Доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем управления Российской академии наук, профессор Московского физико-технического института. Автор более 250 научных работ по теории управления социально-экономическими системами, в том числе по управлению проектами, теории игр, принятию решений и механизмам управления организационными системами.

Книга посвящена описанию основ математической теории управления организационными системами. Ее цель – показать возможность и целесообразность использования математических моделей для повышения эффективности функционирования организаций (предприятий, учреждений, фирм и т. д.).

Описываются более сорока типовых механизмов – процедур принятия управленческих решений. Их совокупность может рассматриваться как «конструктор», элементы которого позволяют создавать эффективную систему управления организацией.

Книга адресована студентам вузов, аспирантам и специалистам (теоретикам и практикам) в области управления организационными системами.

9 785895 027660

МОСКОВСКИЙ
ПСИХОЛОГО-СОЦИАЛЬНЫЙ
ИНСТИТУТ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ
ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Д. А. Новиков

Д. А. Новиков

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

МОСКОВСКИЙ
ПСИХОЛОГО-СОЦИАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

Д.А. Новиков

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Рекомендовано Редакционно-издательским советом Российской академии образования к использованию в качестве учебно-методического пособия

Москва – 2005

УДК 519
ББК 22.18
Н 73

Н73 **Новиков Д.А.** Теория управления организационными системами. М.: МПСИ, 2005. – 584 с.

Рецензенты: *Кафедра инновационного менеджмента МФТИ*
(*зав. кафедрой – д.т.н., проф. В.А. Ириков*)
д.т.н., проф. В.Н. Бурков
д.ф.-м.н., проф. А.А. Воронин
д.э.н., проф. Р.М. Нижегородцев

Книга посвящена описанию основ математической теории управления организационными системами. Ее цель – показать возможность и целесообразность использования математических моделей для повышения эффективности функционирования организаций (предприятий, учреждений, фирм и т.д.).

Описываются более сорока типовых механизмов – процедур принятия управленческих решений (реализующих функции планирования, организации, стимулирования и контроля): управления составом и структурой организационных систем, институционального, мотивационного и информационного управления. Их совокупность может рассматриваться как «конструктор», элементы которого позволяют создавать эффективную систему управления организацией.

Книга адресована студентам вузов, аспирантам и специалистам (теоретикам и практикам) в области управления организационными системами.

ISBN 5-89502-766-0
ISBN 6-00118-010-7

ВВЕДЕНИЕ

Механизмы управления. Что отличает эффективного менеджера? Хорошее образование? Наверное. Большой опыт? Не обязательно. И образование, и опыт, в основном, относятся к тому, **что** в какой ситуации следует делать. А вот тому, **как** делать, практически не учат в вузе, а обучение на своих или чужих ошибках обходится слишком дорого.

Действительно, множество проблем в управлении организациями (фирмами, предприятиями, учреждениями и т. д.) самого разного масштаба и специализации возникает из-за того, что за грамотной декларацией целей нередко следует набор действий и мероприятий, имеющих к этим целям самое отдаленное отношение. В масштабах государства это проявляется, например, в том, что принимаемые законы не работают, в масштабах предприятия – в том, что распоряжения руководства приводят к результатам, которые прямо противоположны запланированным. Причина в том, что мало принять закон или распоряжение – необходимо предусмотреть механизмы их реализации.

Вот мы и произнесли ключевое для данной книги слово – «механизм». Общее определение *механизма*[1] таково – «система, устройство, определяющее порядок какого-либо вида деятельности». Настоящая работа посвящена

---

[1] Основные термины выделены курсивом. Их определение можно найти в «Глоссарии», вынесенном в Приложение 5.

описанию механизмов управления *организационными системами* (ОС). В «Философском энциклопедическом словаре» приводится следующее определение *организации*: «1) внутренняя упорядоченность, согласованность взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных частей целого, обусловленная его строением; 2) совокупность процессов или действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого; 3) объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил». Совокупность этих процедур и правил называется *механизмом функционирования*.

То есть термин «организация» может использоваться для обозначения свойства, процесса и объекта (рис. В.1). Мы будем использовать последнее определение понятия «организация», то есть понимать под организацией *организационную систему*[2] как объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил. Отметим, что наличие процедур и правил, регламентирующих совместную деятельность членов организации, является определяющим свойством и отличает организацию от группы и коллектива.

---

[2] Понятно, что организационная система обладает определенной организацией (см. первое определение), которую приобретает в процессе организации (см. второе определение).

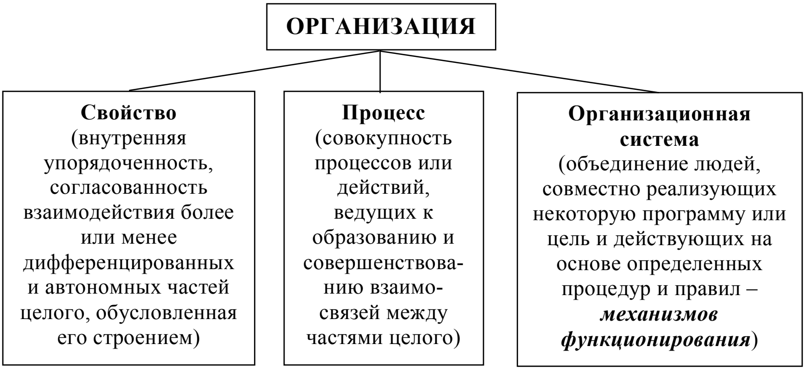


Рис. В.1. *Определение организации*

Применительно к организационным системам *механизм функционирования* – это совокупность правил, законов и процедур, регламентирующих взаимодействие участников организационной системы; ***механизм управления*** – совокупность процедур принятия управленческих решений.

Таким образом, механизмы функционирования и механизмы управления определяют, ***как*** ведут себя члены организации[3] и как они принимают решения.

Для того чтобы управляющий орган – назовем его «*центр*» – выбрал ту или иную процедуру принятия решений (тот или иной механизм управления, то есть зависимость своих *действий* от целей организации и действий управляемых субъектов – назовем их *агентами*), он должен уметь предсказывать поведение агентов – их реакцию на те или иные управляющие воздействия. Экспериментировать в жизни, применяя различные управляющие воздействия и изучая реакцию подчиненных, не эффективно и практически никогда не представляется возмож-

[3] С этой точки зрения механизм управления можно рассматривать как синоним метода управления, так как и тот и другой определяют, как осуществляется управление.

ным. Здесь на помощь приходит *моделирование* – метод исследования, заключающийся в построении и анализе *моделей* – аналогов исследуемых объектов. Имея адекватную модель, можно с ее помощью проанализировать реакции управляемой системы (этап *анализа*), а затем выбрать (на этапе *синтеза*) и использовать на практике то управляющее воздействие, которое приводит к требуемой реакции.

Наличие моделей и механизмов управления привлекательно как с точки зрения управляющего органа – так как позволяет предсказать поведение управляемых субъектов, так и с точки зрения управляемых субъектов – так как делает предсказуемым поведение управляющего органа. То есть снижение неопределенности за счет использования механизмов управления является одним из существенных свойств любой организации как социального института.

Немного истории. С точки зрения истории в конце 1960-х годов XX века, на фоне бурного развития кибернетики, исследования операций, математической теории управления (теории автоматического регулирования – ТАР) и интенсивного внедрения их результатов при создании новых и модернизации существующих технических систем, практически одновременно во многих научных центрах, как в СССР, так и за рубежом, начали предприниматься попытки применения общих подходов теории управления для разработки математических моделей социальных и экономических систем (*теория активных систем* – ТАС [5, 12, 13, 16], *теория иерархических игр* – ТИИ [20, 23, 34], *Mechanism Design* – MD [48, 49, 68] – см. рис. В.2).

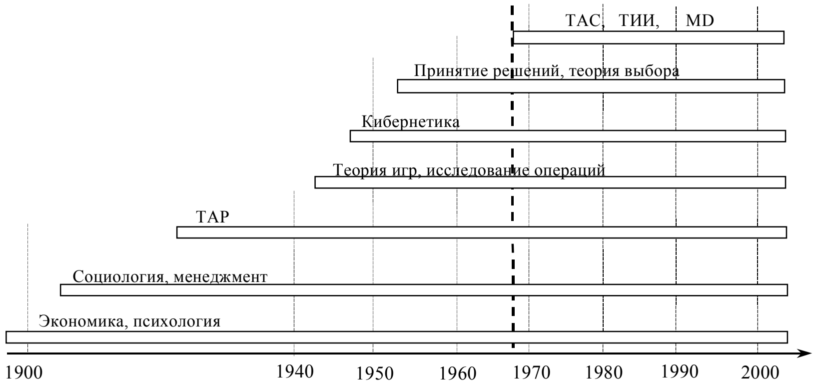


Рис. В.2. *Хронология развития представлений об организационных системах*

На сегодняшний день можно говорить практически о полном слиянии этих научных направлений и появлении нового синтетического направления – ***теории управления организационными системами***. *Объектом исследований* этой теории являются организационные системы, *предметом исследований* – механизмы управления, а основным *методом исследования* – математическое моделирование[4].

Настоящая работа посвящена изложению основных результатов, полученных в теории управления организационными системами по разработке и внедрению математических моделей механизмов управления организационными системами. Приведем систему классификаций этих механизмов.

---

[4] Необходимо отметить, что организации являются объектом исследований во многих науках и научных направлениях (см., например, рис. В.2). Различие между ними заключается в целях исследования (описательных или прогностических, нормативных) и методах исследования (например, в менеджменте механизмы управления изучаются путем наблюдения и систематизации позитивного опыта управления).

Классификация механизмов управления. С точки зрения системного анализа любая система задается перечислением ее *состава, структуры и функций*. С учетом целенаправленности поведения участников ОС, их функции описываются в рамках *моделей принятия решений*[5] (см. ниже). Поэтому *модель организационной системы* определяется заданием [25, 47, 49] (рис. В.3):

– *состава ОС* (участников, входящих в ОС, то есть ее элементов);
– *структуры ОС* (совокупности информационных, управляющих, технологических и других связей между участниками ОС);
– *множеств допустимых стратегий*[6] (ограничений и норм деятельности) участников ОС, отражающих, в том числе, институциональные, технологические и другие ограничения и нормы их совместной деятельности;
– *предпочтений* участников ОС;
– *информированности* – той информации о существенных параметрах, которой обладают участники ОС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях;
– *порядка функционирования* (последовательности получения информации и выбора стратегий участниками ОС).

Состав определяет, «кто» входит в систему, структура – «кто с кем взаимодействует» (с этой точки зрения

---

[5] Любая модель принятия решений включает, как минимум, множество альтернатив, из которого производится выбор в определенный момент времени; предпочтения, которыми руководствуется субъект, осуществляющий выбор; и информацию, которой он обладает.

[6] Термин «стратегия» в теории принятия решений используется либо для обозначения выбора субъекта, либо для обозначения правила, которым руководствуется субъект, осуществляющий выбор.

порядок функционирования тесно связан со структурой системы, так как первый определяет причинно-следственные связи и порядок взаимодействия), допустимые множества – «кто что может», целевые функции – «кто что хочет», информированность – «кто что знает».

Управление ОС, понимаемое как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения, может затрагивать каждый из шести перечисленных параметров ее модели.

Следовательно, **первым основанием** *системы классификаций механизмов управления* ОС (процедур принятия управленческих решений) является *предмет управления* – изменяемый в процессе и результате управления компонент ОС. По этому основанию можно выделить (рис. В.3[7]):

– *управление составом* [28, 43, 47, 53];
– *управление структурой* [19, 50];
– *институциональное управление* (управление ограничениями и нормами деятельности) [42, 53];
– *мотивационное управление* [47, 53] (управление предпочтениями и интересами);
– *информационное управление* (управление информацией, которой обладают участники ОС на момент принятия решений) [55, 57];
– *управление порядком функционирования* (управление последовательностью получения информации и выбора стратегий участниками ОС) [50].

[7] Отметим, что обычно в рамках теоретико-игровых моделей управление порядком функционирования рассматривается как управление структурой, поэтому выделять и рассматривать отдельно этот тип управления мы не будем.

Рис. В.3. *Классификация управлений*

Обсудим кратко специфику различных типов управлений[8].

Управление составом касается того, кто войдет в организацию, кого следует уволить, кого – нанять. Обычно к управлению составом относят и задачи обучения и развития персонала.

Задача *управления структурой* обычно решается параллельно с задачей управления составом и позволяет дать ответ на вопрос – кто какие функции должен выполнять, кто кому должен подчиняться, кто кого контролировать и т. д.

Институциональное управление является наиболее жестким и заключается в том, что центр целенаправленно ограничивает множества возможных действий и результатов деятельности агентов. Такое ограничение может осуществляться явными или неявными воздействиями – пра-

[8] Естественно, на практике иногда трудно выделить в явном виде управление того или иного типа, так как они используются (и должны(!) использоваться) одновременно.

вовыми актами, распоряжениями, приказами и так далее или морально-этическими нормами, корпоративной культурой и т. д.

Мотивационное управление является более «мягким», чем институциональное, и заключается в целенаправленном изменении предпочтений (функции полезности) агентов. Такое изменение может осуществляться введением системы штрафов и/или поощрений за выбор тех или иных действий и/или достижение определенных результатов деятельности.

Наиболее «мягким» (косвенным), по сравнению с институциональным и мотивационным, и в то же время наименее исследованным (с точки зрения формальных моделей) является *информационное управление*. В соответствии с введенной в [55] классификацией частными случаями информационного управления являются: *рефлексивное управление* [57], при котором центр воздействует на представления агента о параметрах других участников ОС; *активный прогноз*, при котором центр сообщает агентам информацию о будущих результатах (осуществляет прогноз) их деятельности [55]; *информационное регулирование* [55], при котором центр сообщает агентам информацию о внешней обстановке, влияя тем самым на их поведение.

Итак, выше классификация управлений строилась на основании тех компонентов управляемой системы (точнее, ее модели), на которые оказывается воздействие при использовании управлений тех или иных типов: состав, структура, допустимые множества, целевые функции и информированность. Понятно, что изменения могут и должны касаться в общем случае всех перечисленных параметров, и поиск оптимального управления заключается в определении наиболее эффективной допустимой комбинации всех параметров ОС.

Тем не менее, традиционно в теории управления социально-экономическими системами рассматривается система вложенных задач управления (решения более «частных» задач используются при решении более «общих»). На сегодняшний день существуют два общих подхода к описанию модели ОС и постановке и решению задач управления – «снизу вверх» и «сверху вниз».

При использовании первого подхода («снизу вверх») сначала решаются частные задачи, а затем общие, использующие полученные решения частных задач. Например, частной задачей может быть разработка системы мотивации. Если она решена для любого состава участников ОС, то можно ставить задачу оптимизации состава – выбора такого состава, эффективность которого (при соответствующей оптимальной мотивации) максимальна. Достоинством такого подхода является его конструктивность, недостатком – высокая сложность, так как число вариантов решения задачи верхнего уровня может быть очень велико, а для каждого такого варианта необходимо решить соответствующий набор частных подзадач.

Бороться с этим недостатком можно, используя второй подход («сверху вниз»), в рамках которого сначала решаются задачи верхнего уровня, а полученные решения используются в качестве ограничений для решения более частных задач. Действительно, вряд ли руководитель крупной организации, создавая новый отдел, будет сначала детально продумывать регламенты взаимодействия сотрудников – скорее он возложит эту задачу на руководителя отдела, обеспечив его соответствующими ресурсами и полномочиями.

Построение эффективной системы управления организацией требует совместного использования обоих подходов как в теории, так и на практике. Некоторые примеры приводятся в настоящей работе.

Продолжим классификацию управлений организационными системами.

Простейшая (*базовая*) *модель* ОС включает одного управляемого субъекта – *агента* – и одного управляющего органа – *центр*, которые принимают решения однократно и в условиях полной информированности.

Расширениями базовой модели являются:

– *динамические ОС* (в которых участники принимают решения многократно – расширение по предмету управления «порядок функционирования»);
– *многоэлементные ОС* (в которых имеется несколько агентов, принимающих решения одновременно и независимо, – расширение по предмету управления «состав»);
– *многоуровневые ОС* (имеющие трех- и более уровневую иерархическую структуру – расширение по предмету управления «структура»);
– *ОС с распределенным контролем* (в которых имеется несколько центров, осуществляющих управление одними и теми же агентами – расширение по предмету управления «структура»);
– *ОС с неопределенностью* (в которых участники не полностью информированы о существенных параметрах – расширение по предмету управления «информированность»);
– *ОС с ограничениями совместной деятельности* (в которых существуют глобальные ограничения на совместный выбор агентами своих действий – расширение по предмету управления «множества допустимых стратегий»);
– *ОС с сообщением информации* (в которых одним из действий агентов является сообщение информации друг другу и/или центру – расширение по

предмету управления «множества допустимых стратегий»).

Таким образом, **вторым основанием** системы классификаций может также служить основание расширения базовой модели – наличие или отсутствие:

– динамики [51];
– множества взаимосвязанных агентов [24, 53];
– многоуровневости [19, 43, 50];
– распределенного контроля [24, 54];
– неопределенности [48, 49];
– ограничений совместной деятельности [42, 53];
– сообщения информации [31, 49, 61].

Третьим основанием системы классификаций является *метод моделирования*. По этому основанию можно выделить механизмы управления, основывающиеся на *оптимизационных*[9] [11, 17] и *теоретико-игровых моделях* [25].

Механизмы, основывающиеся на оптимизационных моделях, в свою очередь подразделяются на механизмы, использующие аппарат: *теории вероятностей* (в том числе теория надежности, теория массового обслуживания, теория статистических решений), *теории оптимизации* – линейное и нелинейное (а также стохастическое, целочисленное динамическое и др.) программирование, *дифференциальных уравнений*, *оптимального управления*; *дискретной математики* – в основном теория графов (транспортная задача, задача о назначении, выбор кратчайшего пути, календарно-

[9] Суть оптимизационных моделей заключается в поиске оптимальных значений изменяемых параметров системы (то есть допустимых значений, наилучших с точки зрения заданного критерия). В теоретико-игровых моделях часть этих значений выбирают участники системы, обладающие собственными интересами, поэтому задача управления заключается в нахождении таких правил игры, в рамках которых управляемые субъекты выбирали бы требуемые значения.

сетевое планирование и управление, задачи о размещении, распределение ресурсов на сетях и т. д.).

Механизмы, основывающиеся на теоретико-игровых моделях в свою очередь подразделяются на механизмы, использующие аппарат: *некооперативных игр* [25, 47, 61], *кооперативных игр* [24], *повторяющихся игр* [51], *иерархических игр* [25, 49, 50] и *рефлексивных игр* [55, 57] (см. также Приложение 1).

Четвертым основанием системы классификации механизмов управления ОС являются *функции управления*, реализацию которых призван обеспечить тот или иной механизм.

В *процессном управлении*[10] выделяют следующие основные функции: *планирование*, *организация* (как процесс – см. три определения термина «организация», приведенные выше), *мотивация* (стимулирование) и *контроль*.

В *проектном управлении* [14, 64] выделяют следующие фазы жизненного цикла проекта:

– *начальная фаза* (концепция): сбор исходных данных и анализ существующего состояния; определение целей задач, критериев, требований и ограничений (внешних и внутренних) проекта, экспертиза основных положений, утверждение концепции проекта;
– *фаза разработки*: формирование команды, развитие концепции и основного содержания проекта, структурное планирование, организация и проведение торгов, заключение договоров и субдогово-

[10] Различают процессное управление – управление регулярной, повторяющейся деятельностью, и управление проектами – управление изменениями (проектом называется ограниченное во времени целенаправленное изменение отдельной системы с установленными требованиями к качеству результатов, возможными рамками расхода средств и ресурсов и специфической организацией).

ров с основными исполнителями, представление проектной разработки и получение ее одобрения;

– *фаза реализации* проекта: ввод в действие разработанной на предыдущих фазах системы управления проектами, организация выполнения работ, ввод в действие системы мотивации и стимулирования исполнителей, оперативное планирование, управление материально-техническим обеспечением, оперативное управление;
– *завершающая фаза*: планирование процесса завершения проекта, проверка и испытание результатов реализации проекта, подготовка персонала для эксплуатации результатов реализации проекта, их сдача заказчику, реализация оставшихся ресурсов, оценка результатов и подведение итогов, расформирование команды проекта.

В соответствии с этими фазами можно считать основными функции планирования, организации, стимулирования и контроля.

Наконец, в психологии принято выделение следующих процессуальных компонентов любой деятельности: *мотив, цель, способ* (*технология* деятельности – ее содержание, формы, методы и средства), *результат* [14, 48]. Им также можно поставить в соответствие (в зависимости от компонентов деятельности, являющихся предметом управления) четыре основные функции управления (табл. В.1[11]).

Следовательно, по четвертому основанию системы классификаций (функции управления) можно выделить *механизмы планирования*, *механизмы организации*, *механизмы стимулирования* и *механизмы контроля*.

[11] Еще раз подчеркнем, что приведенные в последней строке таблицы В.1 компоненты являются общими для любой деятельности, в том числе для процессной и проектной деятельности.

Таблица В.1

Виды и компоненты управления

Виды управления	Компоненты управления			
Процессное управление (функции)	планирование	организация	стимулирование	контроль
Проектное управление (фазы проекта)	концепция	разработка	реализация	завершение
Управление деятельностью	управление целями	управление технологией	управление мотивами	управление результатами

Пятым основанием являются *задачи управления*, решение которых призван обеспечить тот или иной механизм управления ОС. В качестве значений признаков классификации целесообразно предложить выделенные в теории управления (хорошо исследованные как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения эффективности практического использования) механизмы [16], уже ставшие своего рода «ключевыми словами» (табл. В.2). Эти механизмы управления относятся в основном к мотивационному управлению и подробно рассматриваются в главах 2–5.

Таблица В.2

Функции и механизмы мотивационного управления

Функции управления	Механизмы мотивационного управления
Планирование	механизмы распределения ресурса механизмы активной экспертизы механизмы внутренних цен конкурсные механизмы механизмы обмена

Функции управления	Механизмы мотивационного управления
Организация (как процесс)	механизмы смешанного финансирования противозатратные механизмы механизмы «затраты – эффект» механизмы самоокупаемости механизмы страхования механизмы оптимизации производственного цикла механизмы назначения
Стимулирование	механизмы стимулирования за индивидуальные результаты механизмы стимулирования за результаты коллективной деятельности механизмы унифицированного стимулирования механизмы «бригадной» оплаты труда механизмы стимулирования в матричных структурах управления
Контроль	механизмы комплексного оценивания механизмы согласия многоканальные механизмы механизмы дополнительных соглашений

Отметим, что классификация, приведенная в таблице В.2, является достаточно условной, так как, с одной стороны, значениями признаков классификации являются подробно исследованные классы механизмов управления, а с другой стороны, один и тот же класс механизмов может использоваться для реализации нескольких различных функций управления.

Шестым основанием системы классификаций механизмов управления ОС служит масштаб реальных систем, для использования в которых в основном предназначен тот или иной механизм [16] (страна – регион – предприятие –

структурное подразделение предприятия – первичный коллектив – индивидуум).

Седьмым основанием является отраслевая специфика (государственное управление, муниципальное управление, промышленность, строительство, сфера услуг и т. д.).

Отметим, что, с одной стороны, предложенные основания и значения признаков системы классификаций:

– предмет управления;
– основание расширения базовой модели;
– метод моделирования;
– функция управления;
– задача управления;
– масштаб реальных систем;
– отраслевая специфика,

позволяют единообразно описывать как конкретные механизмы управления, так и их совокупности – комплексы механизмов управления. С другой стороны, необходимо подчеркнуть, что каждый конкретный механизм не всегда может быть однозначно отнесен к тому или иному классу – во многих случаях одни и те же механизмы могут решать различные задачи управления, использоваться в различных прикладных областях и т. д.

Перечислим еще раз основания и значения признаков системы классификаций по всем семи основаниям.

1. Предмет управления:

1.1. Состав ОС (управление составом);
1.2. Структура ОС (управление структурой);
1.3. Ограничения и нормы деятельности (институциональное управление);
1.4. Предпочтения (мотивационное управление);
1.5. Информированность (информационное управление).

2. Основания расширения базовой модели:

2.1. Число агентов и центров (многоэлементные ОС);

2.2. Структура (многоуровневые ОС, ОС с распределенным контролем);
2.3. Ограничения (ОС с ограничениями совместной деятельности) и нормы деятельности;
2.4. Целевые функции (ОС с сообщением информации);
2.5. Число периодов функционирования (динамические ОС);
2.6. Информированность (ОС с неопределенностью).

3. Метод моделирования:

3.1. Теоретико-игровые модели:
  3.1.1. Некооперативные игры;
  3.1.2. Кооперативные игры;
  3.1.3. Повторяющиеся игры;
  3.1.4. Иерархические игры;
  3.1.5. Рефлексивные игры;

3.2. Оптимизационные модели:
  3.2.1. Теория вероятностей (теория надежности, теория массового обслуживания, теория статистических решений);
  3.2.2. Теория оптимизации (линейное и нелинейное, стохастическое, целочисленное, динамическое и другое программирование, многокритериальная оптимизация);
  3.2.3. Дифференциальные уравнения и оптимальное управление;
  3.2.4. Дискретная математика (теория графов, теория расписаний и т. д.).

4. Функция управления:

4.1. Планирование;
4.2. Организация;
4.3. Стимулирование;
4.4. Контроль.

5. Задача управления (см. табл. В.2).

6. Масштаб реальных систем:

6.1. Государство;

6.2. Регион;

6.3. Предприятие;

6.4. Структурное подразделение;

6.5. Первичный коллектив;

6.6. Индивидуум.

7. Отраслевая специфика:

7.1. Государственное управление;

7.2. Муниципальное управление;

7.3. Промышленность;

7.4. Строительство;

7.5. Транспорт и связь;

7.6. Наука и образование;

7.7. Сфера услуг и т. д.

Структура изложения. Введенная система классификаций обусловила структуру изложения материала настоящей работы. В первой главе в общем виде формулируется задача управления. Дальнейшее разбиение соответствует типам управления. Так, главы 2–5 посвящены наиболее полно исследованному на сегодняшний день мотивационному управлению (разбиение на главы 2–5 соответствует функциям управления: стимулирование, планирование, организация и контроль, то есть во второй главе рассматриваются механизмы стимулирования, в третьей – механизмы планирования, в четвертой – механизмы организации и, наконец, в пятой – механизмы контроля). Шестая глава посвящена механизмам управления составом ОС, седьмая – механизмам управления структурой ОС, восьмая – механизмам информационного управления, девятая – механизмам институционального управления (рис. В.4).

Совокупность описываемых ниже типовых механизмов управления является «конструктором», на основании которого можно строить разнообразные механизмы, обеспечивающие решение конкретных задач управления организационными системами.

Краткий обзор областей и опыта внедрения механизмов управления организационными системами на практике, а также обсуждение перспектив дальнейших исследований приведены в заключении.

Список литературы включает основные работы по математическим моделям управления организационными системами. Более полную информацию по теории и практике управления ОС (в том числе, полные тексты многих упоминаемых работ) можно найти на сайте теории управления организационными системами www.mtas.ru.

В приложения вынесены, во-первых, необходимые для прочтения книги сведения из теории игр (Приложение 1), теории графов (Приложение 2), теории принятия решений (Приложение 3) и теории нечетких множеств (Приложение 4) и, во-вторых, словарь основных используемых терминов (Приложение 5).

Схематически структура книги представлена на рисунке В.4.

Методические рекомендации. Прежде чем переходить к изложению основного материала работы, обсудим опыт преподавания теории управления организационными системами в высших учебных заведениях. С методической точки зрения рациональными представляются следующие состав и структура учебных курсов[12] (рис. В.5).

1. Прикладная математика (теория игр [25] (см. также Приложение 1), теория графов [11] (см. также Приложение 2), теория принятия решений [23, 38, 59, 62] (см. также Приложения 3 и 4) – вводные курсы (каждый по одному семестру), дающие необходимый математический аппарат.

---

[12] Предполагается знание студентами математики в объеме двух лет обучения в техническом, экономическом или психологическом вузе.

2. Теория управления организационными системами (два семестра) – курс, содержащий базовые модели и механизмы управления ОС (см. [13, 49], а также «упрощенную версию» [52]).

3. Дополнительные курсы (по одному семестру каждый), которые либо демонстрируют применение теории в различных прикладных областях (управление проектами [14], внутрифирменное управление [67] и т. д.), либо посвящены изучению тех или иных классов теоретических моделей (кооперативные модели [24, 38], управление структурой ОС [19, 50], механизмы планирования [61], информационное управление и т. д. [56, 57]).

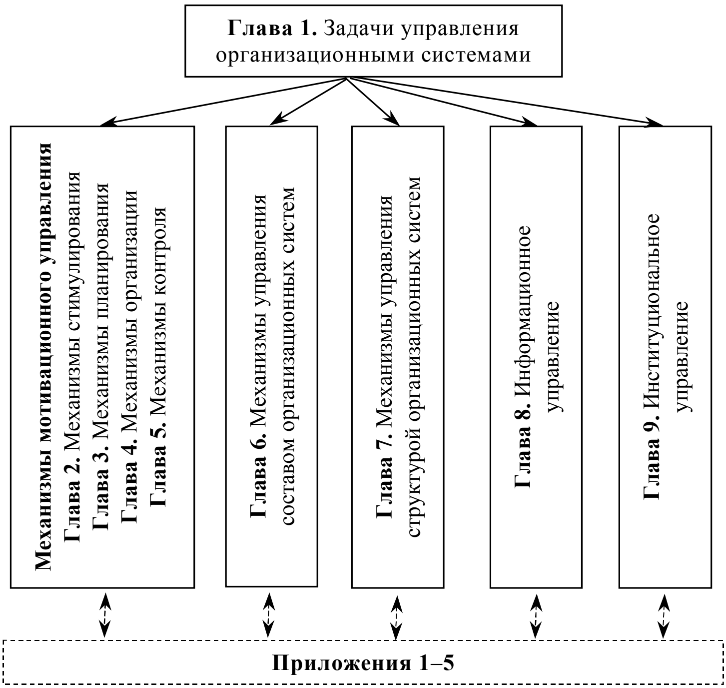


Рис. В.4. *Структура книги*[13]

[13] Главы со второй по девятую можно читать независимо.

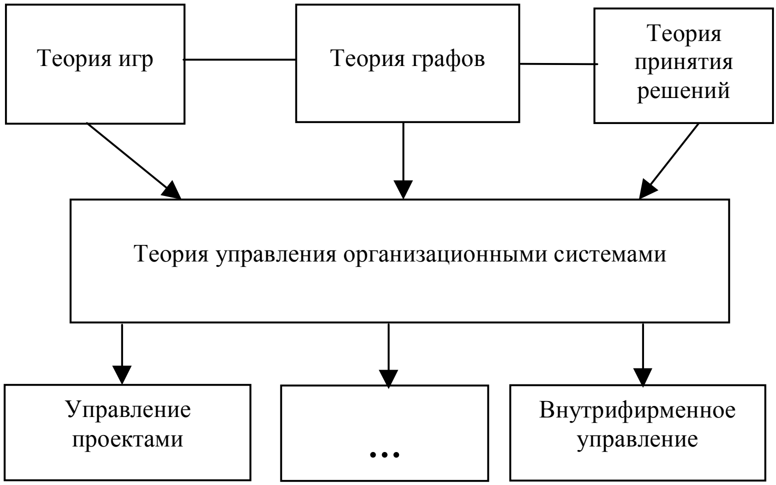


Рис. В.5. *Структура учебных курсов*

Выше перечислен «максимальный» состав учебных курсов. Его ядром является курс теории управления организационными системами. Состав других курсов может варьироваться в зависимости от специализации факультетов и кафедр. «Максимальное» содержание курсов отражено в указанных выше учебных пособиях, «минимальное» содержание соответствует следующим разделам настоящей книги: 1.1, 1.2, 2.1, 2.3, 3.2–3.5, приложениям 1 и 3.

Учебные программы, а также задачи и упражнения по перечисленным курсам можно найти на сайте www.mtas.ru.

Глава 1

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Как отмечалось во введении, для построения эффективных механизмов управления необходимо иметь модель управляемой системы для того, чтобы исследовать ее реакцию на те или иные управляющие воздействия. Так как элементами организационной системы являются люди, их группы, коллективы и так далее, а люди отличаются способностью самостоятельно принимать решения, то в первую очередь следует описать модель принятия решений. Поэтому структура изложения материала настоящей главы следующая: в разделе 1.1 приведены модели принятия решений, которые позволяют в разделе 1.2 сформулировать в общем виде задачу управления организационной системой. Раздел 1.3 посвящен описанию технологии управления ОС, то есть основным этапам постановки и решения задач анализа и синтеза оптимальных механизмов управления, а также их внедрения в практику. Заключительный раздел настоящей главы (раздел 1.4) посвящен обсуждению общих подходов к решению теоретических задач управления ОС.

1.1. Модели принятия решений

Рассмотрим простейшую *организационную систему*, состоящую из двух участников – *центра* и *агента*, обладающих свойством *активности*, то есть способностью к целенаправленному поведению в соответствии с собственными предпочтениями и способностью самостоятельно предпринимать некоторые действия. Следуя подходам теории иерархических игр [20, 25, 30, 34] и теории активных систем [5, 16, 25, 47, 49], центром будем называть игрока, делающего ход первым (то есть *метаигрока*, обладающего правом устанавливать правила игры для других игроков), а агентом – игрока, делающего ход вторым при известном ему выборе первого игрока. В моделях управления социально-экономическими системами центр играет роль управляющего органа, агент – роль управляемого субъекта, причем первоначально распределение «ролей» может быть не фиксированным (см. модели сетевого взаимодействия в [50]).

Опишем модель принятия решений агентом. Для того чтобы определить, как задаются предпочтения агента (и центра), введем следующее описание взаимодействия агента с его *обстановкой*, в которую могут входить другие агенты, управляющие органы и прочие объекты и субъекты (как принадлежащие рассматриваемой ОС, так и являющиеся элементами внешней среды – четкое выделение границ ОС пока не принципиально – см. ниже).

Пусть агент способен выбирать *действия* (стратегии, состояния и т. д.) из множества A допустимых действий данного агента. Действие будем обозначать y ($y \in A$). В результате выбора действия $y \in A$ под влиянием обстановки реализуется результат деятельности агента, который будем обозначать $z \in A_0$, где A_0 – множество допустимых результатов деятельности. Возможное несовпадение действия агента и результата его деятельности может быть обусловлено влиянием обстановки – внешней среды, действий других участников ОС и т. д. Связь между действием агента $y \in A$ и результатом $z \in A_0$ его деятельности может иметь сложную природу и описываться распределениями вероятности, нечеткими информационными функциями и др. (см. ниже).

Будем считать, что агент обладает *предпочтениями* на множестве результатов $z \in A_0$, то есть имеет возможность сравнивать различные результаты деятельности. Предпочтения агента обозначим R_{A_0}, множество возможных предпочтений – $\Re_{A_0}$.

Часто предпочтения из множества $\Re_{A_0}$ можно параметризовать переменной r, принимающей значения из подмножества Ω действительной оси, $\Omega \subseteq \Re^1$. То есть каждому возможному предпочтению агента $R_{A_0} \in \Re_{A_0}$ ставится во взаимно однозначное соответствие значение параметра $r \in \Omega$, называемого *типом* агента. Содержательно тип агента во многих прикладных задачах интерпретируется либо как эффективность его деятельности, либо как оптимальное для данного агента количество ресурса (план, назначаемый центром).

При выборе действия $y \in A$ агент руководствуется своими предпочтениями и тем, как выбираемое действие влияет на результат деятельности $z \in A_0$, то есть некоторым законом $W_I(\cdot)$ изменения результата деятельности в зависимости от действия и обстановки, информация о которой отражена переменной I. Выбор действия агентом определяется *правилом индивидуального рационального выбора* $P^{W_I}(\Re_{A_0}, A, I) \subseteq A$, которое выделяет множество наиболее предпочтительных, с точки зрения агента, действий.

Правило индивидуального рационального выбора определим следующим образом. Примем две гипотезы [25, 49]:

1) *гипотезу рационального поведения*, заключающуюся в том, что агент с учетом всей имеющейся у него ин-

формации выбирает действия, которые приводят к наиболее предпочтительным результатам деятельности;

2) *гипотезу детерминизма*, заключающуюся в том, что агент стремится устранить (с учетом всей имеющейся у него информации) существующую неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности (другими словами, окончательный критерий, которым руководствуется *лицо, принимающее решения* (ЛПР), не должен содержать неопределенных параметров).

Пояснений требуют два понятия – «использование всей имеющейся информации» и «наиболее предпочтительные результаты деятельности».

Начнем со второго понятия. Существуют несколько способов задания индивидуальных предпочтений. Наиболее распространены два из них: *отношения предпочтения* и *функции полезности* (см. Приложение 3). Бинарное отношение определяет для пары альтернатив, какая из них является «лучше»; функция полезности ставит в соответствие каждой альтернативе действительное число – *полезность* этой альтернативы. В соответствии с гипотезой рационального поведения агент выбирает альтернативу из множества «лучших» альтернатив. В случае функций полезности это множество является множеством альтернатив, на которых достигается максимум функции полезности.

Итак, речь идет о «наилучшей» альтернативе. Но, если предпочтения агента определены на множестве результатов деятельности, зависящих, помимо его действий, от обстановки, то в общем случае не существует однозначной связи между действием агента и результатом его деятельности. Поэтому, принимая решение о выбираемом действии, агент должен предсказывать, к каким результатам могут привести те или иные действия (здесь существенна та информация, которую он имеет относительно обстановки), и анализировать предпочтительность соответствующих результатов деятельности.

Процесс перехода от предпочтений R_{A_0} на множестве A_0 к *индуцированным предпочтениям*[14] R_A на множестве A, основывающийся на законе $W_I(\cdot)$, называется *устранением неопределенности*. В случае, когда предпочтения агента исходно описываются функцией полезности, его индуцированные предпочтения будут описываться *целевой функцией*, которая каждому действию агента ставит в соответствие некоторое действительное число (которое может интерпретироваться как его «выигрыш» от выбора этого действия).

При рассмотрении математических моделей принятия решений будем, следуя [25], различать (основание классификации – объекты и субъекты, относительно которых имеется недостаточная информация) *объективную неопределенность* (неполная информированность относительно параметров обстановки) и *субъективную неопределенность* (неполную информированность о принципах поведения других субъектов). Неопределенность относительно параметров, описывающих участников ОС, называется *внутренней неопределенностью*, относительно внешних параметров – *внешней неопределенностью*. Внешняя объективная неопределенность называется *неопределенностью природы* (или *неопределенностью состояния природы*), внутренняя субъективная неопределенность[15] называется *игровой неопределенностью*.

---

[14] Термин «индуцированные предпочтения» обусловлен тем, что предпочтения на множестве действий порождаются (индуцируются) предпочтениями на множестве результатов деятельности и законом взаимосвязи между действиями и результатами.

[15] Внешняя субъективная неопределенность, как правило, не рассматривается, так как она может быть исключена путем включения субъектов, о принципах поведения которых у ЛПР имеется неполная информированность, в ОС.

Ниже будет использоваться следующая модель предпочтений и информированности агента. Пусть предпочтения агента на множестве возможных результатов деятельности заданы его функцией полезности $v(\cdot)$, а результат деятельности $z \in A_0$ зависит от действия $y \in A$ и обстановки $\theta \in \Theta$ известным образом[16]: $z = w(y, \theta)$. Тогда закон $W_I(\cdot)$ определяется функцией[17] $w(\cdot)$, отражающей структуру пассивного *управляемого объекта*, и той информацией I, которой обладает агент на момент принятия решений о выбираемом действии. Структура модели принятия решений агентом изображена на рисунке 1.1.

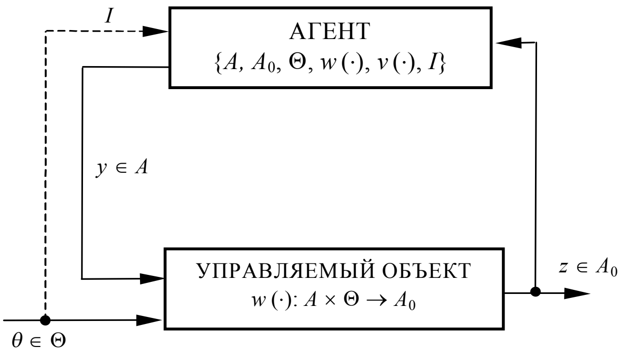


Рис. 1.1. *Структура модели принятия решений агентом*

Отметим, что приведенная на рисунке 1.1 так называемая входо-выходная структура является типичной для

[16] Использование такого описания не снижает общности, так как в многоэлементных системах партнеры каждого агента могут рассматриваться как внешняя для него среда и их стратегии будут образовывать «состояние природы» (которое, правда, будет для каждого из агентов свое) – см. описание игровой неопределенности в Приложении 1.

[17] Отображение, связывающее действия и обстановку с результатами деятельности, может рассматриваться как «технология» функционирования некоторого объекта, управление которым осуществляет агент (рис. 1.1).

классической теории управления, изучающей задачи управления пассивными (техническими) системами. В этом классе задач во многих случаях (исключая модели человеко-машинных систем) субъект управления (орган, осуществляющий управление) также является пассивным.

Детализируем, что понимается под информацией и каким образом устраняется неопределенность того или иного типа.

Рассмотрим сначала объективную неопределенность (внешнюю или внутреннюю). В этом случае существенной для агента является информация относительно обстановки. В качестве такой информации (различных *видов неопределенности*) могут выступать[18]:

– множество возможных значений обстановки $\Theta' \subseteq \Theta$. Соответствующая неопределенность называется *интервальной неопределенностью* и устраняется использованием *максимального гарантированного результата* (МГР): $f(y) = \min_{\theta \in \Theta'} v(w(y,\theta))$, *гипотезы благожелательности* (ГБ): $f(y) = \max_{u \in \Theta'} v(w(y,\theta))$, их комбинаций и т. д.;

– распределение вероятностей $p(\theta)$ на множестве $\Theta' \subseteq \Theta$. Соответствующая неопределенность называется *вероятностной неопределенностью* и устраняется использованием математического ожидания: $f(y) = \int_{\theta \in \Theta'} v(w(y,\theta))p(\theta)d\theta$ и, быть может, учетом риска (дисперсии) и моментов более высоких порядков;

– функция принадлежности $\mu_{\Theta'}(\theta)$ нечеткого множества $\Theta' \subseteq \Theta$. Соответствующая неопределен-

---

[18] Всюду, где встречаются максимумы и минимумы, предполагается, что они достигаются.

ность называется *нечеткой неопределенностью* и обычно устраняется выделением множества максимально недоминируемых действий (см. Приложение 4).

«Предельным» для всех перечисленных выше типов и видов неопределенности является случай *детерминированного* изменения результата деятельности – когда он не зависит от обстановки (или, что то же самое, когда множество Θ' состоит из единственного элемента), то есть когда каждому действию $y \in A$ соответствует единственный результат деятельности $z = w(y) \in A_0$. При этом можно сразу считать, что предпочтения агента заданы на множестве его действий. Если $v(\cdot)$ – функция полезности агента, то его целевая функция $f(\cdot)$ в детерминированном случае определяется как $f(y) = v(w(y))$.

Правило индивидуального рационального выбора в детерминированном случае заключается в выборе агентом действий, доставляющих максимум его целевой функции, то есть

$$P^{W_I}(\Re_{A_0}, A, I) = Arg \max_{y \in A} f(y).$$

Таким образом, гипотеза детерминизма проявляется в том, что агент, устраняя неопределенность (то есть используя МГР, математическое ожидание, отношение недоминирования, предположения о поведении других агентов и так далее – в зависимости от типа и вида неопределенности), переходит от предпочтений, зависящих от неопределенных факторов, к предпочтениям, зависящим от его собственных действий, – к индуцированным предпочтениям. Гипотеза рационального поведения проявляется в том, что агент выбирает действия, наилучшие с точки зрения его индуцированных предпочтений (стремится выбором действия максимизировать свою целевую функцию, в качестве которой может выступать гарантированная полезность, ожидаемая полезность и т. д. – см. выше).

До сих пор мы рассматривали индивидуальное принятие решений. Проанализируем теперь игровую (внутреннюю субъективную) неопределенность, в рамках которой существенными являются предположения агента о множестве возможных значений обстановки (действий других агентов, выбираемых ими в рамках тех или иных неточно известных рассматриваемому агенту принципов поведения).

Для описания коллективного поведения агентов, входящих в некоторую *многоэлементную ОС* (включающую центр и нескольких агентов), недостаточно определить их предпочтения и соответствия рационального индивидуального выбора по отдельности, так как следует описать модель их совместного поведения. Как отмечалось выше, в случае, когда в системе имеется единственный агент, гипотеза его рационального (индивидуального) поведения предполагает, что агент ведет себя таким образом, чтобы выбором действия максимизировать значение своей целевой функции. Если агентов несколько, необходимо учитывать их взаимное влияние. В этом случае возникает *игра* – взаимодействие игроков (участников некоторой системы), в котором полезность каждого игрока зависит как от его собственного действия (стратегии), так и от действий других игроков. Если, в силу гипотезы рационального поведения, каждый из игроков стремится выбором стратегии максимизировать свою целевую функцию, то понятно, что в случае нескольких игроков рациональная стратегия каждого из них зависит от стратегий других игроков. Набор таких рациональных стратегий, то есть устойчивых и прогнозируемых исходов игры, называется *решением игры* (*равновесием*). В теории игр на сегодняшний день не существует единого понятия равновесия. Введение различных предположений о рациональном поведении игроков порождает различные концепции равновесия (см. Приложение 1), причем в одной и той же игре равновесия одного типа могут существовать, а другого – нет.

Каждому из n игроков (агентов) поставим в соответствие функцию выигрыша $v_i(y)$, где $y = (y_1, ..., y_n) \in A' = \prod_{i \in N} A_i$ – *вектор действий* всех игроков, $N = \{1, 2, ..., n\}$ – *множество игроков*. Следуя сложившейся терминологии теории игр, будем называть действия y_i стратегиями, а вектор y – *ситуацией игры*. Совокупность стратегий $y_{-i} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$ называется *обстановкой игры* для i-го игрока.

Таким образом, рациональному коллективному поведению соответствует выбор игроками равновесных стратегий (тип равновесия должен оговариваться в каждом конкретном случае). Отметим, что любые концепции равновесия должны быть согласованы (при $n = 1$) с введенными выше принципами индивидуального рационального выбора.

Более того, в теоретико-игровых моделях можно считать, что обстановка игры определяет состояние природы для рассматриваемого игрока (агента), то есть $\theta_i = y_{-i}$, $i \in N$, а результат деятельности будет один для всех игроков – ситуация игры, то есть $z_i = y$, $i \in N$. Информация игрока и те предположения, которые он использует, о поведении других игроков, отражают его принцип устранения неопределенности. Совокупность принципов устранения неопределенности, используемых игроками, порождает тип равновесия игры (принципу максимального гарантированного результата соответствует максиминное равновесие, принципу усреднения – равновесие Байеса, предположению о фиксированной обстановке – равновесие Нэша и т. д. – см. Приложение 1) – устойчивой в том или ином (оговариваемом в каждом конкретном случае) смысле совокупности действий участников системы.

