого подмножества активов. В случае ее реализации идея приносит прибыль $v(A_i) > 0$. Роль иерархии состоит в том, что в первую очередь реализуются идеи менеджеров верхнего уровня. Если у них нет идеи, решения принимают их непосредственные подчиненные. Если и те не имеют идей, право принятия решения переходит к их подчиненным, и т.д.

Иерархия выбирается с целью максимизации ожидаемой прибыли, и основная проблема состоит в том, что иерархия должна быть построена *ex-ante*, то есть до момента, когда у менеджеров начинают появляться идеи. Общие теоретические результаты Харта и Мура позволяют существенно сузить множество иерархий, «подозрительных на оптимальность». Например, они показывают, что чем выше уровень менеджера в оптимальной иерархии, тем меньше должна быть вероятность появления у него идеи. Авторы полностью решают задачу поиска оптимальной иерархии в частном случае двух идентичных активов при произвольном количестве менеджеров.

Иерархии и теория контрактов. *Теория контрактов* – это раздел математической экономики, изучающий задачи мотивации (*стимулирования*) экономических агентов в условиях неопределенности (см. главы 3 и 4, а также [27]). В отечественной традиции эти задачи также изучаются в рамках *теории активных систем* [5, 23] и *теории иерархических игр* [17].

В [43] на основе классической *модели неблагоприятного отбора* (*adverse selection*) [27] исследуется влияние децентрализации контрактов на эффективность функционирования организации. Рассматривается система, состоящая из двух агентов и центра, получающего доход от выбранных агентами действий. Выбор агентом действия требует от него затрат, которые зависят от персональных характеристик этого агента, т.н. *типа* агента. Тип агента является его частной (известной только ему) информацией. Каждый агент получает вознаграждение, зависящее от выбранного им действия и от сообщенного им центру значения своего типа (в общем случае, отличного от истинного).

В классической модели центр непосредственно взаимодействует с обоими агентами и предлагает им вознаграждения (*контракты*), основанные на действиях агентов и сообщенных ими оценках своего типа. Решение этой задачи хорошо известно [27], как и формула средней прибыли центра при оптимальных контрактах.

Такая схема взаимодействия центра с агентами соответствует двухуровневой иерархии. Авторы предлагают сравнить ее эффективность с эффективностью децентрализованной схемы, в которой центр заключает контракт только с первым агентом и делегирует ему право заключать субконтракт со вторым агентом. Выигрыш, получаемый центром от децентрализации, не рассматривается в явном виде, и цель статьи [43] состоит в нахождении условий, при которых децентрализация не приводит к уменьшению эффективности механизмов стимулирования (известно, что в рассматриваемой постановке децентрализация не увеличивает эффективности).

Похожий подход к анализу децентрализованных контрактов предлагается в работе [40], где авторы основываются на другой классической модели теории контрактов – *задаче постконтрактного оппортунизма* (*moral hazard*) [27]. В отличие от модели неблагоприятного отбора, агенты в ней не имеют частной информации, но результат действий агентов помимо их усилий зависит от случайных факторов – *состояния природы* (state of nature).

В статье [42] Э. Маскина, Ч. Киана и Ч. Ксу в рамках относительно простой модели рассматриваются сравнительные преимущества двух наиболее широко распространенных организационных структур: *функциональной*, или *унитарной* (U-организации) и *мультидивизиональной* (М-организации). В функциональной структуре подразделения сводятся в более крупные объединения на основе сходства выполняемых ими функций. В дивизиональной структуре подразделения объединяются по географическому признаку, формируя относительно самодостаточные дивизионы, или по продуктовому признаку, формируя независимые «продуктовые линии».

Рассмотренные в настоящем разделе модели сравнивают между собой очень небольшое число простых иерархий. Это связано с громоздкостью и трудоемкостью анализа задач мотивации в условиях неопределенности.

Теоретико-игровой анализ задачи формирования организационной иерархии показывает, что:

1) вид организационной структуры оказывает существенное влияние на интересы составляющих ее менеджеров и на принимаемые ими решения;

2) оптимальная структура существенно зависит от эффективности стимулов, которые могут быть обеспечены менеджерам;

3) эффективность стимулов, в свою очередь, зависит от уровня неопределенности и от возможностей мониторинга работы менеджеров;

4) как правило, децентрализация права заключения контрактов уменьшает эффективность функционирования организации, хотя в ряде случаев подобного снижения эффективности удается избежать.

6.3. Общая модель иерархии управления

Сложность моделирования организационных структур связана, во-первых, со сложностью формулировки математической модели, а во-вторых, со сложностью ее последующего формального анализа. Как показывает проведенный обзор литературы, во всех известных математических моделях управленческая деятельность представляется в упрощенном виде. Из всего многообразия видов управленческой деятельности выделяются лишь один или два, такие, например, как координация подчиненных, мониторинг их действий, решение проблем и принятие решений, обработка информации и т.п.

Трудности с формальным анализом сформулированных математических моделей связаны с неразвитостью математического аппарата, подходящего для решения задач синтеза структуры сложных систем. Несмотря на то, что большинство упомянутых выше моделей допускают унифицированную математическую постановку в форме задачи дискретной оптимизации, для их анализа различные авторы применяют различные частные математические подходы.

В настоящем разделе описывается унифицированная постановка задачи поиска оптимальной иерархии, к которой сводится большинство известных моделей, а также описывается ряд общих результатов исследования оптимальных организационных иерархий.

Пусть задано конечное множество исполнителей N, множество допустимых иерархий $\Omega \subseteq \Omega(N)$ и *функция затрат* $C : \Omega \to [0;+\infty)$, которая каждой допустимой иерархии ставит в соответствие неотрицательное число. Задача поиска оптимальной иерархии состоит в том, чтобы найти допустимую иерархию с минимальными затратами, то есть найти:

$$H^* \in \operatorname*{Arg\,min}_{H \in \Omega} C(H).$$

Множество допустимых иерархий Ω может как совпадать с множеством $\Omega(N)$ всех иерархий, управляющих набором исполнителей N, так и быть его строгим подмножеством. В частности, в зависимости от содержательной постановки задачи, может искаться оптимальное дерево или оптимальная r-иерархия.

Когда количество исполнителей мало, эта задача может решаться полным перебором всех возможных иерархий (понятно, что в общем случае это единственный способ решения). Однако обычно допустимых иерархий настолько много, что задать функцию затрат перечислением ее значений для всех иерархий из множества Ω невозможно. Тогда функция затрат определяется аналитическим выражением или алгоритмом, которые зависят от структурных параметров иерархии – количества менеджеров, числа их подчиненных, выполняемых менеджерами задач и т.п.

Для разработки эффективных методов поиска оптимальных иерархий необходимо делать предположения о виде функции затрат – ограничивать рассмотрение некоторым их классом. Эти предположения могут основываться на эмпирических исследованиях вида функций затрат реальных организационных иерархий или вводиться из общеэкономических соображений.

Класс секционных функций затрат на управление.

Определение 6.9. [21]. Пусть задано множество исполнителей N. Функция затрат менеджера называется *секционной*, если она зависит только от групп исполнителей, которыми управляют его непосредственные подчиненные.

Таким образом, если менеджер m в иерархии H имеет r непосредственных подчиненных $v_1, v_2, \ldots, v_r$, то его затраты можно записать в виде:

$$c(m, H) = c(s_H(v_1), \ldots, s_H(v_r)).$$

Число аргументов секционной функции затрат равно количеству непосредственных подчиненных менеджера и функция определяется для любого их количества. Значение секционной функции затрат не зависит от порядка следования ее аргументов (групп) и не изменяется при их перестановке. Таким образом, секционная функция затрат ставит в соответствие произвольному непустому множеству групп исполнителей число – затраты менеджера, непосредственные подчиненные которого управляют этими группами исполнителей.

При секционной функции затраты менеджера не зависят от того, как «внутри» организована работа его непосредственных подчиненных, а зависят только от групп исполнителей, которыми те управляют. Так, затраты менеджера m в иерархиях на рисунках 6.13 а) и 6.13 б) одинаковы, поскольку в обеих иерархиях менеджер m имеет двух непосредственных подчиненных, управляющих группами исполнителей $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 4, 5, 6\}$. При этом, понятно, что совокупные затраты этих иерархий могут отличаться.

Например, в модели, описанной в разделе 6.1, затраты $c(\cdot)$ менеджера определяются заданными технологическими потоками и функцией $\varphi(\cdot)$. Внутренние и внешние потоки менеджера зависят только от групп, управляемых его непосредственными подчиненными $v_1, \ldots, v_k$. Функция затрат менеджера (6.4) зависит только от групп $s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)$, то есть является секционной. Таким образом, **в модели надстройки иерархии управления над технологической сетью рассматривается частный случай секционной функции затрат**.

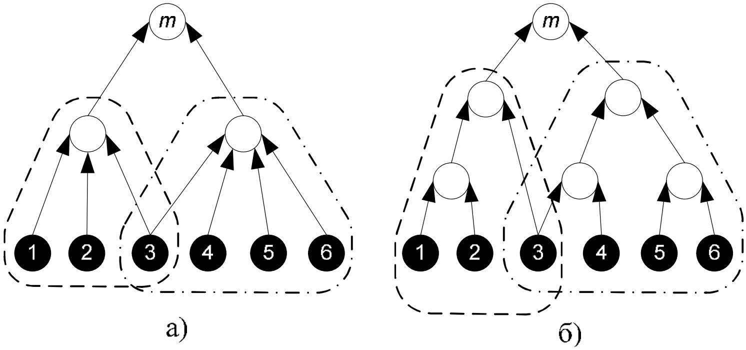


Рис. 6.13. К определению секционной функции затрат

При незначительном техническом ограничении на секционную функцию утверждение 6.1 остается верным и для общей модели. Свойства оптимальных иерархий (i)-(iii) из утверждения 6.1 существенно облегчают поиск оптимальной иерархии: в числе прочего, из них следует, что можно рассматривать только конечные множества допустимых иерархий, и каждый менеджер будет иметь как минимум двух непосредственных подчиненных. Несмотря на это, задача поиска оптимальной иерархии для произвольной секционной функции затрат остается весьма сложной. В то же время, даже для такой общей постановки задачи в ряде случаев удается очень много сказать о виде оптимальной иерархии.

Достаточное условие невыгодности множественного подчинения.