Другими словами, субъективная (игровая) неопределенность, как правило, устраняется введением тех или иных предположений о принципах поведения участников системы, позволяющих однозначно доопределить выбираемые ими стратегии. То есть устранение субъективной неопределенности производится в два этапа: на первом этапе определяется концепция равновесия, на втором этапе определяется принцип выбора игроками конкретных равновесных стратегий в случае, если последних несколько – гипотеза благожелательности, принцип гарантированного результата и т. д. [25, 49].

Описав модели принятия индивидуальных решений (см. также модели принятия коллективных решений в Приложении 1), перейдем к постановке задачи управления.

1.2. Общая задача управления

Перейдем к формальной постановке задачи управления некоторой (пассивной или активной) системой.

Так как управление всегда целенаправленно, то обсудим, что следует понимать под требуемым поведением управляемой системы, и в первую очередь «требуемым» – с чьей точки зрения.

Исследователь операций, занимающийся построением и анализом модели, как правило, находится на позициях оперирующей (управляющей) стороны, то есть центра [20]. Следовательно, необходимо описать предпочтения центра и рассмотреть модель принятия им решений по выбору управлений фиксированным агентом[19].

---

[19] Понятно, что если рассматривается взаимодействие фиксированных центра и агента, то имеет смысл говорить о задачах только институционального, мотивационного и информационного управления, а задачи управления составом и структурой оказываются вне рассмотрения (см. ссылки во введении).

Будем считать, что зависимость $w(\cdot)$ результата деятельности от действия и обстановки известна всем участникам ОС и не может быть изменена. Содержательно это предположение соответствует фиксированной технологии деятельности агента (или фиксированной технологии функционирования управляемого агентом объекта) и не является критическим, так как практически любое изменение связи между действием и результатом может быть отражено зависимостью этой связи от обстановки. Кроме того, изменение «технологии» $w(\cdot)$ функционирования управляемого агентом объекта является задачей классической теории управления (управления пассивными – техническими – системами).

Без ограничения общности можно также считать, что множество обстановок Θ известно всем участникам ОС и фиксировано (для выполнения такого предположения всегда можно выбрать это множество достаточно широким, ограничивая в каждом конкретном случае возможные значения обстановок имеющейся у агента информацией).

Модель принятия решений центром в целом аналогична[20] рассмотренной выше модели принятия решений агентом и описывается кортежем[21] $\Psi_0 = \{U_A, U_v, U_I, A_0, \Theta, w(\cdot), v_0(\cdot), I_0\}$. Поясним элементы модели (рис. 1.2).

[20] Нижний индекс «$_0$» в настоящей главе обозначает переменные, выбираемые центром. Использование обозначения A_0 для множества результатов деятельности агента следует признать неудачным, но сложившимся исторически.

[21] В силу единообразия описания моделей принятия решений в сложных (многоуровневых иерархических) системах центр может рассматриваться как субъект, управляемый центром более высокого уровня, а агент – как центр, управляющий агентом более низкого уровня (ср. рис. 1.1 и 1.2).

«Действиями» центра (выбираемыми им стратегиями) являются управления[22] $u_A \in U_A$, $u_v \in U_v$, $u_I \in U_I$. Обозначим $u = (u_A, u_v, u_I) \in U = U_A \times U_v \times U_I$ – вектор управлений.

В большинстве моделей управления организационными системами считается, что единственная роль центра заключается в осуществлении управления, то есть у него отсутствует собственный (не опосредованный агентом) результат деятельности, поэтому результатом деятельности центра обычно считают результат деятельности агента.

Таким образом, структура системы управления агентом имеет вид, приведенный на рисунке 1.2 (ср. со структурой модели принятия решений агентом, приведенной на рис. 1.1).

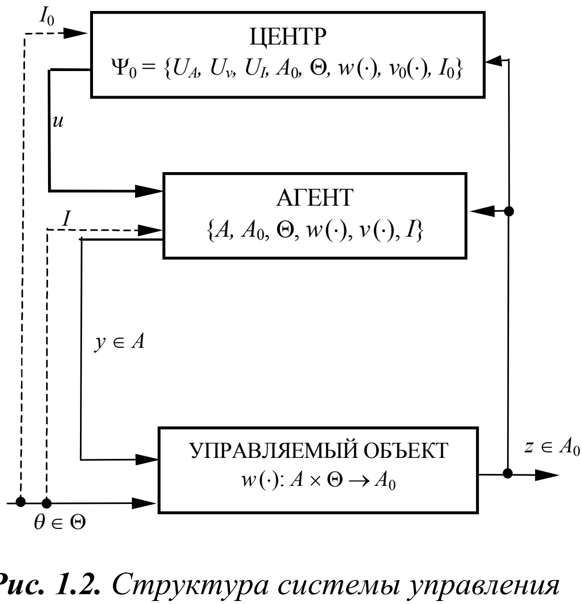


Рис. 1.2. *Структура системы управления*

[22] Индексы соответствуют предметам управления: индекс «A» относится к институциональному управлению, «v» – к мотивационному, «I» – к информационному.

Так как предпочтения центра $v_0(\cdot)$ определены, в том числе, на множестве A_0 возможных результатов деятельности агента, а последние зависят от действий агента и обстановки[23], то качественно управление заключается в побуждении центром агента к выбору определенных действий. Обсудим, какие действия следует центру побуждать выбирать агента.

Предпочтения центра $v_0(\cdot)$, определенные на множестве $U \times A_0$, с учетом имеющейся у него информации I_0 индуцируют (устранение неопределенности центром производится по той же схеме, которая описана выше для агента) на множестве $U \times A$ предпочтения (целевую функцию центра) $f_0(\cdot)$.

Рациональный выбор $P(\cdot)$ агента (см. выше) зависит от управляющих воздействий $u(\cdot) \in U$, используемых центром, то есть *множество рационального выбора* агента есть

$$P(u) = P^{W_I}\,(\Re_{A_0(u_A)}(u_v), A(u_A), I(u_I)) \subseteq A.$$

Итак, центр может предсказать, что если он использует некоторое управление $u \in U$, то агент выбирает одно из действий из множества $P(u) \subseteq A$. Если это множество содержит более одного элемента, то у центра остается неопределенность относительно выбора агента, которая может устраняться одним из описанных выше методов.

[23] Обстановка центра (и та информация об обстановке, которой обладает центр), естественно, может отличаться от обстановки агента. Более того, вне рассматриваемой модели управления (но легко вписываемой в нее) остается неполная информированность центра об агенте (например, о его типе, правилах устранения неопределенности и принятия решений и т. д.). Неполная информированность центра о типе агента учитывается в механизмах управления с сообщением информации, которые полностью укладываются в рассматриваемую модель управления – см. третью главу настоящей работы. Неполная информированность центра о принципах принятия решений агентом на сегодняшний день практически не исследована.

Можно использовать *гипотезу благожелательности* (или *принцип оптимистических оценок*), в соответствии с которой значение целевой функции центра при использовании управления $u \in U$ равно $K(u) = \max\limits_{y \in P(u)} f_0(u, y)$.

Величина $K(u)$, $u \in U$ называется *эффективностью управления*. Содержательно гипотеза благожелательности означает, что агент выбирает из множества рационального выбора действие, наиболее благоприятное для центра. Альтернативой является использование центром принципа максимального гарантированного результата, при котором он рассчитывает на наихудший выбор агента, что приводит к следующему определению эффективности управления (иногда называемой *гарантированной эффективностью*): $K(u) = \min\limits_{y \in P(u)} f_0(u, y)$.

Следовательно, ***задача управления организационной системой*** формально может быть сформулирована следующим образом: найти допустимое управление, имеющее максимальную эффективность (такое управление называется *оптимальным управлением*), то есть

$$K(u) \to \max_{u \in U}.$$

Рассмотренная модель управления является *базовой моделью управления организационными системами*, так как она позволяет унифицированно описывать процессы принятия решений участниками организационных систем. Действительно, с одной стороны, в многоуровневых системах взаимодействие между участниками различных уровней управления может описываться наращиванием структур, приведенных на рисунках 1.1 и 1.2, по «вертикали». С другой стороны, введение нескольких управляющих органов (центров) или нескольких управляемых субъектов (агентов) соответствует «горизонтальному» расширению этих структур.

Итак, в настоящем разделе приведена в общем виде формулировка задачи управления. Для того чтобы понять, как эта задача ставится и решается в каждом конкретном случае, рассмотрим общую технологию управления организационными системами.

1.3. Технология управления организационными системами

Опишем *технологию управления* организационными системами. Под технологией понимается совокупность методов, операций, приемов и так далее, последовательное осуществление которых обеспечивает решение поставленной задачи. Отметим, что рассматриваемая ниже технология управления охватывает все этапы, начиная с построения модели ОС и заканчивая анализом эффективности внедрения результатов моделирования на практике (рис. 1.3, на котором в целях наглядности опущены обратные связи между этапами).

Первый этап – построение модели – заключается в описании реальной ОС в формальных терминах, то есть задании состава и структуры ОС, целевых функций и множеств допустимых стратегий участников системы, их информированности, порядка функционирования, гипотез о поведении и т. д. На этом этапе существенно используется аппарат теории игр (см. Приложение 1), в терминах которой, собственно, обычно и формулируется модель.

Второй этап – анализ модели – исследование поведения участников при тех или иных *механизмах управления*. Решение теоретико-игровой задачи анализа заключается в следующем: для фиксированного механизма управления определяются стратегии агентов, которые являются равновесными при этом управлении.

Рис. 1.3. *Технология управления ОС*

Решив задачу анализа, то есть зная поведение управляемых субъектов при различных управлениях, можно переходить к ***третьему этапу*** – решению, во-первых, *прямой задачи управления*, то есть задачи синтеза оптимальных управляющих воздействий, заключающейся в поиске допустимых управлений, имеющих максимальную эффективность, и, во-вторых, *обратной задачи управления* – поиска множества допустимых управлений, переводящих ОС в заданное состояние. Критерием эффективности управления является значение (максимальное или гарантированное) целевой функции управляющего органа на множестве решений игры агентов. Следует отметить, что, как правило, именно этот этап решения задачи управления вызывает наибольшие теоретические трудности и наиболее трудоемок с точки зрения исследователя.

Имея набор решений задачи управления, необходимо перейти к ***четвертому этапу***, то есть исследовать их устойчивость. Исследование устойчивости подразумевает решение, как минимум, двух задач. Первая задача заключается в изучении зависимости оптимальных решений от параметров модели, то есть является задачей анализа *устойчивости решений* (корректности оптимизационной задачи, чувствительности, устойчивости принципов оптимальности и т. д.) в классическом понимании. Вторая задача специфична для математического моделирования. Она заключается в теоретическом исследовании *адекватности модели* реальной системе, которое подразумевает изучение эффективности решений, оптимальных в модели, при их использовании в реальных ОС, которые могут в силу ошибок моделирования отличаться от модели. Результатом решения задачи адекватности является *обобщенное решение задачи управления* – параметрическое семейство решений, обладающих заданной гарантированной эффективностью в определенном множестве реальных ОС [18, 45].

Итак, перечисленные выше четыре этапа заключаются в общем теоретическом изучении модели ОС. Для того чтобы использовать результаты теоретического исследования при управлении реальной ОС, необходимо произвести настройку модели, то есть идентифицировать моделируемую систему [45] и провести серию имитационных экспериментов – соответственно ***пятый*** и ***шестой этапы***. Исходными данными для идентификации[24] системы служат обобщенные решения, которые ограничиваются имеющейся информацией о реальной системе. Этап имитационного моделирования во многих случаях необходим по нескольким причинам. Во-первых, далеко не всегда удается получить аналитическое решение задачи синтеза оптимальных управлений и исследовать его зависимость от параметров модели. При этом имитационное моделирование может служить инструментом получения и оценки решений. Во-вторых, имитационное моделирование позволяет проверить справедливость гипотез (в первую очередь относительно принципов поведения участников системы: используемых ими процедур устранения неопределенности, правил рационального выбора и т. д.), принятых при построении и анализе модели, то есть дает дополнительную информацию об адекватности модели без проведения натурного эксперимента. И наконец, в-третьих, использование деловых игр и имитационных моделей в учебных целях позволяет управленческому персоналу освоить и апробировать предлагаемые механизмы управления.

Завершающим является ***седьмой этап*** – этап внедрения, на котором производится обучение управленческого персонала, внедрение в реальную ОС разработанных и исследованных на предыдущих этапах механизмов управления с последующей оценкой эффективности их практического использования, коррекцией модели и т. д.

Обсудив технологию управления ОС, приведем общие подходы к решению теоретических задач управления.

[24] Проблема идентификации подробно рассматривается в [45].

1.4. Общие подходы к решению задач управления организационными системами

При решении прямой задачи управления (см. раздел 1.2):

$$\max_{y \in P(u)} f_0(u, y) \to \max_{u \in U}$$

возникают две основные трудности – определение множества рационального выбора агента (множества решений игры агентов, если их несколько) $P(u)$ и поиск управления, максимизирующего эффективность. Имеющийся опыт решения этих проблем заключается в следующем.

Определим следующие величины и множества: $\Xi(y) = \{u \in U \mid y \in P(u)\}$ – множество управлений, *реализующих* данное действие $y \in A$; $G(y) = \max_{u \in \Xi(y)} f_0(u, y)$ – максимальное значение целевой функции центра при реализации данного действия; $P(U_1) = \bigcup_{u \in U_1} P(u)$ – множество действий, реализуемых управлениями из множества U_1, где $U_1 \subseteq U$ – некоторое подмножество множества допустимых управлений U.

Задачу поиска $\max_{u \in U} \max_{y \in P(u)} f_0(u, y)$ можно записать как $\max_{y \in P(U)} G(y)$, то есть оптимально следующее управление: $u^* \in Arg \max_{u \in \Xi(y^*)} f_0(u, y^*)$, где y^* – оптимальное реализуемое действие: $y^* \in Arg \max_{y \in P(U)} G(y)$.

Предположим, что $P(U) = A$, то есть ограничения на управления таковы, что реализуемы любые допустимые действия.

Обозначим $K^* = f_0(u^*, y^*)$ – максимальное значение критерия эффективности (целевой функции центра),

$\widehat{u}(y,\cdot) = arg \max_{u \in \Xi(y)} f_0(u, y)$ – некоторое решение обратной задачи управления, то есть управление, реализующее данное действие и максимизирующее целевую функцию центра (величина $\widehat{u}(y,\cdot)$ называется *минимальными «затратами» центра на управление* по реализации действия $y \in A$). Тогда задача управления может быть записана в виде: $y^* = arg \max_{y \in A} f_0(\widehat{u}(y, y), y)$.

Казалось бы, введенная формулировка не намного проще исходной задачи, однако для нее могут быть сформулированы простые и содержательно интерпретируемые принципы поиска решения. Основная идея заключается в том, чтобы либо угадать класс «простых» управлений, содержащий оптимальное решение, либо сократить перебор по множеству возможных управлений, что возможно, естественно, при наложении дополнительных условий на параметры модели ОС.

Первый вариант, заключающийся в угадывании «простых» (например, параметрических и/или характеризуемых дополнительными, помимо эффективности, свойствами) управлений, обладает тем преимуществом, что если удается доказать, что для любого допустимого управления существует управление из некоторого класса, обладающее неменьшей эффективностью, то можно сконцентрировать внимание только на этом классе управлений и искать в нем оптимальное управление.

Хрестоматийными примерами дополнительных свойств управлений в организационных системах являются *согласованность* (заключающаяся в том, что выбираемые агентами действия совпадают с планами, то есть действиями, рекомендуемыми центром) для задачи стимулирования [47] и *score неманипулируемость* (заключающаяся в том, что сообщения агентов о неизвестных центру параметрах достоверны) для задачи планирования [59].

Формально утверждение об оптимальности класса $U_1 \subseteq U$ допустимых управлений можно сформулировать как: $\exists\ \hat{u}(y^*, \cdot) \in U_1$, то есть как следствие условия: $\exists\ (u_1 \in U_1, y_1 \in A)$: $\Phi\ (u_1, y_1) = K^*$.

Для этого, очевидно, достаточно выполнения следующего условия: $\forall\ y \in A\ \exists\ u_1 \in U_1$: $u_1 = \hat{u}(y, \cdot)$. Несмотря на кажущуюся «грубость» этого достаточного условия, оно имеет место для многих классов управлений в ряде интересных с теоретической точки зрения и важных с практической точки зрения задач управления организационными системами. Примерами могут служить классы компенсаторных и скачкообразных систем стимулирования в задачах стимулирования [32, 47, 49], класс пропорциональных механизмов распределения ресурса и класс механизмов активной экспертизы в соответствующих задачах планирования [43], задача стимулирования в многоэлементной ОС [47, 53] и др.

Таким образом, в настоящей главе рассмотрены модели принятия решений, в общем виде сформулирована задача управления ОС, описаны технология и общие подходы к решению этих задач. Перейдем к описанию конкретных механизмов, призванных обеспечивать решение задач управления. Начнем с рассмотрения наиболее полно исследованных механизмов мотивационного управления: механизмов стимулирования (вторая глава), механизмов планирования (третья глава), механизмов организации (четвертая глава) и механизмов контроля (пятая глава). Далее рассматриваются механизмы управления составом (шестая глава) и структурой (седьмая глава) ОС, а также механизмы информационного и институционального управления (соответственно главы восемь и девять).

Глава 2

МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Стимулированием называется побуждение (осуществляемое посредством воздействия центра на предпочтения – целевую функцию – агента) к совершению определенных действий.

Исследование формальных моделей стимулирования в рамках *теории управления* началось практически одновременно и независимо как в бывшем СССР, так и за рубежом, примерно в конце 60-х годов прошлого века. Основными научными школами по этому направлению исследований являются *теория активных систем* [5, 12, 16, 47–49] (научный центр – Институт проблем управления РАН), *теория иерархических игр* [20, 30] (научный центр – Вычислительный центр РАН) и *теория контрактов*, развиваемая в основном зарубежными учеными [38, 68]. Кроме того, проблемы стимулирования (спроса на труд, предложения труда и т. д.) традиционно находятся в центре внимания *экономики труда*. Прикладные задачи стимулирования рассматриваются и используются, в том числе, в управлении персоналом.

Настоящая глава посвящена описанию основных подходов и результатов исследования задач синтеза механизмов стимулирования. Последовательность изложения следующая: сначала рассматривается задача стимулирования одного агента (в непрерывной и дискретной постановке) – разделы 2.1 и 2.2, затем описываются базовые механизмы стимулирования, отражающие наиболее распространенные на практике формы и системы оплаты труда (раздел 2.3). Раздел 2.4 посвящен механизмам стимулирования в теории контрактов (задаче стимулирования одного агента в условиях вероятностной неопределенности относительно результатов его деятельности), разделы 2.5–2.11 – различным механизмам стимулирования коллектива агентов, осуществляющих совместную деятельность.

2.1. Механизм стимулирования (непрерывная модель)

Основным аппаратом моделирования задач стимулирования в теории управления является теория игр – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах (см. [25] и Приложение 1). Простейшей игровой моделью является взаимодействие двух игроков – центра (*principal*) и подчиненного ему агента (*agent*). Такая организационная система имеет следующую структуру: на верхнем уровне иерархии находится центр, на нижнем – подчиненный ему агент. В качестве центра может выступать работодатель, непосредственный руководитель агента или организация, заключившая трудовой (или какой-либо иной – страховой, подрядный и т. д. – см. ниже) договор с агентом. В качестве агента может выступать наемный работник, подчиненный или организация, являющаяся второй стороной по соответствующему договору.

Стратегией агента является выбор *действия* $y \in A$, принадлежащего множеству допустимых действий A. Содержательно действием агента может быть количество отрабатываемых часов, объем произведенной продукции и т. д. Множество допустимых действий представляет собой набор альтернатив, из которых агент производит свой выбор, например, диапазон возможной продолжительности рабочего времени, неотрицательный и не превышающий технологические ограничения объем производства и т. д.

Введем ряд определений. *Механизмом стимулирования* называется правило принятия центром решений относительно стимулирования агента. Механизм стимулирования включает в себя систему стимулирования, которая в рамках моделей, рассматриваемых в настоящей работе, полностью определяется функцией стимулирования. Функция стимулирования задает зависимость вознаграждения агента, получаемого им от центра, от выбираемых действий. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении теоретико-игровых моделей мы будем употреблять термины «механизм стимулирования», «система стимулирования» и «функция стимулирования» как синонимы.

Стратегией центра является выбор *функции стимулирования* $\sigma(\cdot) \in M$, принадлежащей допустимому множеству M и ставящей в соответствие действию агента некоторое неотрицательное вознаграждение, выплачиваемое ему центром, то есть $\sigma : A \to \Re_1^{\ +}$. Множество допустимых вознаграждений может ограничиваться как законодательно (например, минимальным размером оплаты труда), так и, например, соображениями экономической эффективности деятельности центра, тарифно-квалификационными требованиями к оплате труда данного агента и т. д.

Выбор действия $y \in A$ требует от агента *затрат* $c(y)$ и приносит центру *доход* $H(y)$[25]. *Функцию затрат агента* $c(y)$ и *функцию дохода центра* $H(y)$ будем считать известными

[25] Исходя из содержательных интерпретаций функцию $H(y)$ правильнее было бы называть «прибылью», а не «доходом». Тем не менее мы будем следовать установившейся в теории управления терминологии.

(см. обсуждение проблем и результатов их идентификации в [32, 47]).

Интересы участников организационной системы (центра и агента) отражены их *целевыми функциями*, (функциями выигрыша, полезности и так далее, в записи которых зависимость от стратегии центра будет опускаться), которые обозначим соответственно: $\Phi(y)$ и $f(y)$.

Целевые функции представляют собой: для агента – разность между стимулированием и затратами[26]:

$$f(y) = \sigma(y) - c(y), \tag{1}$$

а для центра – разность между доходом и *затратами центра на стимулирование* – вознаграждение, выплачиваемое агенту:

$$\Phi(y) = H(y) - \sigma(y). \tag{2}$$

После того как введены целевые функции, отражающие предпочтения участников ОС, целесообразно обсудить различия в описании морального и материального стимулирования.

Наличие скалярной целевой функции подразумевает существование единого эквивалента, в котором измеряются все компоненты целевых функций (затраты агента, доход центра и, естественно, само стимулирование).

В случае, когда речь идет о материальном вознаграждении агента, таким эквивалентом выступают деньги. Содержательные интерпретации дохода центра при этом очевидны (более того, практически во всех работах, содержащих описание формальных моделей стимулирования, предполагается, что и стимулирование, и доход центра «измеряются» в денежных единицах). Сложнее дело обстоит с затратами агента, ведь не всегда можно адекватно выразить в денежных единицах, например, удовлетворен-

[26] В настоящей работе принята независимая внутри разделов нумерация формул.

ность агента работой и т. д. С экономической точки зрения затраты агента можно интерпретировать как денежный эквивалент тех усилий, которые агент должен произвести для достижения того или иного действия. В рамках такой интерпретации вполне естественной выглядит идея компенсации затрат – вознаграждение со стороны центра должно как минимум компенсировать затраты агента (см. более подробно формальное описание ниже).

Если затраты агента измеряются в некоторых единицах «полезности» (учитывающей, например, физическую усталость, моральное удовлетворение от результатов труда и т. д.), отличных от денежных единиц (и несводимых к ним линейным преобразованием), то для того, чтобы иметь возможность складывать или вычитать полезности при введении целевой функции типа (1), необходимо определить полезность вознаграждения. Например, если используется материальное стимулирование, то можно ввести функцию полезности $\widetilde{u}(\sigma(y))$, которая отражала бы полезность денег для рассматриваемого агента. Целевая функция агента при этом примет вид:

$$f(y) = \widetilde{u}(\sigma(y)) - c(y).$$

Введем следующие **предположения**, которых будем придерживаться, если не оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения.

Во-первых, будем считать, что множество возможных действий агента составляет положительную полуось. Отказу агента от участия в рассматриваемой ОС (бездействию) соответствует нулевое действие.

Во-вторых, относительно функции затрат предположим, что она не убывает, непрерывна, а затраты от выбора нулевого действия равны нулю (иногда дополнительно будем требовать, чтобы функция затрат была выпукла и непрерывно дифференцируема).

В третьих, допустим, что функция дохода центра непрерывна, принимает неотрицательные значения и доход центра достигает максимума при ненулевых действиях агента.

В четвертых, предположим, что значение вознаграждения, выплачиваемого центром агенту, неотрицательно.

Приведем содержательные интерпретации введенных предположений.

Первое предположение означает, что возможными действиями агента являются неотрицательные действительные числа, например, количество отработанных часов, объем произведенной продукции и т. д. Принятая структура множества допустимых действий обусловливает то, что рассматриваемая в настоящем разделе модель называется «*непрерывной*» (дискретная модель стимулирования, в которой множество допустимых действий конечно, рассматривается в разделе 2.2).

Из второго предположения следует, что выбор бóльших действий требует от агента не меньших затрат, например, затраты могут расти с ростом объема выпускаемой продукции. Кроме того, нулевое действие (отсутствие деятельности агента) не требует затрат, а предельные затраты[27] возрастают с ростом действия, то есть каждый последующий прирост действия на одну и ту же величину требует все больших затрат.

Третье предположение накладывает ограничения на функцию дохода центра, требуя, чтобы центру была выгодна деятельность агента (в противном случае – если максимум дохода центра достигается при бездействии агента – задачи стимулирования не возникает, так как в

[27] В экономике предельными затратами принято называть производную функции затрат.

этом случае центр может ничего не платить агенту, а тот в силу второго предположения ничего не будет делать).

Четвертое предположение означает, что центр не может штрафовать агента.

В соответствии с моделями принятия решений, рассмотренными в первой главе, рациональное поведение участника ОС заключается в максимизации (выбором собственной стратегии) его целевой функции с учетом всей имеющейся у него информации.

Определим *информированность игроков* и *порядок функционирования*. Будем считать, что на момент принятия решения (выбора стратегии) участникам ОС известны все целевые функции и все допустимые множества. Специфика теоретико-игровой задачи стимулирования заключается в том, что в ней фиксирован порядок ходов (игра $Г_2$ с побочными платежами в терминологии теории иерархических игр – см. Приложение 1 и [20]). Центр – *метаигрок* – обладает правом первого хода, сообщая агенту выбранную им функцию стимулирования, после чего при известной стратегии центра агент выбирает свое действие, максимизирующее его целевую функцию.

Итак, мы описали все основные параметры модели любой ОС (состав, структура, допустимые множества, целевые функции, информированность и порядок функционирования), что дает возможность сформулировать собственно задачу управления – задачу синтеза оптимального механизма стимулирования.

Так как значение целевой функции агента зависит как от его собственной стратегии – действия, так и от функции стимулирования, то в рамках принятой гипотезы рационального поведения агент будет выбирать действия, которые при заданной системе стимулирования максимизируют его целевую функцию. Понятно, что множество таких действий, называемое множеством *реализуемых действий*, зависит от используемой центром системы стимулирования. **Основная идея стимулирования** заключается в том, что, варьируя систему стимулирования, центр может побуждать агента выбирать те или иные действия.

Так как целевая функция центра зависит от действия, выбираемого агентом, то *эффективностью системы стимулирования* называется значение целевой функции центра на множестве действий агента, реализуемых данной системой стимулирования (то есть тех действий, которые агент выбирает при данной системе стимулирования). Следовательно, задача стимулирования заключается в том, чтобы выбрать оптимальную систему стимулирования, то есть систему стимулирования, имеющую максимальную эффективность. Приведем формальные определения.

Множество действий агента, доставляющих максимум его целевой функции (и, естественно, зависящее от функции стимулирования), называется *множеством решений игры,* или *множеством действий, реализуемых данной системой стимулирования*:

$$P(\sigma) = Arg \max_{y \in A} \{\sigma(y) - c(y)\}. \qquad (3)$$

Зная, что агент выбирает действия из множества (3), центр должен найти систему стимулирования, которая максимизировала бы его собственную целевую функцию. Так как множество $P(\sigma)$ может содержать более одной точки, необходимо доопределить (с точки зрения предположений центра о поведении агента) выбор агента. Если выполнена *гипотеза благожелательности*[28] (ГБ), которую будем считать имеющей место, если не оговорено особо, в

[28] Напомним, что гипотеза благожелательности заключается в следующем: если агент безразличен между выбором нескольких действий (например, действий, на которых достигается глобальный максимум его целевой функции), то он выбирает из этих действий то, которое наиболее благоприятно для центра, то есть действие, доставляющее максимум целевой функции центра.

ходе дальнейшего изложения, то агент выбирает из множества (3) наиболее благоприятное для центра действие. Альтернативой для центра является расчет на наихудший для него выбор агента из множества решений игры.

Следовательно, эффективность системы стимулирования $\sigma \in M$ равна:

$$K(\sigma) = \max_{y \in P(\sigma)} \Phi(y), \qquad (4)$$

где $\Phi(y)$ определяется (2).

Если отказаться от гипотезы благожелательности, то гарантированная эффективность $K_g(\cdot)$ системы стимулирования $\sigma \in M$ равна:

$$K_g(\sigma) = \min_{y \in P(\sigma)} \Phi(y).$$

Прямая задача синтеза оптимальной системы стимулирования заключается в выборе допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность:

$$K(\sigma) \to \max_{\sigma \in M}. \qquad (5)$$

Обратная задача стимулирования заключается в поиске множества систем стимулирования, реализующих заданное действие, или в более общем случае – заданное множество действий $A^* \subseteq A$. Например, при $A^* = \{y^*\}$ обратная задача может заключаться в поиске множества $M(y^*)$ систем стимулирования, реализующих это действие, то есть $M(y^*) = \{\sigma \in M \mid y^* \in P(\sigma)\}$. Определив $M(y^*)$, центр имеет возможность найти в этом множестве «минимальную» систему стимулирования – реализующую заданное действие с минимальными затратами на стимулирование, или систему стимулирования, обладающую какими-либо другими заданными свойствами, например, монотонностью, линейностью и т. д.

Следует отметить, что введенные выше предположения согласованы в следующем смысле. Агент всегда может выбрать нулевое действие, не требующее от него затрат (второе предположение). В то же время центр имеет возможность ничего не платить ему за выбор этого действия.

Во всех содержательных интерпретациях теоретико-игровых моделей стимулирования предполагается, что у агента имеется альтернатива – сохранить статус-кво, то есть не вступать во взаимоотношения с центром (не заключать трудового контракта). Отказываясь от участия в данной ОС, агент не получает вознаграждения от центра и всегда имеет возможность выбрать нулевое действие, обеспечив себе неотрицательное (точнее – нулевое) значение целевой функции. Если вне данной ОС агент может гарантированно получить полезность $\overline{U} \geq 0$ (*ограничение пособия по безработице* или *ограничение резервной заработной платы – reservation wage constraint* – в терминологии теории контрактов), то и при участии в данной ОС ему должен быть гарантирован не меньший уровень полезности. С учетом резервной полезности множество (3) реализуемых действий примет вид:

$$P(\sigma, \overline{U}) = Arg \max_{\{y \in A \mid \sigma(y) \geq c(y) + \overline{U}\}} \{\sigma(y) - c(y)\}. \qquad (6)$$

Далее для простоты, если не оговорено особо, будем считать резервную полезность равной нулю.

Сделав маленькое отступление, обсудим более подробно модель процесса принятия решений агентом. Предположим, что некоторый агент предполагает устроиться на работу на некоторое предприятие. Ему предлагается контракт $\{\sigma(y), y^*\}$, в котором оговаривается зависимость $\sigma(\cdot)$ вознаграждения от результатов y его деятельности, а также то, какие конкретные результаты y^* от него ожидаются. При каких условиях агент подпишет контракт, если обе стороны – и агент, и предприятие (центр) принимают решение о подписании контракта самостоятельно и добровольно? Рассмотрим сначала принципы, которыми может руководствоваться агент.

Первое условие – *условие согласованности стимулирования* (*incentive compartibility constraint*), которое заключается в том, что при участии в контракте выбор именно действия y^* (а не какого-либо другого допустимого действия) доставляет максимум его целевой функции (функции полезности). Другими словами, это условие того, что система стимулирования согласована с интересами и предпочтениями агента.

Второе условие – *условие участия* в контракте (иногда его называют *условием индивидуальной рациональности – individual rationality constraint*), которое заключается в том, что, заключая данный контракт, агент ожидает получить полезность, бóльшую, чем он мог бы получить, заключив другой контракт с другой организацией (с другим центром). Представления агента о своих возможных доходах на рынке труда отражает такая величина, как *резервная заработная плата* [47], то есть частным случаем условия индивидуальной рациональности является ограничение резервной заработной платы.

Аналогичные приведенным выше для агента условия согласованности и индивидуальной рациональности можно сформулировать и для центра. Если имеется единственный агент – претендент на заключение контракта, то контракт будет выгоден для центра при выполнении двух условий.

Первое условие (аналогичное условию согласованности стимулирования) отражает согласованность системы стимулирования с интересами и предпочтениями центра, то есть применение именно фигурирующей в контракте системы стимулирования должно доставлять максимум целевой функции (функции полезности) центра (по сравнению с использованием любой другой допустимой системы стимулирования) (см. (4)).

Второе условие для центра аналогично условию участия для агента, а именно – заключение контракта с данным агентом выгодно для центра по сравнению с сохранением статус-кво, то есть отказом от заключения контракта вообще. Например, если считать, что прибыль предприятия (значение целевой функции центра) без заключения контракта равна нулю, то при заключении контракта прибыль должна быть неотрицательна.

Качественно обсудив условия заключения взаимовыгодного трудового контракта, вернемся к формальному анализу, то есть решению задачи стимулирования (5). Отметим, что решение данной задачи «в лоб» достаточно трудоемко. Но, к счастью, можно угадать оптимальную систему стимулирования исходя из содержательных соображений, а затем корректно обосновать ее оптимальность.

Предположим, что использовалась система стимулирования $\sigma(\cdot)$, при которой агент выбирал действие $x \in P(\sigma(\cdot))$. Утверждается, что если взять другую систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, которая будет равна нулю всюду, кроме точки x, и будет равна старой системе стимулирования в точке x:

$$\tilde{\sigma}(y) = \begin{cases} \sigma(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases},$$

то и при новой системе стимулирования это же действие агента будет доставлять максимум его целевой функции.

Приведем формальное доказательство этого утверждения. Условие того, что выбор действия x доставляет максимум целевой функции агента при использовании системы стимулирования $\sigma(\cdot)$, можно записать в следующем виде: разность между стимулированием и затратами будет не меньше, чем при выборе любого другого действия:

$$\forall y \in A \;\; \sigma(x) - c(x) \geq \sigma(y) - c(y).$$

Заменим систему стимулирования $\sigma(\cdot)$ на систему стимулирования $\widetilde{\sigma}(\cdot)$, тогда получим следующее: в точке x система стимулирования $\widetilde{\sigma}(\cdot)$ по-прежнему равна системе стимулирования $\sigma(\cdot)$. В правой части будет тогда записана система стимулирования $\widetilde{\sigma}(\cdot)$:

$$\forall y \in A \;\; \sigma(x) - c(x) \geq 0 - c(y).$$

Если выполнялась первая система неравенств, то выполняется и новая система неравенств. Следовательно, $x \in P(\widetilde{\sigma}(\cdot))$.

Легко видеть, что в рамках введенных предположений при участии агента в рассматриваемой организационной системе ему гарантируется как минимум нулевое значение полезности. Условие неотрицательности полезности агента

$$\forall\, y \in P(\sigma)\, f(y) \geq 0 \tag{7}$$

является условием индивидуальной рациональности. Следовательно, как минимум, реализуемыми будут такие действия, при выборе которых значения целевой функции агента будут неотрицательны (см. (6)):

$$P_0(\sigma) = \{y \in A \mid \sigma(y) \geq c(y)\} \supseteq P(\sigma). \tag{8}$$

На рисунке 2.1 изображены графики функций: $H(y)$ и $(c(y) + \overline{U})$. С точки зрения центра стимулирование не может превышать доход, получаемый им от деятельности агента (так как, отказавшись от взаимодействия с агентом, центр всегда может получить нулевую полезность). Следовательно, допустимое решение лежит ниже функции $H(y)$. С точки зрения агента стимулирование не может быть меньше, чем сумма затрат и резервная полезность (которую агент всегда может получить, выбирая нулевое действие). Следовательно, допустимое решение лежит выше функции $c(y)$.

На рисунке 2.1 изображены также область действий, реализуемых с точки зрения как индивидуальной рациональности ($\sigma(y^*) \geq c(y^*) + \overline{U}$) и согласованности стимулирования ($\forall\ y \in A\ \ \sigma(y^*) - c(y^*) \geq \sigma(y) - c(y)$), так и с точки зрения неотрицательности целевой функции.

Множество действий агента и соответствующих значений целевых функций, удовлетворяющих одновременно всем перечисленным выше ограничениям (согласования, индивидуальной рациональности и другим, как для центра, так и для агента), – «*область компромисса*» заштрихована на рисунке 2.1. Множество действий агента, при которых область компромисса не пуста, есть

$$S = \{x \in A \mid H(x) - c(x) - \overline{U} \geq 0\}. \qquad (9)$$

Легко видеть, что при неизменных функциях дохода и затрат с ростом величины $\overline{U}$ область компромисса вырождается.

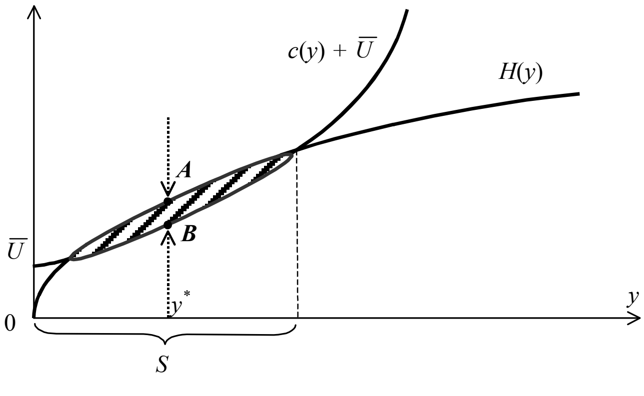


Рис. 2.1. *Оптимальное решение задачи стимулирования*

Так как центр стремится минимизировать выплаты агенту при условии, что последний выбирает требуемое действие, оптимальная точка в рамках гипотезы благожелательности должна лежать на нижней границе области компромисса, то есть ***стимулирование в точности должно равняться сумме затрат агента и резервной полезности.*** Этот важный вывод получил название «*принцип ком-*

пенсации затрат». В соответствии с этим принципом, для того чтобы побудить агента выбрать определенное действие, центру достаточно, помимо резервной полезности, компенсировать затраты агента.

Кроме компенсации затрат, центр может устанавливать также *мотивирующую надбавку*[29] $\delta \geq 0$. Следовательно, для того чтобы агент выбрал действие $x \in A$, стимулирование со стороны центра за выбор этого действия должно быть не меньше

$$\sigma(x) = c(x) + \overline{U} + \delta. \tag{10}$$

Легко видеть, что если в случае выбора агентом других действий (отличных от плана x) вознаграждение равно нулю, то выполнены как условия согласованности стимулирования, так и условие индивидуальной рациональности агента. При этом стимулирование (10) со стороны центра является минимально возможным. Следовательно, мы доказали, что параметрическим (с параметром $x \in S$) решением задачи (5) является следующая система стимулирования:

$$\sigma_{\text{K}}(x, y) = \begin{cases} c(x) + \overline{U} + \delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}, \tag{11}$$

которая называется *компенсаторной* (K-*типа*).

Принцип компенсации затрат является достаточным условием реализации требуемого действия.

Рассмотрим теперь, какое действие следует реализовывать центру, то есть каково оптимальное значение $x \in S$.

---

[29] Если гипотеза благожелательности не выполнена, и при определении эффективности стимулирования центр использует МГР по множеству максимумов целевой функции агента, то с формальной точки зрения мотивирующая надбавка должна быть строго положительна (но может быть выбрана сколь угодно малой). Если гипотеза благожелательности выполнена, то с формальной точки зрения мотивирующая надбавка может быть выбрана равной нулю. С неформальной точки зрения мотивирующая надбавка отражает аспект нематериального стимулирования.

Так как в силу (10)–(11) стимулирование равно затратам агента, то оптимальным реализуемым действием y^* является действие, максимизирующее на множестве S разность между доходом центра и затратами агента. Следовательно, оптимальное реализуемое действие может быть найдено из решения следующей стандартной оптимизационной задачи:

$$y^* = arg \max_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}, \qquad (12)$$

которая получила название *задачи оптимального согласованного планирования* [12]. Действительно, то действие, которое центр собирается побуждать выбирать агента, может интерпретироваться как *план* – желательное с точки зрения центра действие агента. В силу принципа компенсации затрат план является *согласованным* (напомним, что согласованным называется план, выполнение которого выгодно агенту), значит центру в силу (11) остается найти оптимальный согласованный план.

Значение целевой функции центра при использовании оптимальной компенсаторной системы стимулирования в рамках гипотезы благожелательности равно:

$$\Delta = \max_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}.$$

Условие оптимальности плана y^* в рассматриваемой модели (в предположении дифференцируемости функций дохода и затрат, а также вогнутости функции дохода центра и выпуклости функции затрат агента) имеет вид: $\frac{dH(y^*)}{dy} = \frac{dc(y^*)}{dy}$. Величина $\frac{dH(y)}{dy}$ в экономике называется предельной производительностью (*MRP – marginal rate of production*), а величина $\frac{dc(y)}{dy}$ – предельными затратами (*MC – marginal costs*). Условие оптимума (*MRP* = *MC*) определяет действие y^* и так называемую *эффективную заработную плату* $c\,(y^*) + \overline{U}$.

Отметим еще одну важную содержательную интерпретацию условия (11). Оптимальный план y^* максимизирует разность между доходом центра и затратами агента, то есть доставляет максимум суммы целевых функций (1) и (2) участников ОС, и, следовательно, является эффективным по Парето.

Отметим, что компенсаторная система стимулирования (11) не является единственной оптимальной системой стимулирования – легко показать, что в рамках гипотезы благожелательности решением задачи (5) является любая система стимулирования $\breve{\sigma}\,(\cdot)$, удовлетворяющая следующему условию: $\breve{\sigma}\,(y^*) = c\,(y^*) + \overline{U}$, $\forall\, y \neq y^*$ $\breve{\sigma}\,(y) \leq c\,(y)$ (см. рис. 2.2, на котором приведены эскизы трех оптимальных систем стимулирования – σ_1^*, σ_2^* и σ_3^*).

Область компромисса является чрезвычайно важным с методологической точки зрения понятием. Ее непустота отражает наличие возможности согласования интересов центра и агента в существующих условиях. Поясним последнее утверждение.

В формальной модели стратегии участников ограничены соответствующими допустимыми множествами. Учет ограничений индивидуальной рациональности агента (условно можно считать, что параметр резервной зарплаты $\overline{U}$, фигурирующий в условии участия, отражает ограничения рынка труда) и центра (условно можно считать, что неотрицательность целевой функции центра отражает ограничения финансовой эффективности деятельности центра – затраты на стимулирование агента не должны превышать доход от результатов его деятельности), а также условий согласования приводит к тому, что множество «рациональных» стратегий – область компромисса – оказывается достаточно узкой.

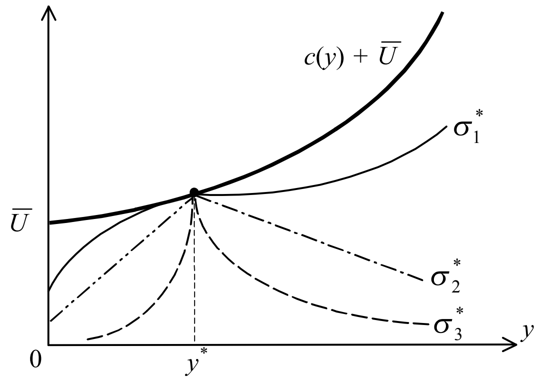


Рис. 2.2. *Оптимальные системы стимулирования*

Фактически компромисс между центром и агентом заключается в дележе полезности, равной разности полезностей в точках *A* и *B* на рисунке 2.1. Делая первый ход (предлагая контракт), центр «забирает» эту разность себе, вынуждая агента согласиться с резервным значением полезности. Легко проверить, что в противоположной ситуации, когда первый ход делает агент, предлагая контракт центру, нулевую полезность получает центр, а агент «забирает» разность между полезностями в точках *A* и *B* себе. Возможны и промежуточные варианты, когда принцип дележа прибыли *AB* между центром и агентом оговаривается заранее в соответствии с некоторым *механизмом компромисса* [35].

Из проведенного выше анализа следует, что решение задачи стимулирования может быть разделено на два этапа. На *первом этапе* решается *задача согласования* – определяются множества реализуемых при заданных ограничениях действий. На *втором этапе* решается *задача оптимального согласованного планирования* – ищется реализуемое действие, которое наиболее предпочтительно с точки зрения центра. Подобная идеология разбиения решения задачи управления ОС на два этапа широко используется в теории управления и при решении более сложных задач.

Существенным «плюсом» компенсаторных систем стимулирования является их простота и высокая эффективность, существенным «минусом» – абсолютная неустойчивость относительно возможных возмущений параметров модели [18, 45]. Действительно, если центр неточно знает функцию затрат агента, то сколь угодно малая неточность может приводить к значительным изменениям реализуемых действий. Вопросы адекватности моделей стимулирования, устойчивости оптимальных решений подробно исследовались в [18, 45]. Предложенная в этих работах техника анализа и методы повышения гарантированной (в рамках имеющейся у центра информации) эффективности стимулирования могут быть непосредственно использованы и для моделей, рассматриваемых ниже, поэтому проблемы адекватности и устойчивости в настоящей работе не исследуются.

В рамках полученного выше оптимального решения задачи стимулирования (то есть при использовании центром компенсаторной системы стимулирования) значение целевой функции агента в случае выполнения плана равно нулю (или резервной полезности плюс мотивирующая надбавка). Поэтому особого внимания, в силу широкой распространенности на практике, заслуживает случай, когда в условиях трудового контракта (или договора между заказчиком-центром и исполнителем-агентом) производится фиксация норматива рентабельности $\rho \geq 0$ агента, то есть ситуация, когда размер вознаграждения агента зависит от его действия следующим образом:

$$\sigma_\rho(x, y) = \begin{cases} (1+\rho)\, c(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$$

Данная система стимулирования называется *системой стимулирования с нормативом рентабельности* [35].

Предполагая, что резервная полезность исполнителя равна нулю, получаем, что задача оптимального согласованного планирования примет вид (ср. с (12)):

$$y^*(\rho) = arg \max_{y \in A} \{H(y) - (1 + \rho)\, c(y)\}.$$

Следовательно, максимальное значение целевой функции центра равно:

$$\Delta(\rho) = H(y^*(\rho)) - (1 + \rho)\, c\,(y^*(\rho)).$$

Легко видеть, что $\forall\ \rho \geq 0\ \Delta(\rho) \leq \Delta$.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть $H(y) = y$, $c(y) = y^2/2\,r$. Тогда $y^*(\rho) = r/(1 + \rho)$, $\Delta(\rho) = r/2(1 + \rho)$. Из условий индивидуальной рациональности следует, что $\rho \geq 0$. В рассматриваемом примере прибыль агента $\rho\, c\,(y^*(\rho))$ достигает максимума при $\rho = 1$, то есть агенту выгодно вдвое завысить стоимость выполняемых работ. С точки зрения центра наиболее предпочтителен нулевой норматив рентабельности.

Итак, выше описан подход к исследованию задачи стимулирования, использующий анализ свойств множеств реализуемых действий. Существует другой эквивалентный подход к изучению задач стимулирования. Выше определялось множество действий, реализуемых некоторой системой стимулирования, после чего вычислялся максимум целевой функции центра по этому множеству, а затем уже выбиралась система стимулирования. При этом решение задачи стимулирования распадалось на два этапа: этап согласования и этап согласованного планирования. В явном виде эту последовательность можно выразить следующим образом: на первом этапе для каждой допустимой системы стимулирования $\sigma \in M$ вычисляется множество реализуемых действий $P(\sigma)$, затем берется их объединение: $P_M = \bigcup_{\sigma \in M} P(\sigma)$, после чего на втором этапе решается задача согласованного планирования – максимизации целевой функции центра на множестве P_M (см. также общий подход к решению задач управления, описанный в разделе 1.4).

Умея решать прямую задачу стимулирования, достаточно просто найти и решение соответствующей обратной задачи. Например, выражение (9) позволяет определить минимальные ограничения на стимулирование, позволяющие реализовывать заданные действия.

Взаимосвязь прямых и обратных задач стимулирования подробно обсуждалась в монографии [48]. Поэтому в настоящей работе ограничимся, в основном, прямыми задачами стимулирования, наиболее близкими к задачам управления персоналом и т. д.

Интересно подчеркнуть, что выше мы фактически «угадали» оптимальное решение, не решая задачу «в лоб»[30]. Существенную помощь при этом оказала идея введения множеств реализуемых действий. Альтернативным подходом является анализ минимальных «затрат» центра на стимулирование[31], к краткому описанию которого мы и переходим.

Если одно и то же действие может быть реализовано несколькими системами стимулирования, то, очевидно, что большей эффективностью обладает та из них, которая характеризуется меньшими затратами на стимулирование.

---

[30] Следует признать, что для теории активных систем во многих случаях характерно именно угадывание решений (исходя из интуиции, содержательных рассуждений и т. п.), а также стремление получить аналитическое решение. Объяснения этому достаточно прозрачны: изучение формальной модели организационной системы не является самоцелью исследователя – его задача заключается в том, чтобы предложить максимально адекватное действительности содержательно интерпретируемое решение задачи управления.

[31] Сделаем следующее терминологическое замечание. Понятие «затраты» характеризует затраты агента по выбору того или иного действия, понятие же «затраты на стимулирование» характеризует затраты центра на стимулирование по реализации того или иного действия.

Другими словами, оптимальным является класс систем стимулирования, реализующий любое действие агента с минимальными затратами центра на стимулирование. Это утверждение, несмотря на свою очевидность, дает универсальный инструмент решения задач стимулирования, который будет широко использоваться ниже.

Минимальными затратами центра на стимулирование по реализации действия $y \in P_M$ в классе допустимых систем стимулирования M называется следующая величина:

$$\sigma_{min}(y) = \min_{\sigma \in M} \{\sigma(y) \mid y \in P(\sigma), H(y) - \sigma(y) \geq 0\}, \qquad (13)$$

то есть минимальное допустимое вознаграждение, которое побудит агента выбрать заданное действие. Для тех действий, которые не могут быть реализованы в классе M, положим минимальные затраты на стимулирование равными бесконечности:

$$\sigma_{min}(y) = +\infty,\ y \in A \setminus P_M. \qquad (14)$$

Очевидно, что в рамках введенных предположений принцип компенсации затрат можно сформулировать следующим образом: $\forall\ y \in P_M\ \ \sigma_{min}(y) = c(y)$.

Отметим, что принцип компенсации затрат не следует понимать дословно: в «затраты» агента могут быть включены определенные нормативы рентабельности и т. д.

Минимальные затраты на стимулирование являются чрезвычайно важным понятием. Их исследование позволяет решать задачу синтеза оптимальной функции стимулирования, изучать свойства оптимального решения и т. д. [48].

Как следует из сказанного выше, в рамках введенных предположений система стимулирования K-типа является оптимальным решением задач стимулирования. Казалось бы, что можно еще «вытянуть» из этой модели? Все дело в том, что ранее считалось, что компенсаторная система является допустимой. Однако на практике это не всегда так –

центр может быть жестко ограничен некоторым фиксированным классом систем стимулирования, причем эти ограничения могут быть как экзогенными – например, определяться правовыми нормами, регулирующими оплату труда, так и эндогенными – по тем или иным причинам центр может быть склонен к использованию, например, сдельной или повременной оплаты, а не к простой компенсации затрат [47] (см. раздел 2.3 и [53, 72]).

2.2. Механизм стимулирования (дискретная модель)

Приведем постановку и решение *дискретной задачи стимулирования* (дискретной называется задача, в которой множество возможных действий агента конечно) в двухуровневой ОС, состоящей из центра и одного агента, то есть дискретный аналог задачи, рассмотренной в предыдущем разделе.

Решение дискретной задачи стимулирования. Пусть множество N возможных действий агента конечно: $N = \{1, 2, ..., n\}$, и его предпочтения в отсутствие стимулирования описываются вектором $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, компоненты которого интерпретируются как доход от выбора соответствующего действия. Управление со стороны центра заключается в выборе системы стимулирования $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, то есть в доплате (стимулировании, которое по знаку может быть как положительным, так и отрицательным) агенту за выбор тех или иных действий. Ограничений на абсолютную величину стимулирования накладывать не будем. Целевая «функция» агента $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ представляет собой сумму дохода и стимулирования, то есть $f_i = q_i + \sigma_i,\ i \in N$. В рамках гипотезы рационального поведения (см. раздел 1.1) агент выбирает при известной функции стимулирования действие, максимизирующее его целевую функцию. Если таких действий несколько, то будем считать, что агент выберет из них действие, наиболее благоприятное (в оговариваемом ниже смысле) для центра (гипотеза благожелательности). Эффективностью системы стимулирования (управления) называется максимальное значение целевой функции центра на множестве действий агента, реализуемых этой системой стимулирования.

Задача стимулирования заключается в назначении центром такой системы стимулирования, при которой агент выбирает наиболее благоприятное для центра действие. Решение рассматриваемой задачи элементарно (см. раздел 2.1): для фиксированной системы стимулирования σ определяется множество действий агента, доставляющих максимум его целевой функции (это множество называется множеством реализуемых действий): $P(\sigma) = \{i \in N \mid f_i \geq f_j, j \in N\}$, после чего ищется система стимулирования, которая реализует наиболее благоприятное для центра действие.

Если целевая функция центра $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ представляет собой разность между доходом и стимулированием, то есть $\Phi_i = H_i - \sigma_i,\ i \in N$, то оптимальна система стимулирования $\sigma^* = arg \max\limits_{\sigma} \max\limits_{i \in P(\sigma)} \{H_i - \sigma_i\}$.

Записывая определение множества реализуемых действий в виде: $P(\sigma) = \{i \in N \mid q_i + \sigma_i \geq q_j + \sigma_j, j \in N\}$, получаем, что минимальной (то есть имеющей в каждой точке минимальное значение) системой стимулирования, реализующей в рамках гипотезы благожелательности ***все*** действия агента, является компенсаторная система стимулирования $\sigma^K = (\sigma_1^K, \sigma_2^K, \ldots, \sigma_n^K)$, определяемая следующим образом:

$$\sigma_j^K = q_k - q_j, j \in N, \qquad (1)$$

где $k = arg \max\limits_{j \in N} q_j$.

Множество оптимальных с точки зрения центра реализуемых действий при этом есть:

$$P(\Phi, f) = Arg \max_{i \in N} \{H_i - \sigma_i^K\} = Arg \max_{i \in N} \{H_i - q_k + q_i\}. \quad (2)$$

Содержательно компенсаторная система стимулирования, являющаяся решением задачи стимулирования, делает все допустимые действия агента эквивалентными с точки зрения его целевой функции, то есть в точности компенсирует агенту те потери, которые он несет при выборе данного действия по сравнению с выбором действия k, приносящего наибольший доход в отсутствие стимулирования (очевидно, для центра доплачивать агенту за выбор этого действия не имеет смысла).

Итак, при формулировке задачи стимулирования в терминах целевых функций предпочтения агента на конечном множестве действий задаются вектором q чисел, разности (1) между которыми есть минимальные выплаты, делающие соответствующие пары действий эквивалентными с точки зрения значений целевой функции агента. Альтернативой такому описанию предпочтений является задание предпочтений непосредственно на парах действий агента, то есть перечисление n^2 чисел (являющихся, например, экспертной информацией, полученной в результате парных сравнений альтернатив), интерпретируемых как сравнительная предпочтительность действий в смысле минимальных доплат, делающих соответствующую пару действий эквивалентными. Этот подход и его взаимосвязь с описанием предпочтений в терминах целевых функций рассматривается ниже в настоящем разделе.

Задача стимулирования, сформулированная в терминах метризованных отношений. Целевая функция агента, зависящая от используемой центром системы стимулирования, порождает на множестве N полное антисимметричное транзитивное бинарное отношение (см. Приложение 3), причем всегда существует хотя бы одна недоминируемая по этому отношению альтернатива (действие). В терминах этого бинарного отношения задачу стимулирования можно формулировать следующим образом: найти такую систему стимулирования, что недоминируемой по соответствующему бинарному отношению окажется альтернатива, наиболее благоприятная с точки зрения центра.

Такая постановка задачи выглядит искусственной по следующим причинам. Во-первых, теряется содержательная интерпретация стимулирования как вознаграждения за выбор того или иного действия (введение явной зависимости бинарного отношения от вектора стимулирования выглядит очень экзотической конструкцией). Во-вторых, одно и то же бинарное отношение может порождаться несколькими (не только различающимися аддитивной константой) целевыми функциями (см. Приложение 4). Кроме того, не совсем ясно, как сделать обратный переход – от бинарного отношения к конкретной целевой функции, ведь в прикладных задачах ключевую роль играет именно численное значение вознаграждения, получаемого агентом.

Промежуточное место между «обычными» бинарными отношениями и целевыми функциями занимают так называемые *метризованные отношения* (МО). МО на множестве N задается матрицей $\Delta = ||\delta_{ij}||$, $i, j \in N$. Элементы δ_{ij} матрицы Δ, $i, j \in N$ – положительные, отрицательные или равные нулю числа, интерпретируемые как сравнительные предпочтительности различных альтернатив, в нашем случае – действий агента (отметим, что рассматриваются полные отношения, то есть исключается несравнимость действий и т. д.).

Будем считать, что если $\delta_{ij} < (>)\ 0$, то действие i в отсутствие стимулирования строго лучше (хуже) для агента, чем действие j; если $\delta_{ij} = 0$, то действия i и j эквивалентны.

Содержательно величина δ_{ij} равна той сумме, которую нужно доплатить агенту, чтобы действие i стало эквивалентным действию j.

Предположим, что управление со стороны центра (стимулирование) заключается в изменении сравнительной предпочтительности различных действий, то есть элементов матрицы Δ. Задача стимулирования при этом, как и ранее, заключается в таком их допустимом изменении, чтобы наилучшим для агента стало максимально благоприятное для центра действие.

Предположим, что предпочтения агента удовлетворяют следующему свойству: $\forall\, i, j, m \in N\ \ \delta_{im} + \delta_{mj} = \delta_{ij}$, которое назовем *условием внутренней согласованности* (УВС) предпочтений. Из УВС следует, что $\delta_{ii} = 0$, $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$, $i, j \in N$ (см. раздел «Псевдопотенциальные графы» в Приложении 2), причем граф, соответствующий матрице Δ, является потенциальным с потенциалами вершин q_i, $i \in N$, определяемыми с точностью до аддитивной константы следующим образом:

$$q_i = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{im}\,,\ i \in N. \qquad (3)$$

Матрицу Δ можно восстановить по потенциалам q_i, $i \in N$, однозначно:

$$\delta_{ij} = q_j - q_i,\ \ i, j \in N. \qquad (4)$$

Содержательно потенциалы действий можно интерпретировать как значения функции дохода агента, а элементы матрицы Δ – как их первые разности.

Если предпочтения агента заданы в виде МО, удовлетворяющего УВС, то информация обо всех элементах матрицы Δ является избыточной: например, если известна одна ее строка (или столбец), то в рамках УВС остальные элементы матрицы восстанавливаются суммированием по соответствующим цепочкам. Это свойство внутренне согласованных МО представляется достаточно привлекательным с точки зрения объема информации, которую необходимо получить на практике для идентификации параметров ОС.

Наилучшим с точки зрения агента действием в рассматриваемой модели можно считать действие k, для которого $\delta_{kj} \le 0$ для всех $j \in N$. В случае внутренне согласованных предпочтений такое действие (быть может, не единственное) всегда существует – это действие, имеющее максимальный потенциал. Таким образом, множество реализуемых действий в данном случае есть $P(\Delta) = \{k \in N \mid \delta_{kj} \le 0,\ j \in N\}$.

Определим для произвольной пары действий i и j, i, $j \in N$, операцию $(j \to i)$ «уравнивания» их потенциалов: $q_j^{j\to i} \to q_j + (q_i - q_j)$. В терминах элементов матрицы Δ эта операция состоит из двух этапов:

1) $\delta_{jm}^{j\to i} \to \delta_{jm} + \delta_{ij}$, $m \in N$;

2) $\delta_{mj}^{j\to i} \to -\delta_{jm}$, $m \in N$.

При этом очевидно, действие j становится эквивалентным действию i ($\delta_{ij} = \delta_{ji} = 0$), причем внутренняя согласованность предпочтений агента сохраняется, а стоимость для центра проведения операции $(j \to i)$ равна: $\delta_{ji} = q_i - q_j$ (ср. с (1)).

Идея решения задачи стимулирования заключается в следующем. Для того чтобы побудить агента выбрать действие $l \in N$, центр должен выплачивать агенту за выбор этого действия вознаграждение σ_l, удовлетворяющее системе неравенств: $\sigma_l - \sigma_i \ge \delta_{li}$, i, $l \in N$. Компенсаторная система стимулирования

$$\sigma_l = \max_{j \in N} \delta_{lj} = \max_{j \in N} (q_j - q_l) = q_k - q_l = \delta_{lk},\ l \in N, \qquad (5)$$

удовлетворяет этой системе неравенств. Поэтому если k – наиболее предпочтительное с точки зрения агента в отсутствие стимулирования действие, то минимальное значение стимулирования σ_l для реализации действия l равно δ_{lk}, $l \in N$. Еще раз отметим, что компенсаторная система стимулирования (5) делает ***все*** действия агента эквивалентными с его точки зрения.

Пусть предпочтения центра в отсутствие стимулирования заданы в виде МО – матрицы $\Gamma = ||\gamma_{ij}||$, $i, j \in N$, – удовлетворяющего УВС. Матрице Γ может быть поставлена в соответствие «функция» дохода центра $H_i = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma_{im}$, $i \in N$. Если вознаграждение, выплачиваемое агенту, вычитается из функции дохода центра, то, реализуя действие l, центр «теряет» δ_{lk}, $l \in N$. Следовательно, сравнительная предпочтительность с точки зрения центра пары действий (k, l) также изменяется. Численно новое значение в силу УВС равно сумме: $\gamma_{kl} + \delta_{kl}$. Значит, предпочтения центра с учетом стимулирования представляются МО Ξ, определяемым следующим образом: $\Xi = \Delta + \Gamma = ||\gamma_{ij} + \delta_{ij}||$, $i, j \in N$.

Тот факт, что в отношение предпочтения центра Ξ аддитивно входят как его собственные предпочтения в отсутствие стимулирования, так и предпочтения агента в отсутствие стимулирования, позволяет содержательно интерпретировать стимулирование как согласование их интересов.

Легко видеть, что если предпочтения и центра, и агента в отсутствие стимулирования внутренне согласованны, то и МО Ξ удовлетворяет УВС. Из этого следует справедливость следующего утверждения [11]: множество оптимальных реализуемых действий агента есть (ср. с (2)):

$$P(\Gamma, \Delta) = \{i \in N \mid \delta_{ij} \le \gamma_{ji},\ j \in N\}.$$

Взаимосвязь между задачами стимулирования, сформулированными в терминах целевых функций и МО, устанавливается следующим утверждением [11]: задачи стимулирования, сформулированные в терминах целевых функций и МО, удовлетворяющих УВС, эквивалентны.

Эквивалентность подразумевает сводимость одной задачи к другой и наоборот. Пусть задача стимулирования сформулирована в терминах целевых функций, то есть известна функция q дохода агента. Матрицу Δ, считая значения функции дохода потенциалами, определим по выражению (4); выполнение УВС очевидно. Аналогично, если выполнено УВС, то по матрице Δ можно по выражению (3) восстановить потенциалы (функцию дохода), то есть выполнить переход в обратную сторону. Итак, если выполнено УВС, то из (3)–(4) следует, что $P(\Gamma, \Delta) = P(\Phi, f)$.

Из проведенного анализа следует, что МО описывают более широкий класс предпочтений агента и центра, нежели целевые функции, так как последние эквивалентны внутренне согласованным МО.

Конечно, нет никаких гарантий, что полученное на практике (например, в результате некоторой экспертной процедуры) МО, отражающее выявленные предпочтения управляемого субъекта, окажется внутренне согласованным. Методы решения задач стимулирования, сформулированных в терминах МО, не удовлетворяющих УВС, описаны в [11, 47].

2.3. Базовые механизмы стимулирования

Перечислим *базовые системы* (*механизмы*) *стимулирования* в одноэлементных детерминированных, то есть функционирующих в условиях полной информированности обо всех существенных внешних и внутренних параметрах, организационных системах (оптимальная базовая система стимулирования – компенсаторная (К-типа) – подробно описана и исследована в разделе 2.1).

Скачкообразные системы стимулирования (С-типа) характеризуются тем, что агент получает постоянное вознаграждение (как правило, равное максимально возможному или заранее установленному значению) при условии, что выбранное им действие не меньше заданного, и нулевое вознаграждение при выборе меньших действий (рис. 2.3):

$$\sigma_C(x,\ y) = \begin{cases} C,\ y \geq x \\ 0,\ y < x \end{cases}. \qquad (1)$$

Параметр $x \in X$ называется *планом* – желательным с точки зрения центра состоянием (действием, результатом деятельности и т. д.) агента.

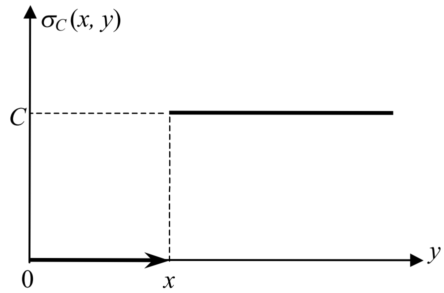


Рис. 2.3. *Скачкообразная система стимулирования*

Системы стимулирования С-типа содержательно могут интерпретироваться как *аккордные*, соответствующие фиксированному вознаграждению при заданном результате (например, объеме работ не ниже оговоренного заранее, времени и т. д.). Другая содержательная интерпретация соответствует случаю, когда действием агента является количество отработанных часов, то есть вознаграждение соответствует, например, фиксированному окладу.

Пропорциональные (линейные) системы стимулирования (L-типа). На практике широко распространены системы оплаты труда, основанные на использовании постоянных ставок оплаты: повременная оплата подразумевает существование *ставки оплаты* единицы рабочего времени (как правило, часа или дня), сдельная оплата – существование ставки оплаты за единицу продукции и т. д. Объединяет эти системы оплаты то, что вознаграждение агента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объему выпущенной продукции и т. д.), а ставка оплаты $\alpha \geq 0$ является коэффициентом пропорциональности (рис. 2.4):

$$\sigma_L(y) = \alpha\, y. \qquad (2)$$

В более общем случае возможно, что часть вознаграждения агента выплачивается ему независимо от его действий, то есть пропорциональная система может иметь вид:

$$\sigma_L(y) = \sigma_0 + \alpha\, y.$$

При использовании пропорциональных (линейных) систем стимулирования и непрерывно дифференцируемой монотонной выпуклой функции затрат агента выбираемое им действие определяется следующим выражением: $y^* = c'^{-1}(\alpha)$, где $c'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции затрат агента. При этом затраты центра на стимулирование превышают минимально необходимые (равные компенсируемым затратам агента) на следующую величину: $y^* c'(y^*) - c(y^*)$. Например, если центр имеет функцию дохода $H(y) = b\,y,\ b > 0,$ а функция затрат агента выпукла и равна: $c(y) = a\,y^2,\ \ a > 0$, то при любом реализуемом действии агента центр при использовании пропорциональной системы стимулирования переплачивает ему ровно в два раза.

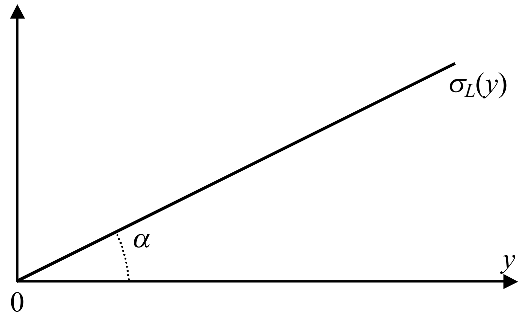


Рис. 2.4. *Пропорциональная система стимулирования*

Таким образом, при выпуклых функциях затрат агента эффективность пропорциональных систем стимулирования не выше, чем компенсаторных. График целевой функции агента при использовании центром пропорциональной системы стимулирования приведен на рисунке 2.5.

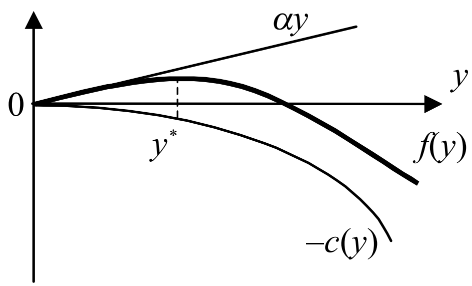


Рис. 2.5. *Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования L-типа*

Неэффективность пропорциональных систем стимулирования вида $\sigma_L(y) = \alpha\, y$ обусловлена требованием неотрицательности вознаграждений. Если допустить, что вознаграждение может быть отрицательным (при этом «отрицательный» участок функции стимулирования может не использоваться – см. рис. 2.6): $\breve{\sigma}_L(y) = \sigma_0 + \alpha\, y,$ где

$\sigma_0 \leq 0$, то при выпуклых функциях затрат агента эффективность пропорциональной системы стимулирования $\breve{\sigma}_L(\cdot)$ может быть равна эффективности оптимальной (компенсаторной) системы стимулирования.

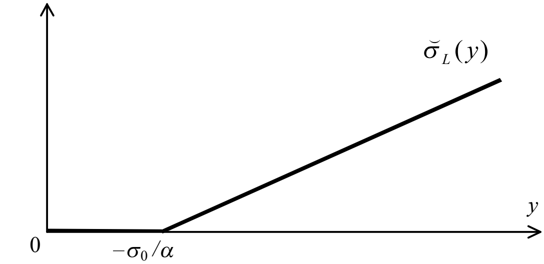


Рис. 2.6. *Линейная функция стимулирования*

Для обоснования этого утверждения достаточно воспользоваться следующими соотношениями (рис. 2.7):

$$y^*(\alpha) = c'^{-1}(\alpha),\ \sigma_0(\alpha) = c(c'^{-1}(\alpha)) - \alpha\, c'^{-1}(\alpha).$$

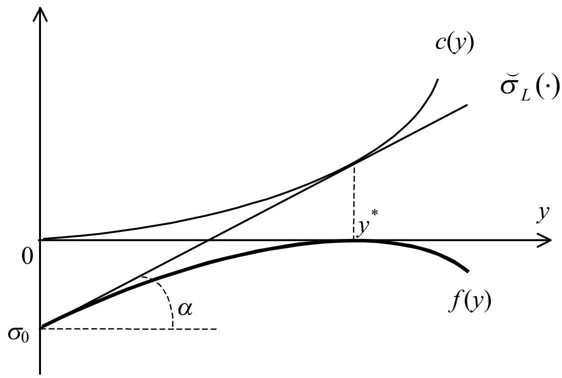


Рис. 2.7. *Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования* $\breve{\sigma}_L(\cdot)$

Оптимальное значение α^* ставки оплаты при этом выбирается из условия максимума целевой функции центра:

$$\alpha^* = arg \max_{\alpha \ge 0} [H(y^*(\alpha)) - \breve{\sigma}_L(y^*(\alpha))].$$

Системы стимулирования, основанные на перераспределении дохода (*D*-типа) используют следующую идею. Так как центр выражает интересы системы в целом, то можно условно идентифицировать его доход и доход от деятельности всей организационной системы. Поэтому возможно основывать стимулирование агента на величине дохода центра – положить вознаграждение агента равным определенной (например, постоянной) доле $\xi \in [0; 1]$ дохода центра:

$$\sigma_D(y) = \xi H(y). \qquad (3)$$

Отметим, что системы стимулирования *C, L* и *D*-типа являются параметрическими: для определения скачкообразной системы стимулирования достаточно задать пару (x, C); для определения пропорциональной системы стимулирования достаточно задать ставку оплаты α; для определения системы стимулирования, основанной на перераспределении дохода, достаточно задать норматив ξ.

Перечисленные выше системы стимулирования являются простейшими, представляя собой элементы «конструктора», используя которые можно построить другие более сложные системы стимулирования – *производные* от базовых. Для возможности такого «конструирования» необходимо определить операции над базовыми системами стимулирования. Для одноэлементных детерминированных ОС достаточно ограничиться операциями следующих трех типов [32, 47].

Первый тип операции – переход к соответствующей *«квази»-системе стимулирования* – вознаграждение считается равным нулю всюду, за исключением действия, совпадающего с планом. В детерминированных организационных системах «обнуление» стимулирования во всех точках, кроме плана, в рамках гипотезы благожелательности практически не изменяет свойств системы стимулирования, поэтому в ходе дальнейшего изложения мы не будем акцентировать внимание на различии некоторой системы стимулирования и системы стимулирования, получающейся из исходной применением операции первого типа.

Второй тип операции – разбиение множества возможных действий на несколько подмножеств и использование различных базовых систем стимулирования на различных подмножествах. Получающиеся в результате применения операции второго типа системы стимулирования называют *составными*.

Третий тип операции – алгебраическое суммирование двух систем стимулирования (что допустимо, так как стимулирование входит в целевые функции участников системы аддитивно). Результат применения операции третьего типа называют *суммарной системой стимулирования*.

Например, на рисунке 2.8 приведен эскиз системы стимулирования $C+L$-типа (сдельно-премиальная система оплаты труда [32, 47]), получающейся суммированием скачкообразной и пропорциональной систем стимулирования.

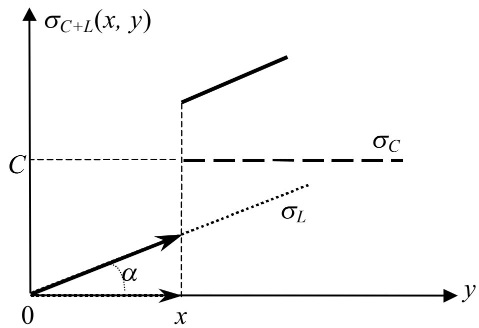


Рис. 2.8. *Система стимулирования C+L-типа (суммарная)*

Таким образом, ***базовыми системами стимулирования*** называют системы C-типа, K-типа, L-типа и D-типа, а также все производные от них (то есть получающиеся в результате применения операций перечисленных выше трех типов) системы стимулирования.

В [32, 47], во-первых, показано, что введенные базовые системы стимулирования достаточно полно охватывают используемые на практике формы индивидуальной заработной платы. Во-вторых, в указанных работах приведены оценки сравнительной эффективности различных базовых систем стимулирования.

2.4. Механизмы стимулирования в теории контрактов

Теория контрактов – раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий теоретико-игровые модели взаимодействия управляющего органа – центра (*principal*) – и управляемого субъекта – агента (*agent*), функционирующих в условиях внешней вероятностной неопределенности [48, 68].

Учет неопределенности в моделях теории контрактов производится следующим образом: *результат деятельности* агента $z \in A_0$ является случайной величиной, реализация которой зависит как от действий агента $y \in A$, так и от внешнего неопределенного параметра – *состояния природы* $\theta \in \Omega$. Состояние природы отражает внешние условия деятельности агента, в силу которых результат деятельности может отличаться от действия.

Информированность участников следующая: на момент принятия решений участники знают распределение вероятностей состояния природы $p(\theta)$ или условное распределение результата деятельности $p(z, y)$. Действия агента не наблюдаются центром, которому становится известным лишь результат деятельности. Агент может либо знать состояние природы на момент выбора своего действия (случай асимметричной информированности), либо знать только его распределение (случай симметричной информированности, более соответствующий моделям стимулирования и поэтому в основном рассматриваемый ниже).

Стратегией центра является выбор функции $\sigma(\cdot)$ от результата деятельности агента, которая в зависимости от содержательных трактовок модели может интерпретироваться как функция стимулирования (трудовые контракты), величина страхового возмещения (страховые контракты), величина задолженности или выплат (долговые контракты) и т. д. Стратегией агента является выбор действия при известной стратегии центра. Под *контрактом* понимается совокупность стратегий центра и агента (различают как явные, то есть зафиксированные с юридической точки зрения (большинство страховых и долговых контрактов являются явными), так и неявные, то есть не заключаемые формально или подразумеваемые (в ряде случаев трудовые контракты являются неявными), контракты.

Так как результат деятельности агента, значение которого определяет полезности участников ОС, зависит от неопределенных параметров, то будем считать, что при принятии решений они усредняют свои полезности по известному распределению вероятностей и выбирают стратегии, максимизирующие соответствующую ожидаемую полезность.

Оптимальным является контракт, который наиболее выгоден для центра (максимизирует его целевую функцию) при условии, что агенту взаимодействие с центром также выгодно. Последнее означает, что с точки зрения агента, как и в рассмотренной в разделе 2.1 модели, одновременно должны выполняться два условия: условие участия и условие индивидуальной рациональности.

Исторически первые работы по теории контрактов появились в начале 70-х годов прошлого века как попытка объяснения в результате анализа теоретико-игровых моделей наблюдаемого противоречия между результатами макроэкономических теорий и фактическими данными по безработице и инфляции в развитых странах.

Одно из «противоречий» заключалось в следующем. Существуют три «типа» заработной платы: рыночная заработная плата (резервная полезность, на которую может рассчитывать данный работник), эффективная заработная плата (та заработная плата, которая максимизирует эффективность деятельности работника с точки зрения предприятия; в большинстве случаев эффективная заработная плата определяется из условия равенства предельного продукта, производимого работником, и предельных затрат этого работника) и фактическая заработная плата (та зарплата, которую получает работник). Статистические данные свидетельствовали, что фактическая зарплата не равна эффективной заработной плате.

В первых моделях теории контрактов рассматривались задачи определения оптимального числа нанимаемых работников при учете только ограничения участия и фиксированных стратегиях центра. Затем появились работы, посвященные методам решения задач управления (задач синтеза оптимальных контрактов), сформулированных с учетом и ограничения участия, и условия согласованности. Затем акцент сместился на изучение более сложных моделей, описывающих многоэлементные и динамические модели, возможность перезаключения контрактов и т. д. (см. обзор в [48]).

С точки зрения эффектов страхования [10, 14, 33, 48] (перераспределения риска) интересен следующий сделанный в теории контрактов вывод: различие между эффективной и фактической зарплатой качественно может быть объяснено тем, что нейтральный к риску (см. описание отношения к риску в разделе 4.5) центр страхует несклонных к риску работников от изменений величины заработной платы в зависимости от состояния природы: стабильность заработной платы обеспечивается за счет того, что в благоприятных[32] ситуациях величина вознаграждения меньше эффективной заработной платы, зато в неблагоприятных ситуациях она выше той, которая могла бы быть без учета перераспределения риска[33]. Приведем пример, иллюстрирующий это утверждение.

Пусть у агента имеются два допустимых действия: $A = \{y_1; y_2\}$ и возможны два результата: $A_0 = \{z_1; z_2\}$, $P = \begin{Vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{Vmatrix}$, $1/2 < p \leq 1$. Содержательно результат деятельности агента в большинстве случаев (так как $p > 1/2$) «совпадает» с соответствующим действием.

Обозначим затраты агента по выбору первого и второго действия c_1 и c_2 соответственно, $c_2 \geq c_1$; ожидаемый доход центра от выбора первого и второго действия – H_1 и H_2 соответственно; стимулирование агента за первый и второй результат деятельности – σ_1 и σ_2 соответственно; целевую функцию центра, представляющую собой разность между доходом и стимулированием, – Φ, целевую функцию агента, представляющую собой разность между стимулированием и затратами, – f.

[32] На деятельность предприятий и, следовательно, на величину заработной платы оказывают влияние как внешние макропараметры (сезонные колебания, периоды экономического спада и подъема, мировые цены и т. д.), так и микропараметры (состояние здоровья работника и т. д.).

[33] Быть может, именно важностью этого вывода обусловлено то, что в работах по теории контрактов рассматриваются практически только модели с внешней вероятностной неопределенностью (в детерминированном случае или в случае неопределенности при нейтральном к риску агенте, эффекты страхования, естественно, пропадают, и фактическая заработная плата равна эффективной).

Задача центра заключается в назначении системы стимулирования, которая максимизировала бы ожидаемое значение его целевой функции[34] $E\Phi$ при условии, что выбираемое агентом действие максимизирует ожидаемое значение Ef его собственной целевой функции.

Допустим, что агент *нейтрален к риску* (то есть его *функция полезности*, отражающая отношение к риску, линейна), и рассмотрим, какую систему стимулирования центр должен использовать, чтобы побудить агента выбрать действие y_1. В предположении равенства нулю резервной полезности задача поиска минимальной системы стимулирования, реализующей действие y_1, имеет вид (первое ограничение является ограничением согласованности стимулирования, второе – ограничением индивидуальной рациональности агента):

$$p\,\sigma_1 + (1-p)\,\sigma_2 \to \min_{\sigma_1 \ge 0,\, \sigma_2 \ge 0} \qquad (1)$$

$$p\,\sigma_1 + (1-p)\,\sigma_2 - c_1 \ge p\,\sigma_2 + (1-p)\,\sigma_1 - c_2 \qquad (2)$$

$$p\,\sigma_1 + (1-p)\,\sigma_2 - c_1 \ge 0. \qquad (3)$$

Задача (1)–(3) является задачей линейного программирования.

Множество значений стимулирования, удовлетворяющих условиям (2) и (3), заштриховано на рисунке 2.9, его подмножество, на котором достигается минимум выражения (1), выделено жирной линией (линия уровня функции (1), отмеченная на рисунке 2.9 пунктирной линией, имеет тот же наклон, что и отрезок[35] A_1B_1, направление возрастания отмечено стрелкой).

---

[34] Символ «E» обозначает оператор математического ожидания.

[35] Отметим, что наличие множества решений при нейтральных к риску центре и агенте является характерной чертой задач теории контрактов. В то же время введение строго вогнутой функции полезности агента (отражающей его несклонность к риску) приводит к единственности решения – см. ниже.

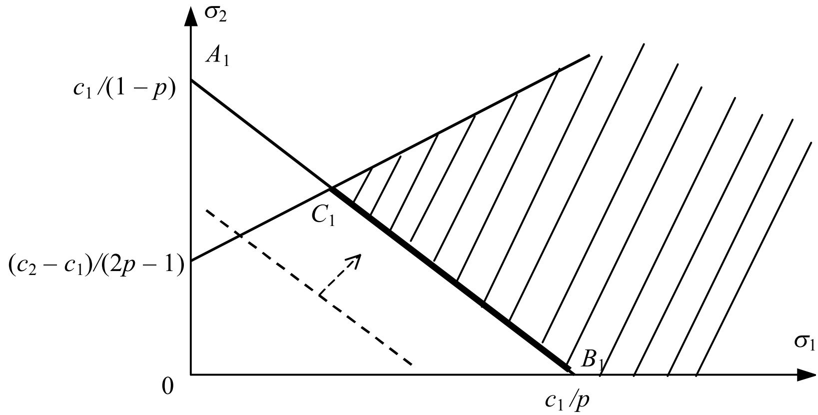


Рис. 2.9. *Реализация центром действия y_1 при нейтральном к риску агенте*

Для определенности в качестве решения (в рамках гипотезы благожелательности) выберем из отрезка C_1B_1 точку C_1, характеризуемую следующими значениями:

$$\sigma_1 = [p\,c_1 - (1-p)\,c_2] \,/\, (2p-1), \tag{4}$$

$$\sigma_2 = [p\,c_2 - (1-p)\,c_1] \,/\, (2p-1). \tag{5}$$

Легко проверить, что ожидаемые затраты центра на стимулирование $E\sigma(y_1)$ по реализации действия y_1 равны c_1, то есть

$$E\sigma(y_1) = c_1. \tag{6}$$

Предположим теперь, что центр хочет реализовать действие y_2. Решая задачу, аналогичную (1)–(3), получаем (см. точку C_2 на рис. 2.10):

$$\sigma_1 = [p\,c_1 - (1-p)\,c_2] \,/\, (2p-1), \tag{7}$$

$$\sigma_2 = [p\,c_2 - (1-p)\,c_1] \,/\, (2p-1), \tag{8}$$

$$E\sigma(y_2) = c_2. \tag{9}$$

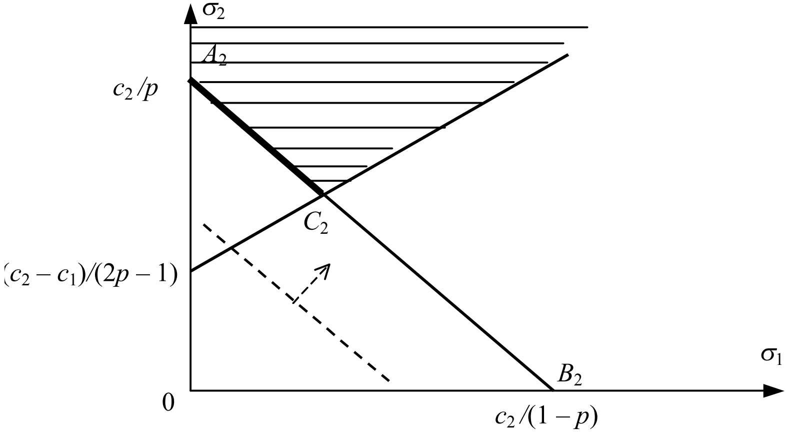


Рис. 2.10. *Реализация центром действия y_2 при нейтральном к риску агенте*

На втором шаге центр выбирает, какое из допустимых действий ему выгоднее реализовать, то есть какое действие максимизирует разность между доходом и ожидаемыми затратами центра на стимулирование по его реализации. Таким образом, ожидаемое значение целевой функции центра при заключении оптимального контракта равно: $\Phi^* = max\ \{H_1 - c_1, H_2 - c_2\}$.

Исследуем теперь эффекты страхования в рассматриваемой модели. Пусть агент не склонен к риску, то есть оценивает неопределенные величины в соответствии со строго возрастающей строго вогнутой функцией полезности $u(\cdot)$. Так как от случайной величины – результата деятельности агента – зависит его вознаграждение (значение функции стимулирования), то предположим, что целевая функция агента имеет вид:

$$f(\sigma(\cdot), z, y) = u(\sigma(z)) - c(y). \qquad (10)$$

Обозначим[36] $v_1 = u(\sigma_1)$, $v_2 = u(\sigma_2)$, $u^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная к функции полезности агента, и предположим, что функция полезности неотрицательна и в нуле равна нулю.

Пусть центр заинтересован в побуждении агента к выбору действия y_1. Задача стимулирования в рассматриваемой модели примет вид (первое ограничение является ограничением согласованности стимулирования, второе – ограничением индивидуальной рациональности агента):

$$p\, u^{-1}(v_1) + (1 - p)\, u^{-1}(v_2) \to \min_{v_1 \geq 0,\, v_2 \geq 0} \tag{11}$$

$$p\, v_1 + (1 - p)\, v_2 - c_1 \geq p\, v_2 + (1 - p)\, v_1 - c_2, \tag{12}$$

$$p\, v_1 + (1 - p)\, v_2 - c_1 \geq 0. \tag{13}$$

Заметим, что линейные неравенства (12)–(13) совпадают с неравенствами (2)–(3) с точностью до переобозначения переменных. На рисунке 2.11 заштрихована область допустимых значений переменных v_1 и v_2. Линия уровня функции (11) (которая является выпуклой в силу вогнутости функции полезности агента) обозначена пунктиром.

В случае строго вогнутой функции полезности агента (при этом, очевидно, целевая функция (11) строго выпукла) внутреннее решение задачи условной оптимизации (11)–(13) единственно и имеет следующий вид (в качестве примера возьмем функцию полезности $u(t) = \beta\, ln(1 + \gamma\, t)$, где β и γ – положительные константы):

$$v_1 = c_1 + (c_1 - c_2)\,(1 - p) / (2p - 1), \tag{14}$$

$$v_2 = c_1 + (c_2 - c_1)\, p / (2p - 1). \tag{15}$$

---

[36] Подобная замена переменных, позволяющая линеаризовать систему ограничений, используется в так называемом двушаговом методе решения задачи теории контрактов.

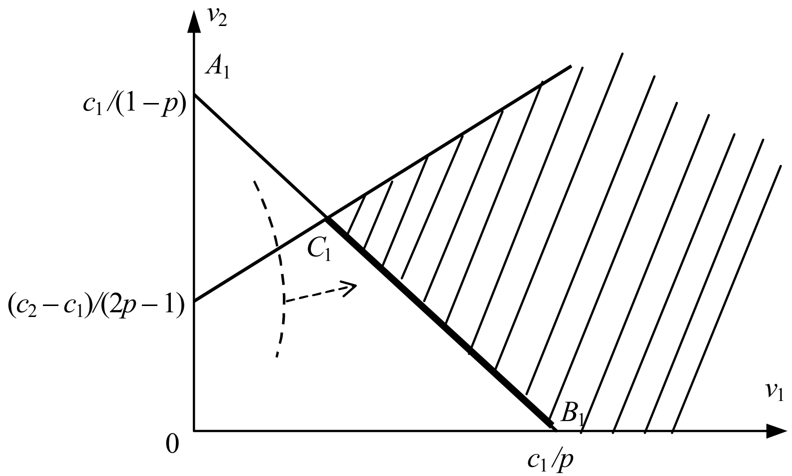


Рис. 2.11. *Реализация центром действия y_1 при несклонном к риску агенте*

Легко проверить, что в рассматриваемом случае при использовании системы стимулирования (14)–(15) ожидаемая полезность агента от выплат со стороны центра равна затратам агента по выбору первого действия, то есть

$$Ev = c_1. \tag{16}$$

Аналогично можно показать, что если центр побуждает агента выбирать второе действие, то ожидаемая полезность агента от выплат со стороны центра в точности равна затратам агента по выбору второго действия.

Из (14)–(15) видно, что в случае несклонного к риску агента, побуждая его выбрать первое действие, центр «недоплачивает» в случае реализации первого результата деятельности ($v_1 \leq c_1$) и «переплачивает» в случае реализации второго результата деятельности ($v_2 \geq c_1$), причем при предельном переходе к детерминированному случаю[37] (чему соответствует $p \to 1$) имеет место: $v_1 \to c_1$.

Графически эффект страхования в рассматриваемой модели для случая реализации первого действия отражен на рисунке 2.12, на котором изображены линейная (определенная с точностью до аддитивной константы) функция полезности агента $u_n(\cdot)$ и его строго вогнутая функция полезности $u_a(\cdot)$. Так как отрезок AB лежит выше и/или левее отрезка CD, а ожидаемая полезность агента в обоих случаях равна c_1, то при несклонности агента к риску ожидаемые выплаты $E\sigma_a$ меньше, чем ожидаемые выплаты $E\sigma_n$, соответствующие нейтральному к риску агенту (см. точки E и F на рис. 2.12).

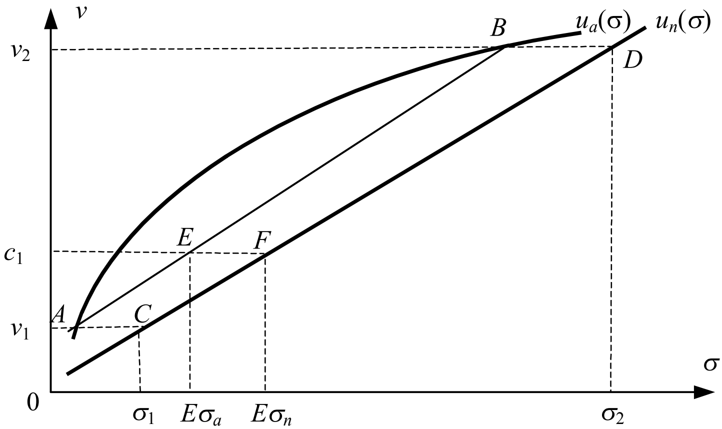


Рис. 2.12. *Эффект страхования при реализации центром действия y_1*

---

[37] Отметим, что все модели с неопределенностью должны удовлетворять принципу соответствия: при «стремлении» неопределенности к «нулю» (то есть при предельном переходе к соответствующей детерминированной системе) все результаты и оценки должны стремиться к соответствующим результатам и оценкам, полученным для детерминированного случая. Например, выражения (14)–(15) при $p = 1$ переходят в решения, оптимальные в детерминированном случае.

Завершив рассмотрение примера, иллюстрирующего эффекты страхования в моделях теории контрактов, перейдем к описанию задач стимулирования в многоэлементных системах.

2.5. Механизмы стимулирования за индивидуальные результаты

В предыдущих разделах рассматривались системы индивидуального стимулирования. Настоящий и следующие три раздела посвящены описанию моделей *коллективного стимулирования*, то есть стимулирования коллектива агентов.

Простейшим обобщением базовой одноэлементной модели является *многоэлементная ОС* с независимыми (невзаимодействующими) агентами. В этом случае задача стимулирования распадается на набор одноэлементных задач.

Если ввести общие для всех или ряда агентов ограничения на механизм стимулирования, то получается задача стимулирования в ОС со слабо связанными агентами (см. ниже), представляющая собой набор параметрических одноэлементных задач, для которого проблема поиска оптимальных значений параметров решается стандартными методами условной оптимизации.

Если агенты взаимосвязаны (в настоящей работе не рассматривается ситуация, когда существуют общие ограничения на множества допустимых состояний, планов, действий агентов – этот случай подробно описан в [53]), то есть затраты или/и стимулирование агента зависят, помимо его собственных действий, от действий других агентов, то получается «полноценная» многоэлементная модель стимулирования, описываемая в настоящем разделе.