Определение 6.10. [9]. Секционная функция затрат менеджера называется *монотонной по группам*, если затраты любого менеджера не убывают как при расширении групп, управляемых непосредственными подчиненными, так и при добавлении новых непосредственных подчиненных, то есть для любого набора групп $s_1, \ldots, s_r$ выполнены неравенства:

$c(s_1, s_2, \ldots, s_r) \le c(s, s_2, \ldots, s_r)$, где группа s содержит s_1 ($s_1 \subset s$);

$c(s_1, s_2, \ldots, s_r) \le c(s_1, s_2, \ldots, s_r, s)$, где s – произвольная группа.

Свойство монотонности по группам иллюстрируется на рисунке 6.14, на котором изображена часть иерархии, подчиненная менеджеру m, имеющему непосредственных подчиненных m_1 и m_2.

Стрелками показаны возможные способы расширения групп, управляемых непосредственными подчиненными менеджера m (иерархии 6.14 а) и 6.14 б) и добавления новой подчиненной группы (иерархия 6.14 в). Иерархия 6.14 а) получена из исходной путем расширения группы, подчиненной менеджеру m_2, за счет подчиненных менеджера m_1. В иерархии 6.14 б) подчиненная менеджеру m_2 группа расширяется за счет добавления новых исполнителей. Наконец, в иерархии 6.14 в) менеджеру m добавляется новый непосредственный подчиненный – менеджер m_3. Добавляемые части иерархии для наглядности обведены штрихованной линией. Функция затрат менеджера будет монотонной по группам, если при любых подобных преобразованиях затраты менеджера m (выделенного на рисунке жирной линией) не уменьшаются.

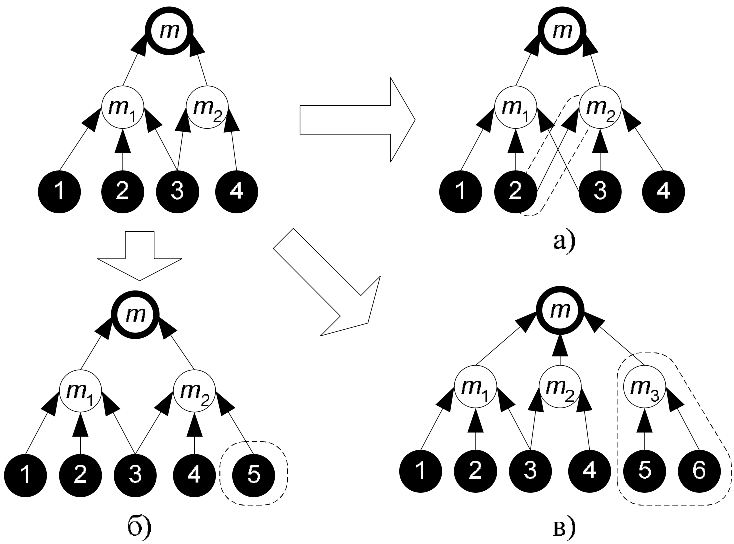


Рис. 6.14. К определению монотонности по группам

<u>Утверждение 6.3.</u> [9]. Если функция затрат монотонна по группам, то для заданного множества исполнителей N на множестве $\Omega(N)$ всех иерархий существует оптимальное дерево.

Таким образом, если функция затрат менеджера монотонна по группам и на множестве всех иерархий необходимо найти оптимальную, то можно искать ее только среди деревьев[38]. Это позволяет использовать разработанные в [9] численные алгоритмы поиска оптимальных деревьев[39].

По сути, монотонность по группам говорит о неоптимальности так называемого *множественного подчинения* сотрудников – если функция затрат монотонна по группам, то каждый сотрудник, за исключением топ-менеджера, должен иметь единственного непосредственного начальника.

Условия оптимальности типовых иерархий. Далее рассматриваются условия, при которых оптимальными будут иерархии с минимальной и максимальной возможными нормами управляемости.

Определение 6.11 [21]. Секционная функция затрат называется *сужающей*, если для любого менеджера m с непосредственными подчиненными $v_1, \dots, v_r$ при $r \geq 3$ можно без увеличения затрат иерархии переподчинить нескольких сотрудников из $v_1, \dots, v_r$ новому менеджеру m_1 и непосредственно подчинить менеджера m_1 менеджеру m. Секционная функция затрат называется *расширяющей*, если при любых подобных переподчинениях затраты иерархии не уменьшаются.

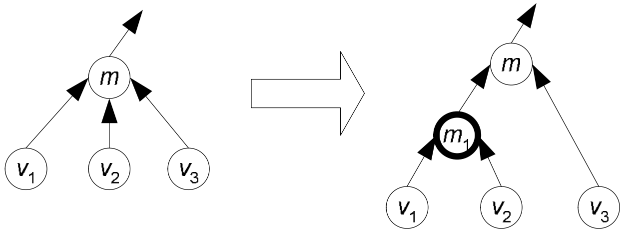
Рисунок 6.15 иллюстрирует это определение. На нем слева (иерархия а) изображена секция менеджера m, состоящая из него самого и его непосредственных подчиненных v_1, v_2, v_3, которые могут быть как менеджерами, так и исполнителями. Справа на рисунке (иерархия б) изображена та же часть иерархии после переподчинения части непосредственных подчиненных менеджера m (например, сотрудников v_1 и v_2) новому менеджеру m_1 (обведенному на рисунке жирной линией). Если для любого менеджера всегда найдется подобное перестроение, не увеличивающее затраты иерархии, то функция затрат является сужающей. Если же любое такое пере-

---

[38] *То же можно сказать и о поиске оптимальной иерархии на любом другом допустимом множестве* Ω*, включающем все деревья, а также о множестве r-иерархий, включающем все r-деревья.*

[39] *Для произвольной секционной функции затрат точный алгоритм поиска оптимального дерева имеет довольно высокую вычислительную сложность, позволяя решить задачу не более чем для 15-20 исполнителей* (*имеется в виду решение задачи персональным компьютером в течение нескольких минут*)*. Однако поиск оптимальной недревовидной иерархии на порядки сложнее даже этой трудоемкой задачи.*

строение не приводит к уменьшению затрат иерархии, то функция затрат является расширяющей.



а) б)

Рис. 6.15. К определению сужающих и расширяющих функций затрат

Подчеркнем, что определение требует невозрастания или неубывания затрат всей иерархии. При этом изменение затрат иерархии складывается из затрат добавляемого менеджера m_1 и изменения затрат менеджера m (у него уменьшается количество непосредственных подчиненных). Поэтому для того, чтобы функция затрат была сужающей, как минимум необходимо, чтобы затраты менеджера m не увеличивались при замене нескольких его непосредственных подчиненных менеджером m_1.

Содержательно определение сужающей функции затрат означает, что при наличии в иерархии менеджера с более чем двумя непосредственными подчиненными всегда выгодно нанять ему «помощника», сняв с менеджера часть его нагрузки. При расширяющей функции затрат, наоборот, всегда выгодно увольнять промежуточных менеджеров. Эти соображения иллюстрируют идею доказательства (см. [9]) следующего результата.

Утверждение 6.4 [9]. При сужающей функции затрат на множестве $\Omega(N)$ существует оптимальная 2-иерархия, при расширяющей функции затрат оптимальна веерная иерархия.

Таким образом, если функция затрат сужающая, то на множестве $\Omega(N)$ (или на произвольном множестве Ω, включающем все 2-иерархии) оптимальную иерархию можно искать только среди 2-иерархий. Если функция затрат – расширяющая, и веерная иерархия допустима, то эта иерархия и будет оптимальной[40].

[40] *Найти 2-дерево с минимальными затратами позволяют алгоритмы, предложенные в* [*9*].

Если функция затрат одновременно и монотонная по группам, и сужающая, то, пользуясь утверждениями 6.3 и 6.4, несложно показать, что оптимальная иерархия будет 2-деревом. Более того, для монотонной по группам функции затрат определение 6.11 можно ослабить, требуя его выполнения только в случае, когда все сотрудники $v_1, \ldots, v_r$ управляют непересекающимися группами исполнителей. При выполнении такого ослабленного условия функция затрат называется *сужающей на непересекающихся группах* [21]. Для монотонной функции расширение на непересекающихся группах влечет оптимальность веерной иерархии.

Результат утверждения 6.4 использует невозрастание (или неубывание) затрат иерархии при последовательных операциях переподчинения – для сужающей функции каждое переподчинение не увеличивает затрат иерархии, а для расширяющей – не уменьшает их. При этом оптимальными оказываются иерархии, которые не могут быть преобразованы никаким переподчинением. Таким же образом можно вводить и другие преобразования иерархии и пользоваться неубыванием или невозрастанием затрат иерархии относительно них.

Пусть, например, на множестве допустимых иерархий $\Omega(N)$ ищется оптимальная иерархия при сужающей функции затрат. Согласно утверждению 6.4 оптимальную иерархию можно искать среди 2-иерархий. Допустим, в некоторой 2-иерархии H менеджер m имеет непосредственно подчиненных ему менеджеров m_1 и m_2, причем первый из них управляет некоторым сотрудником v и исполнителем w, а второй – некоторым сотрудником v' и исполнителем w' (см. рисунок 6.16 а). У всех этих сотрудников могут быть и другие начальники, не изображенные на рисунке. Обозначим через s_1 и s_2 группы, управляемые соответственно менеджерами m_1 и m_2.

Преобразуем изображенную на рисунке часть иерархии: удалим связи от менеджеров m_1 и m_2 к m, добавим нового менеджера m_3, которого подчиним менеджеру m и назначим менеджеру m_3 в непосредственные подчиненные сотрудника v и менеджера m_2. Кроме того, непосредственно подчиним исполнителя w менеджеру m (см. рисунок 6.16 б). Легко проверить, что при таком преобразовании затраты менеджеров иерархии, не изображенных на рисунке, не меняются, и затраты иерархии изменятся на величину:

$$c(s_1 \setminus \{w\}, s_2) + c((s_1 \setminus \{w\}) \cup s_2, \{w\}) - c(s_1, s_2).$$

Точно такую же операцию можно проделать и с менеджером m_2.

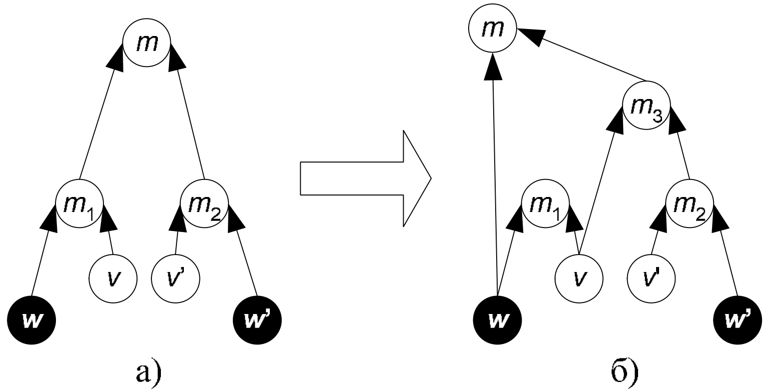


Рис. 6.16. К определению сильно сужающей функции затрат

Определение 6.12 [21]. Сужающая функция затрат называется *сильно сужающей*, если для любых групп s_1 и s_2 из двух или более исполнителей выполнено по крайней мере одно из двух условий:
1) для любого $w \in s_1$ $c(s_1, s_2) \geq c(s_1 \setminus \{w\}, s_2) + c((s_1 \setminus \{w\}) \cup s_2, \{w\})$;
2) для любого $w \in s_2$ $c(s_1, s_2) \geq c(s_1, s_2 \setminus \{w\}) + c(s_1 \cup (s_2 \setminus \{w\}), \{w\})$.