Последовательность решения многоэлементных и одноэлементных задач имеет много общего. Сначала необходимо построить компенсаторную систему стимулирования, реализующую некоторое (произвольное или допустимое при заданных ограничениях) действие (первый этап – этап анализа согласованности стимулирования). В одноэлементных ОС в рамках гипотезы благожелательности для этого достаточно проверить, что при этом максимум целевой функции агента будет достигаться, в том числе и на реализуемом действии. В многоэлементных ОС достаточно показать, что выбор соответствующего действия является равновесной стратегией в игре агентов. Если равновесий несколько, то необходимо проверить выполнение для рассматриваемого действия дополнительной гипотезы о рациональном выборе агентов. В большинстве случаев достаточным оказывается введение аксиомы единогласия (агенты не будут выбирать равновесия, доминируемые по Парето другими равновесиями), иногда центру приходится вычислять гарантированный результат по множеству равновесных стратегий агентов и т. д. Далее следует приравнять стимулирование затратам и решить стандартную оптимизационную задачу – какое из реализуемых действий следует реализовывать центру (второй этап – этап согласованного планирования – см. также раздел 2.1). Конкретизируем этот общий подход.

Стимулирование в ОС со слабо связанными агентами. Описанные в разделе 2.1 результаты решения задачи стимулирования могут быть непосредственно обобщены на случай, когда имеются $n \geq 2$ агентов, функции затрат которых зависят только от их собственных действий (так называемые *сепарабельные затраты*), стимулирование каждого агента зависит только от его собственных действий, но существуют ограничения на суммарное стимулирование агентов. Такая модель называется *ОС со слабо связанными* *агентами* и является промежуточной между системами индивидуального и коллективного стимулирования.

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество агентов, $y_i \in A_i$ – действие i-го агента, $c_i(y_i)$ – затраты i-го агента, $\sigma_i(y_i)$ – стимулирование его со стороны центра, $i \in N$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – вектор действий агентов, $y \in A' = \prod_{i \in N} A_i$. Предположим, что центр получает доход $H(y)$ от деятельности агентов.

Пусть размеры индивидуальных вознаграждений агентов ограничены величинами $\{C_i\}_{i \in N}$, то есть $\forall\, y_i \in A_i$ $\sigma_i(y_i) \le C_i$, $i \in N$. Если фонд заработной платы (ФЗП) ограничен величиной R, то есть $\sum_{i \in N} C_i \le R$, то получаем (см. раздел 2.1), что максимальное множество реализуемых действий для i-го агента зависит от соответствующего ограничения механизма стимулирования и в рамках предположений раздела 2.1 равно $P_i(C_i) = [0, y_i^+(C_i)]$, $i \in N$.

Тогда оптимальное решение задачи стимулирования в ОС со слабо связанными агентами определяется следующим образом: максимизировать выбором индивидуальных ограничений $\{C_i\}_{i \in N}$, удовлетворяющих *бюджетному ограничению* $\sum_{i \in N} C_i \le R$, следующее выражение:

$$\Phi(R) = \max_{\{y_i \in P_i(C_i)\}_{i \in N}} H(y_1, ..., y_n),$$

что является стандартной задачей условной оптимизации.

Отметим, что когда ФЗП фиксирован, затраты центра на стимулирование не вычитаются из его дохода. Если ФЗП является переменной величиной, то его оптимальное значение R^* может быть найдено как решение следующей задачи:

$$R^* = \arg \max_{R \ge 0} \; [\Phi(R) - R].$$

Пример 2.1. Пусть функции затрат агентов – $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$, $i \in N$, а функция дохода центра – $H(y) = \sum_{i \in N} \alpha_i y_i$, где $\{\alpha_i\}_{i \in N}$ – положительные константы.

При заданных ограничениях $\{C_i\}_{i \in N}$ максимальное реализуемое действие каждого агента: $y_i^+(C_i) = \sqrt{2r_iC_i}$, $i \in N$. Задача свелась к определению оптимального набора ограничений $\{C_i^*\}_{i \in N}$, удовлетворяющего бюджетному ограничению и максимизирующего целевую функцию центра:

$$\begin{cases} \sum_{i \in N} \alpha_i \sqrt{2r_iC_i} \to \max_{\{C_i \geq 0\}_{i \in N}} \\ \sum_{i \in N} C_i \leq R \end{cases}.$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$C_i^* = \frac{r_i\alpha_i^2}{\sum_{j \in N} r_j\alpha_j^2} R, \ i \in I.$$

Оптимальный размер ФЗП равен: $R^* = \sum_{i \in N} r_i\alpha_i^2/2$.

Стимулирование в ОС с сильно связанными агентами. Обозначим $y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, \ y_{i+1}, \ldots, y_n) \in A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$ – обстановка игры для i-го агента.

Интересы и предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра $\Phi(\sigma, y)$ представляет собой разность между его доходом $H(y)$ и суммарным вознаграждением $\upsilon(y)$, выплачиваемым агентам: $\upsilon(y) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y)$, где $\sigma_i(y)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(y) = (\sigma_1(y), \sigma_2(y), \ldots, \sigma_n(y))$. Целевая функция i-го агента $f_i(\sigma_i, y)$ представляет собой разность между стимулированием, получаемым от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

$$\Phi(\sigma, y) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y), \tag{1}$$

$$f_i(\sigma_i, y) = \sigma_i(y) - c_i(y),\ i \in N. \tag{2}$$

Отметим, что и индивидуальное вознаграждение, и индивидуальные затраты i-го агента по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех агентов (*случай сильно связанных агентов* с *несепарабельными затратами*).

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования одновременно и независимо выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Относительно параметров ОС введем следующие предположения:

1) множество допустимых действий каждого агента совпадает с множеством неотрицательных действительных чисел;

2) функции затрат агентов непрерывны, неотрицательны и $\forall\ y_i \in A_i$ $c_i(y)$ не убывает по y_i, $i \in N$; $\forall\ y_{-i} \in A_{-i}$ $c_i(0, y_{-i}) = 0$;

3) функция дохода центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при ненулевых действиях агентов.

Второе предположение означает, что независимо от действий других агентов любой агент может минимизировать свои затраты выбором нулевого действия. Остальные предположения – такие же, как и в одноэлементной модели (см. раздел 2.1).

Так как и затраты, и стимулирование каждого агента в рассматриваемой модели зависят в общем случае от действий всех агентов, то агенты оказываются вовлеченными в игру, в которой выигрыш каждого зависит от действий всех. Обозначим $P(\sigma)$ – множество равновесных при системе стимулирования σ стратегий агентов – множество решений игры (тип равновесия пока не оговаривается; единственно предположим, что агенты выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью).

Как и в одноэлементной ОС, рассмотренной в разделе 2.1, гарантированной эффективностью (далее просто «эффективностью») стимулирования является минимальное (или максимальное – в рамках гипотезы благожелательности) значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

$$K(\sigma) = \min_{y \in P(\sigma)} \Phi(\sigma, y). \qquad (3)$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования σ^*, имеющей максимальную эффективность:

$$\sigma^* = \arg \max_{\sigma \in M} K(\sigma). \qquad (4)$$

Из результатов раздела 2.1 следует, что в частном случае, когда агенты независимы (вознаграждение и затраты каждого из них зависят только от его собственных действий), то оптимальной (точнее – δ-оптимальной, где $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$) является компенсаторная система стимулирования:

$$\sigma_{iK}(y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \ i \in N, \qquad (5)$$

где $\{\delta_i\}_{i \in N}$ – сколь угодно малые строго положительные константы (мотивирующие надбавки), а оптимальное действие y^*, реализуемое системой стимулирования (5) как равновесие в доминантных стратегиях[38] (РДС), является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$y^* = arg \max_{y \in A'} \{H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i)\}.$$

Если стимулирование каждого агента зависит от действий всех агентов (рассматриваемый в настоящем разделе случай коллективного стимулирования) и *затраты несепарабельны* (то есть затраты каждого агента зависят в общем случае от действий всех агентов, что отражает взаимосвязь и взаимозависимость агентов), то множества *равновесий Нэша*[39] $E_N(\sigma) \subseteq A'$ и РДС $y_d \in A'$ имеют вид:

$$E_N(\sigma) = \{y^N \in A \mid \forall\ i \in N\ \forall\ y_i \in A_i \qquad (6)$$
$$\sigma_i(y^N) - c_i(y^N) \geq \sigma_i(y_i,\ y_{-i}^N) - c_i(y_i,\ y_{-i}^N)\};$$

$y_{i_d} \in A_i$ – доминантная стратегия i-го агента, тогда и только тогда, когда

$$\forall\, y_i \in A_i, \forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ \sigma_i(y_{i_d}, y_{-i}) - c_i(y_{i_d}, y_{-i}) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i}).$$

Если при заданной системе стимулирования у всех агентов имеется доминантная стратегия, то говорят, что данная система стимулирования реализует соответствующий вектор действий как РДС.

---

[38] Напомним, что РДС называется такой вектор действий агентов, что каждому агенту выгодно выбирать соответствующую компоненту этого равновесия независимо от того, какие действия выбирают остальные агенты.

[39] Напомним, что равновесием Нэша называется такой вектор действий агентов, что каждому агенту выгодно выбирать соответствующую компоненту этого равновесия при условии, что все остальные агенты выбирают равновесные действия.

Фиксируем произвольный вектор действий агентов $y^* \in A'$ и рассмотрим следующую систему стимулирования:

$$\sigma_i(y^*, y) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \ \delta_i \geq 0, \ i \in N. \qquad (7)$$

В [53] доказано, что при использовании центром системы стимулирования (7) y^* – РДС. Более того, если $\delta_i > 0$, $i \in N$, то y^* – единственное РДС.

Содержательно при использовании системы стимулирования (7) центр использует следующий **принцип декомпозиции**. Он предлагает i-му агенту: «выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты независимо от того, какие действия выбрали остальные агенты, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр декомпозирует игру агентов.

Если стимулирование каждого агента должно зависеть только от его собственного действия, то, фиксировав для каждого агента обстановку игры, перейдем от (7) к системе индивидуального стимулирования следующим образом: фиксируем произвольный вектор действий агентов $y^* \in A'$ и определим систему стимулирования:

$$\sigma_i(y^*, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}^*) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \ \delta_i \geq 0, \ i \in N. \qquad (8)$$

Содержательно при использовании системы стимулирования (8) центр предлагает i-му агенту: «выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты, считая, что остальные агенты также выбрали соответствующие компоненты – y_{-i}^*, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр также декомпозирует игру агентов, то есть реализует вектор y^* как равновесие Нэша игры агентов.

Отметим, что функция стимулирования (8) зависит только от действия i-го агента, а величина y^*_{-i} входит в нее как параметр. Кроме того, при использовании центром системы стимулирования (8), в отличие от (7), каждый из агентов имеет косвенную информацию обо всех компонентах того вектора действий, который хочет реализовать центр. Для того чтобы система стимулирования (8) реализовывала вектор y^* как РДС, необходимо введение дополнительных (по сравнению со случаем использования (7)) предположений относительно функций затрат агентов – (см. [53]).

Здесь же уместно качественно пояснить необходимость введения неотрицательных констант $\{\delta_i\}_{i \in N}$ в выражениях (5), (7) и (8). Если требуется реализовать некоторое действие как одно из равновесий Нэша, то эти константы могут быть выбраны равными нулю. Если требуется, чтобы равновесие было единственным (в частности, чтобы агенты не выбирали нулевые действия – иначе при вычислении гарантированного результата в (3) центр вынужден рассчитывать на выбор агентами нулевых действий), то агентам следует доплатить сколь угодно малую, но строго положительную величину за выбор именно того действия, которое предлагается центром. Более того, величины $\{\delta_i\}_{i \in N}$ в выражениях (5), (7) и (8) играют важную роль и с точки зрения устойчивости компенсаторной системы стимулирования по параметрам модели. Например, если функция затрат i-го агента известна с точностью до $\Delta_i \leq \delta_i / 2$, то компенсаторная система стимулирования (7) все равно реализует действие y^* (см. [18, 45]).

Вектор оптимальных реализуемых действий агентов y^*, фигурирующий в качестве параметра в выражении (7) или (8), определяется в результате решения следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$y^* = arg \max_{t \in A'} \{H(t) - \upsilon(t)\}, \qquad (9)$$

где $v(t) = \sum_{i \in N} c_i(t)$, а эффективность системы стимулирования (7), (9) равна следующей величине:

$$K^* = H(y^*) - \sum_{i \in N} c_i(y^*) - \delta.$$

В [53] доказано, что система стимулирования (7), (9) является оптимальной, то есть обладает максимальной эффективностью, среди всех систем стимулирования в многоэлементных ОС.

Рассмотрим несколько примеров решения задач синтеза оптимальных систем коллективного стимулирования в многоэлементных ОС.

Пример 2.2. Решим задачу стимулирования в ОС с двумя агентами, имеющими функции затрат: $c_i(y) = \frac{(y_i + \alpha\, y_{3-i})^2}{2r_i}$, $i = 1, 2$, где α – параметр, отражающий степень взаимозависимости агентов. Пусть функция дохода центра $H(y) = y_1 + y_2$, а фонд заработной платы ограничен величиной R. Если центр использует систему стимулирования (7), то задача стимулирования сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} H(y) \to \max\limits_{y \geq 0} \\ c_1(y) + c_2(y) \leq R \end{cases}.$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что решение имеет вид:

$$y_1^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{\alpha\, r_2 - r_1}{\alpha^2 - 1},\ y_2^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{\alpha\, r_1 - r_2}{\alpha^2 - 1}.$$

Подставляя равновесные действия агентов в целевую функцию центра, получаем, что оптимальный размер ФЗП равен:

$$R^* = arg \max_{R \geq 0} \left[\sqrt{2R(r_1 + r_2)} / (1 - \alpha) - R \right] = \frac{r_1 + r_2}{2(\alpha - 1)^2}.$$

Пример 2.3. Вторым примером является *модель совместного производства*. Рассмотрим многоэлементную двухуровневую ОС, состоящую из центра и n агентов.

Пусть целевая функция i-го агента $f_i(y, r_i)$ представляет собой разность между доходом $h_i(y)$ от совместной деятельности и затратами $c_i(y, r_i)$, где r_i – параметр эффективности (тип) агента, то есть $f_i(y, r_i) = h_i(y) - c_i(y, r_i)$, $i \in N$.

Выберем следующий вид функций дохода и затрат:

$$h_i(y) = \lambda_i\, \theta\, Y,\ i \in N,\ c_i(y, r_i) = \frac{y_i^2}{2(r_i \pm \beta_i \sum_{j \neq i} y_j)},\ i \in N,$$

где $Y = \sum_{i \in N} y_i$, $\sum_{i \in N} \lambda_i = 1$.

Для случая, когда в знаменателе стоит знак «–», предполагается, что $\sum_{j \neq i} y_j < \frac{r_i}{\beta_i}$.

Содержательно набор агентов может интерпретироваться как фирма, подразделения которой (агенты) производят однородную продукцию, реализуемую на рынке по цене θ. Суммарный доход θY распределяется между агентами в соответствии с фиксированными долями $\{\lambda_i\}_{i \in N}$. Затраты агента возрастают по его действиям, а эффективность деятельности определяется типом агента r_i.

Взаимодействие агентов моделируется зависимостью затрат (эффективности деятельности) каждого из них от действий всех (других) агентов.

Знак «+» в знаменателе соответствует эффективному взаимодействию агентов (убыванию затрат на масштаб) – чем большие действия выбирают другие агенты, тем меньше затраты (выше эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать снижению удельных постоянных издержек, обмену опытом, технологиями и т. д.

Знак «–» в знаменателе соответствует неэффективному взаимодействию агентов (возрастанию затрат на масштаб) – чем большие действия выбирают другие агенты, тем больше затраты (ниже эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать нехватке основных фондов, ограничениям на побочные показатели (например, загрязнение окружающей среды) и т. д.

Коэффициенты $\{\beta_i \geq 0\}_{i \in N}$ отражают степень взаимозависимости агентов.

Пусть рыночная цена θ известна всем участникам ОС. Тогда, дифференцируя целевые функции агентов, приравнивая производные нулю и складывая получившиеся при этом выражения

$$y_i = \lambda_i\, \theta\, (r_i \pm \beta_i \sum_{j \neq i} y_j\,),\ i \in N,$$

получим следующую зависимость суммарных действий Y^+ от параметра θ:

$$Y^+(\theta) = \frac{\displaystyle\sum_{i \in N} \frac{\lambda_i\ \theta\ r_i}{1 \pm \lambda_i \theta \beta_i}}{1 \mp \displaystyle\sum_{i \in N} \frac{\lambda_i\ \theta\ \beta_i}{1 \pm \lambda_i \theta \beta_i}}.$$

Стимулированию соответствует изменение параметров $\{\lambda_i\}_{i \in N}$, которые могут интерпретироваться как внутренние (внутрифирменные, трансфертные и т. д.) цены.

Пример 2.4. Третьим примером является *аккордная система оплаты труда*. Рассмотрим ОС с двумя агентами, имеющими функции затрат $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, где r_i – тип i-го агента, $y_i \in A_i = \Re_1^+$, $i = 1, 2$. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между стимулированием $\sigma_i(y_1, y_2)$, получаемым от центра, и затратами, то есть:

$$f_i(y) = \sigma_i(y) - c_i(y_i),\ i = 1, 2.$$

Пусть центр использует систему стимулирования

$$\sigma_i(y_1, y_2) = \begin{cases} C_i, \ y_1 + y_2 \geq x \\ 0, \ \ y_1 + y_2 < x \end{cases}, \ i = 1, 2. \qquad (10)$$

Содержательно центр выплачивает каждому агенту фиксированное вознаграждение при условии, что сумма их действий оказывается не меньше, чем некоторое плановое значение $x > 0$. Обозначим $y_i^+ = \sqrt{2r_iC_i}$, $i = 1, 2$, $Y = \{(y_1, y_2) \mid y_i \leq y_i^+, \ i = 1, 2, \ y_1 + y_2 \leq x\}$ – множество индивидуально-рациональных действий агентов. Рассмотрим четыре возможных комбинации переменных (рис. 2.13–2.16).

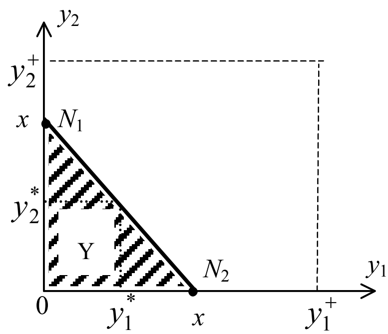


Рис. 2.13

В первом случае (рис. 2.13) множество равновесий Нэша составляет отрезок: $E_N(\sigma) = [N_1; N_2]$. Фиксируем произвольное равновесие $y^* = (y_1^*, y_2^*) \in E_N(\sigma)$. Наличие «большого» равновесия Нэша (отрезка, содержащего континуум точек) имеет несколько минусов с точки зрения эффективности стимулирования. Поясним это утверждение.

Так как все точки отрезка $[N_1; N_2]$ эффективны по Парето с точки зрения агентов, то целесообразно доплачивать агентам за выбор конкретных действий из этого отрезка малую, но строго положительную величину.

Построим систему индивидуального стимулирования в соответствии с результатами, приведенными выше (см. (8) и (9)):

$$\tilde{\sigma}_1^*(y_1) = \sigma_1(y_1,\ y_2^*) = \begin{cases} C_1, & y_1 \geq y_1^* \\ 0, & y_1 < y_1^* \end{cases}, \tag{11}$$

$$\tilde{\sigma}_2^*(y_2) = \sigma_2(y_1^*,\ y_2) = \begin{cases} C_2, & y_2 \geq y_2^* \\ 0, & y_2 < y_2^* \end{cases}.$$

При использовании этой системы стимулирования точка $y^* = (y_1^*,\ y_2^*)$ оказывается единственным равновесием Нэша, то есть, переходя от системы стимулирования (10) каждого агента, зависящей от действий всех агентов, к системе стимулирования (11), зависящей только от действий данного агента, центр декомпозирует игру агентов, реализуя при этом единственное действие. При этом эффективность стимулирования, очевидно, не только не понижается, а может оказаться более высокой, чем при использовании исходной системы стимулирования.

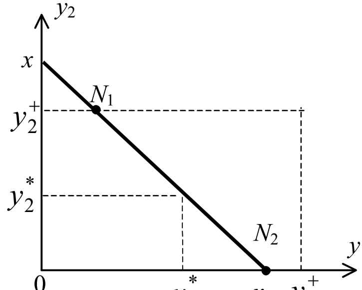


Рис. 2.14

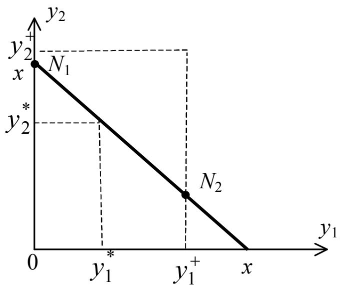


Рис. 2.15

Во втором и третьем случаях равновесием Нэша являются отрезки [N_1; N_2], изображенные на рисунках 2.14 и 2.15 соответственно.

И наконец, в четвертом случае (рис. 2.16) множество равновесий Нэша состоит из точки (0; 0) и отрезка [N_1; N_2], то есть

$$E_N(\sigma) = (0;\, 0) \cup [N_1;\, N_2],$$

причем точки интервала (N_1; N_2) недоминируемы по Парето другими равновесиями.

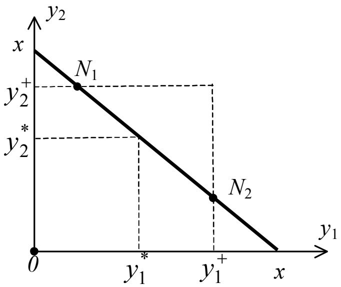


Рис. 2.16

Пусть в условиях рассматриваемого примера функции затрат агентов несепарабельны и имеют вид:

$$c_i(y) = \frac{(y_i + \alpha\, y_{3-i})^2}{2r_i}.$$

Определим множество Y индивидуально-рациональных действий агентов: $Y = \{(y_1, y_2) \mid c_i(y) \le C_i,\ i = 1, 2\}$. Для того чтобы не рассматривать все возможные комбинации значений параметров $\{r_1, r_2, C_1, C_2, x\}$, возьмем случай, представленный на рисунке 2.17.

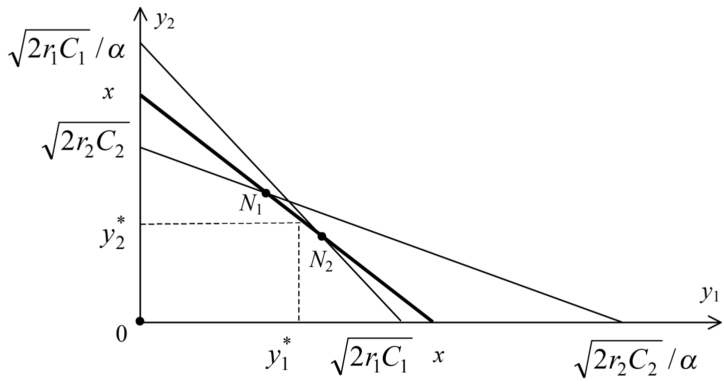


Рис. 2.17. *Множество равновесий Нэша $[N_1; N_2]$ в случае несепарабельных затрат*

В рассматриваемом случае множество равновесий Нэша включает отрезок $[N_1; N_2]$. Система стимулирования

$$\tilde{\sigma}_1^*(y) = \begin{cases} c_1(y_1^*, y_2), & y_1 = y_1^* \\ 0, & y_1 \ne y_1^* \end{cases} \qquad (12)$$

$$\tilde{\sigma}_2^*(y) = \begin{cases} c_2(y_1, y_2^*), & y_2 = y_2^* \\ 0, & y_2 \ne y_2^* \end{cases}$$

реализует действие $y^* \in [N_1; N_2]$ как равновесие в доминантных стратегиях.

Завершив рассмотрение механизмов стимулирования за индивидуальные результаты деятельности агентов, перейдем к описанию механизмов стимулирования за результаты совместной деятельности.

2.6. Механизмы стимулирования за коллективные результаты

В большинстве известных моделей стимулирования рассматриваются либо ОС, в которых управляющий орган – центр – наблюдает результат деятельности каждого из управляемых субъектов – агентов, находящийся в известном взаимно однозначном соответствии с выбранной последним стратегией (действием), либо ОС с неопределенностью [48], в которых наблюдаемый результат деятельности агентов зависит не только от его собственных действий, но и от неопределенных и/или случайных факторов (см., например, модель теории контрактов в разделе 2.4).

Настоящий раздел содержит формулировку и решение задачи коллективного стимулирования в многоэлементной детерминированной ОС, в которой центр имеет агрегированную информацию о результатах деятельности агентов.

Пусть в рамках модели, рассмотренной в предыдущем разделе, *результат деятельности* $z \in A_0 = Q(A')$ ОС, состоящей из n агентов, является функцией (называемой *функцией агрегирования*) их действий: $z = Q(y)$. Интересы и предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра представляет собой разность между его доходом $H(z)$ и суммарным вознаграждением $\upsilon(z)$, выплачиваемым агентам: $\upsilon(z) = \sum_{i \in N} \sigma_i(z)$, где $\sigma_i(z)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z), \ldots, \sigma_n(z))$, то есть

$$\Phi(\sigma(\cdot), z) = H(z) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z). \qquad (1)$$

Целевая функция i-го агента представляет собой разность между стимулированием, получаемым им от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

$$f_i(\sigma_i(\cdot), y) = \sigma_i(z) - c_i(y),\ i \in N. \qquad (2)$$

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решений о выбираемых стратегиях (соответственно – функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС, а также функция агрегирования. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

В случае, когда индивидуальные действия агентов наблюдаемы для центра (или когда центр может однозначно восстановить их по наблюдаемому результату деятельности), последний может использовать систему стимулирования, зависящую непосредственно от действий агентов: $\forall\ i \in N\ \tilde{\sigma}_i(y) = \sigma_i(Q(y))$. Методы решения задачи стимулирования для этого случая описаны в предыдущем разделе. Поэтому рассмотрим случай, когда центр наблюдает только результат деятельности ОС, от которого зависит его доход, но не знает и не может восстановить индивидуальных действий агентов, то есть имеет место *агрегирование информации* – центр имеет не всю информацию о векторе $y \in A'$ действий агентов, а ему известен лишь некоторый их агрегат $z \in A_0$ – параметр, характеризующий результаты совместных действий агентов.

Будем считать, что относительно параметров ОС выполнены предположения, введенные в предыдущем разделе и, кроме того, предположим, что функция агрегирования однозначна и непрерывна.

Как и выше, эффективностью стимулирования является минимальное (или максимальное – в рамках гипотезы благожелательности) значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

$$K(\sigma(\cdot)) = \min_{y \in P(\sigma(\cdot))} \Phi(\sigma(\cdot), Q(y)). \qquad (3)$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования σ^*, имеющей максимальную эффективность:

$$\sigma^* = \arg\max_{\sigma(\cdot)} K(\sigma(\cdot)). \qquad (4)$$

Отметим, что в рассмотренных в разделе 2.5 задачах стимулирования декомпозиция игры агентов основывалась на возможности центра поощрять агентов за выбор определенного (и наблюдаемого центром) действия. Если действия агентов не наблюдаемы, то непосредственное применение идеи декомпозиции невозможно, поэтому при решении задач стимулирования, в которых вознаграждение агентов зависит от агрегированного результата деятельности ОС, следует использовать следующий подход: найти множество действий, приводящих к заданному результату деятельности, выделить среди них подмножество, характеризуемое минимальными суммарными затратами агентов (и, следовательно, минимальными затратами центра на стимулирование при использовании компенсаторных функций стимулирования, которые оптимальны – см. разделы 2.1 и 2.5), построить систему стимулирования, реализующую это подмножество действий, а затем определить, реализация какого из результатов деятельности наиболее выгодна для центра.

Перейдем к формальному описанию решения задачи стимулирования в ОС с агрегированием информации.

Определим множество векторов действий агентов, приводящих к заданному результату деятельности ОС:

$$Y(z) = \{y \in A' \mid Q(y) = z\} \subseteq A', z \in A_0.$$

Выше показано, что в случае наблюдаемых действий агентов минимальные затраты центра на стимулирование по реализации вектора действий $y \in A'$ равны суммарным затратам агентов $\sum_{i \in N} c_i(y)$. По аналогии вычислим минимальные суммарные затраты агентов по достижению результата деятельности $z \in A_0$ $\tilde{\vartheta}(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y)$, а также множество действий $Y^*(z) = Arg \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y)$, на котором этот минимум достигается.

Фиксируем произвольный результат деятельности $x \in A_0$ и произвольный вектор $y^*(x) \in Y^*(x) \subseteq Y(x)$.

В [53] (при следующем дополнительном предположении «технического» характера: $\forall\, x \in A_0$, $\forall\, y' \in Y(x)$, $\forall\, i \in N$, $\forall\, y_i \in Proj_i\, Y(x)$ $c_j(y_i, y'_{-i})$ не убывает по y_i, $j \in N$) доказано, что:

1) при использовании центром системы стимулирования

$$\sigma^*_{ix}(z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)) + \delta_i, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, \; i \in N, \qquad (5)$$

вектор действий агентов $y^*(x)$ реализуется как единственное равновесие с минимальными затратами центра на стимулирование, равными: $\tilde{\vartheta}(x) + \delta$, где $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$;

2) система стимулирования (5) является δ-оптимальной.

Итак, первый шаг решения задачи стимулирования (4) заключается в поиске минимальной системы стимулирования (5), характеризуемой затратами центра на стимулирование $\tilde{\vartheta}(x)$ и реализующей вектор действий агентов, приводящий к заданному результату деятельности $x \in A_0$.

Поэтому на втором шаге решения задачи стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности ОС $x^* \in A_0$ как решение задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = arg \max_{x \in A_0} [H(x) - \widetilde{\vartheta}(x)]. \qquad (6)$$

Таким образом, выражения (5)–(6) дают решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования результатов совместной деятельности.

Исследуем, как незнание (невозможность наблюдения) центром индивидуальных действий агентов влияет на эффективность стимулирования. Пусть, как и выше, функция дохода центра зависит от результата деятельности ОС. Рассмотрим два случая. Первый – когда действия агентов наблюдаемы, и центр может основывать стимулирование как на действиях агентов, так и на результате деятельности ОС. Второй случай, когда действия агентов не наблюдаемы, и стимулирование может зависеть только от наблюдаемого результата деятельности ОС. Сравним эффективности стимулирования для этих двух случаев.

При наблюдаемых действиях агентов затраты центра на стимулирование $\vartheta_1(y)$ по реализации вектора $y \in A'$ действий агентов равны $\vartheta_1(y) = \sum_{i \in N} c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_1 равна: $K_1 = \max_{y \in A'} \{H(Q(y)) - \vartheta_1(y)\}$ (см. также предыдущий раздел).

При ненаблюдаемых действиях агентов минимальные затраты центра на стимулирование $\vartheta_2(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ определяются следующим образом (см. (5) и (6)): $\vartheta_2(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_2 равна: $K_2 = \max_{z \in A_0} \{H(z) - \vartheta_2(z)\}$.

В [53] доказано, что эффективности K_1 и K_2 равны. Данный факт, который условно можно назвать «теоремой об идеальном агрегировании в моделях стимулирования», помимо оценок сравнительной эффективности имеет чрезвычайно важное методологическое значение. Оказывается, что в случае, когда функция дохода центра зависит только от результата совместной деятельности агентов, эффективности стимулирования одинаковы как при использовании стимулирования агентов за наблюдаемые действия, так и при стимулировании за агрегированный результат деятельности, несущий меньшую информацию, чем вектор действий агентов.

Другими словами, наличие агрегирования информации не снижает эффективности функционирования системы. Это достаточно парадоксально, так как известно, что наличие неопределенности и агрегирования в задачах стимулирования не повышает эффективности. В рассматриваемой модели присутствует *идеальное агрегирование*, возможность осуществления которого содержательно обусловлена тем, что центру не важно, какие действия выбирают агенты, лишь бы эти действия приводили с минимальными суммарными затратами к заданному результату деятельности. При этом уменьшается информационная нагрузка на центр, а эффективность стимулирования остается такой же.

Итак, качественный вывод из проведенного анализа следующий: если доход центра зависит от агрегированных показателей деятельности агентов, то целесообразно основывать стимулирование агентов на этих агрегированных показателях. Даже если индивидуальные действия агентов наблюдаются центром, то использование системы стимулирования, основывающейся на действиях агентов, не приведет к увеличению эффективности управления, а лишь увеличит информационную нагрузку на центр.

Напомним, что в разделе 2.1 был сформулирован принцип компенсации затрат. На модели с агрегированием информации этот принцип обобщается следующим образом: минимальные затраты центра на стимулирование по реализации заданного результата деятельности ОС определяются как минимум компенсируемых центром суммарных затрат агентов, при условии, что последние выбирают вектор действий, приводящий к заданному результату деятельности. Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример 2.5. Пусть $z = \sum_{i \in N} y_i$, $H(z) = z$, $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, $i \in N$ (см. также примеры в разделе 2.5). Вычисляем

$$Y(z) = \{y \in A' \mid \sum_{i \in N} y_i = z\}.$$

Решение задачи

$$\sum_{i \in N} c_i(y_i) \to \min_{y \in A'} \text{ при условии } \sum_{i \in N} y_i = x$$

имеет вид: $y_i^*(x) = \frac{r_i}{W} x$, где $W = \sum_{i \in N} r_i$, $i \in N$. Минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $x \in A_0$ равны: $\vartheta(x) = x^2 / 2W$.

Вычисляя максимум целевой функции центра $\max_{x \geq 0} [H(x) - \vartheta(x)]$, находим оптимальный план: $x^* = W$ и оптимальную систему стимулирования:

$$\sigma_i^*(W, z) = \begin{cases} r_i \frac{x^2}{2W^2}, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, \; i \in N.$$

При этом эффективность стимулирования (значение целевой функции центра) равна: $K = W/2$.

В разделах 2.5 и 2.6 рассмотрены системы коллективного стимулирования, в которых зависимость вознаграждения от действий или результатов у каждого агента была индивидуальной. На практике во многих ситуациях центр вынужден использовать одинаковую для всех агентов зависимость вознаграждения от действия или результата совместной деятельности. Рассмотрим соответствующие модели.

2.7. Механизмы унифицированного стимулирования

До сих пор рассматривались *персонифицированные* системы индивидуального и коллективного стимулирования, в которых центр устанавливал для каждого агента свою зависимость вознаграждения от его действий (раздел 2.1), или действий других агентов (раздел 2.5), или результатов их совместной деятельности (раздел 2.6). Кроме персонифицированных, существуют *унифицированные* системы стимулирования, в которых зависимость вознаграждения от тех или иных параметров одинакова для всех агентов. Необходимость использования унифицированного стимулирования может быть следствием институциональных ограничений, а может возникать в результате стремления центра к «демократическому» управлению, созданию для агентов равных возможностей и т. д.

Так как унифицированное управление является частным случаем персонифицированного, то эффективность первого не превышает эффективности второго. Следовательно, возникает вопрос, к каким потерям в эффективности приводит использование унифицированного стимулирования, и в каких случаях потери отсутствуют?

Рассмотрим две модели коллективного унифицированного стимулирования (используемая техника анализа может быть применена к любой системе стимулирования) – унифицированные пропорциональные системы стимулирования и унифицированные системы коллективного стимулирования за результаты совместной деятельности. В первой модели унификация не приводит к потерям эффективности (оказывается, что именно унифицированные системы стимулирования оказываются оптимальными в классе пропорциональных), а во второй снижение эффективности значительно.

Унифицированные пропорциональные системы стимулирования. Введем следующее предположение относительно функций затрат агентов:

$$c_i(y_i, r_i) = r_i\, \varphi(y_i / r_i),\ i \in N, \tag{1}$$

где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, $\varphi(0) = 0$, (например, для функций типа Кобба-Дугласа $\varphi(t) = t^\alpha / \alpha,\ \alpha \geq 1$), $r_i > 0$ – параметр эффективности агента.

Если центр использует пропорциональные (L-типа) индивидуальные системы стимулирования: $\sigma_i(y_i) = \gamma_i\, y_i$, то целевая функция агента имеет вид: $f_i(y_i) = \gamma_i\, y_i - c_i(y_i)$. Вычислим действие, выбираемое агентом при использовании центром некоторой фиксированной системы стимулирования:

$$y_i^*(\gamma_i) = r_i\, \varphi'^{-1}(\gamma_i),\ i \in N, \tag{2}$$

где $\varphi'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции $\varphi(\cdot)$.

Минимальные суммарные затраты центра на стимулирование равны:

$$\vartheta_L(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\, r_i \varphi'^{-1}(\gamma_i), \tag{3}$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$.

Суммарные затраты агентов равны:

$$c(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \varphi(\varphi'^{-1}(\gamma_i)). \tag{4}$$

В рамках приведенной выше общей формулировки модели пропорционального стимулирования возможны различные постановки частных задач. Рассмотрим некоторые из них, интерпретируя действия агентов как объемы выпускаемой ими продукции.

Задача 1. Пусть центр заинтересован в выполнении агентами плана R по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами агентов (еще раз подчеркнем необходимость различения суммарных затрат агентов и суммарных затрат центра на стимулирование). Тогда его цель заключается в выборе ставок оплаты $\{\gamma_i\}_{i \in N}$ в результате решения следующей задачи:

$$\begin{cases} c(\gamma) \to \min\limits_{\gamma} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\gamma_i) = R \end{cases}, \qquad (5)$$

решение которой имеет вид:

$$\gamma_i^* = \varphi'(R / W);\ y_i^* = r_i\,(R / W);\ i \in N,$$
$$c^* = W\,\varphi\,(R / W);\ \vartheta_L^* = R\,\varphi'(R / W). \qquad (6)$$

где $W = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$.

Так как оптимальные ставки оплаты одинаковы для всех агентов, то оптимальна именно унифицированная система стимулирования.

Задача 2. Содержательно двойственной к задаче 1 является задача максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты агентов:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\gamma_i) \to \max\limits_{\gamma} \\ c(\gamma) \le R \end{cases}. \qquad (7)$$

Решение задачи (7) имеет вид:

$$\gamma_i^* = \varphi'(\varphi^{-1}(R / W));\ y_i^* = r_i\,\varphi^{-1}(R / W);\ i \in N,$$
$$c^* = R;\ \vartheta_L^* = \varphi^{-1}(R / W)\ W\,\varphi'(\varphi^{-1}(R / W)), \qquad (8)$$

то есть в двойственной задаче (естественно) оптимальным решением также является использование унифицированных пропорциональных систем стимулирования.

Замена в задачах 1 и 2 суммарных затрат агентов на суммарные затраты на стимулирование порождает еще одну пару содержательно двойственных задач.

Задача 3. Если центр заинтересован в выполнении агентами плана R по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами на стимулирование, то ставки оплаты определяются в результате решения следующей задачи:

$$\begin{cases} \vartheta_L(\gamma) \to \min\limits_{\gamma} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\gamma_i) = R \end{cases}, \qquad (9)$$

решение которой совпадает с (6), что представляется достаточно интересным фактом, так как суммарные затраты агентов отражают интересы управляемых субъектов, а суммарные затраты на стимулирование – интересы управляющего органа. Естественно, отмеченное совпадение является следствием сделанных предположений.

Задача 4 заключается в максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты на стимулирование:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\gamma_i) \to \max\limits_{\gamma} \\ \vartheta_L(\gamma) \le R \end{cases}. \qquad (10)$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем условие оптимальности (λ – множитель Лагранжа):

$$\lambda\, \varphi'^{-1}(\gamma_i)\, \varphi''(\gamma_i) + \gamma_i = 1,\ i \in N,$$

из которого следует, что все ставки оплаты должны быть одинаковы и удовлетворять уравнению

$$\gamma\, \varphi'^{-1}(\gamma) = R / W. \qquad (11)$$

Таким образом, мы доказали следующий результат: в организационных системах со слабо связанными агентами, функции затрат которых имеют вид (1), унифицированные системы стимулирования оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования.

Отметим, что выше установлено, что унифицированные пропорциональные системы стимулирования (*системы стимулирования UL-типа*) оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования в ОС со слабо связанными агентами, имеющими функции затрат вида (1). Поэтому исследуем их сравнительную эффективность на множестве всевозможных (не только пропорциональных) систем стимулирования. Как было показано выше (в разделах 2.1 и 2.5), для этого достаточно сравнить минимальные затраты на стимулирование, например, в задаче 2, с затратами на стимулирование в случае использования центром оптимальных компенсаторных систем стимулирования (которые равны $\vartheta_K(y^*) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \varphi(y_i / r_i)$).

Решая задачу выбора вектора $y^* \in A'$, минимизирующего $\vartheta_K(y^*)$ при условии $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = R$, получаем, что $\vartheta_K^* = W\, \varphi(R / W)$. Подставляя из выражения (6) $\vartheta_{UL}^* = R\, \varphi'(R / W)$, вычислим отношение минимальных затрат на стимулирование:

$$\vartheta_{UL}^* / \vartheta_K^* = R / W\ \ \varphi'(R / W) / \varphi(R / W). \qquad (12)$$

Из выпуклости функции $\varphi(\cdot)$ следует, что $\vartheta_{UL}^* / \vartheta_K^* \geq 1$. Более того, можно показать, что при $R / W > 0$ и строго выпуклых функциях затрат отношение (12) строго больше единицы. Так как суммарные затраты на стимулирование при использовании унифицированных пропорциональных систем стимулирования выше, чем при использовании «абсолютно оптимальных» компенсаторных систем стимулирования, следовательно, первые не оптимальны в классе всевозможных систем стимулирования. Полученный для многоэлементных организационных систем результат вполне согласован со сделанным в разделе 2.3 выводом, что в одноэлементных системах эффективность пропорционального стимулирования не выше, чем компенсаторного.

Унифицированные системы стимулирования результатов совместной деятельности. В разделе 2.5 исследовались персонифицированные системы стимулирования агентов за результаты их совместной деятельности. Рассмотрим, что произойдет, если в этой модели потребовать, чтобы система стимулирования была унифицированной.

Рассмотрим класс унифицированных систем стимулирования за результаты совместной деятельности (см. также раздел 2.5), то есть систем стимулирования, в которых центр использует для всех агентов одну и ту же зависимость индивидуального вознаграждения от результата деятельности $z \in A_0$. Введем следующую функцию:

$$c(y) = \max_{i \in N} \{c_i(y)\}. \tag{13}$$

На первом шаге вычислим минимальные затраты центра на стимулирование $\vartheta_U(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ унифицированной системой стимулирования:

$$\vartheta_U(z) = \min_{y \in Y(z)} c(y).$$

Множество векторов действий, минимизирующих затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $z \in A_0$, имеет вид: $Y^*(z) = Arg \min_{y \in Y(z)} c(y)$.

По аналогии с тем, как это делалось в разделе 2.5, можно показать, что унифицированная система стимулирования:

$$\sigma_{ix}(z) = \begin{cases} c(y^*(x)) + \delta / n, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, \; i \in N, \qquad (14)$$

где $y^*(x)$ – произвольный элемент множества $Y^*(x)$, реализует результат деятельности $x \in A_0$ с минимальными в классе унифицированных систем стимулирования затратами на стимулирование.

На втором шаге решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности ОС x_U^* как решение задачи оптимального согласованного планирования:

$$x_U^* = arg \max_{z \in A_0} \; [H(z) - n \; \vartheta_U(z)]. \qquad (15)$$

Выражения (14)–(15) дают решение задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования агентов за результаты их совместной деятельности. Легко видеть, что эффективность унифицированного стимулирования (14)–(15) не выше, чем эффективность персонифицированного стимулирования (5)–(6).

Пример 2.6. Пусть в условиях первого примера из раздела 2.5 центр должен использовать унифицированную систему стимулирования. Определим $c(y) = y_j^2 / 2r_j$, где $j = arg \min_{i \in N} \{r_i\}$. Тогда минимальные затраты на стимулирование равны: $\vartheta_U(z) = z^2/2 \; n \; r_j$. Оптимальный план $x_U^* = n \; r_j$ дает значение эффективности $n \; r_j / 2$, которая меньше эффективности $\sum_{i \in N} r_i / 2$ персонифицированного стимулирования, а равенство имеет место в случае одинаковых агентов.

2.8. Механизмы «бригадной» оплаты труда

Настоящий раздел посвящен описанию моделей коллективного стимулирования, а именно – «бригадных» форм оплаты труда[40], в рамках которых вознаграждение агента – члена бригады – определяется *коэффициентом его трудового участия* (КТУ) и зависит от его действия в сравнении с действиями других агентов (в частном случае – при фиксированном премиальном фонде, в общем случае – когда премиальный фонд определяется агрегированным результатом деятельности всей бригады в целом) [67].

Процедура определения КТУ может быть различной, а именно возможно:

– формирование КТУ пропорционально тарифному разряду (квалификации) работника;
– формирование КТУ пропорционально *коэффициенту трудового вклада* (КТВ) работника.

При формировании КТУ пропорционально тарифным разрядам имеется в виду следующее. Считается, что тарифный разряд характеризует деятельность каждого работника – агента. При этом полагается, что чем больше тарифный разряд, тем выше квалификация агента. Поэтому тарифный разряд, отражая эффективность работы каждого агента, может быть использован для оценки его деятельности.

При формировании КТВ учитывается фактический вклад каждого агента в зависимости от индивидуальной производительности труда и качества работы в общую работу всего трудового коллектива.

[40] Термин «бригадные формы оплаты труда» является устойчивым словосочетанием, возникшим еще в бывшем СССР. Тем не менее системы оплаты труда, основывающиеся на оценке индивидуального вклада в результат деятельности коллектива (с этой точки зрения бригадные формы оплаты труда близки к механизмам стимулирования за результаты коллективной деятельности, рассмотренным в разделе 2.6), широко используются до сих пор.

Итак, в трудовом коллективе руководство имеет свои цели и формирует условия функционирования, чтобы достичь этих целей. Соответственно, агенты тоже имеют свои цели и, выбирая соответствующие действия, стремятся их достичь.

Предполагается, что по результатам своей деятельности коллектив получает премиальный фонд R, который распределяется между агентами полностью в зависимости от выбранной системы стимулирования.

Будем считать, что i-й агент характеризуется показателем r_i, отражающим его квалификацию (эффективность деятельности), то есть индивидуальные затраты i-го агента $c_i = c_i(y_i, r_i)$ монотонно убывают с ростом квалификации r_i, $i \in N$. Коллектив, в котором квалификация всех агентов одинаковая, будем называть *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Эффективность системы стимулирования будем оценивать суммой действий агентов: $\Phi(y) = \sum_{i \in N} y_i$.

Процедуры, основанные на КТУ. Рассмотрим сначала случай использования КТУ. Фонд R распределяется между агентами на основе коэффициентов трудового участия $\{\delta_i\}_{i \in N}$, $\sum_{j \in N} \delta_j = 1$. Таким образом, премия i-го агента определяется выражением $\sigma_i = \delta_i R$.

Целевые функции агентов имеют вид:

$$f_i(y_i) = \sigma_i - c_i(y_i, r_i),\ i \in N. \qquad (1)$$

Достаточно распространенная из-за своей простоты процедура определения КТУ основывается только на учете показателя квалификации i-го агента, то есть $\delta_i = \frac{r_i}{\sum_{j \in N} r_j}$.

Подставляя в (1), получим, что использование КТУ, основанных на квалификации агентов и не зависящих от их реальных действий, не оказывает никакого воздействия на агентов, то есть не побуждает их выбирать, например, бóльшие действия. Поэтому перейдем к рассмотрению КТВ.

Процедуры, основанные на КТВ. Естественный и простейший способ определения КТВ агента – пропорционально действию последнего, то есть

$$\delta_i = \frac{y_i}{\sum_{j \in N} y_j}, \; i \in N. \qquad (2)$$

Пусть функции затрат агентов линейны: $c_i(y_i, r_i) = y_i / r_i$. Тогда из (1) и (2) получаем следующее выражение для целевой функции i-го агента, зависящей уже от действий всех агентов:

$$f_i(y) = R \; \delta_i = \frac{y_i}{\sum_{j \in N} y_j} - y_i / r_i, \; i \in N. \qquad (3)$$

Следовательно, исследуемую ситуацию можно рассматривать как игру n лиц с функциями выигрыша вида (3).

Однородный коллектив. Рассмотрим сначала случай однородного коллектива. Равновесные по Нэшу действия агентов имеют вид:

$$y_i^* = \frac{Rr(n-1)}{n^2}, \; i \in N, \qquad (4)$$

что приводит к следующему значению *эффективности*:

$$K_1(R, r, n) = \frac{Rr(n-1)}{n}. \qquad (5)$$

Из (4) видно, что чем больше премиальный фонд, тем бóльшие действия выбирают агенты. Из (5) следует, что эффективность линейно растет при увеличении как премиального фонда (то есть не существует оптимального размера премиального фонда, максимизирующего эффект K_1 / R его использования), так и квалификации агентов. Если действия агентов ограничены сверху, то существует оптимальный размер премиального фонда, который при известном ограничении может быть вычислен из выражения (4). Кроме того, легко показать (см. подробности в [67]), что разбиение однородного коллектива на более мелкие коллективы и соответствующее дробление премиального фонда не приводит к росту эффективности его использования. Можно также показать, что при постоянном размере фонда сокращение однородного коллектива приводит к уменьшению эффективности и увеличению действий, выбираемых агентами.

Рассмотрим следующую задачу: возможно ли повысить суммарный показатель эффективности однородного коллектива, не увеличивая фонд премирования R, но по-другому формируя КТВ агентов?

Для этого рассмотрим следующую процедуру формирования КТВ, которая более чувствительна к различию агентов, чем (2):

$$\delta_i = \frac{y_i^\alpha}{\sum_{j \in N} y_j^\alpha},\ i \in N,\ 1 \le \alpha \le \frac{n}{n-1}. \qquad (6)$$

Тогда равновесные по Нэшу действия агентов имеют вид:

$$y_i^* = \alpha \frac{Rr(n-1)}{n^2},\ i \in N, \qquad (7)$$

что превышает (4).

Ограничение $1 \le \alpha \le \dfrac{n}{n-1}$ позволяет констатировать, что использование процедуры (6) формирования КТВ дает возможность увеличить эффективность по сравнению с процедурой (2) на $1/(n-1)$ процентов. Например, если коллектив состоит из 11 человек, показатель эффективности можно увеличить максимум на 10 %.

Неоднородный коллектив. Из (2) и (3) следует, что в неоднородном коллективе ситуации равновесия Нэша соответствуют следующие действия агентов и эффективность[41]:

$$y_i^* = \frac{\sum_{j \in N} 1/r_j - (n-1)/r_i}{(\sum_{j \in N} 1/r_j)^2} R(n-1)\,,\; i \in N, \qquad (8)$$

$$K_2(R,\ \vec{r}\,,\ n) = \sum_{j \in N} y_j^* = \frac{R(n-1)}{\sum_{j \in N} 1/r_j}\,. \qquad (9)$$

Предположим, что коллектив состоит из агентов двух типов – m агентов-лидеров, имеющих эффективность r^+, и $(n-m)$ «рядовых» агентов, то есть агентов, имеющих эффективность r^-, причем $r^+ > r^-$.

Тогда $\sum_{i \in N} 1/r_i = m / r^+ + (n-m) / r^-$.

Используя выражение (8), найдем действия, выбираемые в равновесии лидерами:

$$y^+ = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}\left[1 - \frac{1}{r^+}\,\frac{(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}\right], \qquad (10)$$

и рядовыми агентами:

$$y^- = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}\left[1 - \frac{1}{r^-}\,\frac{(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}\right]. \qquad (11)$$

Используя выражение (9), найдем значение эффективности

$$K_2(R, m, n) = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}\,. \qquad (12)$$

[41] Отметим, что в случае однородных агентов (8) переходит в (4), а (9) – в (5).

Из выражений (8), (10), (11) видно, что появление в коллективе лидеров (более квалифицированных агентов) вынуждает рядовых (менее квалифицированных) агентов выбирать меньшие действия. Понятно, что это влечет за собой уменьшение значений их целевых функций.

Из (11) получаем, что если количество лидеров в коллективе таково, что $m \geq \dfrac{1/r^-}{1/r^- - 1/r^+}$, то рядовым агентам вообще не выгодно увеличивать выбираемые ими действия. Однако при $m = 1$, то есть если в коллективе есть только один лидер, рядовым агентам всегда выгодно увеличивать действия. В то же время легко показать [67], что появление в коллективе лидеров приводит к повышению эффективности всего коллектива, несмотря на выбор меньших действий рядовыми агентами.

Исследуем, возможно ли дальнейшее увеличение показателей эффективности работ в коллективе в рамках того же премиального фонда R. Для этого разобьем неоднородный коллектив на два однородных подколлектива. Пусть первый состоит из m лидеров, а второй – из $(n - m)$ рядовых агентов. Соответственно разобьем премиальный фонд R всего коллектива, а именно: $R = R^+ + R^-$. Тогда в равновесии Нэша эффективность первого подколлектива равна $\dfrac{R^+ r^+ (m-1)}{m}$, а второго – $\dfrac{R^- r^- (n-m-1)}{n-m}$.

Соответственно, общий показатель эффективности всего коллектива из n агентов равен:

$$K_3(R, m, n) = \frac{R^+ r^+ (m-1)}{m} + \frac{R^- r^- (n-m-1)}{n-m}. \qquad (13)$$

Выше отмечалось, что разбиение однородного коллектива на несколько подколлективов не приводит к увеличению суммарного показателя эффективности. Для неоднородного коллектива это не всегда так. Например, из сравнения (12) и (13) следует, что если в коллективе имеется половина лидеров, эффективность деятельности которых в два раза выше эффективности рядовых агентов, то выделение лидеров в отдельный подколлектив повысит суммарную эффективность, только если в исходном коллективе было не более шести агентов. В противном случае возможно снижение суммарной эффективности в результате разбиения неоднородного коллектива на два однородных подколлектива, даже при оптимальном распределении премиального фонда между подколлективами.

Индивидуальное и коллективное стимулирование. В заключение настоящего раздела сравним эффективности индивидуального и коллективного стимулирования для ряда практически важных частных случаев (см. также [67]).

Пусть функции затрат агентов линейны: $c_i(y_i, r_i) = y_i / r_i$, $i \in N$, и пусть существует одинаковое для всех агентов ограничение y^{max} на максимальную величину выбираемого действия: $A_i = [0; y^{max}]$, $i \in N$.

Перенумеруем агентов в порядке убывания эффективностей деятельности:

$$r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_n. \tag{14}$$

Предположим, что ограничение y^{max} таково, что действие y_1^*, определяемое (8) при $i = 1$, является допустимым. Тогда допустимыми являются и действия всех остальных агентов при использовании системы коллективного стимулирования (2), основанной на КТВ. Эффективность коллективного стимулирования $K_2(R, \vec{r}, n)$ при этом определяется выражением (9).

Вычислим эффективность индивидуального стимулирования, при котором центр может стимулировать агентов независимо за индивидуальные результаты деятельности при условии, что сумма вознаграждений не превышает фонд R. Для этого воспользуемся принципом компенсации затрат (см. раздел 2.1) и результатами решения задачи стимулирования слабо связанных агентов (см. раздел 2.5).

Получим, что при использовании центром компенсаторных систем стимулирования оптимальной является компенсация затрат первым в упорядочении (14) k агентам (или (k + 1) агенту – в зависимости от соотношения параметров), где

$$k = min\ \{j \in N \mid y^{max} \sum_{i=1}^{j} 1/r_i \le R, y^{max} \sum_{i=1}^{j+1} 1/r_i > R\}. \quad (15)$$

Содержательно выражение (15) означает, что центру следует в первую очередь задействовать агентов, эффективность деятельности которых максимальна. Другими словами, отличное от нуля стимулирование получат первые k или (k + 1) агентов, а остальным следует назначить нулевое вознаграждение (их использование нецелесообразно). Таким образом, эффективность индивидуального стимулирования равна:

$$K_4(R, \vec{r}, n) = k\, y^{max} + r^{k+1} (R - y^{max} \sum_{i=1}^{k} 1/r_i). \qquad (16)$$

Выражения (9) и (16) позволяют проводить сравнительный анализ эффективностей коллективного и индивидуального стимулирования.

Как правило, индивидуальное стимулирование оказывается более эффективным (см. также раздел 2.7). Например, в случае однородных коллективов справедлива следующая оценка:

$$K_4(R, r, n) / K_1(R, r, n) \approx n / (n - 1) \ge 1.$$

Близкими к бригадным формам оплаты труда являются так называемые ранговые системы стимулирования, в которых для коллективного стимулирования используются процедуры соревнования, установления системы нормативов и т. д. Этот класс коллективных систем стимулирования подробно рассматривается в [47, 53] и в разделе 2.10, а в следующем разделе анализируются системы стимулирования в матричных структурах управления.

2.9. Механизмы стимулирования в матричных структурах

Во многих реальных системах один и тот же агент оказывается подчинен одновременно нескольким центрам, находящимся либо на одном, либо на различных уровнях иерархии. Первый случай называется *распределенным контролем*, второй – *межуровневым взаимодействием*.

Межуровневое взаимодействие. Анализ моделей межуровневого взаимодействия [43] свидетельствует, что двойное подчинение агента управляющим органам, находящимся на различных уровнях иерархии, оказывается неэффективным. Косвенным подтверждением этой неэффективности является известный управленческий принцип «вассал моего вассала – не мой вассал». Поэтому с нормативной точки зрения каждый агент должен быть подчинен только своему непосредственному «начальнику» – управляющему органу, находящемуся на следующем (и только на следующем) более высоком уровне иерархии.

Возникает закономерный вопрос: почему в реальных организационных системах наблюдаются эффекты межуровневого взаимодействия? Дескриптивное (без учета нормативной структуры взаимодействия участников и институциональных ограничений) объяснение таково. Обычно предполагается, что потери эффективности могут возникать только из-за факторов агрегирования, декомпозиции задач управления и недостаточной информированности центра об агентах [43]. Если же присутствуют, в частности, информационные ограничения на промежуточном уровне – например, количество информации, которое должен переработать управляющий орган некоторой подсистемы, превосходит его возможности, – то часть функций управления (быть может, в агрегированном виде) вынужденно передается на более высокий уровень. Проще говоря, основной причиной наблюдаемого на практике межуровневого взаимодействия, как правило, является некомпетентность (в объективном смысле этого слова) промежуточного центра. Поэтому, с одной стороны, при решении задач синтеза организационной, функциональной, информационной и других структур ОС априори следует допускать возможность межуровневого взаимодействия, стремясь, тем не менее, избежать его, насколько это возможно. С другой стороны, наличие межуровневого взаимодействия в реальной ОС косвенно свидетельствует о неоптимальности ее функционирования и должно послужить руководителю сигналом о необходимости пересмотра структуры, а иногда и состава, системы.

В то же время двойное подчинение агентов центрам одного и того же уровня зачастую неизбежно. Примером являются матричные структуры управления [19, 24, 43, 50], для которых распределенный контроль является характерной чертой.

Распределенный контроль. Специфической чертой *матричных структур управления* (МСУ), характерных для проектно-ориентированных организаций, является подчиненность одного и того же агента одновременно нескольким центрам одного уровня иерархии, функции которых могут быть различными (координирующая, обеспечивающая, контролирующая и т. д.). Например, на иерархическую организационную структуру накладывается «горизонтальная» структура проектов (рис. 2.18).

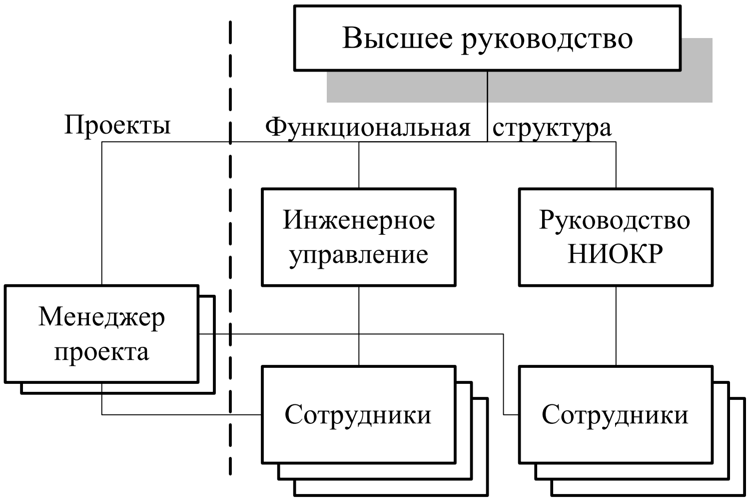


Рис. 2.18. *Пример матричной структуры управления*

В МСУ центры, осуществляющие управление агентом, оказываются вовлеченными в «игру», равновесие в которой имеет достаточно сложную структуру. В частности, можно выделить два устойчивых режима взаимодействия центров – режим сотрудничества и режим конкуренции.

В *режиме сотрудничества* центры действуют совместно, что позволяет добиваться требуемых результатов деятельности управляемого агента с использованием минимального количества ресурсов.

В *режиме конкуренции*, который возникает, если цели центров различаются достаточно сильно, ресурсы расходуются неэффективно.

Приведем простейшую модель матричной структуры управления (достаточно полное представление о современном состоянии исследований этого класса задач управления можно получить из [2, 21, 24, 28, 43, 54]).

Пусть ОС состоит из одного агента и k центров. Стратегией агента является выбор действия $y \in A$, что требует от него затрат $c(y)$. Каждый центр получает от деятельности агента доход, описываемый функцией $H_i(y)$, и выплачивает агенту стимулирование $\sigma_i(y)$, $i \in K = \{1, 2, ..., k\}$ – множеству центров. Таким образом, целевая функция i-го центра имеет вид:

$$\Phi_i(\sigma_i(\cdot), y) = H_i(y) - \sigma_i(y),\ i \in K, \qquad (1)$$

а целевая функция агента:

$$f(\{\sigma_i(\cdot)\}, y) = \sum_{i \in K} \sigma_i(y) - c(y). \qquad (2)$$

Порядок функционирования следующий: центры одновременно и независимо (кооперативные модели взаимодействия центров в системах с распределенным контролем рассматриваются в [24, 28]) выбирают функции стимулирования и сообщают их агенту, который затем выбирает свое действие.

Ограничимся рассмотрением множества Парето-эффективных равновесий Нэша игры центров, в которых, как показано в [54], их стратегии имеют вид:

$$\sigma_i(x, y) = \begin{cases} \lambda_i, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases},\ i \in K. \qquad (3)$$

Содержательно центры договариваются о том, что будут побуждать агента выбирать действие $x \in A$ – *план* – и осуществлять совместное стимулирование. Такой режим взаимодействия центров называется режимом сотрудничества.

Из условий оптимальности по Парето следует, что сумма вознаграждений, получаемых агентом от центров в случае выполнения плана, равна его затратам (обобщение принципа компенсации затрат на системы с распределенным контролем), то есть:

$$\sum_{i \in K} \lambda_i = c(x). \qquad (4)$$

Условие выгодности сотрудничества для каждого из центров можно сформулировать следующим образом: в режиме сотрудничества каждый центр должен получить полезность, не меньшую, чем он мог бы получить, осуществляя стимулирование агента в одиночку (компенсируя последнему затраты по выбору наиболее выгодного для данного центра действия). Полезность i-го центра от «самостоятельного» взаимодействия с агентом в силу результатов раздела 2.1 равна:

$$W_i = \max_{y \in A} [H_i(y) - c(y)],\ i \in K. \quad (5)$$

Обозначим $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$,

$$S = \{x \in A \mid \exists\ \lambda \in \Re_+^k : H_i(x) - \lambda_i \geq W_i,\ i \in K,\ \sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)\} \quad (6)$$

множество таких действий агента, для реализации которых сотрудничество выгодно для центров.

Множество пар $x \in S$ и соответствующих векторов λ называется *областью компромисса*:

$$\Lambda = \{x \in A,\ \ \lambda \in \Re_+^k \mid H_i(x) - \lambda_i \geq W_i,\ \ i \in K,\ \ \sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)\}. \quad (7)$$

Режим сотрудничества, по определению, имеет место, если область компромисса не пуста: $\Lambda \neq \varnothing$. В режиме сотрудничества агент получает нулевую полезность.

Обозначим

$$W_0 = \max_{y \in A} [\sum_{i \in K} H_i(y) - c(y)]. \quad (8)$$

Легко показать, что область компромисса не пуста тогда и только тогда, когда [54]

$$W_0 \geq \sum_{i \in K} W_i\ . \quad (9)$$

Таким образом, критерием реализуемости режима сотрудничества является условие (9). Содержательно оно означает, что, действуя совместно, центры могут получить бóльшую суммарную полезность, чем действуя в одиночку. Разность $W_0 - \sum_{i \in K} W_i$ может интерпретироваться как мера согласованности интересов центров и характеристика эмерджентности ОС.

Если условие (9) не выполнено и $\Lambda = \varnothing$, то имеет место режим конкуренции центров, характеризуемый так называемым аукционным решением. Упорядочим (перенумеруем) центры в порядке убывания величин $\{W_i\}$: $W_1 \geq W_2 \geq \ldots \geq W_k$. Победителем будет первый центр, который предложит агенту, помимо компенсации затрат, полезность, на сколь угодно малую величину превышающую W_2.

Обсудим качественно полученные результаты. Одним из недостатков МСУ является то, что при недостаточном разделении полномочий между менеджерами проектов и руководителями функциональных подразделений возможен конфликт между ними, когда и менеджеры проектов, и функциональные руководители (иначе говоря, центры промежуточного уровня иерархии) стремятся «перетянуть» на себя находящихся под их общим контролем агентов. При этом, очевидно, ОС теряет в эффективности функционирования, так как на такое перетягивание, «перекупку» агентов могут уходить весьма существенные средства.

Сотрудничество центров промежуточного уровня – совместное назначение планов и использование согласованной системы стимулирования агентов (3) – позволяет избежать подобного конфликта и неэффективности. Переход от режима конкуренции к режиму сотрудничества требует согласования интересов центров, что может осуществляться управляющими органами более высоких уровней иерархии методами стимулирования. Приведем одну из возможных моделей[42].

Выше были исследованы случаи, когда в матричной структуре управления центрам промежуточного уровня иерархии (например, менеджерам проектов) выгодно со-

[42] Модель написана М. В. Губко.

трудничать: объединяться в одну коалицию и совместно выбирать план агента. В такой ситуации все центры можно рассматривать как одного игрока, максимизирующего целевую функцию

$$\Phi_K(\cdot) = \sum_{i \in K} H_i(y) - c(y)\,. \tag{10}$$

Хорошо это или плохо с точки зрения *высшего руководства* (ВР) (рис. 2.18), представляющего интересы организации в целом? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо определить интересы ВР и методы его воздействия на функционирование системы.

С точки зрения ВР управляемым объектом является совокупность центров промежуточного уровня и агента. Центры характеризуются функциями доходов $H_i(y)$, $i \in K$, а агент – функцией своих затрат $c(y)$.

Предположим, что интересы центра зависят только от результата деятельности системы, то есть от реализовавшихся в результате выбранного агентом действия значений доходов и затрат. Тогда целевую функцию ВР можно записать в виде: $F(\cdot) = F(H_1(\cdot),..., H_k(\cdot), c(\cdot))$.

Логично также предположить, что цели ВР заключаются в увеличении, насколько это возможно, дохода каждого из проектов (представляемых агентами) и в уменьшении затрат по реализации этих проектов. Таким образом, целевая функция ВР возрастает по переменным H_1, H_2, ..., H_k и убывает по затратам c агента.

В простейшем случае целевая функция ВР представляет собой линейную свертку с неотрицательными весами α_i всех подцелей в единый критерий:

$$F(y) = \sum_{i \in K} \alpha_i H_i(y) - \alpha_0 c(y)\,. \tag{11}$$

Сравнивая данное выражение с формулой (10) для целевой функции коалиции центров, видим, что если коэффициенты $\{\alpha_i\}$ различны, то в системе наблюдается рассогласование интересов ВР и центров промежуточного уровня (менеджеров проектов). Те, стремясь максимизировать свою целевую функцию, реализуют «не то» действие агента, которое необходимо ВР. Следовательно, ВР должно воздействовать каким-то образом на центры промежуточного уровня с тем, чтобы приблизить реализуемое действие y к требуемому – доставляющему максимум критерию эффективности (11).

Одним из методов воздействия ВР на функционирование системы является внутрифирменное «налогообложение», когда устанавливаются ставки $\{\beta_i\}$ отчислений в пользу ВР с доходов центров промежуточного уровня $\{H_i(\cdot)\}$ и/или ставки γ_i отчислений с прибылей $\{H_i(\cdot) - \sigma_i(\cdot)\}$. Как будет показано ниже, для полного согласования интересов ВР и центров промежуточного уровня достаточно единой ставки $\gamma \in [0; \gamma_{max}]$ налога с прибыли.

С учетом единой ставки налога с прибыли и дифференцированной ставки «подоходного налога» целевые функции ВР и коалиции из всех центров среднего звена можно записать соответственно как[43]

$$F(y) = \gamma[\sum_{i \in K} \alpha_i \beta_i H_i(y) - \alpha_0 c(y)], \tag{12}$$

$$\Phi(y) = (1-\gamma)[\sum_{i \in K} (1-\beta_i) H_i(y) - c(y)]. \tag{13}$$

Для согласования интересов ВР и центров промежуточного уровня достаточно, чтобы их целевые функции ВР достигали максимума в одной точке. Из (12), (13) следует, что это условие выполнено при $\alpha_i \beta_i / \alpha_0 = 1 - \beta_i$, то есть при ставках подоходного налога $\beta_i = \dfrac{1}{1 + \alpha_i / \alpha_0}$. ВР заинте-

[43] Отметим, что интересы ВР в моделях (11) и (12) различаются.

ресовано в увеличении своей доли прибыли, поэтому $\gamma = \gamma_{max}$. При такой системе налогообложения достигается полное согласование интересов ВР и менеджеров проектов (центров промежуточного уровня). Так, например, если $\alpha_i = 1$, $i \in K$, и $\alpha_0 = 0$, то ставка подоходного налога должна быть равна 50 %.

Итак, в многоуровневых системах для обеспечения эффективного функционирования системы в целом каждый более высокий уровень иерархии должен осуществлять согласование своих интересов и интересов всех нижележащих агентов, в том числе – путем выбора соответствующей системы стимулирования. Таким образом, для нормальной работы МСУ от высшего руководства требуется использование управляющих воздействий, позволяющих центрам промежуточного уровня вырабатывать совместную политику и назначать согласованные планы агентам.

2.10. Ранговые системы стимулирования

Во многих моделях стимулирования вознаграждение агентов зависит от абсолютных значений их действий (см. первую главу) и/или результата деятельности (см. разделы 2.5, 2.7 и 2.8). В то же время на практике достаточно распространены *ранговые системы стимулирования* (РСС), в которых величина вознаграждения агента определяется либо принадлежностью показателя его деятельности некоторому наперед заданному множеству – так называемые *нормативные* РСС, либо местом, занимаемым агентом в упорядочении показателей деятельности всех агентов – так называемые *соревновательные* РСС.

Преимуществом ранговых систем стимулирования является в основном то, что при их использовании центру иногда не обязательно знать достоверно значения всех действий, выбранных агентами, а достаточна информация о диапазонах, которым они принадлежат, или об упорядочении действий.

Нормативные РСС (НРСС) характеризуются наличием процедур присвоения рангов агентам в зависимости от показателей их деятельности (выбираемых действий и т. д.). Введем следующие предположения, которые будем считать выполненными на протяжении настоящего раздела.

Во-первых, будем считать, что множества возможных действий агентов одинаковы и составляют множество A неотрицательных действительных чисел. Во-вторых (как и в разделах 2.1 и 2.5), предположим, что функции затрат агентов монотонны и затраты от выбора нулевого действия равны нулю.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов; $\mathfrak{I} = \{1, 2, ..., m\}$ – множество возможных рангов, где m – размерность НРСС; $\{q_j\}$, $j = \overline{1,m}$ – совокупность m неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за «попадание» в различные ранги; δ_i: $A_i \to \mathfrak{I}$, $i = \overline{1,n}$ – процедуры классификации. Тогда НРСС называется кортеж $\{m, \mathfrak{I}, \{\delta_i\}, \{q_j\}\}$.

В работе [65] показано, что для любой системы стимулирования существует НРСС не меньшей эффективности. Основная идея обоснования этого утверждения заключается в том, что для любой системы стимулирования и для любого агента всегда можно подобрать индивидуальную процедуру классификации его действий так, чтобы он при использовании НРСС выбирал то же действие, что и при использовании исходной системы стимулирования. Однако на практике использование для каждого агента собственной процедуры классификации нецелесообразно, а зачастую и невозможно. Поэтому рассмотрим случай, когда процедура классификации одинакова для всех агентов – так называемая *унифицированная* НРСС (УНРСС) (см. также обсуждение проблем унификации систем стимулирования в разделе 2.7).

Унифицированные нормативные ранговые системы стимулирования. При использовании УНРСС агенты, выбравшие одинаковые действия, получают одинаковые вознаграждения. Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$, такой, что $0 \le Y_1 \le Y_2 \le ... \le Y_m < +\infty$, который определяет некоторое разбиение множества A. Унифицированная НРСС задается кортежем $\{m, \{Y_j\}, \{q_j\}\}$, причем вознаграждение i-го агента σ_i определяется следующим образом: $\sigma_i(y_i) = \sum_{j=0}^{m} q_j I(y_i \in [Y_j, Y_{j+1}))$, где $I(\cdot)$ – функция-индикатор, $Y_0 = 0$, $q_0 = 0$.

Унифицированная НРСС называется *прогрессивной*, если вознаграждения возрастают с ростом действий: $q_0 \le q_1 \le q_2 \le ... \le q_m$ [65]. Эскиз графика прогрессивной УНРСС приведен на рисунке 2.19.

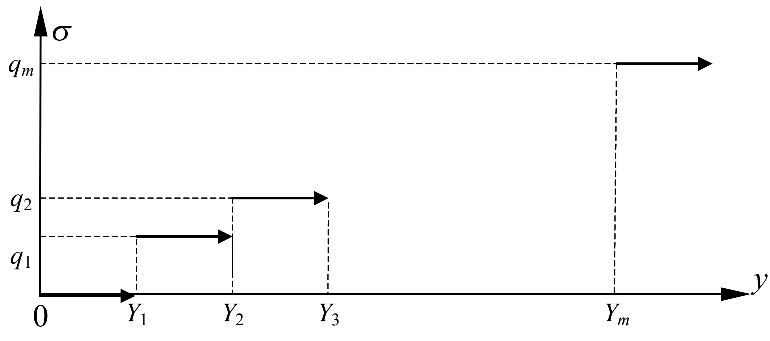


Рис. 2.19. *Пример прогрессивной УНРСС*

Так как УНРСС кусочно-постоянна, то в силу монотонности функций затрат очевидно, что агенты будут выбирать действия с минимальными затратами на соответствующих отрезках. Иначе говоря, условно можно считать, что при фиксированной системе стимулирования множество допустимых действий равно: $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$, причем так как $c_i(0) = 0$, то $q_0 = 0$. Действие y_i^*, выбираемое i-м агентом, определяется парой векторов (Y, q), то есть имеет место $y_i^*(Y, q) = Y_{k_i}$, где

$$k_i = arg \max_{k=\overline{0,m}} \{q_k - c_i(Y_k)\}, i \in N. \qquad (1)$$

Обозначим $y^*(Y, q) = (y_1^*(Y, q), y_2^*(Y, q), ..., y_n^*(Y, q))$. Задача синтеза оптимальной УНРСС заключается в выборе размерности УНРСС m и векторов q и Y, удовлетворяющих заданным ограничениям, которые максимизировали бы целевую функцию центра:

$$\Phi(y^*(Y, q)) \to \max_{Y, q}. \qquad (2)$$

Фиксируем некоторый вектор действий $y^* \in A' = A^n$, который мы хотели бы реализовать с помощью УНРСС.

Из того, что при использовании УНРСС агенты выбирают действия только из множества Y, следует, что минимальная размерность системы стимулирования должна быть равна числу попарно различных компонентов вектора действий, который требуется реализовать. Следовательно, использование УНРСС размерности, большей, чем n, нецелесообразно. Поэтому ограничимся системами стимулирования, размерность которых в точности равна числу агентов, то есть положим $m = n$.

Для фиксированного вектора действий $y^* \in A'$ положим $Y_i = y_i^*$, $i \in N$, и обозначим $c_{ij} = c_i(Y_j)$, $i, j \in N$. Из определения реализуемого действия (см. (1)) следует, что для того, чтобы УНРСС реализовывала вектор $y^* \in A'$ (то есть побуждала агентов выбирать соответствующие действия), необходимо и достаточно выполнения следующей системы неравенств:

$$q_i - c_{ii} \geq q_j - c_{ij}, i \in N, j = \overline{0,n}. \qquad (3)$$

Обозначим суммарные затраты на стимулирование по реализации действия y^* УНРСС

$$\vartheta(y^*) = \sum_{i=1}^{n} q_i(y^*)\,, \tag{4}$$

где $q(y^*)$ удовлетворяет (3).

Задача синтеза оптимальной (минимальной) УНРСС заключается в минимизации (4) при условии (3).

Предположим, что агентов можно упорядочить в порядке убывания затрат и предельных затрат:

$$\forall\ y \in A \quad c_1'(y) \ge c_2'(y) \ge \ldots \ge c_n'(y),$$

и фиксируем некоторый вектор $y^* \in A'$, удовлетворяющий следующему условию:

$$y_1^* \le y_2^* \le \ldots \le y_n^*, \tag{5}$$

то есть чем выше затраты агента, тем меньшие действия он выбирает.

Введенным предположениям удовлетворяют, например, такие распространенные в экономико-математическом моделировании функции затрат агентов, как $c_i(y_i) = k_i\, c(y_i)$, $c_i(y_i) = k_i\, c(y_i / k_i)$, где $c(\cdot)$ – монотонная дифференцируемая функция, а коэффициенты (отражающие эффективность деятельности агентов) упорядочены: $k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge k_n$ (частными случаями являются линейные функции затрат, функции затрат типа Кобба-Дугласа и др.).

В [53] доказано, что:

1) унифицированными нормативными ранговыми системами стимулирования реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют (5);

2) оптимальная УНРСС является прогрессивной;

3) для определения оптимальных размеров вознаграждений может быть использована следующая рекуррентная процедура: $q_1 = c_{11}$, $q_i = c_{ii} + \max\limits_{j<i} \{q_j - c_{ij}\}$, $i = \overline{2, n}$;

4) индивидуальные вознаграждения в УНРСС, реализующей вектор $y^* \in A'$, удовлетворяют:

$$q_i = \sum_{j=1}^{i} (c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)). \qquad (6)$$

Выражение (6) позволяет исследовать свойства УНРСС: вычислять оптимальные размеры вознаграждений, строить оптимальные процедуры классификаций, сравнивать эффективность УНРСС с эффективностью компенсаторных систем стимулирования и так далее (см. свойства ранговых систем стимулирования ниже).

Соревновательные системы стимулирования. Рассмотрим кратко известные свойства соревновательных ранговых систем стимулирования (СРСС), в которых центр задает число классов и число мест в каждом из классов, а также величины поощрений агентов, попавших в тот или иной класс. То есть в СРСС индивидуальное поощрение агента не зависит непосредственно от абсолютной величины выбранного им действия, а определяется тем местом, которое он занял в упорядочении показателей деятельности всех агентов. В [53] доказано, что:

1) необходимым и достаточным условием реализуемости вектора действий агентов $y^* \in A$ в классе СРСС является выполнение (5);

2) данный вектор реализуем следующей системой стимулирования, обеспечивающей минимальность затрат центра на стимулирование:

$$q_i(y^*) = \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\},\ i = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

Выражение (7) позволяет исследовать свойства СРСС: вычислять оптимальные размеры вознаграждений, строить оптимальные процедуры классификаций, сравнивать эффективность СРСС с эффективностью компенсаторных систем стимулирования и с эффективностью УНРСС и т. д.

2.11. Механизмы экономической мотивации

Механизмы стимулирования (мотивации) побуждают управляемых агентов предпринимать определенные действия в интересах управляющего органа – центра. Если в механизмах, рассматриваемых выше в настоящей главе, стимулирование заключалось в непосредственном вознаграждении агентов со стороны центра, то в настоящем разделе описаны *механизмы экономической мотивации*, в которых центр управляет агентами путем установления тех или иных нормативов – ставок налога с дохода, прибыли и т. д. Примерами являются: нормативы внутрифирменного налогообложения, определяющие распределение дохода или прибыли между подразделениями и организацией в целом (корпоративным центром или образовательным холдингом [41]); тарифы, определяющие выплаты предприятий в региональные или муниципальные фонды, и т. д.

Рассмотрим следующую модель. Пусть в организационной системе (корпорации, фирме) помимо одного центра имеются n агентов, и известны затраты $c_i(y_i)$ i-го агента, зависящие от его действия $y_i \in \Re^1_+$ (например, от объема выпускаемой агентом продукции), $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множеству агентов. Будем считать функцию затрат непрерывной, возрастающей, выпуклой и равной нулю в нуле. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между его доходом $H_i(y_i)$ и затратами $c_i(y_i)$:

$$f_i(y_i) = H_i(y_i) - c_i(y_i),\ i \in N.$$

Пусть функции затрат агентов имеют вид:

$$c_i(y_i) = r_i\, \varphi(y_i / r_i),\ i \in N,$$

где $\varphi(\cdot)$ – возрастающая гладкая выпуклая функция, такая, что $\varphi(0) = 0$.

Обозначим $\xi(\cdot) = \varphi'^{-1}(\cdot)$ – функцию, обратную производной функции $\varphi(\cdot)$.

Рассмотрим пять механизмов экономической мотивации агентов, а именно:

1) механизм отчислений (налога с дохода);
2) централизованный механизм;
3) механизм с нормативом рентабельности;
4) механизм налога на прибыль;
5) механизм участия в прибыли.

Механизм отчислений. Пусть задана внутрифирменная (трансфертная) цена λ единицы продукции, производимой агентами, и центр использует *норматив*[44] $\gamma \in [0; 1]$ *отчислений* от дохода агентов. Тогда доход агента $H_i(y_i) = \lambda\, y_i$ и целевая функция i-го агента с учетом отчислений центру имеет вид:

$$f_i(y_i) = (1 - \gamma)\, \lambda\, y_i - c_i(y_i),\ i \in N. \qquad (1)$$

Величина γ – норматив отчислений – может интерпретироваться как ставка налога на доход (выручку). Каждый агент выберет действие, максимизирующее его целевую функцию:

$$y_i(\gamma) = r_i\, \xi((1 - \gamma)\, \lambda),\ i \in N. \qquad (2)$$

Целевая функция центра, равная сумме отчислений агентов, будет иметь вид:

$$\Phi(\gamma) = \gamma\, \lambda\, H\, \xi((1 - \gamma)\, \lambda), \qquad (3)$$

где $H = \sum_{i \in N} r_i$.

Задача центра, стремящегося максимизировать свою целевую функцию, заключается в выборе норматива отчислений:

$$\Phi(\gamma) \to \max_{\gamma \in [0;1]}. \qquad (4)$$

[44] Легко проверить, что в рамках введенных предположений оптимально использование единого норматива для всех агентов – см. раздел 2.7.

Если функции затрат агентов являются функциями типа Кобба-Дугласа, то есть $c_i(y_i) = \frac{1}{\alpha}(y_i)^\alpha (r_i)^{1-\alpha}$, $\alpha \geq 1$, $i \in N$, то решение задачи (4) имеет вид:

$$\gamma^*(\alpha) = 1 - 1/\alpha, \qquad (5)$$

то есть оптимальное значение норматива отчислений $\gamma^*(\alpha)$ возрастает с ростом показателя степени α. Оптимальное значение целевой функции центра при этом равно:

$$\Phi_\gamma = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\lambda H \xi(\lambda/\alpha),$$

то есть $\Phi_\gamma = (\alpha - 1) H (\frac{\lambda}{\alpha})^{\alpha/(\alpha-1)}$, а сумма действий агентов –

$$Y_\gamma = H \xi(\lambda/\alpha) = H(\lambda/\alpha)^{1/(\alpha-1)}.$$

Выигрыш i-го агента:

$$f_{i\gamma} = r_i (1 - 1/\alpha)(\lambda/\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)}, i \in N,$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна: $W_\gamma = (\alpha^2 - 1) H (\lambda/\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)}/\alpha$.

Централизованный механизм. Сравним найденные показатели со значениями, соответствующими другой схеме экономической мотивации агентов, а именно предположим, что центр использует *централизованную схему* – «забирает» себе весь доход от деятельности агентов, а затем компенсирует им затраты от выбираемых ими действий y_i в случае выполнения плановых заданий x_i (компенсаторная система стимулирования).

В этом случае целевая функция центра равна:

$$\Phi(x) = \lambda \sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in N} c_i(x_i). \qquad (6)$$

Решая задачу $\Phi(x) \to \max_{\{x_i \geq 0\}}$, центр находит оптимальные значения планов:

$$x_i = r_i \xi(\lambda), i \in N. \qquad (7)$$

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$\Phi_x = \lambda^{\alpha/(\alpha-1)}\, H\, (1 - 1/\alpha),$$

а сумма действий агентов равна $Y_x = H\, \xi(\lambda) = H\, \lambda^{1/(\alpha-1)}$.

Выигрыш i-го агента тождественно равен нулю, так как центр в точности компенсирует его затраты, а сумма целевых функций всех участников системы W_x (центра и всех агентов) равна Φ_x.

Сравним полученные значения:

- $\Phi_x / \Phi_\gamma = \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$ и убывает с ростом α;
- $Y_x / Y_\gamma = \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$ и убывает с ростом α;
- $W_x / W_\gamma = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} / (\alpha + 1) \geq 1$ и убывает с ростом α.

Таким образом, если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то централизованный механизм экономической мотивации (с точки зрения организационной системы в целом) выгоднее, чем механизм отчислений, так как обеспечивает больший суммарный выпуск продукции и большее значение суммарной полезности всех элементов системы.

Фраза «с точки зрения организационной системы в целом» существенна, так как при использовании централизованного механизма прибыль (значение целевой функции) агентов равна нулю – весь ресурс изымает «метасистема». Такая схема взаимодействия центра с агентами может не устраивать агентов, поэтому исследуем обобщение централизованной схемы, а именно *механизм с нормативом рентабельности*, при котором вознаграждение агента центром не только компенсирует его затраты в случае выполнения плана, но и оставляет в его распоряжении полезность, пропорциональную затратам. Коэффициент этой пропорциональности называется *нормативом рентабельности*. Рассмотренной выше централизованной схеме соответствует нулевое значение норматива рентабельности.

Механизм с нормативом рентабельности. В случае использования норматива рентабельности $\rho \geq 0$ целевая функция центра равна:

$$\Phi_\rho(x) = \lambda \sum_{i \in N} x_i - (1 + \rho) \sum_{i \in N} c_i(x_i) . \quad (8)$$

Решая задачу $\Phi_\rho(x) \to \max\limits_{\{x_i \geq 0\}}$, центр находит оптимальные значения планов[45]:

$$x_{i\rho} = r_i\, \xi(\lambda / (1 + \rho)),\ i \in N. \quad (9)$$

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$\Phi_\rho = \lambda\, (\lambda / (1 + \rho))^{1/(\alpha-1)}\, H\, (1 - 1/\alpha),$$

а сумма действий агентов равна:

$$Y_\rho = H\, \xi(\lambda / (1 + \rho)) = H\, (\lambda / (1 + \rho))^{1/(\alpha-1)}.$$

Выигрыш i-го агента равен: $f_{i\rho} = \rho\, r_i\, (\lambda/(1 + \rho))^{\alpha/(\alpha-1)}/\alpha$, а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна: $W_\rho = \lambda H (\lambda/(1 + \rho))^{1/(\alpha-1)} (\alpha - 1/(1 + \rho))/\alpha$.

Сравним полученные значения (отметим, что при $\rho = 0$ все выражения для механизма с нормативом рентабельности переходят в соответствующие выражения для централизованного механизма):

- $\Phi_x / \Phi_\rho = (1 + \rho)^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$ и возрастает с ростом ρ;
- $Y_x / Y_\rho = (1 + \rho)^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$ и возрастает с ростом ρ;
- $W_x / W_\rho = \dfrac{(1 - \frac{1}{\alpha})(1 + \rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{1 - \frac{1}{(1 + \rho)\alpha}} \geq 1$ и возрастает с ростом ρ.

Интересно, что максимум суммы целевых функций участников организационной системы (центра и агентов)

---

[45] Оптимальное с точки зрения центра значение норматива рентабельности, очевидно, равно нулю.

достигается при нулевом нормативе рентабельности, то есть в условиях полной централизации!

Сравним теперь механизм с нормативом рентабельности с механизмом отчислений:

- $\Phi_\gamma / \Phi_\rho = (\frac{1+\rho}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и возрастает с ростом ρ;
- $Y_\gamma / Y_\rho = (\frac{1+\rho}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и возрастает с ростом ρ;
- $W_\gamma / W_\rho = \dfrac{(\alpha^2-1)}{\alpha^2 - \dfrac{\alpha}{(1+\rho)}} (\frac{1+\rho}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и возрастает с ростом ρ.

Итак, приходим к выводу, что если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то механизм с нормативом рентабельности $\rho = \alpha - 1$ эквивалентен механизму отчислений.

Справедливость данного утверждения следует из того, что при $\rho = \alpha - 1$ все (!) показатели механизма с нормативом рентабельности совпадают с соответствующими показателями механизма отчислений, то есть выполняется $y_i(\gamma) = x_{i\rho}$, $i \in N$, $\Phi_\gamma = \Phi_\rho$, $Y_\gamma = Y_\rho$, $f_{i\gamma} = f_{i\rho}$, $i \in N$, $W_\gamma = W_\rho$.

Теперь рассмотрим четвертый механизм экономической мотивации – механизм налога на прибыль.

Механизм налога на прибыль. Если в качестве прибыли агента интерпретировать его целевую функцию – разность между доходом и затратами, то при ставке налога $\beta \in [0; 1]$ на эту прибыль целевая функция i-го агента примет вид:

$$f_{i\beta}(y_i) = (1 - \beta)\, [\lambda\, y_i - c_i(y_i)],\ i \in N, \qquad (10)$$

а целевая функция центра:

$$\Phi_\beta(y) = \beta\, [\lambda \sum_{i \in N} y_i - \sum_{i \in N} c_i(y_i)]. \qquad (11)$$

Действия, выбираемые агентами при использовании налога на прибыль, совпадают с действиями, выбираемыми ими при централизованной схеме, следовательно:

$$y_{i\beta} = r_i\, \xi(\lambda),\ i \in N. \qquad (12)$$

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно[46]:

$$\Phi_\beta = \beta\, \lambda^{\alpha\,/\,(\alpha-1)}\, H\,(1 - 1/\alpha),$$

а сумма действий агентов:

$$Y_\beta = H\, \xi(\lambda) = H\, \lambda^{1\,/\,(\alpha-1)}.$$

Выигрыш i-го агента равен:

$$f_{i\beta} = (1 - \beta)\, \lambda^{\alpha\,/\,(\alpha-1)}\, r_i\, (1 - 1/\alpha),$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов):

$$W_\beta = \lambda^{\alpha\,/\,(\alpha-1)}\, H\,(1 - 1/\alpha).$$

Сравним полученные значения:

- $\Phi_x / \Phi_\beta = 1\,/\,\beta \geq 1$ и возрастает с ростом β;
- $Y_x / Y_\beta = 1$;
- $W_x / W_\beta = 1$.

Таким образом, механизм налога на прибыль приводит к той же сумме полезностей и к тому же значению суммы равновесных действий агентов, что и централизованный механизм, но в первом случае полезность центра в β раз ниже, чем во втором. Поэтому механизм налога на прибыль может интерпретироваться как механизм компромисса [35], в котором *точка компромисса* внутри *области компромисса* определяется ставкой налога на прибыль, задающей пропорцию, в которой делится прибыль системы в целом между центром и агентами.

[46] Очевидно, что оптимальное с точки зрения центра значение ставки налога на прибыль β равно единице. При этом механизм налога на прибыль превращается в централизованный механизм.

Сравним теперь механизм налога на прибыль с механизмом с нормативом рентабельности:

- $\Phi_\beta / \Phi_\rho = \beta\ (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}$;
- $Y_\beta / Y_\rho = \ (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$;
- $W_\beta / W_\rho = \dfrac{(1-\frac{1}{\alpha})(1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{1-\frac{1}{(1+\rho)\alpha}} \geq 1.$

И наконец, сравним механизм налога на прибыль с механизмом отчислений (механизмом налога с дохода):

- $\Phi_\beta / \Phi_\gamma = \beta\ \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$;
- $Y_\beta / Y_\gamma = \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$;
- $W_\beta / W_\gamma = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} / (\alpha + 1)$.

Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то механизм налога на прибыль:

– при $\beta = 1 / \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$ с точки зрения центра эквивалентен оптимальному механизму отчислений;
– при $\beta = 1 - 1 / \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ с точки зрения агентов эквивалентен оптимальному механизму отчислений;
– при $\beta = 1 / (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ с точки зрения центра эквивалентен механизму с нормативом рентабельности;
– при $\beta = 1 - \rho / (\alpha - 1)\ (1+\rho)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ с точки зрения агентов эквивалентен механизму с нормативом рентабельности.

Механизм участия в прибыли. Рассмотрим механизм участия в прибыли, в рамках которого центр получает прибыль $H(y)$ от деятельности агентов, а затем выплачивает каждому агенту фиксированную (и одинаковую для всех агентов, то есть механизм является унифицированным) долю $\Psi \in [0; 1]$ этой прибыли. Целевая функция i-го агента примет вид:

$$f_{i\Psi}(y) = \Psi H(y) - c_i(y_i),\ i \in N, \tag{13}$$

а целевая функция центра:

$$\Phi_\Psi(y) = (1 - n\ \Psi)\ H(y). \tag{14}$$

Действия, выбираемые агентами при механизме участия в прибыли, равны:

$$y_{i\Psi} = r_i\ \xi(\lambda\Psi),\ i \in N. \tag{15}$$

Пусть прибыль центра линейна по действиям агентов: $H(y) = \lambda \sum_{i \in N} y_i$. Тогда значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$\Phi_\Psi = (1 - n\ \Psi)\ H\ \lambda\ \xi(\lambda\Psi),$$

а сумма действий агентов равна: $Y_\Psi = H\ \xi(\lambda\Psi)$.