Таким образом, для сильно сужающей функции затрат всегда можно, не увеличив затрат иерархии, проделать описанное выше преобразование. Это преобразование не может быть проделано только в том случае, если иерархия является последовательной иерархией, что приводит к следующему утверждению.

Утверждение 6.5 [21]. Для сильно сужающей функции затрат на множестве $\Omega(N)$ существует оптимальная последовательная иерархия.

Следовательно, при сильно сужающей функции затрат оптимальную на $\Omega(N)$ иерархию можно искать только среди последовательных иерархий, для чего в [9] разработаны как аналитические методы, так и численные алгоритмы.

Несложно показать[41], что как монотонные по группам функции, так и функции, не являющиеся монотонными по группам, могут быть сужающими, могут быть расширяющими, могут не быть ни сужающими, ни расширяющими. Кроме того, в предельных случаях функция может быть и сужающей, и расширяющей одновременно.

[41] *См. примеры, приведенные в* [21].

В общем виде секционная функция затрат менеджера $c(s_1, \ldots, s_r)$ представляет собой функцию множеств и потому является довольно сложным объектом. Задание такой функции затрат в общем случае сводится к прямому перечислению ее значений для всех возможных наборов групп, что обычно невозможно из-за огромного количества таких наборов.

Для иллюстрации свойств секционных функций представим функцию затрат менеджера в компактной форме, поставив в соответствие каждой группе или набору групп одну или несколько числовых характеристик и считая функцию затрат менеджера зависящей уже от этих характеристик.

Проще всего это сделать, введя меру на множестве исполнителей. Каждому исполнителю $w \in N$ ставится в соответствие положительное число $\mu(w)$ – его *мера*. Мерой $\mu(s)$ группы исполнителей $s \subseteq N$ называется суммарная мера исполнителей, входящих в группу, то есть $\mu(s) := \sum_{w \in s} \mu(w)$. Тогда считаем, что функцию затрат менеджера можно записать в виде функции $r + 1$ переменных: $c(s_1, \ldots, s_r) = c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$, где $\mu_1, \ldots, \mu_r$ – это меры групп, управляемых непосредственными подчиненными менеджера, а μ – мера группы, которой управляет он сам. Такую функцию затрат будем называть *зависящей от мер*[42]. Содержательно мера исполнителя может соответствовать, например, сложности выполняемой им работы. Тогда мера группы соответствует суммарной сложности или объему работ, выполняемых группой, и именно от этой сложности зависят затраты по управлению группой.

Пример 6.4. Пусть все исполнители считаются одинаковыми, и каждый из них имеет меру, равную единице. Тогда мера группы равна количеству входящих в нее исполнителей, а функция затрат менеджера зависит от количества подчиненных ему исполнителей и от количества исполнителей, которыми управляют непосредственно подчиненные ему сотрудники. •

Задание меры исполнителей, конечно, является далеко не единственным, хотя и самым простым способом введения числовых характеристик групп. В частности, выше рассматривались «потоковые» функции затрат менеджера, зависящие от материальных, фи-

[42] *Функция затрат менеджера задается для любого количества его непосредственных подчиненных r и симметрична по перестановке аргументов $\mu_1, \ldots, \mu_r$ (но не последнего аргумента μ).*

нансовых и информационных потоков между подчиненными группами исполнителей. Приведем несколько примеров функций затрат, зависящих от мер.

Пример 6.5. Пусть затраты менеджера пропорциональны мере управляемой им группы, то есть $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu) = \mu$. В этом случае среди всех возможных иерархий оптимальна веерная иерархия, поскольку любая иерархия по определению включает менеджера, управляющего группой N из всех исполнителей, и только в веерной иерархии этот менеджер будет единственным. Однако оптимальные иерархии будут уже не столь тривиальными, если ограничиться поиском только среди r-иерархий, где $r > 1$ – некоторое заданное число. •

Пример 6.6. Пусть функция затрат зависит от количества r непосредственных подчиненных менеджера и меры μ группы, которой управляет сам менеджер. Частным видом такой функции является *мультипликативная* функция затрат вида $c(r, \mu) = \varphi(r)\chi(\mu)$, где $\varphi(\cdot)$ и $\chi(\cdot)$ – некоторые неотрицательные монотонно возрастающие функции.

В мультипликативной функции затраты по работе с непосредственными подчиненными $\varphi(r)$ умножаются на «коэффициент ответственности» $\chi(\mu)$, зависящий от меры управляемой менеджером группы. •

Пример 6.7. В [9, 21] были введены и исследованы несколько более сложных зависящих от мер функций затрат менеджера:

(I) $c(\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu) = [\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_r^\alpha - \max(\mu_1^\alpha,\ldots,\mu_r^\alpha)]^\beta$,

(II) $c(\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu) = [\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_r^\alpha]^\beta$,

(III) $c(\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu) = [\mu^\alpha / \max(\mu_1^\alpha,\ldots,\mu_r^\alpha) - 1]^\beta$,

(IV) $c(\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu) = [\sum_{i=1}^{r}(\mu^\alpha - \mu_i^\alpha)]^\beta$.

Здесь α и β – некоторые неотрицательные параметры, позволяющие «подстроить» эти функции затрат к конкретным условиям. Ниже мы будем ссылаться на эти функции затрат по их номеру, то есть говорить о функции затрат (I), (II) и т.д.

Функции (I)-(IV) затрат менеджера определяются «сложностью» (объемом работ) сотрудников «секции» (отдела, подразделения и т.п.), которая непосредственно подчинена менеджеру. В различных организациях секция может управляться с использованием различных механизмов взаимодействия между менеджером и непосредственными подчиненными (внутри секции). Ниже функции (I)-(IV) интерпретируются как затраты менеджера для различных способов взаимодействия внутри секции. В менеджменте на качественном уровне рассматривается множество подобных способов взаимодействия.

Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера имеется «*полулидер*», который полностью справляется со своими обязанностями, не требуя от непосредственного начальника затрат на управление собой. Этому случаю может соответствовать функция (I). В (I) затраты менеджера определяются сложностями групп, которые управляются всеми непосредственными подчиненными, кроме «полулидера». Под полулидером подразумевается подчиненный, который управляет группой с наибольшей сложностью. Если среди непосредственных подчиненных менеджера *отсутствует* «*лидер*», то менеджер несет затраты на управление всеми непосредственными подчиненными (функция (II)).

Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера (внутри секции) имеется «*лидер*», который помогает решить проблемы взаимодействия других непосредственных подчиненных (например, с помощью своего авторитета или опыта). За счет этого снижаются затраты непосредственного начальника. Этому случаю может соответствовать функция затрат (III). Чем более сложной группой управляет подчиненный менеджеру лидер, тем выше значение «лидера», тем более снижаются затраты его начальника.

Функция (IV) может описывать затраты *в процессе индивидуальной работы менеджера с каждым непосредственным подчиненным*. Затраты определяются разностями между сложностью группы, которой управляет менеджер, и сложностями групп, которыми управляют непосредственные подчиненные[43].

[43] *Например, менеджер* m*, которому подчинена группа* $s_H(m)$*, в процессе управления непосредственным подчиненным* m_1 *передает ему информацию о той части группы* $s_H(m)$*, которой* m_1 *не управляет. Объем этой информации определяется разностью сложностей* $\mu(s_H(m))$ *и* $\mu(s_H(m_1))$*. Сумма объемов информации по всем непосредственным подчиненным и определяет затраты менеджера (IV).*

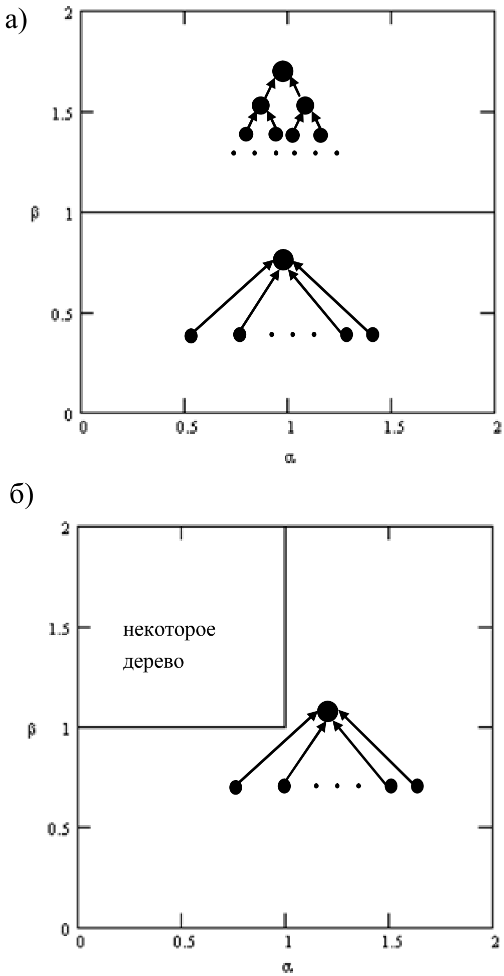


Рис. 6.17. Виды оптимальной иерархии
для функции I (*а*) *и функции II* (*б*)

Очевидно, что функции (I) и (II) монотонны по группам, функции (III) и (IV) не являются монотонными по группам. Несложно проверить свойства сужения и расширения для этих функций. В результате можно доказать (см. [21]), что функция (I) при $\beta \leq 1$ –

расширяющая, а при $\beta \geq 1$ – сужающая. Это значит, что при $\beta \leq 1$ оптимальна веерная иерархия, а при $\beta \geq 1$ оптимальным является некоторое 2-дерево (см. рисунок 6.17 а).