Выигрыш i-го агента равен:

$$f_{i\Psi} = H\ [n\ \Psi\ \lambda\ \xi(\lambda\Psi) - \varphi(\lambda\Psi)],\ i \in N,$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна:

$$W_\Psi = H\ [\lambda\ \xi(\lambda\Psi) - \varphi(\lambda\Psi)].$$

При квадратичных функциях затрат агентов оптимальная с точки зрения центра ставка равна: $\Psi^* = 1/2\ n$.

Сравнительный анализ. Таким образом, рассмотрены пять механизмов экономической мотивации. С точки зрения суммы полезностей всех участников системы и суммы действий агентов максимальной эффективностью обладают централизованный механизм и механизм налога на прибыль (с любой ставкой). Использование механизма отчислений или механизма с нормативом рентабельности приводит к меньшей эффективности.

При использовании механизма отчислений, механизма с нормативом рентабельности или механизма налога на прибыль в зависимости от параметров (соответственно – норматива отчислений, норматива рентабельности и ставки налога на прибыль) полезности центра и агентов перераспределяются по-разному по сравнению с централизованным механизмом (см. приведенные выше оценки).

Использование полученных результатов позволяет в каждом конкретном случае получать оценки параметров, при которых различные механизмы эквивалентны. Так, например, при квадратичных функциях затрат ($\alpha = 2$) оптимально следующее значение норматива отчислений (ставки налога с дохода): $\gamma^* = 0{,}5$. При $\rho^* = 1$ механизм с нормативом рентабельности полностью эквивалентен механизму отчислений, а при $\beta^* = 0{,}5$ механизм налога на прибыль эквивалентен им обоим с точки зрения центра, а при $\beta^* = 0{,}75$ – с точки зрения агентов (табл. 2.1).

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется обобщение полученных результатов на более общие классы функций затрат, а также исследование механизмов экономической мотивации в моделях организационных систем, учитывающих неопределенные факторы и взаимозависимость агентов.

Таблица 2.1

Параметры механизмов экономической мотивации при квадратичных затратах агентов

Механизм	Параметры			
	Φ	Y	W	Σf_i
Налог с дохода	$\lambda^2 H/4$	$\lambda H/2$	$3\lambda^2 H/8$	$\lambda^2 H/8$
Централизованный	$\lambda^2 H/2$	λH	$\lambda^2 H/2$	0

Механизм	Параметры			
	Φ	Y	W	Σf_i
Норматив рентабельности	$\lambda^2 H /$ $(2(1+\rho))$	$\lambda H /$ $(1+\rho)$	$\lambda^2 H(1+2\rho) /$ $(2\,(1+\rho)^2)$	$\lambda^2 H\rho /$ $(2\,(1+\rho)^2)$
Налог на прибыль	$\beta\lambda^2 H / 2$	λH	$\lambda^2 H / 2$	$(1-\beta)\lambda^2 H / 2$
Участие в прибыли	$\lambda^2 H / (4n)$	$\lambda H / (2n)$	$\lambda^2 H(2n-1) /$ $(4n^2)$	$\lambda^2 H(n-1) /$ $(4n^2)$

Таким образом, в настоящей главе проведен обзор основных результатов исследования задач стимулирования (описание не вошедших в настоящую работу моделей стимулирования можно найти в: [48] – ОС с неопределенностью, [43, 50, 54] – многоуровневые ОС, [24] – ОС с коалиционным взаимодействием участников, [51] – динамические ОС).

В качестве перспективных направлений дальнейших исследований следует выделить получение аналитических решений задач синтеза оптимальных механизмов стимулирования в многоуровневых многоэлементных динамических системах с неопределенностью и распределенным контролем. С точки зрения практики целесообразным представляется использование результатов теоретических исследований при создании и настройке программных средств управления персоналом.

Глава 3

МЕХАНИЗМЫ ПЛАНИРОВАНИЯ

В настоящей главе рассматриваются модели механизмов планирования в организационных системах. Специфика этих механизмов заключается в том, что в них центр принимает решения в условиях неполной информированности на основе сообщений агентов, которые, в силу своей активности, способны к *манипулированию* – сообщению недостоверной информации.

Раздел 3.1 посвящен постановке задачи планирования и краткому обзору результатов исследования проблемы манипулирования информацией. Последующие разделы настоящей главы содержат описание «классических» механизмов с сообщением информации – механизмов распределения ресурса (раздел 3.2), механизмов активной экспертизы (раздел 3.3), механизмов внутренних цен (раздел 3.4), конкурсных механизмов (раздел 3.5) и механизмов обмена (раздел 3.6).

3.1. Задача планирования. Принцип открытого управления

Рассмотрим двухуровневую многоэлементную ОС, состоящую из центра и n агентов. Стратегией каждого из агентов является сообщение центру некоторой информации $s_i \in \Omega_i$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множеству агентов. Центр на основании сообщенной ему информации назначает агентам *планы* $x_i = \pi_i(s) \in X_i \subseteq \Re^1$, где $\pi_i: \Omega \to X_i$, $i \in N$, – *процедура* (*механизм*) *планирования*, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \Omega = \prod_{i \in N} \Omega_i$ – вектор сообщений всех агентов.

Функция предпочтения агента, отражающая интересы агента в задачах планирования: $\varphi_i(x_i, r_i): \Re^2 \to \Re^1$, зависит от соответствующей компоненты назначенного центром плана и некоторого параметра – *типа* агента. Под типом агента обычно понимается точка максимума его функции предпочтения, то есть наиболее выгодное с его точки зрения значение плана.

Условно между задачами планирования и стимулирования (рассмотренными в предыдущей главе) можно провести следующую аналогию (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Задачи стимулирования и планирования

	Стимулирование	Планирование
Стратегия агента	$y \in A'$	$s \in \Omega$
Управление	$\sigma(y)$	$\pi(s)$
Предпочтения агента	$f(y, \sigma(\cdot))$	$\varphi(s, \pi(\cdot))$

На момент принятия решений каждому агенту известны: процедура планирования, значение его собственного типа $r_i \in \Re^1$ (*идеальной точки, точки пика*), целевые функции и допустимые множества всех агентов. Центру известны зависимости $\varphi_i(x_i, \cdot)$ и множества возможных сообщений агентов и неизвестны точные значения типов агентов. Последовательность функционирования следующая: центр выбирает процедуру планирования и сообщает ее агентам, агенты при известной процедуре планирования сообщают центру информацию, на основании которой и формируются планы.

Так как решение, принимаемое центром (назначаемые агентам планы), зависит от сообщаемой агентами информации, последние могут воспользоваться возможностью своего влияния на эти решения, сообщая такую информацию, чтобы получить наиболее выгодные для себя планы. Понятно, что при этом полученная центром информация в общем случае может не быть истинной. Следовательно, возникает *проблема манипулирования*.

Как правило, при исследовании механизмов планирования, то есть в ОС с сообщением информации, вводится предположение, что функции предпочтения агентов *однопиковые* с точками пика $\{r_i\}_{i \in N}$, то есть функция предпочтения $\varphi_i(x_i, r_i)$ непрерывна, строго монотонно возрастает до единственной точки максимума r_i и строго монотонно убывает после нее. Это предположение означает, что предпочтения агента на множестве допустимых планов таковы, что существует единственное наилучшее для него значение плана – точка пика, степень же предпочтительности остальных планов монотонно убывает по мере удаления от идеальной точки – точки пика.

Будем считать, что агенты ведут себя некооперативно, выбирая доминантные или равновесные по Нэшу стратегии. Пусть s^* – вектор равновесных стратегий[47]. Очевидно, точка равновесия $s^* = s^*(r)$ в общем случае зависит от вектора $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ типов всех агентов.

Соответствующим механизму $\pi(\cdot)$: $\Omega \to \Re^n$ *прямым механизмом* планирования $h(\cdot)$: $\Re^n \to \Re^n$ называется механизм $h(r) = \pi(s^*(r))$, ставящий в соответствие вектору точек пика агентов вектор планов. Термин «прямой» обусловлен тем, что агенты сообщают непосредственно (прямо) свои точки пика (в исходном – непрямом – механизме $\pi(\cdot)$ они могли сообщать косвенную инфор-

[47] Если равновесий несколько, то необходимо ввести соответствие отбора равновесий, позволяющее из любого множества равновесий выбрать единственное.

мацию). Если в соответствующем прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесной стратегией всех агентов, то такой механизм называется *эквивалентным прямым* (неманипулируемым) *механизмом*.

Рассмотрим возможные способы обеспечения достоверности сообщаемой информации. Наиболее очевидной является идея введения системы штрафов за искажение информации (в предположении, что центру в конце концов становятся известными истинные значения параметров $\{r_i\}_{i \in N}$). В [12] показано, что введением «достаточно сильных» штрафов действительно можно обеспечить достоверность сообщаемых оценок. Если отказаться от предположения, что центру становятся известными $\{r_i\}_{i \in N}$, то возникает задача идентификации неизвестных параметров по имеющейся у центра информации и, следовательно, задача построения системы штрафов за косвенные показатели искажения информации [12].

Другим возможным способом обеспечения достоверности сообщаемой информации является использование *прогрессивных механизмов*, то есть таких механизмов, в которых функция φ_i при любой обстановке монотонна по оценке s_i, $i \in N$. Понятно, что если при этом справедлива «*гипотеза реальных оценок*»: $s_i \leq r_i$, $i \in N$, то доминантной стратегией каждого агента будет сообщение $s_i = r_i$, $i \in N$ [12].

Фундаментальным результатом теории активных систем является ***принцип открытого управления*** [5]. Основная идея принципа открытого управления (ОУ) заключается в том, чтобы использовать процедуру планирования, максимизирующую целевую функцию каждого агента, в предположении, что сообщаемая агентами оценка достоверна, то есть центр идет навстречу агентам, рассчитывая на то, что и они его не «обманут» [9]. Это объясняет другое название механизма открытого управления – «*механизм честной игры*». Дадим строгое определение.

Условие

$$\varphi_i(\pi_i(s), s_i) = \max_{x_i \in X_i(s_{-i})} \varphi_i(x_i, s_i),\ i \in N,\ s \in \Omega,$$

где $X_i(s_{-i})$ – устанавливаемое центром множество допустимых планов при заданной обстановке $s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ для i-го агента, $i \in N$, называется *условием совершенного согласования*.

Процедура планирования, максимизирующая целевую функцию центра $\Phi(\pi, s)$ на множестве планов, удовлетворяющих условиям совершенного согласования, называется *законом открытого управления*.

Имеет место следующий факт: для того чтобы сообщение достоверной информации было доминантной стратегией агентов, необходимо и достаточно, чтобы механизм планирования был механизмом открытого управления [5, 16, 61].

Приведенное утверждение не гарантирует единственности ситуации равновесия. Конечно, если выполнено условие благожелательности (если $s_i = r_i,\ i \in N$ – доминантная стратегия, то агенты будут сообщать достоверную информацию), то использование закона ОУ гарантирует достоверность сообщаемой агентами информации.

Приведем достаточное условие существования единственной ситуации равновесия вида $s_i = r_i,\ i \in N$, в системе с законом ОУ. Обозначим: $E_i(s_i) = Arg \max_{x_i \in X_i} \varphi_i(x_i, s_i)$ – множество согласованных планов i-го агента. Будем считать, что для i-го агента выполнено *условие равноправия функций предпочтения*, если имеет место:

$$\forall\ s_i^1 \neq s_i^2 \in \Omega_i\ \ E_i(s_i^1) \cap E_i(s_i^2) = \varnothing,$$

то есть при любых допустимых несовпадающих оценках s_i^1 и s_i^2 соответствующие множества согласованных планов не пересекаются. Справедливо следующее утверждение [12]: условие равноправия функций предпочтения для всех агентов является достаточным условием единственности ситуации равновесия.

Приведем ряд необходимых и достаточных условий сообщения достоверной информации как доминантной стратегии.

Необходимым и достаточным условием сообщения достоверной информации как доминантной стратегии при любых идеальных точках $r \in \Omega$ является существование множеств $\{X_i(s_{-i})\}_{i \in N}$, для которых выполнены условия совершенного согласования [5, 9]. Данное утверждение можно переформулировать следующим образом: если в исходном механизме планирования существует равновесие в доминантных стратегиях, то соответствующий прямой механизм будет неманипулируем.

Интересным и перспективным представляется предложенный в [61] *геометрический подход* к получению достаточных условий неманипулируемости путем анализа конфигураций *множеств диктаторства* (*диктаторами* называют агентов, получающих абсолютно оптимальные для себя планы), определяемых как множества таких значений типов агентов, что определенные агенты получают планы, строго меньшие оптимальных для них планов, равные оптимальным и строго бóльшие. В рамках этого подхода уже удалось получить ряд конструктивных условий индивидуальной и коалиционной неманипулируемости механизмов планирования в ОС [61].

Достоверность сообщаемой информации при использовании принципа ОУ при условии, что множество допустимых планов агента не зависит от сообщаемой им оценки, интуитивно обосновывает рассмотрение систем с большим числом элементов. Пусть часть плановых показателей λ является общей для всех агентов, то есть номенклатура плана имеет вид: $\pi = (\lambda, \{x_i\}_{i \in N})$. Если искать управления λ, выгодные для всех агентов (как это делается при использовании принципа согласованного планирования), то возникает принципиальный вопрос о существовании решения.

Такого рода проблем не возникает в системах с большим числом элементов, когда влияние оценки отдельного агента на общее управление мало. Если при сообщении своей оценки s_i каждый агент не учитывает ее влияния на $\lambda(s)$, то считается выполненной *гипотеза слабого влияния* (ГСВ). При справедливости ГСВ необходимо согласовывать планы только по индивидуальным переменным. В [5] доказано, что если выполнена ГСВ и компоненты $x(s)$ плана удовлетворяют условиям совершенного согласования, то сообщение достоверной информации является доминантной стратегией.

До сих пор мы интересовались в основном условиями сообщения достоверной информации. Возникает закономерный вопрос: как соотносятся такие свойства механизма функционирования, как неманипулируемость и оптимальность? Иначе говоря, всегда ли среди оптимальных механизмов найдется неманипулируемый и, соответственно, всегда ли среди неманипулируемых механизмов содержится хоть один оптимальный. Получить ответ на этот вопрос необходимо, так как, быть может, не обязательно стремиться к обеспечению достоверности информации, лишь бы механизм имел максимальную эффективность. Поэтому приведем ряд результатов по оптимальности (в смысле максимальной эффективности) механизмов открытого управления (см. также условия неманипулируемости ε-согласованных механизмов в [12]).

Известно [9], что в ОС с одним агентом для любого механизма существует механизм открытого управления не меньшей эффективности. Качественно этот факт объясняется тем, что для единственного агента децентрализующим множеством будет все множество его допустимых планов (другими словами, у одного агента всегда есть «доминантная» стратегия).

Для систем с бо́льшим числом ($n \geq 2$) элементов вывод об оптимальности механизмов открытого управления справедлив лишь для ряда частных случаев. Например, аналогичные результаты были получены для механизмов распределения ресурса, для механизмов выработки коллективных экспертных решений (задач активной экспертизы) и механизмов внутренних цен, рассматриваемых в настоящей главе ниже, а также для ряда других механизмов планирования (см. обзор в [61]).

Полученные в теории активных систем результаты о связи оптимальности и неманипулируемости механизмов вселяют некоторый оптимизм, в том смысле, что эти два свойства не являются взаимно исключающими. В то же время ряд примеров (см., например, [49, 61]) свидетельствуют о неоптимальности в общем случае механизмов, обеспечивающих сообщение агентами достоверной информации. Вопрос о соотношении оптимальности и неманипулируемости в общем случае остается открытым.

Выше при рассмотрении механизмов стимулирования в ОС *согласованными* были названы механизмы, побуждающие агентов к выполнению планов. В ОС, в которых стратегией агентов является как выбор сообщений, так и действий (комбинация задач стимулирования и планирования – см. формальное описание в [48]), механизмы, являющиеся одновременно согласованными и неманипулируемыми, получили название *правильных*. Значительный интерес представляет вопрос о том, в каких случаях оптимальный механизм можно искать в классе правильных механизмов. Ряд достаточных условий оптимальности правильных механизмов управления ОС приведен в [48, 61].

Завершив краткое описание общих проблем синтеза эффективных и неманипулируемых механизмов планирования в ОС, перейдем к рассмотрению ставших уже хрестоматийными механизмов планирования в многоэлементных ОС, для которых оптимален принцип открытого управления.

3.2. Механизмы распределения ресурса

Рассмотрим постановку задачи распределения ресурса в двухуровневой организационной системе. Пусть в распоряжении центра имеется ресурс в количестве R. Стандартная постановка задачи распределения ресурса подразумевает нахождение такого его распределения между агентами, которое максимизировало бы некоторый критерий эффективности, например, суммарную эффективность использования ресурса агентами. Если эффективность использования ресурса агентами не известна центру, то он вынужден использовать сообщения агентов, например, о требуемых количествах ресурса. Понятно, что если имеется дефицит ресурса, то возникает проблема манипулируемости: агенты могут сообщать центру недостоверную информацию, стремясь получить оптимальное для себя количество ресурса.

Рассмотрение вопроса о неманипулируемости начнем с простейшего примера. Предположим, что центр должен распределить ресурс между двумя агентами. Обозначим r_i – точку пика – количество ресурса, при котором значение функции предпочтения i-го агента максимально ($i = 1, 2$). Пусть решение об объеме выделяемого ресурса принимается центром на основании заявок агентов s_1 и s_2, где s_i – сообщаемая i-м агентом заявка на ресурс. Понятно, что если $s_1 + s_2 \leq R$, $r_1 + r_2 \leq R$, то проблем не возникает (достаточно положить $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$). Что делать центру, если имеется *дефицит ресурса*, то есть если $r_1 + r_2 > R$? Предположим, что заявки агентов ограничены: $0 \leq s_i \leq R = 1$, $i = 1, 2$, то есть, как минимум, агент может отказаться от ресурса (сообщив $s_i = 0$) или запросить весь ресурс (сообщив $s_i = 1$). Пусть центр использует следующий *механизм* $\pi(\cdot)$ *распределения ресурса* (в общем случае – механизм планирования):

$$x_i = \pi_i(s_1, s_2) = \frac{s_i}{s_1 + s_2} R, \;\; i = 1, 2.$$

Такой принцип распределения называется *принципом пропорционального распределения* – ресурс распределяется пропорционально заявкам агентов. Отметим, что количество ресурса, получаемое каждым агентом, зависит от его собственной заявки и от заявки другого агента, то есть имеет место игра. Центр в этой игре выступает метаигроком, то есть игроком, выбирающим правила – механизм $\pi(\cdot)$.

В монотонных механизмах распределения ресурса равновесие Нэша игры агентов имеет следующую структуру:

1) агенты, получающие в равновесии ресурс в количестве, меньшем необходимого, сообщают максимально возможные заявки;

2) если в равновесии агент сообщает заявку, строго меньшую максимально возможной, то он получает оптимальное для себя количество ресурса.

Рассмотрим, какие заявки будут сообщать агенты. Возможны следующие случаи.

1. $r_1 = +\infty$, $r_2 = +\infty$, то есть оба агента заинтересованы в получении максимального количества ресурса («чем больше, тем лучше»). В этом случае равновесные заявки равны: $s_1^* = s_2^* = 1$. Равновесие понимается в смысле Нэша

(то есть такой точки, одностороннее отклонение от которой не выгодно ни одному из агентов). Действительно, сообщить $s_i > 1$ агент не может. Сообщая $s_i < 1$, i-й агент получит строго меньшее количество ресурса (при условии, что $s_j = s_j^* = 1$, $j \neq i$), то есть, отклоняясь один, он уменьшит (не увеличит) значение своей функции предпочтения. В этом случае

$$x_1^* = \pi_1(s_1^*, s_2^*) = x_2^* = \pi_2(s_1^*, s_2^*) = R/2 = 1/2.$$

Легко видеть, что ситуация равновесия не изменится, если $r_1 > 1/2$, $r_2 > 1/2$.

2. $r_1 \leq 1/2$, $r_2 > 1/2$. В этом случае заявка s_2^*, очевидно, равна 1, а $s_1^* = r_1 / (1 - r_1)$ (легко видеть, что $s_i^* \in (0; 1)$ $\forall\ r_1 < 1/2$). При этом $x_1^* = r_1$, $x_2^* = 1 - r_1$, то есть первый агент является *диктатором* – получает оптимальное для себя количество ресурса (ср. с механизмами активной экспертизы – раздел 3.3).

Чем же характерно число $x_i = 1/2$? Если $r_i \leq 1/2$ ($r_1 + r_2 > R$), то i-й агент становится диктатором и получает ровно столько, сколько ему нужно. Заметим, что $1/2 = \pi_i(1, 1)$, то есть это количество ресурса, получаемое в случае, когда оба агента сообщили максимальные заявки.

Более того, механизм является манипулируемым – равновесные заявки агентов не совпадают с их истинными потребностями. Можно ли избавиться от этого манипулирования? Оказывается – да! Рассмотрим следующий механизм.

Для анализируемого примера сконструируем соответствующий прямой механизм (см. раздел 3.1). Предположим, что агенты сообщают центру не заявки $s_i \in [0, 1]$, а непосредственно оценки $\tilde{r}_i \geq 0$ параметров r_i своих функций предпочтения $\varphi_i(x_i, r_i)$. Получив оценки $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, центр определяет точку равновесия ($s_1^*(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$; $s_2^*(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$) в соответствии со следующей процедурой:

1) если у обоих агентов $\tilde{r}_i > 1/2$, то $s_1^* = s_2^* = 1$;

2) если у одного из агентов $\tilde{r}_i \leq 1/2$ ($\tilde{r}_j > 1/2$, $j \neq i$, $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 > 1$), то $s_i^* = r_i / (1 - r_i)$, $s_j^* = 1$;

3) если $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 \leq 1$, то $s_1^* = \tilde{r}_1$, $s_2^* = \tilde{r}_2$.

Далее центр выделяет ресурс в соответствии с исходным механизмом пропорционального распределения, подставляя в него зависимость $s^*(r)$, то есть используя соответствующий прямой механизм (см. раздел 3.1). Понятно, что в соответствующем прямом механизме каждый из агентов получает в точности то же количество ресурса, что и в исходном механизме, значит эффективности этих механизмов совпадают.

Исследуем теперь, является ли соответствующий прямой механизм неманипулируемым, то есть является ли сообщение $\tilde{r}_i \equiv r_i$, $i = 1, 2$, равновесием Нэша. Рассмотрим следующие случаи.

1. Если у обоих агентов $r_i > 1/2$, то, сообщая $\tilde{r}_i \equiv r_i$, они получат ровно по половине ресурса. Распределение изменится только если $\tilde{r}_i < 1/2$, в этом случае $x_i^* < 1/2$ – то есть выигрыш i-го агента уменьшится, а значит такое отклонение ему невыгодно.

2. Если $r_i \leq 1/2$, $r_j > 1/2$, то i-му агенту отклонение невыгодно, так как он получает оптимальное для себя количество ресурса r_i. Для j-го агента, который в этой ситуации получает меньше ресурса, чем ему необходимо, отклонение также невыгодно, так как если он сообщит $\tilde{r}_j < r_j$, то центр «восстановит» $s_j^*(r_i, \tilde{r}_j) \leq 1$ и полученное им количество ресурса не увеличится.

3. Если $r_1 + r_2 \le 1$, то $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$, то есть каждый агент получает оптимальное для себя количество ресурса, и искажение информации ему ничего не дает (предполагается, что если при сообщении достоверной информации и ее искажении агент получает одно и то же количество ресурса, то он предпочтет сообщить правду).

Таким образом, мы показали, что в рассматриваемом примере можно построить соответствующий прямой механизм распределения ресурса, который является неманипулируемым и имеет ту же эффективность, что и исходный механизм.

Попробуем теперь обобщить этот важный результат на случай произвольного механизма распределения ресурса. Пусть в распоряжении центра имеется ресурс в количестве R, который он должен распределить между n агентами, имеющими функции предпочтения $\varphi_i(x_i, r_i)$, $i \in N$.

Предположим, что на заявки, подаваемые агентами, наложены ограничения $s_i \le D_i$, $i \in N$. Обозначим $\{r_i\}_{i \in N}$ – точки максимума функций предпочтения агентов и будем рассматривать случай, когда имеет место дефицит ресурса, то есть $\sum_{i=1}^{n} r_i > R$.

Пусть центр использует непрерывную и строго монотонную процедуру распределения $\pi(\cdot)$: $x_i = \pi_i(s)$, удовлетворяющую следующим свойствам:

1) весь ресурс распределяется полностью, то есть $\sum_{i=1}^{n} \pi_i(s) = R$ при любых s: $\sum_{i=1}^{n} s_i > R$ (*свойство сбалансированности*);

2) если агент при данной процедуре получил некоторое количество ресурса, то он всегда может получить любое меньшее количество;

3) если количество ресурса, распределяемое центром между заданным множеством агентов, увеличивается, то каждый агент из этого множества при той же процедуре распределения в равновесии получит не меньше, чем при прежнем количестве ресурса.

Перечисленные выше свойства механизма распределения ресурса представляются достаточно естественными. Действительно, этим свойствам удовлетворяют большинство используемых на практике механизмов.

Множество всех агентов N можно разбить на два подмножества: Q и P ($Q \cap P = \varnothing;\ Q \cup P = N$). Множество *приоритетных потребителей* Q (*диктаторов*) характеризуется тем, что все они получают ровно оптимальное для себя количество ресурса (напомним, что в точке r_i функция предпочтения i-го агента достигает глобального максимума). Агенты, входящие в множество P, характеризуются тем, что они получают количество ресурса, строго меньшее оптимального, то есть $x_i(s^*) < r_i,\ i \in P$, где s^* – равновесные сообщения агентов. Легко показать, что $s_i^* = D_i,\ \forall\ i \in P$.

Построим теперь соответствующий прямой механизм, то есть механизм, использующий сообщение агентами оценок $\{\tilde{r}_i\}$. Понятно, что для этого достаточно определить множество приоритетных потребителей. Для этого предлагается использовать следующий ***алгоритм***.

1. Положим $Q = \varnothing$, $P = N$ и определим $x_i(D)$, $i \in N$, где $D = (D_1, ..., D_n)$, то есть предположим, что все агенты сообщили максимальные заявки. Если $x_j(D) \geq \tilde{r}_j$, то $Q := Q \cup \{j\},\ j \in N$.

2. Полагаем $\forall\ i \in P\ \ S_i = D_i$ и распределяем между ними ресурс $R - \sum_{j \in Q} \tilde{r}_j$, подставляя в процедуру распределения ресурса такие заявки агентов из множества Q, чтобы

все они получали оптимальное для себя количество ресурса (это возможно в силу второго свойства процедуры распределения ресурса). Если появляются новые приоритетные потребители, то включаем их в множество Q и повторяем шаг 2.

Очевидно, алгоритм сходится за конечное число шагов. Обсудим его содержательные интерпретации. На первом шаге центр вычисляет, сколько получит каждый агент, если все сообщат свои максимальные заявки. Понятно, что если кто-то при этом получает больше, чем ему нужно (больше, чем r_j), то излишком ресурса $(x_j(D) - \tilde{r}_j)$ он, в силу свойств 2 и 3 процедуры $\pi(\cdot)$, может поделиться с теми агентами, которым ресурса не хватает. Дальше приоритетным агентам выделяется ровно оптимальное количество ресурса, а остаток делится между агентами, не попавшими в число приоритетных.

Прямой механизм, определяемый приведенным выше алгоритмом, использует сообщения $\{\tilde{r}_i\}$ и приводит к тому же распределению ресурса, что и исходный механизм $\pi(\cdot)$. Более того, по аналогии с рассмотренным примером легко показать, что прямой механизм является неманипулируемым, то есть сообщение достоверной информации агентами является равновесием Нэша [14]. А так как эквивалентный прямой механизм приводит к тому же распределению ресурса, что и исходный, значит он имеет ту же эффективность, что и исходный механизм.

Таким образом, установлен следующий факт: для любого механизма распределения ресурса, удовлетворяющего введенным предположениям, существует эквивалентный прямой (неманипулируемый) механизм не меньшей эффективности. Значит оптимальный механизм содержится в классе неманипулируемых механизмов, то есть, строя механизм, в котором все агенты сообщают правду, центр не теряет эффективности.

Анонимные механизмы. Обширным классом механизмов распределения ресурса являются *анонимные механизмы*, то есть механизмы, в которых любая перестановка агентов не изменяет назначаемых любому агенту (с учетом перестановки) планов. Для механизмов распределения ресурса это означает, что в анонимном механизме множества возможных сообщений агентов одинаковы $\Omega_{ij} = [0; D]$, а процедура планирования симметрична по заявкам агентов. Следует отметить, что анонимность механизма вовсе не подразумевает идентичности агентов. Сами агенты могут различаться сколь угодно сильно – единственным (и достаточно демократическим) требованием, предъявляемым к анонимному механизму планирования, является симметричность процедуры планирования.

В [43] доказано следующее свойство анонимных механизмов распределения ресурса: любой анонимный механизм распределения ресурса эквивалентен механизму пропорционального распределения. Справедливость этого утверждения следует из того факта, что все анонимные механизмы эквивалентны (в [8] доказано, что любой анонимный механизм эквивалентен *механизму последовательного распределения ресурса* – см. ниже), а механизм пропорционального распределения является анонимным. Свойства децентрализации анонимных механизмов распределения ресурса в многоуровневых ОС рассматривались в [43].

Опишем более подробно некоторые распространенные классы механизмов распределения ресурса.

Приоритетные механизмы. В приоритетных механизмах распределения ресурса, как следует из их названия, при формировании планов (решении о том, сколько ресурса выделить тому или иному агенту) в существенной степени используются показатели приоритета агентов. Приоритетные механизмы в общем случае описываются следующей процедурой:

$$x_i(s)=\begin{cases} s_i, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} s_j \le R \\ min\{s_i,\gamma\eta_i(s_i)\}, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} s_j > R \end{cases},$$

где n – число агентов, $\{s_i\}_{i \in N}$ – их заявки, $\{x_i\}_{i \in N}$ – выделяемые количества ресурса, R – распределяемое количество ресурса, $\{\eta_i(s_i)\}_{i \in N}$ – функции приоритета агентов, γ – некоторый параметр.

Операция взятия минимума содержательно означает, что агент получает ресурс в количестве, не большем заявленной величины. Параметр γ играет роль нормировки и выбирается из условия выполнения балансового (бюджетного) ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n} min\{s_i,\gamma\eta_i(s_i)\}=R ,$$

то есть подбирается таким, чтобы при данных заявках и функциях приоритета в условиях дефицита распределялся в точности весь ресурс R.

Приоритетные механизмы, в зависимости от вида функции приоритета, подразделяются на ***три класса*** – *механизмы прямых приоритетов* (в которых $\eta_i(s_i)$ – возрастающая функция заявки s_i, $i \in N$), *механизмы абсолютных приоритетов*, в которых приоритеты агентов фиксированы и не зависят от сообщаемых ими заявок[48], и

[48] Так как в механизмах абсолютных приоритетов планы, назначаемые агентам, не зависят от их заявок, то в рамках гипотезы благожелательности можно считать любой механизм абсолютных приоритетов неманипулируемым. Недостатком этого класса механизмов можно считать то, что в них центр никак не использует информации, сообщаемой агентами.

механизмы обратных приоритетов (в которых $\eta_i(s_i)$ – убывающая функция заявки s_i, $i \in N$). Рассмотрим последовательно механизмы прямых и обратных приоритетов.

Механизмы прямых приоритетов. Если функции предпочтения $\varphi_i(x_i, r_i)$ агентов являются строго возрастающими функциями x_i (агенты заинтересованы в получении максимально возможного количества ресурса), то, так как в механизме прямых приоритетов x_i – возрастающая функция заявки s_i, все агенты будут сообщать максимальные заявки на ресурс. Это явление – тенденция роста заявок – широко известно в экономике. Поэтому механизмы прямых приоритетов, использующие принцип – «больше просишь – больше получишь» подвергались и подвергаются справедливой критике.

Если функции предпочтения агентов имеют максимумы в точках $\{r_i\}_{i \in N}$, то анализ несколько усложнится, однако качественный вывод останется прежним: при наличии малейшего дефицита $Д = \sum_{i=1}^{n} r_i - R$ имеет место тенденция роста заявок.

Отметим, что процедура, рассматриваемая в качестве примера выше (механизм пропорционального распределения), является процедурой прямых приоритетов:

$$\eta_i(s_i) = s_i,\ i \in N,\ \gamma(s) = R / \sum_{i=1}^{n} s_i\ .$$

Так как все анонимные механизмы прямых приоритетов эквивалентны механизму последовательного распределения ресурса (качественно, это свойство обусловлено тем, что, сообщая в анонимном механизме одинаковые заявки, агенты получают одинаковое количество ресурса), то для нахождения в них равновесных заявок и равновесного распределения ресурса центр может использовать следующую ***процедуру последовательного распределения:***

1) упорядочить агентов в порядке возрастания точек пика;

2) выделить всем агентам ресурс в количестве, требуемом агентам с минимальной точкой пика (если имеющегося ресурса хватает, в противном случае – распределить ресурс поровну), и исключить агентов с минимальной точкой пика из рассмотрения;

3) выделить оставшимся агентам оставшийся ресурс в соответствии со вторым шагом.

Легко убедиться, что данная процедура распределения ресурса (соответствующий прямой механизм) неманипулируема, то есть сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Приведем пример. Пусть $n = 5$ и $r_i = 0{,}1\,i$, $R = 1$. Очевидно, что имеет место дефицит ресурса: $\Delta = 0{,}5$. На первом шаге центр выделяет всем агентам по 0,1 единицы ресурса, то есть количество, необходимое первому агенту. Остаток в 0,5 единицы ресурса распределяется между вторым, третьим, четвертым и пятым агентами. Так как $0{,}5/4 = 0{,}125 > r_2 - 0{,}1 = 0{,}1$, то все четыре агента получают по 0,1 единицы ресурса. Затем остаток, равный 0,1, распределяется между третьим, четвертым и пятым агентами, которые получают в равновесии (а это равновесие, так как даже третий агент получает меньше оптимального для него количества) по 0,23(3) единицы ресурса.

Определив равновесное распределение ресурса, можно найти равновесные заявки агентов. Если центр использует механизм пропорционального распределения, то в равновесии третий, четвертый и пятый агенты сообщат максимально возможные заявки (равные единице), а первый и второй агенты – такие заявки, чтобы получить оптимальное для себя количество ресурса. Эти заявки могут быть найдены из системы из двух уравнений с двумя неизвестными: $s_1 / (3 + s_1 + s_2) = 0{,}1$; $s_2 / (3 + s_1 + s_2) = 0{,}2$, откуда $s_1{}^* = \dfrac{3}{7}$, $s_2{}^* = \dfrac{6}{7}$.

Видно, что в исходном механизме все агенты искажают информацию, а в соответствующем прямом механизме – говорят правду.

Механизмы обратных приоритетов. Механизмы обратных приоритетов, в которых $\eta_i(s_i)$ является убывающей функцией s_i, $i \in N$, обладают, несомненно, рядом преимуществ по сравнению с механизмами прямых приоритетов. Проведем анализ механизма обратных приоритетов с функциями приоритета

$$\eta_i = A_i / s_i,\ i \in N,$$

где $\{A_i\}_{i \in N}$ – некоторые константы. Величина A_i характеризует потери ОС, если i-й агент вообще не получит ресурса. Тогда отношение A_i / s_i определяет удельный эффект от использования ресурса. Поэтому механизмы обратных приоритетов иногда называют *механизмами распределения ресурса пропорционально эффективности* (ПЭ-механизмами).

Пусть имеются три агента ($n = 3$), $A_1 = 16$, $A_2 = 9$, $A_3 = 4$; $R = 18$. Предположим сначала, что целью агентов является получение максимального количества ресурса. Определим ситуацию равновесия Нэша. Легко заметить, что функция $x_i(s) = min\ \{s_i, \gamma(A_i / s_i)\}$ достигает максимума по s_i в точке, удовлетворяющей условию $s_i = \gamma(A_i / s_i)$. Следовательно, $x_i^* = s_i^* = \sqrt{\gamma A_i}$.

Определим параметр γ из балансового ограничения $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sqrt{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i} = R$. Тогда $\gamma = \left(R \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i} \right)^2$.

Для рассматриваемого примера $\gamma = 4$, а равновесные заявки, определяемые из условия

$$x_i^* = s_i^* = R\frac{\sqrt{A_i}}{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{A_j}},$$

равны $s_1^* = 8$; $s_2^* = 6$, $s_3^* = 4$.

Проверим, что это действительно равновесие Нэша. Возьмем первого агента. Если он уменьшит свою заявку: $s_1 = 7 < s_1^*$, то $s_1 + s_2^* + s_3^* < R$. Следовательно, $x_1 = s_1 = 7 < x_1^*$. Если же $s_1 = 9 > s_1^*$, то $\gamma \approx 4{,}5$; $x_1 = 8 \equiv x_1^*$.

Легко показать [9, 43], что вычисленные стратегии являются для агентов гарантирующими, то есть максимизируют их выигрыши при наихудших стратегиях остальных.

Если функции предпочтения агентов имеют максимумы в точках $\{r_i\}_{i \in N}$ и если $s_i^* > r_i$, то i-й агент закажет ровно r_i и столько же получит, так как при уменьшении заявки его приоритет возрастает. Именно таким образом выделяется множество приоритетных потребителей ресурса.

Более того, можно показать, что при достаточно большом числе агентов механизм обратных приоритетов со штрафами за несовпадение ожидаемого и планируемого эффектов оптимален в смысле суммарной эффективности [9].

Конкурсные механизмы. Одним из условий повышения эффективности управления является разработка механизмов управления, побуждающих агентов к максимальному использованию всех резервов, включению в соревнование. Поэтому достаточно широкую распространенность получили так называемые конкурсные механизмы. Их особенностью является то, что агенты участвуют в соревновании по получению ресурса, льготных условий финансирования, участию в проекте и т. д.

При обсуждении механизмов обратных приоритетов подчеркивалось, что ресурс распределяется пропорционально эффективности $\xi_i = \varphi_i(x_i, r_i) / x_i$ его использования агентами. В конкурсном механизме ресурс получают только победители конкурса (на всех агентов ресурса может не хватить).

Предположим, что агенты сообщают центру две величины: заявку на ресурс s_i и оценку ξ_i ожидаемой эффективности его использования. Ожидаемый эффект для ОС в целом от деятельности i-го агента в этом случае равен: $w_i = \xi_i s_i,\ i \in N$. Упорядочим агентов в порядке убывания эффективностей: $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \ldots \geq \xi_n$.

Понятно, что агенты могут наобещать золотые горы, лишь бы получить финансирование. Поэтому при использовании конкурсных механизмов центр должен организовать действенную систему контроля за выполнением взятых обязательств. Введем систему штрафов: $\chi_i = \alpha\big(\xi_i s_i - \varphi_i(s_i)\big), \alpha > 0$, $i \in N$, пропорциональных отклонению ожидаемой эффективности $\xi_i s_i = w_i$ от реальной – $\varphi_i(s_i)$. Отметим, что величина $(\xi_i s_i - \varphi_i(s_i))$ характеризует обман, на который сознательно идет агент ради победы в конкурсе.

Целевая функция агента имеет вид:

$$f_i(\varphi_i, \xi_i) = \mu\varphi_i(s_i) - \alpha\big[\xi_i s_i - \varphi_i(s_i)\big],\ i \in N,$$

где μ – доля эффекта, остающаяся в распоряжении агентов (то есть $\mu\, \varphi_i(s_i)$ – его доход). Отметим, что агент штрафуется только в случае, если $\xi_i s_i > \varphi_i(s_i)$. Если реальная эффективность оказалась выше ожидаемой, то штрафы равны нулю.

Ресурс R, имеющийся в распоряжении центра, распределяется следующим образом: первый агент (агент, имеющий максимальную эффективность) получает ресурс в запрашиваемом объеме s_1. Затем получает ресурс (в объеме s_2) агент с меньшей (второй по величине) эффективностью и так далее, пока не закончится весь ресурс. То есть центр раздает ресурс в требуемом объеме в порядке убывания эффективностей до тех пор, пока не закончится ресурс. Агенты, получившие ресурс в полном объеме, называются *победителями конкурса*. Существенным при этом является то, что некоторые агенты (например, последний (в упорядочении по эффективности) из победителей конкурса) могут получить ресурс не в полном объеме и, тем не менее, принести определенный эффект. Поэтому рассматриваемые конкурсы называются *непрерывными*, в отличие от дискретных конкурсов, рассматриваемых в разделе 3.5 (см. также механизмы «затраты – эффект» в разделе 4.3).

Отметим, что при использовании такой процедуры победа в конкурсе зависит только от величины эффективности ξ_i и не зависит от величины заявки s_i. Поэтому агенты будут стремиться максимизировать свои целевые функции, то есть закажут такое количество ресурса, чтобы в случае победы значение их целевой функции было максимально.

Обозначим m – максимальный номер агента, победившего в конкурсе (то есть победителями являются агенты с номерами $j = \overline{1, m}$). Нетрудно показать, что все победители сообщат одинаковые оценки эффективности, то есть $\xi_j^* = \xi^*$, $j = \overline{1, m+1}$. Более того, при достаточно общих предположениях о функциях штрафов конкурсные механизмы обеспечивают оптимальное распределение ресурса [9].

Механизмы распределения затрат. Выше рассматривались механизмы распределения ресурса, в которых агенты являлись потребителями этого ресурса. Задача, стоявшая перед центром, заключалась в поиске механизма, удовлетворяющего тем или иным свойствам: оптимальность (в смысле максимальной эффективности), неманипулируемость и т. д. Двойственной, в некотором смысле, к задаче распределения ресурса является *задача распределения затрат*.

Предположим, что агенты заинтересованы (причем каждый – в той или иной степени) в производстве (покупке) некоторого *общественного блага*. В качестве общественного блага может выступать новая технология, производственное оборудование, эксперт, информация и т. д. Смысл термина «общественное» заключается в том, что пользоваться этим благом может каждый из агентов. Стоимость (цена) этого блага фиксирована, следовательно, для того чтобы произвести его (купить), агентам необходимо «скинуться» и наслаждаться потреблением этого блага (предполагается, что от потребления каждый агент получает определенный доход). Вопрос заключается в том, сколько должен заплатить каждый из агентов или, другими словами, как распределить затраты между агентами.

Если центр знает «степень удовлетворения» каждого из агентов от пользования общественным благом, то можно предлагать различные принципы распределения затрат – поровну, пропорционально потребности в потреблении, степени удовлетворенности и т. д. Какой из этих принципов является наиболее «справедливым» – отдельный вопрос. Но, как правило, потребности агентов известны только им самим. А если затраты агента зависят от его сообщений (которые невозможно или достаточно трудно проверить), то он, очевидно, постарается внести поменьше и «прокатиться» за счет других (так называемая задача о безбилетном пассажире – *free rider problem*). Следовательно, как и в механизмах распределения ресурса, в механизмах распределения затрат возникает проблема манипулируемости.

Анализ задачи распределения затрат проведем на примере. Пусть имеются два города (агента), разделенные рекой. Они обращаются в строительную фирму, специализирующуюся на строительстве мостов. Фирма объявляет, что готова построить мост за C единиц (положим $C = 1$). Доходы городов от использования моста равны $q_1 = 0{,}4$ и $q_2 = 1{,}2$ соответственно. Понятно, что строительство моста (мост – общественное благо) выгодно для городов, так как $q_1 + q_2 > C$. Как же следует поделить затраты между ними, то есть сколько должен заплатить первый город – C_1, а сколько второй – C_2 ($C_1 + C_2 = C$)? Рассмотрим некоторые возможные варианты.

1. ***Принцип равного распределения.*** Положим $C_1 = C_2 = C/2$. Если $q_1 > C/2$ и $q_2 > C/2$, то есть если значения целевых функций

$$f_i = q_i - C_i,\ i = 1, 2,$$

неотрицательны, то этот вариант является допустимым (в нашем примере это не так). Отметим, что он является неманипулируемым (у агентов ничего не спрашивают – используется принцип абсолютных приоритетов). Однако не всегда принцип равного распределения является «справедливым», так как если априори известно, что $q_1 \neq q_2$, то есть доходы от потребления не равны, то, наверное, будет неправильно заставлять агентов платить поровну.

2. ***Принцип пропорционального распределения***. Примем следующий принцип – «кому общественное благо нужнее, пусть тот больше и платит», то есть разделим затраты пропорционально доходу: $C_i = \frac{s_i}{S} C$, $i = 1, 2$, где $S = s_1 + s_2$, а s_i – сообщаемая центру i-м агентом оценка собственного дохода. Проанализируем механизм пропорционального распределения затрат. Очевидно, $s_1 + s_2 \geq C$, так как если $s_1 + s_2 < C$, то строительство моста невыгодно

(суммарный доход меньше затрат на строительство). Для того чтобы целевые функции были неотрицательны, потребуем: $C_1 \le q_1$, $C_2 \le q_2$. Перечисленные неравенства задают допустимую область заявок (s_1, s_2) агентов.

Понятно, что оба агента будут стремиться снизить заявки. Равновесием Нэша при этом будет множество пар заявок (s_1^*, s_2^*), представляющих собой отрезок: $s_1^* + s_2^* = C$, $s_1^* \le q_1$, $s_2^* \le q_2$. Интересно отметить, что сообщение достоверной информации в механизме пропорционального распределения не является равновесием.

В силу множественности и Парето-эффективности равновесий Нэша, если агенты знают истинные доходы друг друга, то имеет место «борьба за первый ход». Например, первый агент сообщает $s_1 = 0$ ($C_1 = 0$), перекладывая все затраты на второго (он вынужден объявить $s_2 = 1$ ($C_2 = 1$)).

Легко видеть, что механизм пропорционального распределения является *механизмом равных рентабельностей*. Определим рентабельность i-го агента $\rho_i = (s_i - C_i)/C_i$ как отношение прибыли к затратам (прибыль определяется по сообщению агента s_i). Подставляя в процедуру пропорционального распределения, получим, что $\rho_1 = \rho_2$, то есть рентабельности агентов равны (истинные рентабельности, определяемые как $(q_i - C_i)/C_i$ при этом могут быть и не равны).

3. ***Принцип равных прибылей.*** Рассмотрим следующий механизм: $C_1 = \dfrac{C}{2} + \dfrac{(s_1 - s_2)}{2}$; $C_2 = \dfrac{C}{2} + \dfrac{(s_2 - s_1)}{2}$.

Получим, что множество равновесий Нэша то же, что и в принципе пропорционального распределения.

Приведенные выше три принципа распределения затрат легко обобщаются на случай любого конечного числа агентов и, естественно, не исчерпывают все возможные варианты – на сегодняшний день известны и используются несколько десятков различных принципов [2, 8, 9, 14, 21, 38, 68, 69]. В большинстве из них вопрос о манипулируемости остается открытым. В то же время в ряде случаев описанный выше для механизмов распределения ресурса результат о неманипулируемости удается перенести на определенный класс механизмов распределения затрат, которые являются содержательно «двойственными» к механизмам распределения ресурса (см. подробности в [3, 8, 14, 38]).