Также доказывается, что функция (II) при $\beta \leq 1$ расширяющая, а при $\beta > 1$ и $\alpha \geq 1$ – расширяющая на непересекающихся группах, то есть в этих случаях оптимальна веерная иерархия (см. рисунок 6.17 б). В области $\beta > 1$ и $\alpha < 1$ функция (II) не является ни расширяющей, ни сужающей даже на непересекающихся наборах групп. То есть для этого случая утверждение 6 не может помочь в поиске оптимальной иерархии. Однако функция (II) монотонна по группам, поэтому оптимальным является дерево (см. утверждение 6.3).

В [21] показано, что при $\beta \geq 1$ функции (III) и (IV) сужающие, то есть оптимальной является 2-иерархия, имеющая минимальные затраты (см. утверждение 6)[44]. Для $\beta < 1$ дерево с минимальными затратами можно найти с помощью алгоритмов (см. [9]). Однако это дерево может не быть оптимальной иерархией, поскольку функции (III) и (IV) не монотонны по группам. •

Расширяющие и сужающие функции затрат приводят к оптимальности крайних случаев – веерной иерархии и 2-иерархии. Как правило, в реальных организациях имеет место «промежуточная» иерархия, в которой норма управляемости $2 < r < +\infty$. Поэтому функция затрат, описывающая такую организацию, не будет ни расширяющей, ни сужающей. Таким образом, важна разработка методов решения задачи об оптимальной иерархии для этого случая. На данный момент такие методы разработаны для важного класса так называемых однородных функций затрат.

6.4. Оптимальные древовидные структуры

Однородные функции затрат на управление.

Определение 6.13 [9]. Функция затрат менеджера $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$, зависящая от мер, называется *однородной*, если существует такое неотрицательное число γ, что для любого положительного числа A и любого набора мер $\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu$ выполняется тождество

[44] *Для функции* (III) *и* $\beta \geq 1$ *в* [9] *оптимальная* 2-*иерархия найдена в явном виде.*

$c(A\mu_1,...,A\mu_r,A\mu) = A^\gamma c(\mu_1,...,\mu_r,\mu)$. Число γ называется *степенью однородности* функции затрат.

Таким образом, при однородной функции затрат пропорциональное увеличение мер групп всех исполнителей в A раз приводит к росту затрат менеджера в A^γ раз.

Определение 6.14. *r-мерным симплексом D_r* называется такое множество r-мерных векторов $x = (x_1, \ldots, x_r)$ с неотрицательными компонентами, что $x_1 + \ldots + x_r = 1$. Элементы такого симплекса будем называть *r-пропорциями* или просто *пропорциями*.

Легко видеть, что если менеджер имеет r непосредственных подчиненных, то вектор $x := (\mu_1/\mu, \ldots, \mu_r/\mu)$ является r-пропорцией. Будем в этом случае говорить, что менеджер делит подчиненную ему группу исполнителей между своими непосредственными подчиненными в пропорции x.

Для поиска оптимального дерева в случае функций затрат, зависящих от мер, существуют численные алгоритмы (см. [9]). Исследование результатов их работы при различных однородных функциях затрат позволяет выделить ряд общих свойств, которыми обладают оптимальные деревья, формализованных в определении 6.15.

Определение 6.15. Дерево называется *(r, x)-однородным*, если каждый его менеджер имеет ровно r непосредственных подчиненных и делит между ними подчиненную ему группу исполнителей в пропорции $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Число r называется *нормой управляемости* однородного дерева.

Пример 6.8. На рисунке 6.18 изображены три однородных дерева. Для каждого сотрудника на рисунке изображена мера управляемой им группы. Иерархия а) – это 3-дерево с пропорцией $x = (1/3, 1/3, 1/3)$. Дерево имеет симметричный вид (однородные деревья всегда симметричны, если исполнители имеют одинаковые меры). Иерархия б) – это 2-дерево с пропорцией (1/2, 1/2), а иерархия в) – 2-дерево с пропорцией (1/3, 2/3). •

В силу дискретности задачи для заданного множества исполнителей может не существовать ни одного однородного дерева (кроме веерной иерархии, которая всегда является однородной). В то же время, если однородное дерево существует, его затраты легко вычисляются.

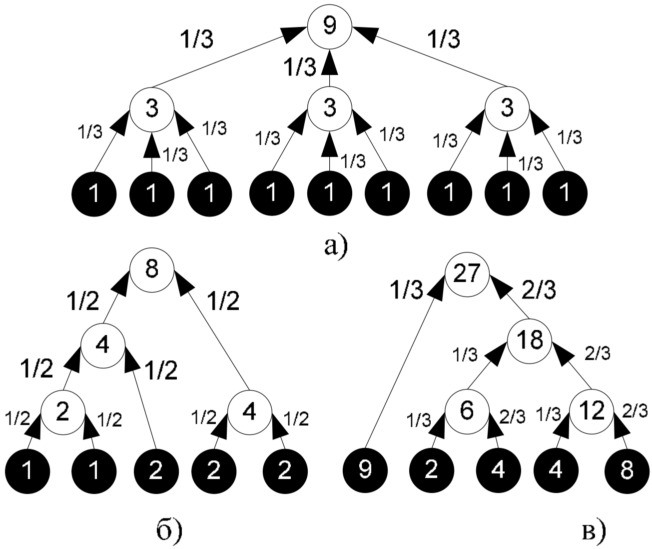


Рис. 6.18. Примеры однородных деревьев

<u>Утверждение 6.6</u> [12]. Пусть заданы множество исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$ с мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ и однородная степени γ функция затрат менеджера $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$. Если существует однородное дерево H с нормой управляемости r и пропорцией $x = (x_1, \ldots, x_r)$, то его затраты определяются выражением:

$$(6.6.)\quad C(H) = \begin{cases} |\mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma| \dfrac{c(x_1,\ldots,x_r)}{|1-\sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma|}, & \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \dfrac{c(x_1,\ldots,x_r)}{-\sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i}, & \text{если } \gamma = 1, \end{cases}$$

где $\mu := \mu(N) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$ – суммарная мера всех исполнителей.

Нижняя оценка затрат оптимального дерева. Имея аналитическое выражение для затрат однородного дерева, точно так же можно ставить вопрос о том, какое из всего множества однородных деревьев *было бы оптимальным, если бы оно существовало.* Для того чтобы найти такое наилучшее однородное дерево, необходимо минимизировать выражение (6.6) по всем возможным нормам управляемости r и пропорциям x. Соответственно, пара (r, x), на которой достигается этот минимум, даст параметры наилучшего однородного дерева, а, подставив их в формулу (6.6), получим его затраты.

Понятно, что при фиксированном множестве исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$ с мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ топ-менеджер любого дерева будет иметь не более n непосредственных подчиненных, поэтому при поиске наилучшего однородного дерева минимизировать достаточно по всем r от 2 до n.

Кроме того, каждый непосредственный подчиненный топ-менеджера будет управлять, по меньшей мере, одним исполнителем, и, значит, мера управляемой им группы будет не меньше минимальной из мер исполнителей. Следовательно, каждая из компонент x_i, $i = 1, \ldots, r$ пропорции любого однородного дерева будет не меньше чем $\varepsilon := \min_{i \in N} \mu(i) / \sum_{i \in N} \mu(i)$.

Для произвольного неотрицательного числа ε обозначим через $D_r(\varepsilon)$ ту часть симплекса D_r, на которой каждая компонента вектора больше или равна ε.

Тогда при фиксированной функции затрат минимальные затраты однородного дерева определяются количеством n и мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ исполнителей и задаются следующим выражением:

$$C_L(N) =$$

$$= \begin{cases} | \mu^\gamma - \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma | \min\limits_{k=2\ldots n} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1, \ldots, y_k)}{|1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^\gamma|}, \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \min\limits_{k=2\ldots n} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1, \ldots, y_k)}{-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i}, \text{если } \gamma = 1, \end{cases} \tag{6.7}$$

где $\mu = \sum_{i \in N} \mu(i)$, $\varepsilon = \min_{i \in N} \mu(i) / \mu$.[45]

Эмпирически установлено, что оптимальная (на множестве всех деревьев) древовидная иерархия «стремится» быть однородным деревом. В связи с этим возникает предположение о том, что, если для заданного множества исполнителей существует наилучшее однородное дерево (с нормой управляемости $r(n, \varepsilon)$ и пропорцией $x(n, \varepsilon)$), то оно и будет оптимальным на множестве всех деревьев. На

[45] *Поскольку $D_r(\varepsilon)$ – компактное множество, минимумы в формуле (6.7) достигаются при достаточно слабых условиях на функцию затрат (достаточно потребовать ее полунепрерывности снизу на симплексе), и ниже считается, что они достигаются.*

самом деле оказывается, что справедлив даже более сильный результат.

Утверждение 6.7 [12]. Пусть заданы множество исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$ с мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ и однородная степени γ функция затрат менеджера $c(\cdot)$. Тогда затраты оптимального дерева будут не меньше, чем $C_L(N)$. Иначе говоря, функция $C_L(N)$ является нижней оценкой затрат оптимального дерева.

Если ставится задача поиска оптимального r-дерева, то есть дерево, каждый из менеджеров которого имеет не более r подчиненных, то нижняя оценка его затрат будет определяться затратами *наилучшего однородного* r-дерева, то есть однородного дерева с нормой управляемости не более чем r.

Легко видеть, что затраты наилучшего однородного r-дерева задаются формулой:

$$(6.8)\quad C_L^{\,r}(N) =$$

$$= \begin{cases} |\mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma| \min\limits_{k=2\ldots\min[n,r]} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{|1-\sum_{i=1}^{k} y_i^\gamma|}, \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \min\limits_{k=2\ldots\min[n,r]} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i}, \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 6.8 [12]. В условиях утверждения 6. 6 затраты оптимального r-дерева будут не менее $C_L^{\,r}(N)$.

Описанная нижняя оценка затрат оптимального дерева имеет широкий спектр применения. Например, оказывается, что при большом количестве исполнителей она обычно достаточно точно аппроксимирует затраты оптимального дерева. Более подробно качество нижней оценки $C_L(N)$ обсуждается в [12].

Модель организационной иерархии, решающей проблемы. Система управления представляет собой иерархию (см. определение 6.1) над множеством исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$.

Объем работы менеджера определяется количеством принимаемых менеджером решений, направленных на решение стоящих перед его подчиненными проблем. Если менеджеру в единицу времени приходится принимать P решений, то затраты на его содержание равны P^β, где β – константа, описывающая скорость роста затрат. Логично считать, что маржинальные затраты не убывают с ростом объема работы, то есть $\beta \geq 1$. Параметр β описывает эффективность работы менеджеров – более квалифицированные менеджеры при одинаковом числе проблем несут меньшие затраты, а при одинаковых затратах решают большее число проблем.

Менеджер принимает решения на основе отчетов, предоставляемых его непосредственными подчиненными. Будем считать, что объем отчета, который готовит подчиненный для своего начальника, равен μ^{α}, где μ – мера управляемой этим подчиненным группы исполнителей. Кроме того, предположим, что количество принимаемых начальником решений пропорционально суммарному объему получаемых им отчетов.

Параметр α, принимающий значения из отрезка [0, 1], интерпретируется как коэффициент сжатия информации о проблемах в отчете. Этот коэффициент определяется типичностью проблем, возникающих у исполнителей – если у многих исполнителей возникают одинаковые проблемы, то объем отчета об этих проблемах слабо зависит от количества исполнителей, и значение α существенно меньше единицы.

Итак, если k непосредственных подчиненных менеджера управляют группами мер $\mu_1, \ldots, \mu_k$, то суммарный объем подготовленного ими отчета равен $\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_k^{\alpha}$, и затраты менеджера с точностью до константы равны:

(6.9) $c(\mu_1, \ldots, \mu_k) = (\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_k^{\alpha})^{\beta}$.

Построение оптимальной организационной структуры сводится к поиску иерархии с минимальными суммарными затратами менеджеров. Помимо собственно получения оптимальной иерархии интерес представляет и анализ зависимости ее основных характеристик – нормы управляемости менеджеров и затрат иерархии – от параметров модели (степени единообразия технологического процесса α и квалификации менеджеров β).

Результаты этого анализа позволяют выбирать наиболее эффективные организационные мероприятия по снижению управленческих расходов и предусматривать меры по адаптации организационной структуры к изменению внешних условий.

В рассматриваемом примере выражение (6.9) затрат менеджера совпадает с формулой введенной выше в примере 6.7 функции затрат (II). Эта функция затрат монотонна по группам, следовательно, оптимальная иерархия имеет вид дерева. Из рисунка 6.17 б) видно, что при $\alpha \geq 1$ или $\beta \leq 1$ оптимальна веерная иерархия. Поэтому интерес представляет поиск оптимального дерева в области параметров $\alpha < 1$, $\beta > 1$. Для решения этой задачи найдем параметры наилучшего однородного дерева – норму управляемости и пропорцию.

Пусть степень однородности функции затрат $\alpha\beta \neq 1$. По формуле (6.7), чтобы для фиксированной нормы управляемости k найти наилучшую пропорцию, необходимо найти пропорцию $(y_1, \ldots, y_k)$, минимизирующую выражение

$$(6.10)\ (y_1^\alpha + \ldots + y_k^\alpha)^\beta \,/\, \left|1 - \sum\nolimits_{i=1}^{k} y_i^{\alpha\beta}\right|.$$

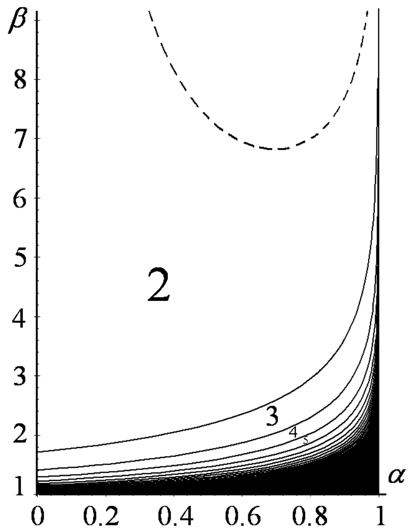


Рис. 6.19. Нормы управляемости наилучшего однородного дерева для функции затрат (II)

Эту задачу можно решить численно с помощью описанного в [12] алгоритма. Показано, что в наиболее важной с практической точки зрения области параметров ($\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [1, 6]$) наилучшие однородные деревья симметричны (для $\beta > 6.7$ имеются области параметров α и β, где оптимальны асимметричные пропорции). Зная оптимальную пропорцию, по формуле (6.7) легко вычислить наилучшую норму управляемости однородного дерева. Результаты ее численного расчета приведены на рисунке 6.19. Видно, что для больших значений параметра β оптимальны 2-деревья. Область их оптимальности отмечена на рисунке числом «2» (область, где оптимальны асимметричные 2-деревья, выделена пунктиром). С уменьшением β, а также со стремлением α к единице, последовательно становятся оптимальными 3-деревья, 4-деревья и т.д. (эти области подписаны на рисунке числами «3», «4», …).

Из рисунка 6.19 видно, что с ростом квалификации (с уменьшением параметра β) оптимальная норма управляемости растет, то есть более квалифицированным менеджерам назначается большее количество непосредственных подчиненных. Это вполне объяснимо и с содержательной точки зрения – более квалифицированные менеджеры выполняют больший объем работы.

Более неожиданным является то, что оптимальная норма управляемости увеличивается с ростом степени атипичности проблем (параметра α). Действительно, если считать, что меры всех исполнителей больше единицы, то легко проверить, что с ростом α объем работы менеджера, определяемый выражением $\mu^{\alpha} r^{1-\alpha}$, увеличивается, а, следовательно, возрастают его затраты. Увеличение нормы управляемости r еще сильнее увеличивает объем выполняемой менеджером работы.

Общее количество менеджеров в однородной иерархии равно $(n-1)/(r-1)$, то есть с ростом нормы управляемости количество менеджеров убывает. Оказывается, что уменьшение числа менеджеров – это самый «дешевый» способ противодействия росту степени атипичности проблем, поскольку при усложнении иерархии в решении большого количества проблем участвуют все больше и больше менеджеров, что увеличивает суммарные затраты.

Оценим влияние параметров α и β на затраты оптимальной иерархии. Затраты топ-менеджера иерархии, определяются формулой:

$$\mu(N)^{\alpha\beta} c(1/r(\alpha,\beta), ..., 1/r(\alpha,\beta)) = \mu(N)^{\alpha\beta} r(\alpha,\beta)^{\beta(1-\alpha)}.$$

Легко проверить, что, с ростом α (степени атипичности проблем) как затраты оптимальной иерархии, так и затраты топ-менеджера возрастают. Затраты оптимальной иерархии монотонно убывают с ростом уровня квалификации менеджеров (с уменьшением параметра β).

Однако зависимость затрат топ-менеджера от параметра β уже не столь очевидна. Из рисунка 6.20 видно, что с ростом квалификации (с уменьшением β) затраты топ-менеджера сначала уменьшаются (ведь его квалификация также растет), а затем начинают возрастать. Дело в том, что, как было отмечено выше, с ростом квалификации менеджеров растет и оптимальная норма управляемости, уменьшается количество менеджеров в иерархии, и, следовательно, растут затраты отдельного менеджера.

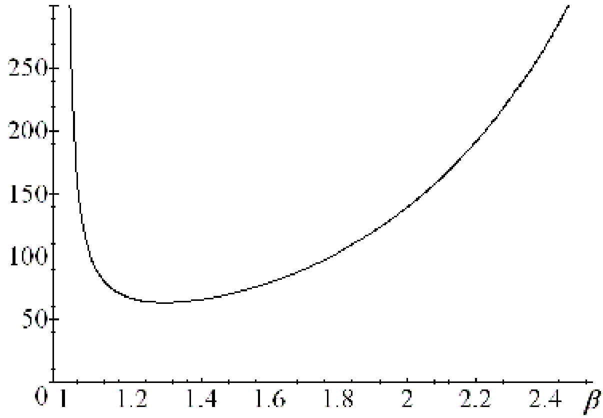


Рис. 6.20. Пример зависимости затрат топ-менеджера от параметра β при $\alpha = 0.2$

Следовательно, если высшее руководство организации вкладывает средства в повышение квалификации менеджеров иерархии, например в их обучение, то эти действия приводят к уменьшению управленческих расходов иерархии, однако затраты самого высшего руководства при этом могут и возрасти, если, конечно, иерархия параллельно изменяется с тем, чтобы наилучшим образом использовать новые условия.

Исполнение приказов и детализация планов. В предыдущей модели информация о проблемах поднималась снизу вверх – от исполнителей к топ-менеджеру. Однако помимо таких потоков, в организациях присутствуют и информационные потоки, направленные сверху вниз, от топ-менеджера к его подчиненным и далее до конечных исполнителей. Например, подобные информационные потоки возникают в процессе планирования функционирования организации или разработки и исполнения приказов. Рассмотрим формулировку модели в терминах исполнения приказов – процессы планирования описываются аналогично.

Пусть в технологический процесс организации вовлечено n исполнителей. Работы, порученные исполнителям, могут требовать различных усилий по управлению ими, поэтому для каждого исполнителя $w \in N = \{1, \ldots, n\}$ определим число $\mu(w)$ (меру), описывающее сложность управления этим исполнителем. Тогда объем максимально детализированной инструкции, подробно регламентирующей работу некоторой группы исполнителей $s \subseteq N$ (измеряемый, например, количеством знаков в соответствующем документе), будет пропорционален суммарной мере $\mu(s)$ исполнителей группы, то есть количеству входящих в нее исполнителей.

Объем приказа, получаемый менеджером, управляющим группой меры μ, равен μ^α, где $\alpha \in [0, 1]$ – коэффициент, определяющий то самое неизбежное сжатие информации.

Задача менеджера состоит в том, чтобы проанализировать каждое положение приказа с целью определения того, какие из k непосредственно подчиненных ему подразделений будут вовлечены в процесс исполнения данного приказа, то есть, по сути, решить задачу классификации.

В общем случае объем работы задается некоторой функцией $\rho(k)$, а совокупный объем работы менеджера пропорционален[46] $\mu^\alpha \rho(k)$.

Затраты менеджера могут нелинейно зависеть от объема P выполняемой им работы. Будем считать, что эта зависимость описывается степенной функцией вида P^β. Тогда если анализ положений приказа является единственной работой менеджера, то его затраты задаются выражением $\mu^{\alpha\beta}\rho(k)^\beta$, то есть описываются введенной в примере 6.6 мультипликативной функцией затрат.

Однако в рамках рассматриваемой модели менеджер должен еще дополнить и детализировать полученный приказ, превратив его в k приказов для своих непосредственных подчиненных. Будем считать, что объем связанной с этим работы пропорционален разности $\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_k^\alpha - \mu^\alpha$ между суммарным объемом детализированных приказов и объемом полученного приказа.