3.3. Механизмы активной экспертизы

Многообразие целей и задач, решаемых руководителем организации, большое число подчиненных, их возможности и способности, требования и условия, предъявляемые окружающей средой – все это требует от центра владения большим количеством информации, необходимой для принятия эффективных управленческих решений. Но возможности центра ограничены, и он не всегда может сам непосредственно получить всю эту информацию. Поэтому возникает необходимость получения информации от остальных участников ОС, окружающей среды и т. д. В управлении социально-экономическими системами важную роль играют *механизмы экспертизы*, то есть механизмы получения и обработки информации от экспертов – специалистов в конкретных областях.

На сегодняшний день известны десятки механизмов проведения опросов экспертов и обработки их мнений. Детальное их описание выходит за рамки настоящей работы. Нас будет интересовать лишь один из аспектов процедур экспертного оценивания, а именно – возможность искажения информации агентами.

Представим себе следующую ситуацию. Центр хочет получить информацию, например, о производственных возможностях агентов. Самим агентам, естественно, их возможности известны, и они могут выступать в роли экспертов. Предположим, что центр устраивает опрос агентов и на основании их информации принимает управленческое решение. Так как принимаемое центром решение непосредственно затрагивает интересы агентов (а принимается оно на основе полученной от них же информации), то, скорее всего, каждый агент сообщит такую информацию, которая приведет к принятию наиболее выгодного для него решения. Простейший пример – когда центр спрашивает у агентов, какое количество финансовых ресурсов необходимо для выполнения определенного задания. При этом вряд ли можно надеяться, что агенты скажут правду (особенно при нехватке финансов).

То есть эксперты могут искажать информацию (манипулировать данными) в соответствии с собственными интересами. Такое их поведение называется активным, отсюда название этого раздела – *активная экспертиза*. Для центра желательно построить такой механизм (процедуру), при котором все эксперты говорили бы правду. Возможно ли это? В ряде случаев оказывается, что возможно.

Пусть имеются n экспертов, оценивающих какой-либо объект по скалярной шкале (объектом может быть кандидат на некоторый пост, вариант финансирования и т. д.). Каждый эксперт сообщает оценку $d \le s_i \le D, i = \overline{1,n}$, где d – минимальная, а D – максимальная допустимая оценка. Итоговая оценка $x = \pi(s)$, на основании которой принимается решение, является функцией оценок, сообщенных экспертами, $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$. Обозначим r_i – субъективное мнение i-го эксперта, то есть его истинное представление об оцениваемом объекте.

Предположим, что процедура $\pi(s)$ формирования итоговой оценки является строго возрастающей непрерывной функцией, удовлетворяющей *условию единогласия*:

$$\forall\ a \in [d, D] \ \ \pi(a, a, \ldots, a) = a.$$

Обычно предполагается, что эксперты сообщают свои истинные мнения $\{r_i\}_{i \in N}$. При этом если каждый из экспертов немного ошибается (несознательно и в зависимости от своей квалификации), то, например, средняя оценка $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$ достаточно объективно и точно оценивает объект. Если эксперты заинтересованы в результатах экспертизы, то они не обязательно будут сообщать свое истинное мнение, то есть механизм $\pi(\cdot)$ может быть подвержен манипулированию ($s_i \neq r_i$).

Формализуем интересы эксперта. Предположим, что каждый эксперт заинтересован в том, чтобы результат экспертизы x был максимально близок к его мнению r_i, то есть примем в качестве целевой функции i-го эксперта:

$$f_i(x, r_i) = -|x - r_i|,\ i = \overline{1, n}.$$

При этом эксперт будет сообщать оценку s_i, доставляющую минимум $\left|x\left(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n\right) - r_i\right|$.

Приведем пример манипулирования. Пусть $n = 3$; $d = 0$; $D = 1$; $r_1 = 0{,}4$; $r_2 = 0{,}5$; $r_3 = 0{,}6$ и центр использует следующий механизм обработки оценок: $x = \pi(s) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} s_i$. Если $s_i \equiv r_i,\ i = \overline{1, 3}$, то есть если все эксперты сообщают правду, то $x = 0{,}5$. При этом итоговая оценка совпала с истинным представлением второго эксперта, и он удовлетворен результатом полностью. Остальные же эксперты (первый и третий) не удовлетворены, так как $r_1 < 0{,}5$, а $r_3 > 0{,}5$. Следовательно, они попытаются сообщить другие

s_1 и s_3. Пусть они сообщают $s_1^* = 0, s_2^* = 0{,}5, s_3^* = 1$. Тогда $x^* = \pi(s_1^*, s_2^*, s_3^*) = 0{,}5$. Получили ту же итоговую оценку. Опять первый и третий эксперты не удовлетворены. Посмотрим, могут ли они поодиночке изменить ситуацию. Если $s_1 \neq s_1^*$, а $s_2 = s_2^*, s_3 = s_3^*$, то $\pi(s_1, s_2^*, s_3^*) > x^*$, следовательно, первый эксперт, изменяя свою оценку, еще более удаляет итоговую оценку от собственного истинного мнения. То же можно сказать и о третьем эксперте: $\pi(s_1^*, s_2^*, s_3) < x^*$, если $s_3 \neq s_3^*$. То есть, отклоняясь поодиночке от сообщения s^*, ни один из экспертов не может приблизить итоговую оценку к своему субъективному мнению. Значит s^* = (0; 0,5; 1) – равновесие Нэша.

Определим следующие числа:

$$w_1 = \pi(d, D, D) = \pi(0, 1, 1) = \frac{2}{3};$$

$$w_2 = \pi(d, d, D) = \pi(0, 0, 1) = \frac{1}{3}$$

(отметим, что $\pi(0, 0, 0) = 0$ и $\pi(1, 1, 1) = 1$). При этом $w_2 \leq r_2 \leq w_1$ $(\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3})$. То есть на отрезке $[w_2; w_1]$ эксперт номер два является «диктатором с ограниченными полномочиями» (его полномочия ограничены границами отрезка). Построим теперь для рассматриваемого примера механизм, в котором всем экспертам выгодно сообщить достоверную информацию, и итоговая оценка в котором будет та же, что и в механизме $\pi(\cdot)$.

Центр может попросить экспертов сообщить истинные значения $r = \{r_i\}_{i \in N}$ и использовать их следующим образом (эквивалентный прямой механизм): упорядочить экспертов в порядке возрастания сообщенных точек пика; если существует число $q \in \overline{2, n}$, такое, что $w_{q-1} \geq r_{q-1}$; $w_q \leq r_q$

(легко показать, что существует единственный эксперт с таким номером q), то

$$x^* = min\ (w_{q-1};\ r_q).$$

В нашем примере $q = 2$ и $\frac{1}{2} = min\ (\frac{2}{3}; \frac{1}{2})$.

При этом, очевидно, $s_i^* = d, i < q, s_i^* = D, i > q$. Итак, по сообщению r центр, воспользовавшись числами w_1 и w_2, восстановил равновесие Нэша s^*.

Проверим, могут ли эксперты, сообщая $\tilde{r}_i \neq r_i$ «улучшить» (со своей точки зрения) итоговую оценку. Очевидно, что второму эксперту изменять $\tilde{r}_i \equiv r_i$ невыгодно, так как $x^*(r_1, r_2, r_3) \equiv r_2$. Пусть первый эксперт сообщает $\tilde{r}_1 < r_1$. Для определенности положим $\tilde{r}_1 = 0{,}2$. Ситуация не изменится – по-прежнему «диктатором» является второй эксперт. Если $\tilde{r}_1 > r_1$, то первый эксперт может изменить итоговую оценку, только став «диктатором», то есть сообщив $\tilde{r}_1 > r_2$. Тогда центр определит $\pi(\tilde{r}_1, r_2, r_3) = \tilde{r}_1$, но при этом $|r_1 - \tilde{r}_1| > |r_1 - r_2|$, то есть первый эксперт еще более удалил исходную оценку от r_1. То есть, изменяя сообщение $\tilde{r}_1$, первый эксперт не может приблизить итоговую оценку к r_1.

Аналогично можно показать, что невыгодно манипулировать и третьему эксперту.

Таким образом, мы показали, что в эквивалентном прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для экспертов, причем итоговая оценка та же, что и в исходном механизме.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая (произвольного числа экспертов). Пусть все r_i различны и упорядочены в порядке возрастания, то есть $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ и x^* – равновесие Нэша ($x^* = \pi(s^*)$).

По аналогии с рассмотренным выше примером можно показать, что если $x^* > r_i$, то $s_i^* = d$, если $x^* < r_i$, то $s_i^* = D$. Если же $d < s_i^* < D$, то $x^* = r_i$. При этом если $x^* = r_q$, то $\forall j < q \quad s_j^* = d$, $\forall j > q \quad s_j^* = D$, а сама величина s_q^* определяется из условия:

$$\pi\left(\underbrace{d, d, \ldots, d}_{q-1}, s_q^*, \underbrace{D, D, \ldots, D}_{n-q}\right) = r_q .$$

Таким образом, для определения ситуации равновесия достаточно найти номер q. Для этого вычислим $(n + 1)$ число:

$$w_i = \pi\left(\underbrace{d\,,\, d\,,\, \ldots,\, d}_{i},\;\; \underbrace{D\,,\, D\,,\, \ldots,\, D}_{n-i}\right),\; i = \overline{0\,,n}\,.$$

При этом $w_0 = D > w_1 > w_2 > \ldots > w_n = d$, и если $w_i \le r_i \le w_{i-1}$, то $x^* = r_i$, то есть i-й эксперт является диктатором на отрезке $[w_i; w_{i-1}]$.

Легко показать, что существует единственный эксперт q, для которого выполнено $w_{q-1} \ge r_{q-1}$, $w_q \le r_q$.

Определив таким образом q, можно найти итоговую оценку в равновесии: $x^* = min\,(w_{q-1}, r_q)$.

По аналогии с рассмотренным выше примером можно показать, что сообщение достоверной информации $(\tilde{r}_i \equiv r_i)_{i \in N}$ является равновесием Нэша.

Выше мы фактически доказали, что для любого механизма экспертизы $\pi(\cdot)$ можно построить эквивалентный прямой механизм, в котором сообщение достоверной информации является равновесием Нэша. Этот результат позволяет говорить, что если центр заинтересован в получении достоверной информации от агентов, то он может этого добиться, используя неманипулируемый прямой механизм. Однако интересы центра могут быть другими.

Рассмотрим пример манипулирования экспертами со стороны центра (фактически рассматриваемый ниже в настоящем разделе механизм управления является механизмом информационного – см. также главу 8).

Предположим, например, что центр заинтересован в том, чтобы результат экспертизы был как можно ближе к значению $x_0 \in [d; D]$. Пусть центру известны мнения агентов $\{r_i \in [d; D]\}_{i \in N}$, но никому из них не известны достоверно мнения остальных. *Рефлексивное* (информационное) *управление* в данной ситуации заключается в формировании центром у агентов таких представлений о мнениях оппонентов, чтобы сообщаемая ими как субъективное информационное равновесие (см. главу 8) информация приводила бы к принятию наиболее выгодного для центра (наиболее близкого к x_0) решения.

Обозначим $x_{0i}(a_i, r_i)$ – решение уравнения

$$\pi(a_i, \ldots, a_i, x_0, a_i, \ldots, a_i) = r_i, \qquad (1)$$

в котором x_0 стоит на i-м месте, $i \in N$. Содержательно условие (1) – наилучший ответ i-го агента на единогласное сообщение остальными агентами величины a_i.

В силу монотонности и непрерывности механизма $\pi(\cdot)$ при фиксированном типе r_i i-го агента $x_{0i}(a_i, r_i)$ – непрерывная убывающая функция a_i. Потребуем, чтобы $x_0 \in [d; D]$, тогда

$$\forall\ a_i \in \Re^1,\ \forall\ r_i \in [d; D]\ x_0 \in [d_i(r_i); D_i(r_i)],\ i \in N, \qquad (2)$$

где

$$d_i(r_i) = max\,\{d; x_{0i}(D, r_i)\},\ D_i(r_i) = min\,\{D; x_{0i}(d, r_i)\},\ i \in N. \ (3)$$

Если тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам, то за счет рефлексивного управления любой результат x_0, для которого выполнено:

$$x_0 \in [\max_{i \in N} d_i(r_i);\ \min_{i \in N} D_i(r_i)], \qquad (4)$$

может быть реализован как единогласное коллективное решение [56].

Применим данное утверждение к линейному анонимному (напомним, что *анонимным* называется механизм принятия решений, симметричный относительно перестановок агентов) механизму экспертизы $\pi(s) = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} s_i$, $s_i, r_i \in [0; 1], i \in N$.

Вычисляем $a_i = \frac{n\, r_i - x_0}{n - 1}$, $i \in N$.

Получаем из условия $a_i \in [0; 1]$ (или из (2)–(4)) границы диапазона единогласно реализуемых коллективных решений:

$$max\ \{0; n\, (\max_{i \in N} r_i - 1) + 1\} \le x_0 \le min\ \{1; n\ \min_{i \in N} r_i\}. \quad (5)$$

Интересно отметить, что из (5) следует ограничение:

$$\max_{i \in N}\ r_i - \min_{i \in N}\ r_i \le 1 - \frac{1}{n}$$

на разброс мнений экспертов, при котором существует хотя бы один результат x_0, реализуемый за счет рефлексивного управления как единогласно принятое коллективное решение.

С другой стороны, из (5) следует, что $x_0 \in [0; 1]$, если

$$\max_{i \in N}\ r_i \le 1 - \frac{1}{n},\ \min_{i \in N}\ r_i \ge \frac{1}{n}.$$

Последнее условие свидетельствует о том, что в линейном анонимном механизме экспертизы достаточным условием единогласной реализации любого коллективного мнения в результате рефлексивного управления является следующее: не должно существовать экспертов как с очень низкими оценками, так и с очень высокими оценками.

Откажемся теперь от требования единогласного принятия коллективного решения. Введем два вектора:

$$d(r) = (d_1(r_1), d_2(r_2), \ldots, d_n(r_n)),$$
$$D(r) = (D_1(r_1), D_2(r_2), \ldots, D_n(r_n)).$$

Если тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам, то за счет рефлексивного управления любой результат x_0, для которого выполнено:

$$x_0 \in [\pi(d(r)); \pi(D(r))], \tag{6}$$

может быть реализован как коллективное решение [56].

Применим данное утверждение к линейному анонимному механизму экспертизы $\pi(s) = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} s_i$, s_i, $r_i \in [0; 1]$, $i \in N$.

Вычислим, какое сообщение s_i i-го агента является для него субъективно оптимальным при обстановке s_{-i} (обозначим $S_{-i} = \sum_{j \neq i} s_j \in [0; n-1]$):

$$s_i(r_i, S_{-i}) = n\, r_i - S_{-i},\ i \in N. \tag{7}$$

Следовательно, $X_i(r_i) = [max\ \{0; 1 - n\,(1 - r_i)\}; min\ \{1; n\, r_i\}]$, $i \in N$. Подставляя с учетом (7) левые и правые границы множеств $X_i(r_i)$ в линейный анонимный механизм планирования, получаем:

$$x_0 \in [\sum_{i \in N} \frac{1}{n} max\ \{0; 1 - n\,(1 - r_i)\}; \sum_{i \in N} \frac{1}{n} min\ \{1; n\, r_i\}]. \tag{8}$$

Рассмотрим числовой пример с тремя агентами, имеющими точки пика $r_1 = 0{,}4$; $r_2 = 0{,}5$; $r_3 = 0{,}6$. Пусть $x_0 = 0{,}8$. Если все агенты сообщают правду, то в непрямом механизме $x = 0{,}5$; в соответствующем прямом (неманипулируемом) механизме будет принято то же решение. То есть центру хотелось бы, чтобы каждый из агентов сообщил бóльшую оценку, приблизив тем самым итоговое решение к 0,8.

Условие (5) в рассматриваемом примере выполнено. Вычислим следующие величины:

$$0{,}8 + 2\, a_1 = 3 \times 0{,}4 \to a_1 = 0{,}2;$$
$$0{,}8 + 2\, a_2 = 3 \times 0{,}5 \to a_2 = 0{,}35;$$
$$0{,}8 + 2\, a_3 = 3 \times 0{,}6 \to a_3 = 0{,}5.$$

Центр формирует у первого агента убеждение, что типы остальных агентов равны 0,2, они считают, что его тип также равен 0,2 и с их точки зрения этот факт – общее знание. Аналогичные «убеждения» – соответственно 0,35 и 0,5 – формируются у второго и третьего агентов.

Наилучшим ответом первого агента (приводящим к тому, что коллективное решение совпадает с его точкой пика) на сообщение 0,2 остальными агентами является сообщение 0,8. Это же сообщение (в силу определения a_i) является наилучшим ответом всех остальных агентов (второго и третьего). Итак, все сообщают 0,8, и это решение единогласно принимается.

В рассматриваемом числовом примере условие (8) выполнено для любого $x_0 \in [0; 1]$, то есть $n\,(\max\limits_{i \in N} r_i - 1) + 1 \leq 0$ и $n \min\limits_{i \in N} r_i \geq 1$.

Рассмотрим другой пример: пусть $n = 2$; $r_1 = 0{,}2$; $r_2 = 0{,}7$. Тогда из (5) получаем, что существует единственное x_0, равное 0,4, которое реализуемо как единогласное коллективное решение. В то же время из (6) следует, что множество реализуемых коллективных решений составляет отрезок [0,2; 0,7].

Совпадение границ этого отрезка с типами агентов случайно: например, при $r_1 = 0{,}1$; $r_2 = 0{,}5$ единогласно реализуемы коллективные решения из отрезка [0; 0,2].

В заключение рассмотрения рефлексивного управления в механизмах активной экспертизы отметим, что приведенные выше результаты были получены в предположении, что тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам. Более реалистичным является предположение, что каждый из участников (центр и эксперты) имеет свои представления о диапазонах типов оппонентов, то есть управленческие возможности центра ограничены. Анализ множества коллективных решений, которые могут быть реализованы в этом случае как информационные равновесия, представляется перспективной задачей будущих исследований.

3.4. Механизмы внутренних цен

Классическим примером, ставшим чрезвычайно популярным в экономико-математическом моделировании, является ОС, в которой агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа:

$$c_i(y_i, r_i) = \frac{1}{\alpha}\, y_i^{\alpha}\, r_i^{1-\alpha},\ \alpha \geq 1,\ r_i > 0.$$

Предположим, что задача центра заключается в побуждении коллектива агентов выбрать набор действий $\{y_i\}$, сумма которых равна заданной величине R (содержательные интерпретации см. ниже). Пусть центр устанавливает цену λ, тогда целевая функция i-го агента равна разности между доходом $\lambda\, y_i$ и затратами:

$$f_i(y_i, r_i) = \lambda\, y_i - c_i(y_i, r_i). \qquad (1)$$

Решая задачу минимизации суммарных затрат агентов выбором $(\{x_i\},\ \lambda)$ при условии $x_i \in Arg \max\limits_{y_i \in A_i} f_i(y_i, r_i)$ и ограничении $\sum\limits_{i \in N} x_i = R,$ получаем (см. также раздел 2.7):

$$x_i(R, r) = \frac{r_i}{W} R,\ \lambda(R, r) = (R / W)^{\alpha - 1}, \qquad (2)$$

где $W = \sum\limits_{i \in N} r_i$, $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

Решение (2) минимизирует суммарные затраты агента при заданном ограничении на сумму действий агентов, то есть обеспечивает достижение агентами Парето-оптимального равновесия. При этом цена λ является множителем Лагранжа.

Рассматриваемая формальная модель имеет множество содержательных интерпретаций. В том числе: распределение объемов работ в коллективе (λ – ставка оплаты) [47], распределение ресурса с ценой за ресурс λ [8, 9], распределение заказов в объединении (λ – внутрифирменная цена) [49, 67], компенсационные механизмы в оперативном управлении проектами и промышленным производством (λ – ставка оплаты за сокращение продолжительности операций) [14, 29] и др. Общим является наличие единой для всех агентов цены.

Решение (2) было получено в предположении, что центру известны коэффициенты $\{r_i\}_{i \in N}$ функций затрат агентов. Если эти коэффициенты ему неизвестны и сообщаются агентами, то возникает задача манипулируемости используемого механизма планирования.

Уникальностью рассматриваемой модели является то, что для нее существует эквивалентный прямой механизм, то есть механизм открытого управления (неманипулируемый), в котором при определенных условиях (см. ниже) сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Обоснуем последнее утверждение. Для этого предположим, что агенты сообщают центру оценки $\{s_i\}_{i \in N}$ параметров функций затрат, а центр использует следующий механизм планирования (механизм открытого управления – выбора планов и цены):

$$\sum_{i \in N} x_i(s, \lambda) = R, \tag{3}$$

$$x_i(s, \lambda) = \arg \max_{y_i \in A_i} \{\lambda(s)\, y_i - c_i(y_i, s_i)\}. \tag{4}$$

Содержательно центр подставляет в целевые функции агентов сообщенные ими оценки (принимая их за истинные) и назначает агентам наиболее выгодные для них при этих оценках планы (условие (4) называется условием совершенного согласования (УСС) – см. раздел 3.1). Параметр λ выбирается таким образом, чтобы планы $x_i(s, \lambda)$ удовлетворяли балансовому ограничению (3).

Решение задачи (3)–(4) (*механизм внутренних цен*) имеет вид:

$$x_i(R, s) = \frac{s_i}{V} R,\ \lambda(R, s) = (R / V)^{\alpha - 1}, \qquad (5)$$

где $V = \sum_{i \in I} s_i$, $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$.

Отметим чрезвычайно важную для дальнейшего анализа схожесть выражений (5) и (2).

Если выполнена *гипотеза слабого влияния* (ГСВ – при достаточно большом числе агентов влияние сообщения конкретного агента на общее управление $\lambda(R, s)$ мало), то, подставляя (5) в (1), находим, что при любых сообщениях остальных агентов максимум целевой функции i-го агента по его сообщению достигается при $s_i = r_i$, то есть при ГСВ сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Механизм внутренних цен (5) достаточно уникален. Во-первых, он является неманипулируемым механизмом (механизмом открытого управления), имеющим ту же эффективность, что и механизм (2) в условиях полной информированности. Во-вторых, он минимизирует суммарные затраты агентов на выполнение общего планового задания. И наконец, в-третьих, он допускает произвольную децентрализацию [43], то есть каждая подсистема может рассматриваться как один агент, действием которого является сумма действий входящих в нее агентов, имеющий функцию затрат типа Кобба-Дугласа с параметром, равным сумме параметров соответствующих агентов.

Приведенные результаты могут быть усилены, то есть обобщены на случай, когда функции затрат агентов имеют вид:

$$c_i(y_i, r_i) = r_i\, \varphi(y_i / r_i),\ i \in N,$$

где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция. При этом цена за ресурс определяется следующим выражением: $\lambda(R, s) = \varphi'(R/V)$ (ср. с (5)), а оптимальные планы – по-прежнему выражением (5).

Отметим, что возможность идеального агрегирования в рассматриваемой модели обусловлена видом функций затрат агентов и процедур планирования. Для произвольных функций затрат агентов полученные результаты в общем случае не имеют места.

В заключение настоящего раздела исследуем эффективность рассматриваемого выше механизма открытого управления с внутренними ценами.

До сих пор считалось, что целевая функция центра определяется доходом от выполненных работ суммарным объемом R (при постоянном объеме доход постоянен) и суммарными затратами агентов по выполнению этих работ. Механизмы (2) и (5) минимизируют суммарные затраты агентов при условии, что центр назначает единую для всех агентов цену. Если центр имеет собственные интересы, заключающиеся наряду с выполнением заданного объема работ в минимизации суммарных выплат агентам, то механизм с внутренними ценами может рассматриваться не только как механизм планирования, но и как механизм пропорционального стимулирования, в котором вознаграждение агентов пропорционально его действию. Коэффициент пропорциональности при этом является ценой, например, ставкой зарплаты (см. [47] и содержательные интерпретации выше).

Известно, что при монотонных непрерывных функциях затрат пропорциональные системы стимулирования не эффективны. В частности, если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то оптимальные компенсаторные механизмы стимулирования имеют строго большую эффективность, чем пропорциональные (см. раздел 2.3 и [47, 49]). Проиллюстрируем это утверждение.

Минимальные затраты на стимулирование $\vartheta(x)$ по реализации вектора действий $x \in A$ компенсаторной системой стимулирования равны: $\vartheta_K(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)$. При использовании пропорциональной системы стимулирования эти затраты определяются следующим образом: $\vartheta_L(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^*$, где x_i^* удовлетворяет (2).

Отношение $\vartheta_L(x) / \vartheta_K(x) = \alpha \geq 1$ не зависит от вектора действий и показывает, во сколько раз центр «переплачивает» агентам, используя единую внутреннюю цену, по сравнению с минимально необходимыми для реализации заданного вектора действий затратами на стимулирование. Следовательно, хотелось бы найти механизм управления, для которого, как и для механизма внутренних цен, существовал бы эквивалентный механизм открытого управления (обеспечивающий нееманипулируемость в случае неполной информированности центра о моделях агентов), но который имел бы большую – желательно такую же или «почти» такую же, как и у оптимального компенсаторного механизма стимулирования, – эффективность.

Такой механизм существует. Пусть центр использует в условиях полной информированности следующий механизм управления:

$$\sigma_i(y_i, r_i) = \frac{\lambda}{\gamma}\, y_i^{\gamma}\, r_i^{1-\gamma},\ \gamma \geq 1, \qquad (6)$$

тогда целевая функция агента имеет вид (ср. с (1)):

$$f_i(y_i, r_i) = \frac{\lambda}{\gamma}\, y_i^{\gamma}\, r_i^{1-\gamma} - c_i(y_i, r_i). \qquad (7)$$

В [49] доказан следующий факт: если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа $c_i(y_i,\ r_i) = \frac{1}{\alpha}\ y_i^{\alpha} r_i^{1-\alpha}$, $i \in N$ и $\gamma = \alpha - \delta$, где $\delta \in (0;\ \alpha)$, то:

а) механизм (6) ε-оптимален, где $\varepsilon \approx \delta / (\alpha - \delta)$;

б) в рамках ГСВ для механизма (6) существует эквивалентный механизм открытого управления.

Многочисленные примеры прикладного использования механизмов внутренних цен приведены в [43, 47, 67].

3.5. Конкурсные механизмы[49]

Общая идея любого конкурса заключается в следующем: претенденты упорядочиваются на основании имеющейся о них информации (как объективной, так и сообщаемой самими претендентами), затем победителем (или победителями) объявляется претендент, занявший первое место (или, соответственно, несколько первых мест – в зависимости от условий конкурса). Возникающая при этом проблема заключается в том, что участники конкурса могут искажать сообщаемую информацию, то есть манипулировать ею с целью войти в число победителей.

Различают *дискретные и непрерывные конкурсы*. В первом случае претенденту требуется вполне определенное количество ресурса и любое меньшее количество ресурса его не удовлетворяет – приводит к нулевому эффекту (например, не позволяет реализовать проект, выпустить изделие и т. д.). В случае же непрерывных конкурсов претендент, получая ресурс в количестве, меньше запрашиваемого, может получить эффект, отличный от нуля. Примером такой ситуации является пропорциональная зависимость между эффектом и ресурсом (эффективность постоянна).

---

[49] Раздел написан совместно с В. Н. Бурковым.

Непрерывные конкурсы рассматривались выше в разделе «Механизмы распределения ресурса», поэтому в настоящем разделе рассматривается модель дискретного конкурса на примере задачи определения пакета инвестиционных проектов, которые получают финансирование.

Обозначим через l_i оценку ожидаемого эффекта от реализации i-го проекта, s_i – оценку объема финансирования i-го проекта. Как правило, оценка l_i определяется экспертной комиссией с учетом рыночных, экономических и социальных целей, а оценка s_i – фирмой, предлагающей проект, либо организацией, которая берется за его реализацию. Будем считать, что оценка эффекта l_i достаточно объективна, хотя, в принципе, нельзя исключить сознательное завышение или занижение оценок эффекта со стороны экспертов, заинтересованных в том или ином проекте. Что касается оценок требуемого финансирования, то здесь нельзя не учитывать тенденцию завышения требуемого объема финансирования со стороны фирм, которые берутся за реализацию проекта, либо которые предлагают свой проект.

Для снижения негативного влияния этой тенденции широко применяются конкурсные механизмы. Вводится некоторая оценка эффективности (приоритетности) инвестиционных проектов, зависящая как от эффекта l_i, так и от оценки объема финансирования s_i. Затем проекты упорядочиваются по убыванию эффективностей и финансируются в порядке этой очередности, пока хватает средств. Наиболее распространенными являются две оценки эффективности: $q_i = l_i / s_i$ и $q_i = l_i - \alpha\, s_i$ (α – нормативный коэффициент, соизмеряющий эффект и затраты). Такой конкурс называется *простым*.

Как оценить эффективность конкурса? Обозначим через r_i объективную оценку объема финансирования i-го проекта (при финансировании, меньшем r_i, велик риск нереализации проекта, то есть конкурс является дискретным). Если для всех проектов известны объективные объемы финансирования, то можно выбрать оптимальный пакет проектов Q, решив следующую задачу:

$$\sum_{i \in Q} l_i \to max\,, \tag{1}$$

$$\sum_{i \in Q} r_i \le R, \tag{2}$$

где R – выделенный объем (фонд) финансирования.

Максимальный эффект, полученный в результате решения задачи (1)–(2), обозначим через L_{max}.

Пусть Q – множество победителей конкурса. Тогда суммарный эффект от победившего пакета проектов составит:

$$L(Q) = \sum_{i \in Q} l_i\,. \tag{3}$$

Очевидно, что $L(Q) \le L_{max}$. Отношение

$$K = \frac{L(Q)}{L_{max}} \tag{4}$$

определяет эффективность конкурсного механизма. Покажем, что эффективность простых конкурсов может быть сколь угодно малой.

Пример 3.1. Пусть имеется всего два проекта, причем $l_1 = 2\,\varepsilon$, $r_1 = \varepsilon$ (ε – малое положительное число), $l_2 = 150$, $r_2 = 100$. Выделенный объем финансирования $R = 100$.

При оценке по отношению $q_1 = l_1 / r_1 = 2$; $q_2 = l_2 / r_2 = 1{,}5$, очевидно, победителем будет первый проект, который получает финансирование $s_1 = \varepsilon$. На второй проект денег не хватает. Таким образом, $Q = \{1\}$, $L(Q) = 2\,\varepsilon$. Максимальный эффект, очевидно, равен $L_{max} = 150$, когда финансируется второй проект. Эффективность конкурсного механизма составляет $K = 2\,\varepsilon / 150 = \varepsilon / 75$ и может быть сколь угодно малой.

При оценке эффективности по разности $q_1 = l_1 - \alpha\, r_1$; $q_2 = l_2 - \alpha\, r_2$ при $\alpha = 1{,}5$ имеем: $q_1 = 0{,}5\,\varepsilon$, $q_2 = 0$, и при любом ε победителем будет первый проект. Эффективность конкурсного механизма в этом случае будет такой же, как и при оценке эффективности по отношению, то есть может быть сколь угодно малой.

Получим гарантированную оценку эффективности простого конкурса с учетом того, что, во-первых, победители конкурса могут завышать величину требуемых средств, а во-вторых, что остатка средств фонда может не хватить на реализацию очередного проекта.

Гарантированная эффективность K простого конкурса не ниже следующей величины:

$$K = \frac{1}{2 - \alpha + \dfrac{1}{\beta - 1}}, \qquad (5)$$

где $\alpha = Э_{min} / Э_{max}$ ($Э_{min}$ – минимальная, а $Э_{max}$ – максимальная эффективность проектов, представленных на конкурс), $\beta = R / r$ (R – размер фонда, а r – максимальная величина средств, требуемая для реализации одного проекта).

Докажем справедливость оценки (5) эффективности простого конкурса. Пусть $Э_1$ – максимальная эффективность проектов, не попавших в число победителей, l_2 – суммарный эффект от победивших проектов, s_2 – суммарная оценка финансирования победивших проектов. Очевидно, что $l_2 > Э_1\, s_2$ и $R - s_2 < r$. Следовательно, для полученного эффекта мы имеем оценку:

$$l_2 > Э_1\, s_2 > Э_1\, (R - r).$$

В действительности победившие проекты можно реализовать с меньшим объемом финансирования: $r_2 > \dfrac{Э_1(R - r)}{Э_{max}}$, а остаток средств $\Delta = R - r_2 < R - \dfrac{Э_1(R - r)}{Э_{max}}$

использовать для реализации других проектов, получив дополнительный эффект не менее

$$Э_1\,\Delta < Э_1\left[R - \frac{Э_1(R-r)}{Э_{max}}\right].$$

Таким образом, для эффективности простого конкурса получаем следующую оценку:

$$K \geq \frac{Э_1(R-r)}{Э_1(R-r) + Э_1\left[R - \frac{Э_1(R-r)}{Э_{max}}\right]} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2 - \frac{Э_{min}}{Э_{max}} + \frac{1}{\frac{R}{r} - 1}} = \frac{1}{2 - \alpha + \frac{1}{\beta - 1}}.$$

Из определения эффективности следует, что максимальная эффективность простого конкурса достигается в случае, когда $Э_{min} = Э_{max}$ (проекты близки по эффективности) и значение r мало (проекты требуют небольшого финансирования). Минимальная эффективность может иметь место при наличии проектов, объемы финансирования которых сравнимы с величиной фонда R.

Если $r \approx 0$, то оценка эффективности принимает более простой вид:

$$K \geq \frac{1}{2-\alpha} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для небольших проектов эффективность простого конкурса всегда больше 50 %.

Рассмотрим *прямой конкурсный механизм*, суть которого в том, что победители определяются в результате непосредственного решения задачи на максимум суммарного эффекта:

$$\sum_{i \in Q} l_i \to max \qquad (6)$$

при ограничении:

$$\sum_{i \in Q} s_i \le R . \tag{7}$$

Легко показать, что *эффективность прямого конкурсного механизма* не меньше чем 0,5. Эта оценка не улучшаема, что показывает следующий пример.

Пример 3.2. Пусть имеются два проекта со следующими параметрами: $l_1 = 100 + \varepsilon$, $r_1 = 50$, $l_2 = 100$, $r_2 = 50$, где ε – малое положительное число. Пусть при выделенном объеме финансирования $R = 100$ претенденты сообщили следующие оценки: $s_1 = 100$, $s_2 = 50$.

Очевидно, что в результате решения задачи (6), (7) победителем будет первая организация, то есть $Q = \{1\}$, $L(Q) = 100 + \varepsilon$. В то же время, как легко убедиться, $L_{max} = 200 + \varepsilon$ и поэтому

$$K = \frac{100 + \varepsilon}{200 + \varepsilon} = 0{,}5 + \frac{\varepsilon}{400 + 2\varepsilon} .$$

Так как ε – любое положительное число, то K может быть сколь угодно близким к 0,5.

Рассмотрим более сложный вариант организации конкурса, так называемый *двухэтапный конкурс*.

На первом этапе определяются все решения задачи (6), (7), для которых имеет место соотношение

$$L(Q) \ge \delta L_0, \tag{8}$$

где L_0 – суммарный эффект в оптимальном решении этой задачи, $0 < \delta \le 1$ – фиксированный параметр.

Другими словами, выбираются все пакеты проектов, для которых суммарный эффект не менее, чем определенная доля δ от максимального эффекта при сообщенных оценках $\{s_i\}$.

На втором этапе из всех пакетов, которые прошли первый тур, то есть удовлетворяют условию (8), выбирается пакет, требующий минимального финансирования. Для данного механизма возникает вопрос, какое δ выбрать. Для ответа на этот вопрос рассмотрим случай двух проектов. При заданном значении δ возможны четыре варианта (для определенности примем, что $l_1 \geq l_2$):

а) $l_2 / l_1 < \delta$ и $r_1 + r_2 > R$. В этом случае на первом этапе побеждает только один пакет, состоящий из одного первого проекта. Очевидно, что эффективность $K = 1$;

б) $l_2 / l_1 < \delta$ и $r_1 + r_2 \leq R$. В этом случае на первом этапе также побеждает только один пакет, состоящий из первого проекта. Однако поскольку $L_{max} = l_1 + l_2$, то эффективность будет равна:

$$K = \frac{l_1}{l_1 + l_2} > \frac{1}{1+\delta};$$

в) $l_2 / l_1 \geq \delta$ и $r_1 + r_2 > R$. В этом случае побеждают два пакета, один из которых включает первый пакет, а другой – второй. На втором этапе в худшем случае побеждает второй проект (если $r_2 < r_1$) и поэтому эффективность равна:

$$K = \frac{l_2}{l_1} \geq \delta;$$

г) $l_2 / l_1 \geq \delta$ и $r_1 + r_2 \leq R$. В этом случае наименее благоприятный вариант состоит в том, что на первом этапе побеждают два пакета, как и в варианте «в», а на втором этапе – второй проект. Это произойдет в том случае, если $s_1 + s_2 > R$ и в то же время $s_2 < s_1$. Если принять, что $s_1 = r_1$ (побежденный сообщает минимальную оценку), то наименее благоприятный для организатора вариант возможен, если $r_1 > R/2$ и $r_2 < r_1$. В этом случае эффективность будет равна:

$$K = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \geq \frac{\delta}{1+\delta}.$$

Видно, что в случае «г» эффективность минимальна. Поскольку в этом случае эффективность растет с ростом δ, то следует взять $\delta = 1$. Таким образом, снова приходим к прямому конкурсу.

По-видимому, при сделанных предположениях не существует конкурсного механизма, обеспечивающего гарантированную эффективность более чем 0,5. Ситуация становится более благоприятной, если принять другие гипотезы о поведении участников конкурса.

До сих пор считалось, что поведение участников конкурса определяется стремлением к равновесной ситуации (точке Нэша). Если принять, что участники конкурса стремятся к максимизации гарантированного результата, то выявляются преимущества двухэтапного конкурса. Действительно, в этом случае для уверенной победы на втором этапе участник, представляющий первый проект, либо должен быть уверен, что на первом этапе победит только один пакет, состоящий из первого проекта, либо должен сообщить минимальную оценку затрат $s_1 = r_1$ для повышения шансов на победу во втором этапе. Аналогично второй участник сообщит $s_2 = r_2$. Отсюда следует, что наименее благоприятный случай в варианте «г» невозможен, и эффективность конкурса в варианте «г» равна единице. Таким образом, гарантированная эффективность будет равна:

$$K = min\left(\delta, \frac{1}{1+\delta}\right).$$

Максимум этой величины достигается при $\delta = \dfrac{1}{1+\delta}$. Решая это уравнение, получаем оптимальную величину δ:

$$\delta_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6\,.$$

Полученная оценка гарантированной эффективности, по-видимому, справедлива и для случая, когда число участников больше двух. Это следует из предположения, что с ростом числа участников эффективность конкурса не уменьшается.

3.6. Механизмы обмена в задачах планирования и стимулирования[50]

Многие экономические задачи могут быть сформулированы как задачи обмена. Поэтому в настоящем разделе иллюстрируется возможность применения предложенного в [31] метода построения неманипулируемых механизмов обмена для решения задач планирования и стимулирования в управлении организационными системами. В основе метода лежит сформулированный в разделе 3.1 принцип открытого управления. Его использование позволяет получать эффективные решения для задач обмена в условиях неполной информированности центра о параметрах агентов. В качестве иллюстративных примеров приводятся задачи стимулирования и задачи планирования – ценообразования – в ОС с неполной информированностью центра.

Модель обменной схемы. Введем основные понятия [31], необходимые для дальнейшего изложения.

Обмен – процесс перераспределения ресурсов между участниками организационной системы.

Множество вариантов обмена – множество индивидуально рациональных распределений ресурсов, переход к которым возможен в рамках данной организационной системы.

Обменная схема – совокупность вариантов обмена (организационная система, для которой множество вариантов обмена не пусто).

---

[50] Раздел написан Н. А. Коргиным.

Таким образом, обменная схема – это организационная система, участники которой (или хотя бы их часть) заинтересованы во взаимодействии между собой, то есть в перераспределении ресурсов.

Ниже рассматривается двухэлементная обменная схема, в которой присутствуют два вида ресурсов. Для задачи стимулирования (см. вторую главу) участниками обменной схемы является работодатель (центр) и наемный работник (агент), а в качестве ресурсов рассматриваются деньги и производимый агентом продукт. Для задачи планирования (см. третью главу) – ценообразования – участниками обменной схемы являются продавец (производитель товара), выступающий в роли центра, и покупатель, выступающий в роли агента. Ресурсами в задаче ценообразования являются произвольно делимый товар и деньги.

Постановки обеих задач идентичны. Центр должен наиболее выгодным для себя образом совершить обмен с агентом. Центр не имеет точной информации о «типе» агента – параметре, от которого зависит функция полезности последнего. Примером типа агента является эффективность его деятельности, производительность труда и т. д. Центр предлагает агенту *механизм обмена* – в зависимости от сообщенной агентом оценки своего типа ему назначаются различные варианты обмена.

Традиционно, *тип* агента вводится таким образом, чтобы отражать «полезность» деятельности агента для центра – чем лучше тип агента (больше его абсолютное значение), тем бóльшую прибыль может получить центр от взаимодействия с данным агентом. В задаче стимулирования – чем выше тип агента, тем меньше его затраты на изготовление одного и того же количества продукции. В задаче ценообразования – чем выше тип агента, тем выше он ценит предлагаемый ему центром товар.

Общий принцип построения неманипулируемых механизмов обмена основывается на условии совершенного согласования (см. раздел 3.1). Вариант обмена, соответствующий заявке агента, должен быть наиболее выгодным из всех предлагаемых вариантов обмена для агента, чей тип соответствует данной заявке. Тем самым центр побуждает агента сообщать истинное значение своего типа.

Математическая модель обменной схемы имеет следующий вид. Предпочтения участников организационной системы (агента 0 и агента 1) описываются следующими функциями:

$$\varphi_0(y^0{}_1, y^0{}_2, r^0) = r^0 y^0{}_2 + y^0{}_1,$$

$$\varphi_1(y^1{}_1, y^1{}_2, r^1) = y^1{}_1 - (Y_2 - y^1{}_2)^2 / 2r^1,$$

где y^i_j – количество имеющегося у агента i ресурса типа j; r^i – тип агента i, $i, j = 0, 1$; $y^0 = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix}$ – начальное распределение ресурсов, то есть весь ресурс первого типа сосредоточен у агента 0, а весь ресурс второго типа – у агента 1.

Ограничения индивидуальной рациональности, определяющие приемлемые для каждого из агентов варианты обмена, записываются следующим образом:

$$IR(y^0) = \{\forall i = 0,1 \quad \varphi_i(\overline{y_i}) \geq \varphi_i(\overline{y_i^{\,0}})\}.$$

Иными словами, рациональными с точки зрения каждого из агентов являются варианты обмена, в результате которых значение их целевой функции не уменьшится.

Определим трансферт ресурса типа j для агента i в процессе обмена $y^0 \to y$: $x^i_j = y^i_j - y^{i\,0}_j$ и функцию полезности i-го агента от обмена: $f_i(\overline{x_i}) = \varphi_i(\overline{x_i} + \overline{y^0_i}) - \varphi_i(\overline{y^0_i})$ [31].

В описанной выше обменной схеме не была введена иерархия участников. Для рассмотрения задач стимулирования и ценообразования одному из участников присваивается статус центра, другому – статус агента. При этом центр предлагает агенту различные варианты обмена, из которых агент выбирает наиболее приемлемый для себя вариант и сообщает об этом центру. Обмен производится по выбранному агентом варианту.

Задача стимулирования. Предложенная модель ОС может быть использована для решения задачи стимулирования в условиях неполной информированности центра о параметрах организационной системы. Для этого агент 0 трактуется как центр (работодатель), а агент 1 – как агент (наемный работник).

Функция полезности центра от обмена:

$$f_0(x_1, x_2) = r^0 x_2 - x_1 .$$

Функция полезности агента от обмена:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - \frac{x_2^{\,2}}{2r} .$$

При этом трансферт ресурса типа 1 является оплатой центром выполняемой агентом работы, а трансферт ресурса типа 2 – объемом выполненных работ, Y_1 – бюджетное ограничение центра, Y_2 – максимальный объем работ, который может выполнить агент (или максимальный объем работ, который требуется центру).

Задача центра – поиск механизма обмена, максимизирующего его ожидаемую полезность от обмена с центром $Ef_0\,(\pi(s)) \to \max\limits_{\pi(s)}$, при условии, что центру не известно значение типа работника, а известно лишь, что тип агента равномерно распределен на множестве $\Omega^1 = [r^1{}_{min}, r^1{}_{max}]$.

Центр предлагает агенту механизм обмена вознаграждения на результаты работы $\pi(s) = (x_1(s), x_2(s))$, в котором количество выполняемой работы и размер оплаты зависят от сообщения *s* агентом оценки своего типа. Предлагаемый центром механизм обмена будет механизмом открытого управления, если он будет удовлетворять приведенному в разделе 3.1 условию совершенного согласования. В [31] проводится подробный анализ условий совершенного согласования для механизмов обмена. В результате для рассматриваемой модели обменной схемы для выполнения условия совершенного согласования, то есть для неманипулируемости механизма обмена, необходимо и достаточно, чтобы механизм обмена удовлетворял следующим требованиям:

$$\frac{dx_1}{dr}(r) - \frac{x_2(r)}{r}\frac{dx_2}{dr}(r) = 0\,, \tag{1}$$

$$-\frac{x_2(r)}{r^2}\frac{dx_2}{dr}(r) \le 0\,, \tag{2}$$

$$\forall s \in \Omega^1\,,\;\; \frac{dx_1}{ds}(s) \ge 0, \frac{dx_2}{ds}(s) \ge 0\,. \tag{3}$$

Условие (3) определяет принципиальное свойство неманипулируемого механизма обмена: количество выполняемой работы и оплата за нее растут с ростом сообщаемой работником оценки собственного типа. Иными словами, чем лучше охарактеризовал себя работник, тем больший предлагается ему выполнить объем работ за большую оплату.