Следовательно, если k непосредственных подчиненных менеджера управляют группами исполнителей с мерами $\mu_1, \ldots, \mu_k$, а сам он

---

[46] *Такая зависимость объема работы менеджера от меры управляемой группы μ и нормы управляемости k может возникать не только при решении задачи классификации. Например, работа менеджера может состоять в ознакомлении непосредственных подчиненных с положениями полученного им приказа. Если менеджер собирает для этого своих подчиненных вместе, то объем его работы пропорционален объему приказа μ^α, если он знакомит с приказом каждого из k своих починенных по отдельности, то объем работы пропорционален $k\,\mu^\alpha$.*

управляет группой меры $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_k$, то его затраты определяются выражением:

(6.11) $(A\ \mu^\alpha\rho(k) + \mu_1{}^\alpha + \ldots + \mu_k{}^\alpha - \mu^\alpha)^\beta$,

где A – коэффициент, описывающий трудоемкость анализа одного положения приказа по сравнению с трудоемкостью его детализации для подчиненных.

Ниже, как и в предыдущей модели, решается задача поиска иерархии с наименьшими затратами на содержание менеджеров. Основной интерес представляет зависимость нормы управляемости оптимальной иерархии и ее затрат от параметров модели.

При этом уменьшение параметра β соответствует росту общей квалификации менеджеров, как управленцев, повышению их способности к переработке информации. Увеличение же параметра α можно интерпретировать как рост уровня специализации менеджеров, их информированности о технологических особенностях функционирования данной организации, что позволяет им готовить более детальные приказы для своих подчиненных.

Рассмотрим произвольного менеджера, управляющего группой исполнителей меры μ, r непосредственных которого управляют группами исполнителей с мерами $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Легко проверить, что объем $\mu_1{}^\alpha + \ldots + \mu_k{}^\alpha - \mu^\alpha$ работы этого менеджера по детализации получаемых приказов немонотонно зависит от показателя степени α, возрастая до некоторого значения α, а затем убывая до нуля при α, стремящемся к единице[47].

Эта немонотонность является результатом двух тенденций – стремления суммарного объема работы всех менеджеров иерархии к уменьшению с ростом уровня специализации α этих менеджеров (более специализированные менеджеры легче и быстрее принимают правильные решения), и стремления объема работы по детализации приказов к увеличению (более специализированные менеджеры сильнее детализируют приказы).

На практике при подборе персонала редко удается найти достаточное количество сотрудников, которые были бы одновременно и специалистами в технологии, и опытными управленцами, и приходится искать некоторый компромисс в обладании этими навыками.

---

[47] *Степень однородности рассматриваемой функции затрат равна* $\alpha\,\beta$. *Согласно имеющимся статистическим данным* (*см. обсуждение и ссылки в* [12, 21]), *в коммерческих фирмах степень однородности функции затрат менеджера не превышает 0.4.*

Исследование влияния параметров α и β на затраты оптимальной иерархии позволяет в процессе формирования команды менеджеров сделать выбор между специалистами и профессиональными управленцами.

Функция затрат (6.11) монотонна по группам и, следовательно, оптимальную иерархию достаточно искать в классе деревьев. При интересных с содержательной точки зрения сочетаниях параметров для составляющих этой функции затрат наилучшие однородные деревья были симметричны. Поэтому при поиске оптимальной иерархии ограничимся поиском наилучших симметричных деревьев.

Тогда в соответствии с формулой (6.7), чтобы при фиксированных параметрах α, β и A найти норму управляемости наилучшего однородного дерева, необходимо найти целое число k, большее единицы, при котором достигается минимум функции:

$$(A\,\rho(k) + k^{1-\alpha} - 1)^{\beta} \,/\, |\,1 - k^{1-\alpha\beta}\,|.$$

Эта стандартная задача минимизации легко решается численно. Скажем, на рисунке 6.21 оптимальные нормы управляемости изображены для значения параметра A (описывающего трудоемкость анализа приказа по сравнению с его детализацией) равного 0.5. Из рисунка видно, что и с уменьшением уровня специализации менеджеров (уменьшением α), и с ростом их квалификации (уменьшением β), оптимальная норма управляемости растет.

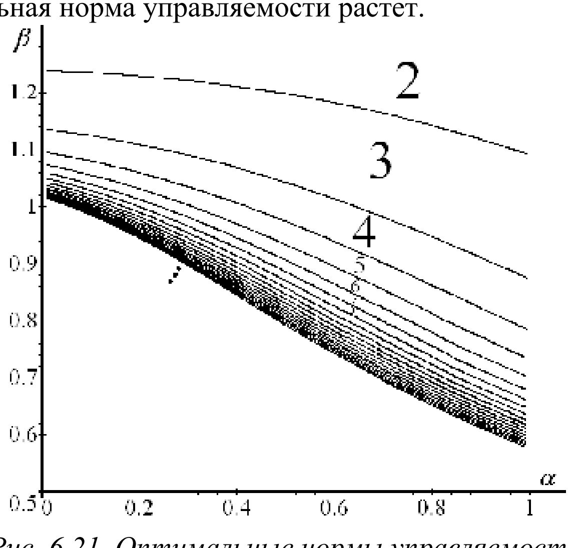


Рис. 6.21. Оптимальные нормы управляемости для функции затрат (6.11) при A = 0.5

В то же время, если детализация плана становится более трудоемкой по сравнению с его анализом (то есть если значение параметра A уменьшается), это правило может и нарушаться.

Так, например, на рисунке 6.22 изображены оптимальные нормы управляемости для $A = 0.05$. Легко видеть, что при небольших значениях β (более квалифицированных менеджерах) сохраняется прежняя зависимость нормы управляемости от уровня специализации α, в то время как при $\beta > 1.03$ оптимальная норма управляемости с ростом α уже не убывает, а растет.

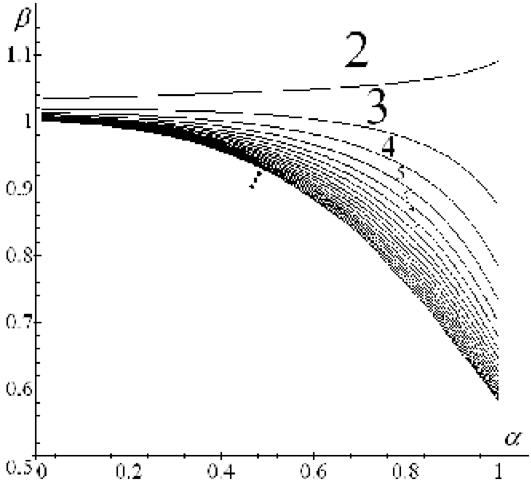


Рис. 6.22. Оптимальные нормы управляемости для функции затрат (6.11) при $A = 0.05$

Семейство кривых на рисунке 6.23 описывает зависимости затрат иерархии от α при различных значениях параметра A. Из рисунка видно, что если детализация приказов играет бóльшую роль в работе менеджеров (то есть значение параметра A мало), то затраты иерархии минимальны при большом уровне специализации менеджеров (максимальном значении α). Значит, в этом случае организации более выгодно иметь менеджеров – специалистов в технологии. Однако с увеличением роли работы по классификации положений приказа (с ростом параметра A) затраты «узких специалистов» возрастают, и при A, больших 0.05, затраты иерархии минимальны уже при минимальном α, то есть становится выгодным формировать организационную иерархию из «универсальных» управленцев.

Обоснованные выводы о выгодности тех или иных управленческих действий по изменению организационной структуры можно делать лишь после подробного анализа конкретной ситуации, в которой находится организация.

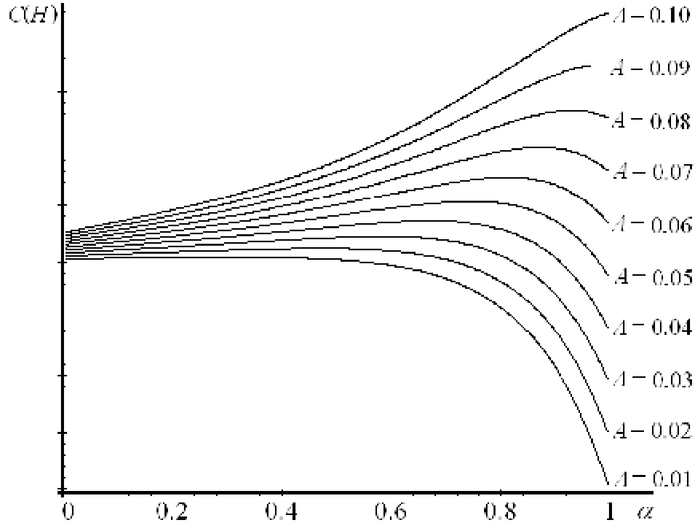


Рис. 6.23. Пример зависимости затрат оптимальной иерархии от уровня специализации менеджеров (параметра α) при n = 1000

Затраты на управление и размер организации. С точки зрения математической экономики весьма важно знать, как затраты иерархической системы управления организацией зависят от размера этой организации. Понимание этой зависимости позволяет дать ответ на принципиальный вопрос – может ли иерархически управляемая организация расти неограниченно, или существует некоторый критический размер, превышение которого для организации невыгодно, и дальнейший рост может осуществляться только посредством взаимодействия равноправных экономических субъектов – в рамках рыночных отношений [30, 37].

Рассматриваемую проблему можно проиллюстрировать следующей простейшей моделью. Пусть доход организации в зависимости от количества n рабочих, непосредственно вовлеченных в процесс производства, описывается функцией $V(n)$. Логично предположить, что эта функция не убывает по n. Для простоты будем считать, что функция $V(n)$ имеет вид $p\,n$ (линейный доход на масштаб), где p – размерный коэффициент.

Пусть расходы организации состоят только из заработной платы ее сотрудников. Если все рабочие имеют одинаковую зарплату σ, то общий фонд их заработной платы равен $\sigma\,n$.

Однако, как показывает практика, для нормального функционирования организации одних производственных рабочих мало, необходима система управления – иерархия менеджеров, содержание которых также требует расходов. Для заданного количества рабочих n существует оптимальная иерархия менеджеров – иерархия с минимальными возможными затратами $C(n)$.

Тогда прибыль организации (доход минус затраты) определяется выражением $(p - \sigma)\,n - C(n)$. Из этого выражения видно, что если затраты иерархии $C(n)$ при больших n растут линейно (причем со скоростью меньше $p - \sigma$), то прибыль возрастает по n, то есть неограниченный рост организации приносит выгоду. Если же затраты иерархии при больших n растут сверхлинейно, то существует оптимальное количество рабочих n^* (для выпуклой функции $C(n)$ оно определяется условием $C'(n^*) = p - \sigma$), при превышении которого прибыль организации уменьшается, то есть дальнейший рост организации становится невыгодным.

Именно линейность зависимости затрат иерархии от размера организации стала предметом продолжительной дискуссии в экономической литературе. Например, в [25, 44] рассматривается ряд моделей, из которых следует линейная зависимость затрат иерархии от размера организации. В то же время, в [33, 38, 51] показывается, что затраты иерархии с ростом организации растут сверхлинейно. В [45] рассматриваются модели «вычислительных иерархий» как с линейными, так и со сверхлинейными затратами.

С помощью однородных функций затрат можно в зависимости от параметров модели описывать оба варианта зависимости затрат оптимальной иерархии от размера организации (см. рисунок 6.24).

Если степень однородности γ функции затрат менеджера организационной иерархии отлична от единицы, то затраты оптимальной иерархии растут пропорционально $|n - n^{\gamma}|$. То есть если γ меньше единицы, то затраты иерархии имеют порядок роста n и такая организация может расти неограниченно. Если же степень однородности больше или равна единице, то затраты организационной иерархии растут сверхлинейно (пропорционально n^γ) и существует предел роста организации, превышать который для организации невыгодно.

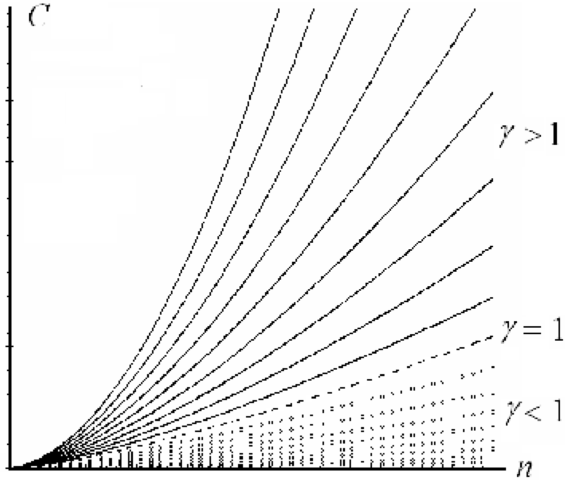


Рис. 6.24. Пример зависимости затрат С оптимальной иерархии от размера организации n для различных степеней однородности

Для решения вопроса о возможности неограниченного роста организации необходимо знать, превышает ли степень однородности функции затрат менеджера[48] единицу. Для конкретной организации степень однородности функции затрат можно грубо оценить с помощью следующей процедуры анализа затрат на содержание ее менеджеров. Предположим, что функция затрат менеджеров организации однородная и существующую в настоящий момент организационную структуру можно считать оптимальной. Тогда, если затраты на содержание менеджера иерархии больше суммарных затрат на содержание всех непосредственно подчиненных ему менеджеров, то степень однородности функции затрат больше единицы. Если его затраты меньше, то степень однородности меньше единицы, если равны – то степень однородности равна единице.

Итак, грубо говоря, если в организации содержание начальника стоит меньше, чем содержание всех его непосредственных подчиненных вместе взятых, то такая организация может расти неограни-

[48] *Под затратами менеджера может пониматься не только зарплата, но и затраты на организацию работы (аренда помещений, оргтехника и т.п.), включающие, возможно, и содержание секретарей, помощников.*

ченно, если больше – то организация имеет верхний предел размера, превышение которого невыгодно.

Задачи и упражнения к главе 6

6.1*. Приведите определения следующих понятий и содержательные примеры: организационный дизайн, исполнитель, функция потока, интенсивность потока, технологическая сеть, производственная линия, начальник (непосредственный), подчиненный (непосредственный), группа, подчиненная группа исполнителей, дерево, норма управляемости, иерархия (последовательная, веерная, *r*-иерархия, оптимальная), поток (внешний, внутренний, менеджера), функция затрат (секционная, монотонная по группам, сужающая, зависящая от мер, однородная).

6.2. Какие из графов, изображенных на рисунке 6.25, являются иерархиями, а какие – нет (менеджеры изображены белыми кружками, исполнители – черными).

6.3. Какие свойства иерархий из утверждения 6.1 нарушают те графы, изображенные на рис. 6.25, которые являются иерархиями.

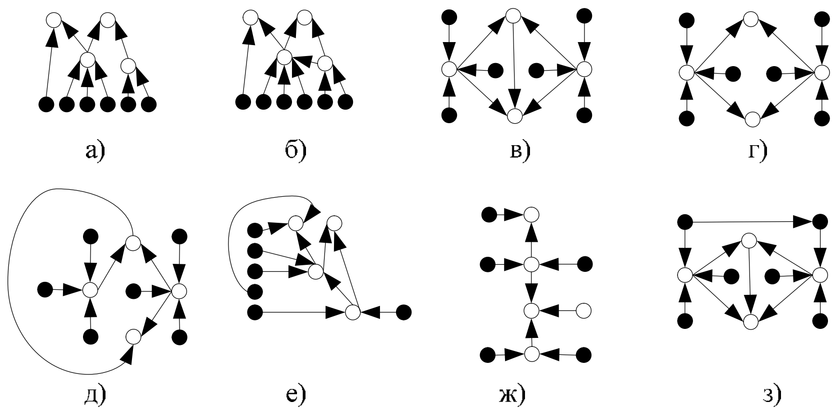


Рис. 6.25. Примеры графов организационных структур

6.4. С использованием утверждения 6.1 объясните, почему иерархию, изображенную на рисунке 6.26, можно не рассматривать при поиске оптимальной иерархии. В явном виде предъявите иерархию, имеющую не бóльшие затраты.

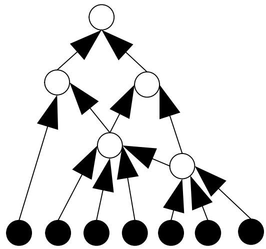


Рис. 6.26. Пример организационной иерархии

6.5. Проверьте, является ли иерархия, изображенная на рис. 6.26, 3-иерархией.

6.6. Докажите лемму 6.1. Воспользуйтесь определением подчиненной группы исполнителей и ацикличностью иерархии.

6.7*. Докажите лемму 6.2.

6.8. Докажите, что в модели надстройки иерархии управления над технологическим графом менеджеры в сумме управляют всеми технологическими потоками, то есть, что в любой иерархии H

$$\sum_{m \in M} F_H^{\text{int}}(m) = \sum_{w, w' \in N} f(w, w').$$

6.9. Рассмотрим технологическую сеть с однокомпонентными потоками, изображенную на рис. 6.27. С использованием результатов раздела 6.1 найдите оптимальную иерархию и ее затраты, если функция затрат менеджера $\varphi(x) = 10 + x + (x + 10)^{0.5}$.

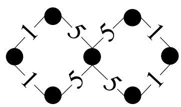


Рис. 6.27. Пример технологической сети

6.10. Докажите, что введенная в примере 6.6 мультипликативная функция затрат $c(r, \mu) = \varphi(r)\chi(\mu)$ является монотонной по группам, если функции $\varphi(r)$ и $\chi(\mu)$ не убывают по своим аргументам.

6.11. Докажите, что при любых неотрицательных α и β введенная в примере 6.7 функция затрат (II) монотонна по группам.

6.12*. Докажите, что при любых неотрицательных α и β введенная в примере 6.7 функция затрат (I) монотонна по группам.

6.13*. Приведите пример, иллюстрирующий нарушение монотонности по группам для введенной в примере 6.7 функции затрат (III).

6.14*. Приведите пример, иллюстрирующий нарушение монотонности по группам для введенной в примере 6.7 функции затрат (IV).

6.15. Докажите, что введенная в примере 6.7 функция затрат (I) является сужающей (см. определение 6.11) при $\beta > 1$.[49]

6.16. Докажите, что введенная в примере 6.7 функция затрат (IV) является сужающей (см. определение 6.11) при $\beta > 1$.

6.17*. Докажите, что введенная в примере 6.7 функция затрат (I) является сильно сужающей (см. определение 6.12) при $\alpha\beta > 1$, $\beta > 1$.

6.18. Пусть все исполнители имеют меры, равные единице. Выпишите формулу затрат оптимальной иерархии для функции затрат (I) при $\alpha\beta > 1$, $\beta > 1$ (воспользуйтесь решением предыдущей задачи и утверждением 6.5).

6.19*. Докажите, что введенная в примере 6.7 функция затрат (II) является расширяющей (см. определение 6.11) при $\beta \le 1$.

6.20*. Докажите, что введенная в примере 6.7 функция затрат (II) является расширяющей на непересекающихся группах (см. определение после утверждения 6.4) при $\alpha \ge 1$, $\beta > 1$.

6.21*. Докажите, что для однородной мультипликативной функции затрат вида $c(r, \mu) = \mu^\gamma \varphi(r)$ наилучшее однородное дерево симметрично, то есть минимум по y в формуле 6.7 достигается при $y = (1/k, \dots, 1/k)$.

6.22. Найдите норму управляемости наилучшего симметричного однородного дерева для функции затрат менеджера:

а) $c(r, \mu) = \mu^{0.5} r$,

б) $c(r, \mu) = r^2$,

в) $c(r, \mu) = \mu^{0.5} r^{0.5}$,

г) $c(r, \mu) = \mu\, r$.

Литература к главе 6

1. Антомонов Ю.Г. Моделирование биологических систем. – Киев: Наукова думка, 1977.

2. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» модели / Математическое моделирование социальных процессов. – М.: МГУ, 1998. С. 29 – 51.

---

[49] *Для доказательства воспользуйтесь одной из форм неравенства Минковского: для любых неотрицательных чисел* $x_1, \dots, x_k$ *и любого числа* γ $(x_1 + \dots + x_k)^\gamma \ge x_1^\gamma + \dots + x_k^\gamma$ *если* $\gamma \ge 1$.

3. Бабкин В.Ф., Баркалов С.А., Щепкин А.В. Деловые имитационные игры в организации и управлении. – Воронеж: ВГАСУ, 2001.
4. Боулдинг К. Общая теория систем – скелет науки / Исследования по общей теории систем. – М.: Прогресс, 1969. С. 106 – 124.
5. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981.
6. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. – Тбилиси: Мецниереба, 1974.
7. Бурков В.Н., Ланда Б.Д., Ловецкий С.Е., Тейман А.И., Чернышев В.Н. Сетевые модели и задачи управления. – М.: Советское радио, 1967.
8. *Воронин А.А. Устойчивое развитие – миф или реальность // Математическое образование. 2000. № 1(12). С. 59 – 68.
9. *Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ РАН, 2003.
10. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.
11. *Губко М.В. Математические модели формирования рациональных организационных иерархий // Автоматика и Телемеханика. 2008. № 9. С. 114–139.
12. *Губко М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур. – М.: ЛЕНАНД, 2006.
13. *Губко М.В., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Классификация моделей анализа и синтеза организационных структур // Управление большими системами. 2004. № 6. С. 5 – 21.
14. *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.
15. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979.
16. Каган М.С. Человеческая деятельность. – М.: Политиздат, 1974.
17. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. – М.: ВЦ АН СССР, 1991.
18. Минцберг Г. Структура в кулаке: создание эффективной организации. – М.: Питер, 2001.
19. Михайлов А.П. Модель коррумпированных властных иерархий // Математическое моделирование. 1999. Т.11. № 1. С. 3 – 17.
20. Мишин С.П. Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах // Автоматика и телемеханика. 2004. № 5. С. 96 – 119.

21. *Мишин С.П. Оптимальные иерархии управления в экономических системах. – М.: ПМСОФТ, 2004.
22. *Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. – М.: Физматлит, 2008.
23. *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: Физматлит, 2007.
24. Овсиевич Б.И. Модели формирования организационных структур. – Л.: Наука, 1979.
25. Beckmann M.J. Some Aspects of Returns to Scale in Business Administration // The Quarterly Journal of Economics. 1960. Vol. 74. №. 3. P. 464 – 471.
26. Beggs A.W. Queues and Hierarchies // The Review of Economic Studies. 2001. Vol. 68. № 2. P. 297 – 322.
27. Bolton P., Dewatripont M. Contract Theory. – Cambridge and London: MIT Press, 2005.
28. Bolton P., Dewatripont M. The Firm as a Communication Network // The Quarterly Journal of Economics. 1994. Vol. 109. № 4. P. 809 – 839.
29. Calvo G.A., Wellisz S. Supervision, Loss of Control and the Optimal Size of the Firm // The Journal of Political Economy. 1978. Vol. 86. № 5. P. 943 – 952.
30. Coase R.H. The Nature of the Firm // Economica, New Series. 1937. Vol. 4. № 16. P. 386 – 405.
31. Cremer J. A Partial Theory of the Optimal Organization of a Bureaucracy // The Bell Journal of Economics. 1980. Vol. 11. № 2. P. 683 – 693.
32. Garicano L. Hierarchies and Organization of Knowledge in Production // The Journal of Political Economy. 2000. Vol. 108. № 5. P. 874 – 904.
33. Garicano L., Hubbard T.N. Hierarchies, Specialization, and the Utilization of Knowledge: Theory and Evidence from the Legal Services Industry. – NBER Working Paper 10432, 2004.
34. Geanakoplos J., Milgrom P. A Theory of Hierarchies Based on Limited Managerial Attention // The Journal of Japanese and International Economies. 1991. Vol. 5(3). P. 205 – 225.
35. Hart O., Moore J. On the Design of Hierarchies: Coordination vs Specialization // The Journal of Political Economy. 2005. Vol. 113. P. 675 – 702.
36. Ioannides Y. Compexity and Organizational Architecture. – Working Paper, Dep. of Economics. Taft Univ., 2003.
37. Kaldor N. The equilibrium of the Firm // The Economic Journal. 1934. Vol. 44. № 173. P. 60 – 76.

38. Keren M., Levhari D. The Internal Organization of the Firm and the Shape of Average Costs // The Bell Journal of Economics. 1983. Vol. 14. № 2. P. 474 – 486.
39. Knight F.H. Risk, Uncertainty and Profit. – Boston: Houghton Mifflin, 1921.
40. Macho-Stadler I., Perez-Castrillo J.D. Centralized and Decentralized Contracts in a Moral Hazard Environment // The Journal of Industrial Economics. 1998. Vol. 46. № 4. P. 489 – 510.
41. Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
42. Maskin E., Qian Y., Xu C. Incentives, Information and Organizational Form // The Review of Economic Studies. 2000. № 67(2). P. 359 – 378.
43. Melumad D.N., Mookherjee D., Reichelstein S. Hierarchical Decentralization of Incentive Contracts // The RAND Journal of Economics. 1995. Vol. 26. № 4. P. 654 – 672.
44. Qian Y. Incentives and Loss of Control in an Optimal Hierarchy // The Review of Econ. Studies. 1994. Vol. 61. № 3. P. 527 – 544.
45. Radner R. Hierarchy: The Economics of Managing // The Journal of Economic Literature. 1992. Vol. 30. № 3. P. 1382 – 1415.
46. Rosen S. Authority, Control, and the Distribution of Earnings // The Bell Journal of Economics. 1982. Vol. 13. № 2. P. 311 – 323.
47. Sah R.K., Stiglitz J.E. The Quality of Managers in Centralized Versus Decentralized Organizations // The Quarterly Journal of Economics. 1991. Vol. 106. № 1. P. 289 – 295.
48. Sah R.K., Stiglitz J.E. Committees, Hierarchies and Polyarchies // The Economic Journal. 1988. Vol. 98. № 391. P. 451 – 470.
49. Sah R.K., Stiglitz J.E. The Architecture of Economic Systems: Hierarchies and Polyarchies // The American Economic Review. 1986. Vol. 76. № 4. P. 716 – 727.
50. Van Zandt T. Efficient Parallel Addition / Unpub. ms. AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1990.
51. Williamson O. Hierarchical Control and Optimal Firm Size // The Journal of Political Economy. 1967. Vol. 75. № 2. P. 123 – 138.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в настоящей работе модели и методы управления организационными системами находят свое применение при решении широкого круга практических задач в самых разных областях. Примерами являются задачи управления:

– предприятиями и корпорациями [4, 6, 9, 11];
– проектами и программами [2, 5, 7, 12];
– образовательными системами [10];
– мультиагентными системами [8];
– организационно-техническими системами [1, 13];
– эколого-экономическими системами [3].

Дальнейшими ориентирами для изучения теории могут служить приведенные ниже темы для самостоятельного изучения.

Литература к заключению

1. *Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. – М.: Наука, 1989.
2. *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997.
3. *Бурков В.Н., Новиков Д.А., Щепкин А.В. Механизмы управления эколого-экономическими системами. – М.: Физматлит, 2008.
4. *Васильева О.Н., Засканов В.В., Иванов Д.Ю. и др. Модели и методы материального стимулирования: теория и практика. – М.: Ленанд, 2007.
5. *Гламаздин Е.С., Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы управления корпоративными программами: информационные системы и математические модели. – М.: Спутник, 2004.
6. *Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы. – М.: КомКнига, 2006.
7. *Матвеев А.А., Новиков Д.А., Цветков А.В. Модели и методы управления портфелями проектов. – М.: ПМСОФТ, 2005.
8. *Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. – М.: Физматлит, 2008.
9. *Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003.
10. *Новиков Д.А. Теория управления образовательными системами. – Москва, 2009.

11. *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: Физматлит, 2007.
12. *Новиков Д.А. Управление проектами: организационные механизмы. – М.: ПМСОФТ, 2007.
13. *Человеческий фактор в управлении / Под ред. Н.А. Абрамовой, Д.А. Новикова. – М.: КомКнига, 2006.

ТЕМЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ[50]

1) Системы и модели.
2) Исследование операций в управлении организационными системами (ОС).
3) Проблема идентификации в моделировании ОС.
4) Моделирование экономических систем.
5) Имитационное моделирование и деловые игры.
6) Комплексное оценивание.
7) Экспертные оценки в принятии решений.
8) Многокритериальное принятие решений.
9) Рефлексия в принятии решений.
10) Организационные механизмы управления проектами.
11) Теория полезности.
12) Теория выбора.
13) Отношения предпочтения.
14) Субъективность в принятии решений.
15) Некооперативные игры.
16) Кооперативные игры.
17) Повторяющиеся игры.
18) Иерархические игры.
19) Рефлексивные игры.
20) Ограниченная рациональность.
21) Нечеткие множества в моделях ОС.
22) Модели коллективного поведения.
23) Модели согласования интересов.
24) Базовые системы стимулирования.
25) Управление составом ОС.
26) Управление структурой ОС (многоуровневые ОС).
27) Институциональное управление ОС.

---

[50] *Приводимые ниже темы для самостоятельного изучения* (*и/или написания курсовых работ или рефератов*) *представляют собой достаточно обширные разделы современной науки управления. Подразумевается, что заинтересованный читатель может в целях расширения своего кругозора получить первоначальное представление о соответствующей проблематике, ознакомившись с литературой, рекомендованной для соответствующих тем в учебном пособии* «*Математические модели организаций*» (*www.mtas.ru*)*, а также с работами, на которые приведены ссылки в этой литературе.*

28) Информационное управление ОС.

29) Управление динамическими ОС.

30) Управление многоэлементными ОС.

31) Управление ОС с распределенным контролем.

32) Управление ОС с неопределенностью.

33) Управление ОС с ограничениями совместной деятельности.

34) Управление ОС с коалиционным поведением участников.

35) Модели управления ОС с недобросовестным поведением участников.

36) Механизмы финансирования.

37) Модели и методы внутрифирменного управления.

38) Устойчивость решений задач управления организационными системами.

39) Модели и методы управления образовательными системами.

40) ОС с сообщением информации (механизмы планирования).

41) Задачи стимулирования и модели предложения труда.

42) Организационные механизмы управления проектами.

43) Общая модель оптимизации иерархических структур.

44) Алгоритмы поиска оптимальных иерархий.

45) Связь между задачами стимулирования и задачами формирования организационной иерархии.

46) Типовые организационные структуры.

47) Многоуровневые организационные иерархии.

48) Команды и организации.

49) Динамика организационных структур.

50) Сетевые и иерархические организационные структуры.

51) Иерархические игры и организационные структуры.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БУРКОВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ

1939 г.р., доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией активных систем Института проблем управления Российской академии наук, профессор МФТИ, действительный член РАЕН, лауреат государственной премии СССР, заслуженный деятель науки РФ. Более 40 лет работает в области управления большими системами. Вице-президент Российской ассоциации по управлению проектами, основатель теории активных систем, один из ведущих специалистов по управлению социально-экономическими системами.

E-mail: vlab17@bk.ru.

КОРГИН НИКОЛАЙ АНДРЕЕВИЧ

1977 г.р., кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института проблем управления Российской академии наук. Область научных интересов: теория управления организационными системами, теория контрактов, задачи построения неманипулируемых механизмов принятия решений.

E-mail: nkorgin@ipu.ru

НОВИКОВ
ДМИТРИЙ
АЛЕКСАНДРОВИЧ

1970 г.р., доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заместитель директора Института проблем управления Российской академии наук, профессор МФТИ.

Автор более 300 научных работ по теории управления системами междисциплинарной природы, в том числе – по системному анализу, теории игр, принятию решений, управлению проектами и механизмам управления организационными системами.

E-mail: novikov@ipu.ru.

Научное издание

Бурков Владимир Николаевич
Коргин Николай Андреевич
Новиков Дмитрий Александрович

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Под редакцией члена-корреспондента РАН Д.А. Новикова

Технический редактор – Н.А. Новоженина