Если механизм обмена удовлетворяет условиям (1)–(3), то прибыль агента от обмена (его функция полезности $v_1(r) = f_1(x_1(r), x_2(r), r)$) может быть записана в следующем виде:

$$v_1(r) = \int_{r^1_{min}}^{r} \frac{x_2(\tau)^2}{2\tau^2} d\tau\,. \tag{4}$$

Проанализировав выражение (4), получаем, что для построения механизма обмена, максимизирующего ожидаемую прибыль центра, необходимо решить следующую задачу:

$$Ef_0(Щ) = \int_{r^1_{min}}^{r^1_{max}} [r^0 x_2(r) - \frac{x_2(r)^2}{2r} - \int_{r^1_{min}}^{r} \frac{x_2(\tau)^2}{2\tau^2} d\tau]\, dr \underset{x_2}{\rightarrow} max$$

$$0 \le x_2(r) \le Y_2,\ 0 \le x_1(r) \le Y_1.$$

Не останавливаясь подробно на процессе решения, рассмотренном в [31], приведем вид получаемого механизма обмена:

$$x_2(r) = \frac{r^0 (r)^2}{r^1{}_{max}},\ \forall r \in \Omega',\ x_1(r) = (r^0)^2 \frac{4(r)^3 - (r^1_{min})^3}{6(r^1_{max})^2},\ \forall r \in \Omega',$$

$$r \ \in \Omega' = [r^1{}_{min}, \tilde{r}^1],$$

$$\tilde{r} = min\ \{r^1{}_{max}, (r^1{}_{max} Y_2 (r^0)^{-1})^{1/2}, (\frac{3}{2} r^2_{max} Y_1 + \frac{1}{4} r^3_{min})^{1/3} (r^0)^{-2/3}\}.$$

Здесь под $\tilde{r}$ подразумевается максимальный тип агента, для которого предлагается отдельный план обмена. Данный тип определяется исходя из бюджетного ограничения центра или ограничения на максимальный объем работы. Если сообщаемый тип агента лучше, чем $\tilde{r}$, то ему предлагается план обмена для типа $\tilde{r}$.

На рисунке 3.1 приводится графическое изображение полученного механизма обмена. Видно, что с улучшением типа, сообщаемого агентом, уменьшается удельная стоимость выполняемой им работы (отношение выплачиваемого центром вознаграждения к объему выполняемой работы). При этом проиллюстрировано, каким образом тип $\tilde{r}$ определяется из ограничений на ресурсы (в данном случае из бюджетного ограничения центра).

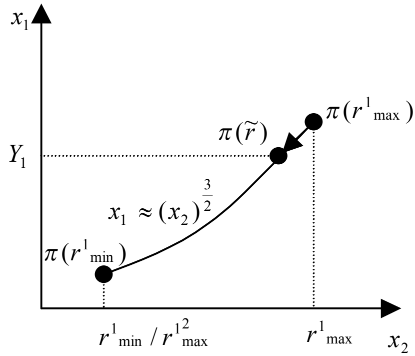


Рис. 3.1. *Неманипулируемый механизм обмена для задачи стимулирования*

Задача ценообразования (планирования). Аналогичным задаче стимулирования образом можно рассмотреть задачу ценообразования. В роли центра выступает продавец товара. Его целевая функция от обмена:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - \frac{x_2^2}{2r^1}.$$

Соответственно, целевая функция покупателя, выступающего в роли агента, имеет следующий вид:

$$f_0(x_1, x_2) = r\, x_2 - x_1.$$

Продавец обладает произвольно делимым товаром в количестве Y_2. Покупатель обладает деньгами в количестве Y_1.

Задача продавца – поиск механизма обмена, максимизирующего его ожидаемую полезность от обмена с покупателем:

$$Ef_1(\pi(s)) \to \max_{\pi(s)},$$

при условии, что ему не известно значение типа покупателя, а известно лишь, что тип агента равномерно распределен на множестве $\Omega^0 = [r^0{}_{min}, r^0{}_{max}]$.

Как и в задаче стимулирования, проблема сводится к поиску неманипулируемого механизма обмена $\pi(s) = (x_1(s), x_2(s))$, то есть механизма открытого управления. Для этого необходимо и достаточно, чтобы механизм обмена удовлетворял следующим требованиям [31]:

$$r\frac{dx_2}{dr}(r) - \frac{dx_1}{dr}(r) = 0\,, \tag{5}$$

$$-\frac{dx_2}{dr}(r) \le 0\,, \tag{6}$$

$$\forall s \in \Omega^0 \quad \frac{dx_1}{ds}(s) \ge 0,\ \frac{dx_2}{ds}(s) \ge 0\,. \tag{7}$$

При выполнении условий (5)–(7) прибыль агента от обмена (его функция полезности $v_0(r) = f_0(x_1(r), x_2(r), r)$) может быть записана в следующем виде:

$$v_0(r) = \int\limits_{r^0_{min}}^{r} x_2(\tau)\, d\tau\,. \tag{8}$$

Задача построения механизма обмена, максимизирующего ожидаемую прибыль центра, сводится к решению следующей задачи:

$$Ef_1(\Omega^0) = \int\limits_{r^0_{min}}^{r^0_{max}} [rx_2(r) - \frac{x_2(r)^2}{2r^1} - \int\limits_{r^0_{min}}^{r} x_2(\tau)\, d\tau\,]\, dr \underset{x_2}{\to} max$$

$$0 \le x_2(r) \le Y_2,\ 0 \le x_1(r) \le Y_1.$$

Не останавливаясь подробно на процессе решения, рассмотренном в [31], приведем вид получаемого механизма обмена в предположении, что выполнены условия $x_2(r^0_{max}) \le Y_2$ и $x_1(r^0_{max}) \le Y_1$:

$$x_2(r) = r^1(2r - r_{max})\,,\ \forall r \in \Omega' = [\text{€}, r^0_{max}],\ x_2(r) = 0\,,$$

$$\forall r \in \Omega^0 / \Omega'\,;$$

$$x_1(r^0) = r^1(r^2 - (r^0_{max} - \text{€})\text{€}),\ \ \forall r \in \Omega' = [\text{€}, r^0_{max}], x_1(r^0) = 0\,,$$

$$\forall r \in \Omega^0 / \Omega' ; \ \tilde{r} = max[r^0_{min}, r^0_{max} / 2].$$

Здесь под $\tilde{r}$ подразумевается наихудший тип покупателя, для которого предлагается отдельный план обмена. Если сообщаемый тип покупателя хуже, чем $\tilde{r}$, то ему предлагается «нулевой» план обмена, то есть обмен не производится.

По аналогии с механизмом обмена для задачи стимулирования при невыполнении условий $x_2(r^0_{max}) \leq Y_2$ и $x_1(r^0_{max}) \leq Y_1$ определяется значение $\tilde{r}$ – как максимальный тип покупателя, с которым может обмениваться продавец в рамках существующих ресурсных ограничений.

На рисунке 3.2 приводится графическое изображение полученного механизма обмена для задачи ценообразования. Из графика видно, что с улучшением типа, сообщаемого покупателем, уменьшается удельная стоимость предлагаемого ему товара: можно сказать, что с ростом партии товара увеличивается оптовая скидка.

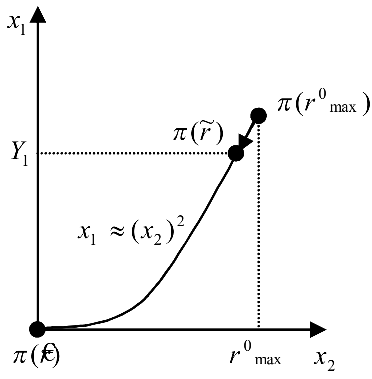


Рис. 3.2. *Неманипулируемый механизм обмена для задачи ценообразования*

В завершение настоящего раздела следует сказать, что при решении задач, подобных рассмотренным выше, возможен отказ от такого достаточно сложного с практической точки зрения параметра, как тип агента. Центр не спрашивает у агента его тип, а предлагает просто выбрать один из вариантов обмена. Иными словами, в задаче стимулирования или ценообразования центр предлагает агенту выбрать один из вариантов обмена из меню (контракта), описываемого кривой, изображенной на рисунках 3.1 и 3.2.

Глава 4

МЕХАНИЗМЫ ОРГАНИЗАЦИИ

Настоящая глава содержит описание механизмов организации. Значительное внимание уделяется механизмам финансового управления: механизмам смешанного финансирования (раздел 4.1), противозатратным механизмам (раздел 4.2), механизмам «затраты – эффект» (раздел 4.3), механизмам самоокупаемости (раздел 4.4) и механизмам страхования (раздел 4.5). Кроме того, рассматриваются такие важные классы механизмов, как: механизмы агрегирования оптимизации производственного цикла (раздел 4.6) и механизмы поиска оптимальных распределений ответственности (раздел 4.7).

4.1. Механизмы смешанного финансирования[51]

Крупные проекты, как правило, редко финансируются из одного источника. Инициаторы проекта стараются привлечь средства федерального и регионального бюджетов, различные фонды, средства частных фирм и т. д. Задача финансирования в этом случае относится к классу задач распределения ресурса (затрат), описанных в разделе 3.2.

Рассмотрим механизмы смешанного финансирования проектов, к реализации которых желательно привлечь средства частных фирм. Однако проекты могут быть эко-

[51] Раздел написан совместно с В. Н. Бурковым.

номически невыгодны для фирм, поскольку отдача от них (эффект на единицу вложенных средств) меньше единицы.

Бюджет, как правило, ограничен и зачастую недостаточен для реализации необходимого числа проектов. Однако фирмы не прочь получить бюджетные деньги или льготный кредит. Идея смешанного финансирования состоит в том, что бюджетные средства или льготный кредит выдаются при условии, что фирма обязуется выделить на проект и собственное финансирование. Как правило, на практике фиксируется доля средств, которую должна обеспечить фирма (например, 20 % средств выделяется из бюджета, а 80 % – составляют собственные средства фирмы). Однако такая жесткая фиксация доли бюджетных средств имеет свои минусы. Если эта доля мала, то будет незначительным и объем частных средств, а если велика, то, во-первых, желающих вложить собственные средства будет слишком много и придется проводить дополнительный отбор (например, на основе конкурсных механизмов), а во-вторых, уменьшается эффективность использования бюджетных средств. Ниже рассматривается механизм смешанного финансирования с гибко настраиваемой величиной доли бюджетного финансирования.

Дадим формальную постановку задачи разработки механизма смешанного финансирования. Имеются n фирм – например, потенциальных инвесторов в программу социального развития региона. Имеется также централизованный фонд финансирования программ развития. Фирма i предлагает для включения в программу социального развития проект, требующий суммарного финансирования S_i, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Этот проект проходит экспертизу, в результате которой определяется его социальная ценность $f_i(S_i)$, $i \in N$. Помимо социальной ценности предлагаемый фирмой проект имеет экономическую ценность $\varphi_i(S_i)$ для фирмы. На основе заявок фирм центр (например, руководство региона) определяет объемы финансирования проектов фирм $\{x_i\}$ (как правило, $x_i \le S_i$) исходя из ограниченного объема бюджетных средств R. Процедура $\{x_i = \pi_i(S),\ i \in N\}$, где $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ – вектор заявок фирм, называется *механизмом смешанного финансирования*. Дело в том, что недостающие средства $y_i = S_i - x_i$ фирма обязуется обеспечить за свой счет. Таким образом, интересы фирмы описываются выражением:

$$\varphi_i(S_i) - y_i, \tag{1}$$

где $\varphi_i(S_i)$ – доход фирмы (если фирма берет кредит y_i в банке, то учитывается процент за кредит).

Задача центра заключается в том, чтобы разработать такой механизм $\pi(S)$, который обеспечит максимальный социальный эффект: $\Phi = \sum_{i=1}^{n} f_i\left(S_i^*\right)$, где $S^* = \{S_i^*\}$ – равновесные стратегии фирм (точка Нэша соответствующей игры).

Рассмотрим линейный случай, когда $\varphi_i(S_i) = a_i S_i$, $f_i(S_i) = b_i S_i$, $0 < a_i < 1$, $b_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Содержательно a_i– отдача от i-го проекта на единицу вложенных средств. Так как проекты считаются нерентабельными, то $a_i < 1$, $i \in N$. Проведем анализ механизма прямых приоритетов

$$x_i(S) = \frac{l_i S_i}{\sum_{j \in N} l_j S_j} R,\ i \in N\,, \tag{2}$$

где l_i – приоритет i-й фирмы.

Примем без ограничения общности, что $R = 1$. Заметим, что в данном случае может иметь место $x_i(S) > S_i$ (фирма получает средств больше, чем заявляет). Будем считать, что в этом случае разность $x_i(S) - S_i$ остается у фирмы.

Определим ситуацию равновесия Нэша. Для этого подставим (2) в (1) и определим максимум по S_i выражения

$$a_i S_i - \left(S_i - \frac{l_i S_i}{L(S)} \right) = \frac{l_i S_i}{L(S)} - (1 - a_i) S_i ,$$

где $L(S) = \sum_{j \in N} l_j S_j$.

После несложных вычислений получим:

$$l_i S_i = L(S) [1 - q_i L(S)], \text{ где } q_i = \frac{1 - a_i}{l_i} .$$

Из условия $\sum_{i \in N} l_i S_i = L(S)$ определяем

$$L(S^*) = \frac{(n-1)}{Q}, \; S_i^* = \frac{(n-1)}{l_i Q} \left[1 - \frac{(n-1) q_i}{Q} \right], \quad (3)$$

где $Q = \sum_{i \in N} q_i$. При этом должно, очевидно, выполняться условие $S_i^* \geq 0$ или

$$\frac{q_i}{Q} < \frac{1}{n-1}, \; i = \overline{1, n} . \quad (4)$$

Если это условие нарушается, то соответствующие фирмы выбывают из состава претендентов. С новыми значениями Q и n вычисления следует повторить. Если при этом появляются новые фирмы, для которых нарушается (4), то эти фирмы также выбывают, и т. д. За конечное число шагов будет получена ситуация равновесия, такая, что для всех фирм выполняется (4). Пусть фирмы упорядочены по возрастанию q_i, то есть $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_n$. Для определения числа фирм – претендентов на участие в социальных программах развития региона – необходимо найти максимальное k, такое, что $q_i < \frac{Q_k}{k-1}$, где $Q_k = \sum_{j=1}^{k} q_j$, $i = \overline{1, k}$.

Рассмотрим пример, для которого значения a_i, l_i и q_i приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Параметры модели

	1	2	3	4	5	6
a_i	0,9	0,6	0,1	0,12	0,75	0,1
l_i	1	2	3	2,2	0,5	1,5
q_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

Нетрудно определить, что максимальное $k = 2$. Действительно:

$$\frac{q_1 + q_2}{1} = 0{,}3 > q_2 = 0{,}2,$$

в то же время

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{2} = 0{,}3 = q_3 = 0{,}3.$$

Таким образом, претендентами на участие в программе по схеме смешанного финансирования являются первые две фирмы. Если $b_i = l_i$ для всех i, то суммарный эффект от программы составляет (с учетом $R = 1$) $L(S^*) = \dfrac{(n-1)}{Q_3} = 3\dfrac{1}{3}$, а суммарное финансирование: $S^* = 2\dfrac{7}{9}$. Итак, финансирование программы в $2\dfrac{7}{9}$ раза превышает бюджетные средства. Заявки фирм в равновесии: $S_1^* = 2\dfrac{2}{9}$, $S_2^* = \dfrac{5}{9}$.

В рассмотренном примере мы взяли $l_i = b_i$, $i \in N$. Поставим задачу определить механизм прямых приоритетов (см. раздел 3.2), обеспечивающий максимум социального эффекта. Необходимо определить приоритеты $\{l_i\}_{i \in N}$ таким образом, чтобы суммарный эффект был максимальным.

Задача сводится к определению $\{l_i \geq 0\}_{i \in N}$, таких, что величина

$$\sum_{i=1}^{n} b_i S_i^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i (n-1) R}{l_i Q} \left[1 - \frac{(n-1) q_i}{Q} \right] \qquad (5)$$

принимает максимальное значение. Заменой $l_i = (1 - a_i) / q_i$, $q_i / Q = \xi_i$, $p_i = (1 - a_i) / b_i$ приведем (5) к виду:

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{p_i} [1 - (n-1)\alpha_i], \qquad (6)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Необходимо определить $\{\xi_i \geq 0\}_{i \in N}$, $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1$, при которых значение выражения (6) максимально. Применяя метод множителей Лагранжа, получим:

$$\xi_i^0 = \frac{1 + (n-2)\beta_i}{2(n-1)}, \text{ где } \beta_i = \frac{p_i}{\sum_{j \in N} p_j}, i = \overline{1, n}. \qquad (7)$$

Соответственно, $l_i^0 = \dfrac{1 - a_i}{\xi_i^0}, i \in N$, (с точностью до постоянного множителя). Интересно отметить, что в случае двух фирм оптимальные приоритеты не зависят от коэффициентов при функциях социального эффекта b_1 и b_2.

Рассмотрим второй пример, в котором определим оптимальные приоритеты для задачи предыдущего примера. Для случая двух фирм имеем $\xi_1^0 = \xi_2^0 = \dfrac{1}{2}$ и, подставляя в (6), получаем:

$$p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}2;\ \beta_1 = \frac{1}{3};\ \beta_2 = \frac{2}{3};$$

$$\Phi = \left[\frac{\xi_1^0}{p_1} \left(1 - \xi_1^0\right) + \frac{\xi_2^0}{p_2} \left(1 - \xi_2^0\right) \right] = 3\frac{3}{4},$$

что больше $3\frac{1}{3}$. Увеличилось и суммарное финансирование до $3\frac{1}{8}$.

При оптимальных приоритетах может измениться число фирм – претендентов на участие в программе. Поэтому необходимо проверить варианты с тремя фирмами и более. Рассмотрим вариант с тремя фирмами. Имеем:

$$p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}3;\ \beta_1 = \frac{1}{6};\ \beta_2 = \frac{1}{3};\ \beta_3 = \frac{1}{2};$$

$$\xi_1^0 = \frac{1+\beta_1}{4} = \frac{7}{24};\ \xi_2^0 = \frac{1+\beta_2}{4} = \frac{1}{3};\ \xi_3^0 = \frac{1+\beta_3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Поскольку все $\{\xi_i^0\}$ меньше $\frac{1}{2}$, то условия (4) выполнены. Подставляя в (6), получаем:

$$\Phi = 2\left[\frac{\xi_1^0}{p_1}\left(1-2\xi_1^0\right)+\frac{\xi_2^0}{p_2}\left(1-2\xi_2^0\right)+\frac{\xi_3^0}{p_3}\left(1-2\xi_3^0\right)\right] = 4\frac{1}{6}.$$

Как видим, эффективность механизма смешанного финансирования увеличилась.

Рассмотрим случай четырех фирм. Имеем:

$$p_1 = \beta_1 = 0{,}1;\ p_2 = \beta_2 = 0{,}2;\ p_3 = \beta_3 = 0{,}3;\ p_4 = \beta_4 = 0{,}4;$$

$$\xi_1^0 = \frac{1+2\beta_1}{6} = 0{,}2;\ \xi_2^0 = \frac{1+2\beta_2}{6} = \frac{7}{30};\ \xi_3^0 = \frac{4}{15};\ \xi_4^0 = 0{,}3.$$

Условия (4) по-прежнему выполняются. Суммарный социальный эффект составит:

$$\frac{\Phi}{R} = 3\sum_{i=1}^{4}\frac{\xi_i^0}{p_i}\left(1-3\xi_i^0\right) =$$

$$= 3\left[\frac{0{,}2\cdot 0{,}4}{0{,}1}+\frac{7\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5}{30}+\frac{8}{45}+0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 2{,}5\right] = 4\frac{5}{24} > 4\frac{1}{6}.$$

Поскольку социальный эффект опять увеличился, необходимо проверить случай $n = 5$.

Имеем:

$$p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}3;\ p_4 = 0{,}4;\ p_5 = 0{,}5;$$

$$\beta_1 = \frac{1}{15};\ \beta_2 = \frac{2}{15};\ \beta_3 = \frac{1}{5};\ \beta_1 = \frac{4}{15};\ \beta_2 = \frac{1}{3};$$

$$\xi_1^0 = \frac{1+3\beta_1}{8} = \frac{6}{40};\ \xi_2^0 = \frac{7}{40};\ \xi_3^0 = \frac{8}{40};\ \xi_4^0 = \frac{9}{40};\ \xi_5^0 = \frac{10}{40}.$$

Условие (4) не выполняется для пятой фирмы. Поэтому оптимальное решение включает четыре фирмы-претендента с суммарным социальным эффектом $4\frac{5}{24}$. За счет выбора оптимального механизма смешанного финансирования удалось увеличить социальный эффект примерно на 25 % при том же объеме бюджетного финансирования.

Рассмотрим теперь нелинейный случай. Примем, что эффект от реализации проектов для i-й фирмы составляет:

$$\varphi_i(S_i) = \frac{1}{\alpha} S_i^{\alpha} r_i^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1. \qquad (8)$$

В этом случае интересы фирмы описываются выражением

$$\varphi_i(S_i) - y_i = \frac{1}{\alpha} S_i^{\alpha} r_i^{1-\alpha} - (S_i - x_i). \qquad (9)$$

Проведем анализ механизма прямых приоритетов

$$\pi_i(S) = \frac{S_i}{\sum_{j \in N} S_j}.$$

Примем, что имеет место *гипотеза слабого влияния*, согласно которой фирмы не учитывают влияния своей заявки на общий множитель $\left(\sum S_j\right)^{-1}$. В этом случае равновесная заявка i-й фирмы определяется из условия:

$$\left(\frac{r_i}{S_i}\right)^{1-\alpha} = 1 - \frac{1}{S_0},\ i \in N, \qquad (10)$$

или

$$S_i = r_i \left(1 - \frac{1}{S_0}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \; i \in N, \qquad (11)$$

где S_0 определяется из уравнения

$$H = S_0 \left(1 - \frac{1}{S_0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \; H = \sum_{j \in N} r_j \, . \qquad (12)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (12) всегда имеет единственное решение $S_0^* > 1$. Покажем, что всегда имеет место $S_0^* > H$. Это следует из очевидного неравенства в случае $H > 1$:

$$\left(1 - \frac{1}{H}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < 1 \, .$$

Таким образом, механизм смешанного финансирования обеспечивает привлечение средств частных фирм большее, чем в случае непосредственного финансирования фирмами проектов. Действительно, при непосредственном финансировании i-я фирма получает максимум прибыли при объеме финансирования $S_i = r_i$. Поэтому суммарное привлечение средств частных фирм в случае прямого финансирования составит ровно H.

Интересно оценить отношение $u = S_0 / H$ в зависимости от параметра α. Делая в (12) замену переменных $S_0 = u\,H$, получим уравнение для u:

$$u \left(1 - \frac{1}{uH}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = 1 \, . \qquad (13)$$

Анализ этого уравнения показывает, что с ростом α растет u. Таким образом, эффект от механизма смешанного финансирования тем больше, чем больше параметр α в функциях эффекта фирм.

Рассмотрим теперь задачу выбора оптимального механизма смешанного финансирования для линейного случая на множестве механизмов смешанного финансирования следующего вида:

$$\pi_i(S) = \frac{S_i^\gamma}{\sum_{j \in N} S_j^\gamma},\ i \in N\ . \tag{14}$$

Прибыль фирмы в этом случае будет равна:

$$\varphi_i(S_i) - \left(S_i - \pi_i(S)\right) = a_i S_i - \left(S_i - \frac{S_i^\gamma}{\sum_{j \in N} S_j^\gamma} \right). \tag{15}$$

Равновесная заявка определяется из системы уравнений

$$\frac{\gamma\ S_i^{\gamma-1}}{\sum_{j \in N} S_j^\gamma} = 1 - a_i,\ i \in N\ . \tag{16}$$

В данном случае мы также предполагаем выполненной гипотезу слабого влияния. Из (16) получаем: $S_i = \left[\frac{1}{\gamma}(1-a_i)S_0(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$, где $S_0(\gamma) = \sum_{j \in N} S_j^\gamma$ определяется из уравнения

$$S(\gamma) = \left[\frac{1}{\gamma} S(\gamma)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \sum_{j=1}^{n} \left(1 - a_j\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Имеем $S_0(\gamma) = \gamma \left[\sum_{j=1}^{n} \left(1 - a_j\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right]^{-\gamma-1}$. Окончательно получаем

$$S_i = \gamma\ \frac{\left(1 - a_i\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\sum_{j \in N} \left(1 - a_i\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}.$$

Суммарное финансирование проектов всеми фирмами составит $S_0 = \gamma \frac{\sum_{j \in N} (1 - a_i)^{\frac{1}{\gamma - 1}}}{\sum_{j \in N} (1 - a_i)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$.

В случае если все фирмы одинаковы, то есть $a_i = a, i \in N$, имеем: $S = \frac{\gamma}{(1 - a)^{\gamma}}$, то есть с ростом γ растет и суммарное финансирование. Отсюда следует, что оптимальный механизм по сути дела соответствует конкурсному механизму, когда в первую очередь средства выделяются фирме, предложившей максимальную заявку. Заметим, что проведенный анализ не учитывал важного практического ограничения, когда фирма получает финансирование не более заявленного. Анализ при учете этого условия, так же как и анализ случая разных фирм, является более сложным и требует дополнительных исследований.

4.2. Противозатратные механизмы

В настоящем разделе рассматривается класс финансовых механизмов, используя которые, центр может эффективно управлять агентами-монополистами.

Противозатратными называются такие механизмы управления, которые побуждают каждого агента максимально повышать эффективность своей деятельности, выполнять соответствующую работу с высоким качеством и минимальными затратами. Понятно, что в случае большого числа более или менее однородных агентов, конкуренция между ними не позволит каждому отдельно взятому агенту завышать себестоимость продукции и цену. В случае наличия монополистов необходимо использовать специальные механизмы управления, обеспечивающие невыгодность завышения затрат.

В основе использования противозатратных механизмов лежит следующая общая идея. Предположим, что целевая функция агента зависит от переменных двух типов: переменные первого типа – параметры, выбираемые самим агентом (например, затраты); переменные второго типа – параметры, устанавливаемые центром (например, норматив рентабельности, коэффициенты ценообразования и т. д.). Задача центра заключается в выборе таких механизмов управления – значений параметров второго типа, чтобы целевая функция агента вела себя требуемым образом (например, возрастала или убывала по соответствующим параметрам первого типа).

Рассмотрим в качестве примера задачу синтеза противозатратного механизма ценообразования. Себестоимость продукции, производимой агентом

$$C = S + a, \tag{1}$$

складывается из трудозатрат и материальных затрат S, включающих затраты на материалы, амортизацию оборудования т. д. Цена продукции определяется

$$Ц = (1 + \rho)\, C, \tag{2}$$

где ρ – норматив рентабельности.

Прибыль агента:

$$П = Ц - C = \rho\, C. \tag{3}$$

Отметим, что условия (1)–(3) записаны для единицы продукции. В предположении постоянства дохода на масштаб производства эти выражения справедливы для любого объема выпуска.

Если бы центр имел в своем распоряжении некоторый «прибор», точно определяющий минимально необходимые затраты (МНЗ) на производство единицы продукции, то задача ценообразования была бы решена. Однако МНЗ известны только агенту, и он, в силу активности, может сообщить себестоимость, превышающую МНЗ, так как при постоянном нормативе рентабельности ρ агент заинтересован в завышении себестоимости, то есть механизм не обладает свойством противозатратности. Для того чтобы добиться противозатратности, можно, например, сделать норматив рентабельности зависящим от эффективности деятельности агента. Что понимать под эффективностью агента?

Будем считать, что продукт, производимый агентом (отметим, что этот продукт может быть как материальным продуктом, так и интеллектуальной продукцией или услугой), характеризуется себестоимостью производства *C*, устанавливаемой агентом, и эффектом *l*, определяемым потребителем или центром. Понятно, что эффективность должна расти с ростом эффекта и убывать с ростом себестоимости. Одной из простейших зависимостей, удовлетворяющих этим требованиям, является эффективность:

$$Э = {}^{l}\!/_{C}\,. \tag{4}$$

Выберем норматив рентабельности зависящим от эффективности $\rho = \rho(Э)$ и определим, какова должна быть зависимость $\rho(\cdot)$, чтобы механизм обладал свойством противозатратности. Для этого необходимо, чтобы прибыль (3) агента убывала с ростом затрат, то есть выполнялось:

$$\frac{dП}{dC} \le 0. \tag{5}$$

В то же время цена продукции (2) должна расти с ростом себестоимости, то есть должно выполняться:

$$\frac{dЦ}{dC} \ge 0. \tag{6}$$

Условия (5)–(6) называются *условиями противозатратности*. Раскрыв их, можно получить следующие ограничения:

$$0 \le Э\frac{d\rho(Э)}{dЭ} - \rho(Э) \le 1. \tag{7}$$

Накладывая ограничение $\rho(1) = 0$ (продукт, для которого эффект равен затратам, не должен приносить прибыли), получим общий вид зависимости, обеспечивающей противозатратность (по прибыли) механизма ценообразования [9, 14, 67]:

$$\rho(Э) = Э\int_{1}^{Э} \frac{h(x)}{x^2}\, dx, \qquad (8)$$

где $h(x)$ – произвольная функция, принимающая значения в интервале (0; 1). Чем ближе $h(x)$ к нулю, тем сильнее влияет уменьшение затрат на снижение цены и тем слабее влияет уменьшение затрат на рост прибыли. Наоборот, чем ближе $h(x)$ к единице, тем слабее влияет уменьшение затрат на снижение цены, но тем сильнее влияет уменьшение затрат на рост прибыли агента. Поэтому в каждом конкретном случае центр должен подбирать соответствующую зависимость.

Мы рассмотрели один из противозатратных механизмов (противозатратный по прибыли механизм ценообразования). Перечислим некоторые другие возможные случаи.

Полученные выше выводы справедливы для плановых показателей (прибыли, фонда материального поощрения и т. д.). Если фактические доходы формируются по рассмотренным нормативам, то затратные тенденции сохраняются. Для исключения этих тенденций необходимо вводить отдельный норматив отчислений в фонд материального поощрения от сверхплановой прибыли.

Подбором нормативов можно также добиться устранения номенклатурного сдвига (при одной и той же себестоимости, но различных соотношениях трудовых и материальных затрат).

Если фонд оплаты труда складывается из фонда заработной платы и фонда материального поощрения (β П, где β – некоторый коэффициент), то даже при постоянном коэффициенте ρ, противозатратность может быть достигнута путем установления переменного коэффициента $\beta = \beta\,(l\,/\,C)$ [9, 14, 67].

Во многих случаях при снижении затрат экономия трудовых и материальных ресурсов может быть использована для дальнейшего увеличения производства (например, объема выпуска продукции), то есть для получения дополнительной прибыли.

Требование противозатратности по оплате труда, то есть требование возрастания фонда оплаты труда при уменьшении затрат, является достаточно сильным. На самом деле для создания противозатратного эффекта важно, чтобы при уменьшении затрат увеличивался не фонд оплаты в целом, а оплата труда тех работников, которые обеспечили это снижение затрат. Оказывается, возможно создать противозатратный механизм управления, при использовании которого эффективно работающие агенты нетерпимы к присутствию агентов с низкой эффективностью [9].

Рассмотренные выше (см. главу 3) механизмы конкурсного распределения ресурса обладают тем качеством, что конкурсность существенно усиливает противозатратные свойства механизма. Существует точка зрения, что конкурсные механизмы, например, формирования договорных цен, являются альтернативными противозатратным механизмам, описанным выше в настоящем разделе. Такая точка зрения ошибочна. На самом деле конкурсные механизмы эффективно работают в случае «претендентов равной силы» и при наличии монополистов могут оказаться не очень эффективными (см. разделы 3.2 и 3.5). Поэтому конкурсные и противозатратные механизмы (ориентированные именно на монопольную ситуацию) являются не исключающими, а, скорее, взаимодополняющими друг друга. Противозатратные механизмы играют антимонопольную роль, «включаясь» при наличии монополиста и «отключаясь» при эффективной работе конкурсных механизмов. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим следующий пример.

Пусть центр организует конкурс между m агентами на выполнение проекта с полезным эффектом L. Обозначим C_i – себестоимость работ i-го агента. Будем считать, что агенты заинтересованы в максимизации прибыли и что задана противозатратная по прибыли процедура формирования цены:

$$Ц_i = (1 + \rho(Э_i))\, C_i,\ Э_i = L / C_i,\ i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Обозначим x_i – гарантированный норматив рентабельности для i-го агента (агент может найти другие договоры, обеспечивающие ему прибыль не меньше x_i на каждую единицу затрат). Очевидно, агенту выгодно браться за работу, если ее цена окажется не меньше, чем $A_i = (1 + x_i)\, C_i$. Будем считать, что $\rho_i(Э_i) > x_i$, $i = \overline{1, m}$, то есть заключение договора с центром выгодно всем агентам. Если бы был один агент-монополист, то, очевидно, договор был бы заключен по цене $Ц_1$. В случае нескольких агентов они начинают соревноваться. Пусть агенты упорядочены по возрастанию A_i, то есть: $A_1 \le A_2 \le \ldots \le A_m$.

Легко показать, что победителем конкурса будет первый агент (имеющий минимальную цену $\{A_i\}$), причем цена определяется выражением

$$Ц^* = min\, (Ц_1, A_2). \quad (10)$$

Действительно, если $Ц_1 \le A_2$, то при цене $Ц^*$ остальным агентам договор по этой цене невыгоден (первый агент является монополистом и «работает» противозатратная часть механизма). В более сложной ситуации, когда организуется конкурс на выполнение нескольких проектов, в равновесии договорные цены победителей конкурса определяются по аналогии с (10) (см. раздел 4.6).

4.3. Механизмы «затраты – эффект»

В управлении проектами, при реформировании и реструктуризации предприятий и так далее, возникает необходимость определения набора мероприятий (проектов), реализация которых позволит достичь максимального эффекта при существующих ограничениях. Рассмотрим *метод «затраты – эффект»* на следующем примере.

Пусть определена совокупность возможных мероприятий, данные о которых приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Данные о мероприятиях

Мероприятие №	Затраты S	Эффект Q	Эффективность $Э = Q/S$
1	40	80	2
2	100	300	3
3	50	50	1
4	60	240	4

Изменим номера мероприятий так, чтобы самое эффективное мероприятие получило номер 1, следующее за ним – номер 2 и т. д. При новой нумерации строим таблицу 4.3, в которой помимо затрат и эффекта по каждому мероприятию добавляются столбцы, в которых определяются затраты и эффект нарастающим итогом.

Таблица 4.3

Упорядочение мероприятий по эффективности Q/S

Мероприятие №	Затраты S	Эффект Q	Затраты нарастающим итогом	Эффект нарастающим итогом
1	60	240	60	240
2	100	300	160	540
3	40	80	200	620
4	50	50	250	670

Таблица 4.3 затрат и эффекта нарастающим итогом, в которой мероприятия пронумерованы в порядке убывания эффективности, и отражает зависимость «затраты – эффект». График этой зависимости приведен на рисунке 4.1.

Эта зависимость имеет замечательное свойство: она определяет максимальный эффект по данному критерию, который можно получить от заданного множества мероприятий при заданной величине финансирования. Фактический эффект может быть меньше за счет дискретности мероприятий.

Действительно, если имеется 140 единиц финансовых ресурсов, то нельзя реализовать первые два мероприятия, требующие 160 единиц ресурса. Оптимальный вариант – реализовать второе и третье мероприятия, дающие суммарный эффект 380 единиц, что меньше, чем получается по зависимости рисунка 4.1, – эффект 480 единиц. Конечно, если бы каждое мероприятие можно было реализовать частично, с пропорциональным уменьшением и затрат, и эффекта, то зависимость рисунка соответствовала бы реальному эффекту при любом уровне затрат (см. дискретные и непрерывные конкурсные механизмы в разделах 3.5 и 3.2 соответственно).

Для построения реальной зависимости «затраты – эффект» необходимо решить *задачу о ранце* [11] (см. также Приложение 2), задавая различные уровни финансирования R:

$$240\, x_1 + 300\, x_2 + 80\, x_3 + 50\, x_4 \to \max_{x_i \in \{0;1\}},$$

при ограничении $60\, x_1 + 100\, x_2 + 40\, x_3 + 50\, x_4 \le R$.

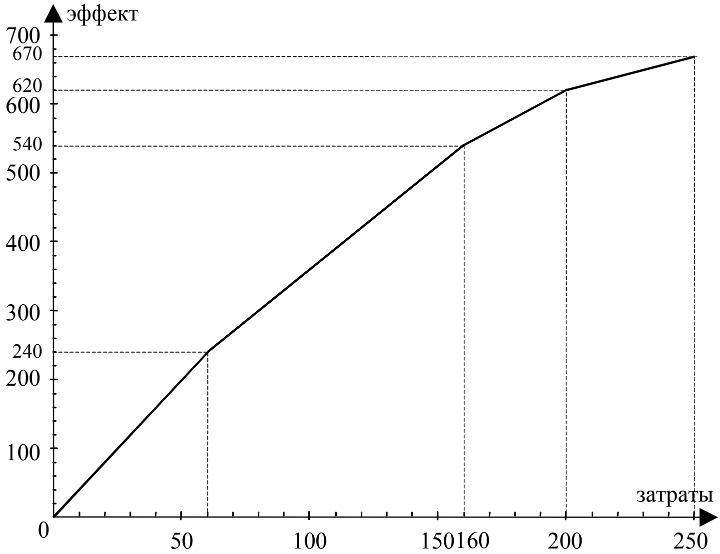


Рис. 4.1*. Зависимость «затраты – эффект»*

Для решения этой задачи при различных значениях R эффективным является метод *динамического программирования* [11, 17].

Для применения этого метода предварительно строим на плоскости систему координат, одна ось которой соответствует мероприятиям, а вторая – объему финансирования (рис. 4.2). По оси мероприятий отмечаем номера мероприятий – 1, 2, 3, 4. Из начала координат проводим две дуги – одну горизонтальную, в точку (1, 0), а другую – в точку (1, 60), где 60 – объем финансирования первого мероприятия. Первая дуга соответствует случаю, когда первое мероприятие не финансируется, а вторая, – когда оно финансируется.

Из каждой полученной точки ((1, 0) и (1, 60)) проводим также по две дуги, для второго мероприятия. Получаем уже четыре точки – (2, 0), (2, 60), (2, 100) и (2, 160), соответствующие четырем возможным вариантам для двух первых мероприятий (если бы оба мероприятия требовали одинакового финансирования, то мы получили бы три точки). Продолжая таким же образом, получаем сеть, приведенную на рисунке 4.2.

Очевидно, что любой путь в сети из начальной вершины (0, 0) в конечные вершины соответствует некоторому набору мероприятий. И, наоборот, любому набору мероприятий соответствует вполне определенный путь в сети, соединяющий начальную вершину с конечной.

Значение координаты по второй оси равно объему финансирования соответствующего набора мероприятий (или пакета проектов). Примем длины горизонтальных дуг равными нулю, а длины наклонных – эффектам от соответствующих мероприятий. В этом случае длина пути, соединяющего начальную вершину с одной из конечных, будет равна суммарному эффекту от соответствующего этому пути множества мероприятий.

Следовательно, путь максимальной длины, соединяющий начало координат и точку (4, *S*), будет соответствовать множеству мероприятий, дающему максимальный эффект среди всех множеств мероприятий, требующих совокупного финансирования ровно *S* единиц. Таким образом, мы получаем оптимальные наборы мероприятий при любых объемах финансирования.

Анализируя приведенные решения (рис. 4.2), можно заметить любопытный парадокс. При финансировании, например, в объеме 100 единиц, мы получаем эффект в 300 единиц, а при увеличении объема финансирования на 10 единиц эффект составляет всего 290 единиц, то есть на 10 единиц меньше.

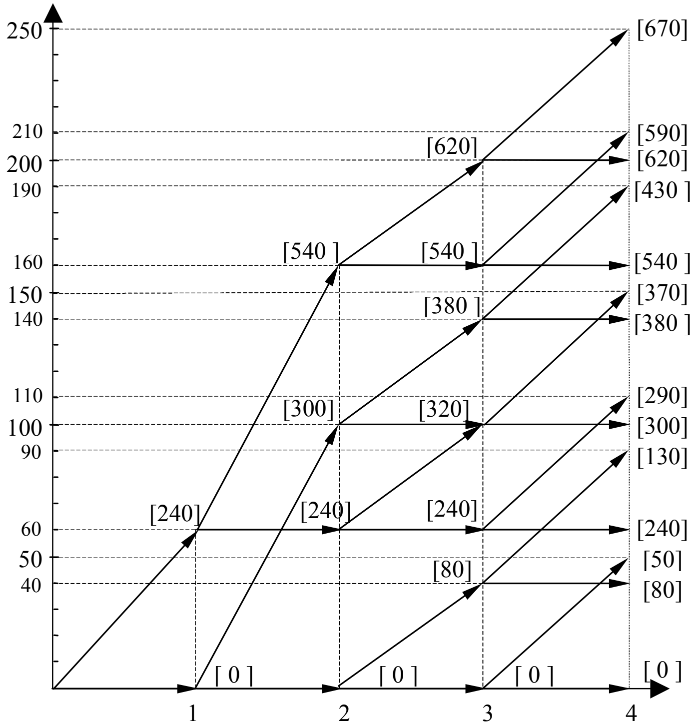


Рис. 4.2. *Метод динамического программирования*

Аналогичная картина наблюдается при сравнении эффектов при объемах финансирования 200 и 210 единиц, 140 и 150 и т. д. Парадокс в том, что если задать вопрос, в каком случае будет больший эффект – при финансировании в 100 или в 110 единиц, то любой здравомыслящий человек скажет, что чем больше объем финансирования, тем больше должен быть эффект, естественно, при оптимальном наборе мероприятий. Этот парадокс возникает из-за дискретности задачи. Понятно, что варианты, нарушающие монотонность (парадоксальные варианты), мы не должны рассматривать. Полученные значения максимального эффекта при различных объемах финансирования выпишем в таблицу 4.4.

Таблица 4.4

Затраты – эффект

Объем финансирования	40	60	100	140	160	200	250
Эффект	80	240	300	380	540	620	670

График этой зависимости приведен на рисунке 4.3. На этом же рисунке тонкой линией показан прежний график «затраты – эффект» (рис. 4.1).

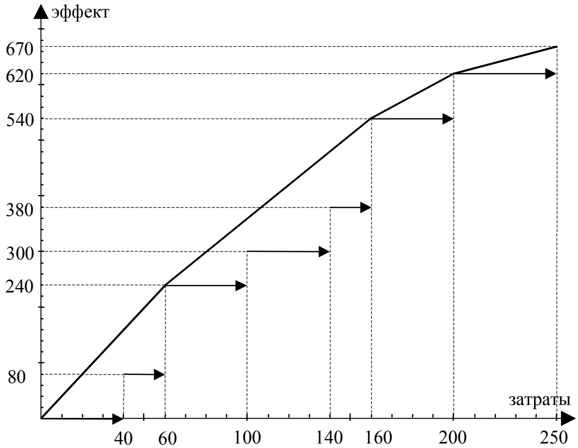


Рис. 4.3. *Зависимость «затраты – эффект» с учетом дискретности задачи*

Имея зависимость «затраты – эффект», можно решать и задачи привлечения дополнительных финансовых ресурсов, в частности, взятия кредита. Пусть, например, имеется 90 единиц ресурса, а кредит можно взять под 300 %. Какой величины кредит взять, чтобы получить максимальный финансовых результат?

Из графика на рисунке 4.3 видно, что рассмотреть следует четыре варианта: взять кредит 10, 70, 110 или

160 единиц. При взятии кредита в размере 10 единиц дополнительный эффект составит 300 – 240 = 60 единиц, то есть эффективность равна 600 %, что выше, чем ставка кредита. Это значит, что брать кредит целесообразно. Если взять кредит в размере 70 единиц, то дополнительный эффект составит 540 – 240 = 300 единиц, что дает эффективность 430 %, что также больше ставки кредита. При кредите в 110 единиц дополнительный эффект составит 620 – 240 = 380 единиц, что дает эффективность 345 %, то есть больше, чем ставка кредита. Наконец, при кредите в 160 единиц дополнительный эффект составит 670 – 240 = 430 единиц, что дает эффективность 281 %, то есть ниже ставки кредита (аналогичный эффект имеет место при кредите в 50 единиц).

Таким образом, оптимальная величина кредита равна 70 единиц, что дает эффект 540 единиц и, за вычетом процентов за кредит, 540 – 370 = 330 единиц.

Зависимость «затраты – эффект» характеризует потенциал рассматриваемого проекта (предприятия и т. д.) по соответствующему критерию. Зная эту зависимость, можно определить минимальный уровень финансирования, достаточный для достижения поставленных целей. И наоборот, при ограниченных финансах определяется максимальный уровень, который можно достичь по данному критерию. Так, например, если поставлена цель обеспечить по данному критерию эффект в 600 единиц, то при заданном множестве мероприятий для этого потребуется не менее 200 единиц финансовых ресурсов (из графика видно, что эффект составит 620 единиц, но при уменьшении финансирования он сразу падает до 540, то есть поставленная цель не достигается). Если же имеется всего 150 единиц финансовых ресурсов, то максимальный уровень эффекта, который можно достичь, составит 380 единиц (причем для достижения цели достаточно всего 140 единиц ресурса).

4.4. Механизмы самоокупаемости

Одной из задач, стоящих перед руководством организации или проекта, является минимизация затрат на выпуск продукции или реализацию проекта. Если технология производства или проект включают n операций и заданы их стоимости $\{\beta_i\}_{i=1}^n$, то общие затраты равны $\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$. Отметим, что величина β не зависит от порядка выполнения операций.

Если центр имеет в своем распоряжении на момент начала проекта сумму R_0 и $R_0 \geq \beta$, то имеющихся средств хватит на выполнение всех операций в любой допустимой последовательности. Если же $R_0 < \beta$, то возникает задача разработки *механизма самоокупаемости* (самофинансирования) [14], определяющего оптимальную допустимую последовательность выполнения операций, в которой выполнение операций частично финансируется за счет доходов от уже выполненных операций.

Пусть i-я операция описывается кортежем $(\beta_i, \alpha_i, \tau_i)$, где $\alpha_i \geq 0$ – доход от i-й операции, τ_i – ее продолжительность. Будем различать прибыльные ($\alpha_i \geq \beta_i$) и убыточные ($\alpha_i < \beta_i$) операции. Тогда в случае нехватки исходных средств некоторые операции могут выполняться за счет доходов от уже выполненных операций. Идеалом, в некотором смысле, является полностью автономная совокупность операций (проект), для которой самофинансирование позволяет выполнить их целиком, без привлечения внешних источников.

Для простоты предположим, что не существует технологических ограничений на последовательность выполнения операций, причем произвольное число операций может вестись параллельно.

Обозначим $t_i \geq 0$ – время начала i-й операции, R – величину заемных средств. Предположим, что центр может получить беспроцентные кредиты в любом объеме и в произвольный момент времени (дисконтирование отсутствует).

Финансовый баланс в момент времени t имеет вид:

$$f(t) = R_0 + R - \sum_{i=1}^{n} \beta_i I(t \geq t_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I(t \geq T_i + \tau_i), \quad (1)$$

где $I(t \geq t_i) = \begin{cases} 1, & t \geq t_i \\ 0, & t < t_i \end{cases}$ – функция-индикатор.

Понятно, что для возможности выполнения операций финансовый баланс должен быть неотрицательным в любой момент времени, то есть для допустимого баланса должно выполняться $f(t) \geq 0 \ \ \forall\ t \in [0, \tau]$, где τ – общее время выполнения комплекса операций (проекта).

В рамках описанной модели возникает целый ряд оптимизационных задач.

Например, можно решать задачу выбора последовательности выполнения операций (то есть времен начала их выполнения), минимизирующей величину привлеченных средств:

$$\begin{cases} R \to \min\limits_{\{t_i\}} \\ f(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Может быть поставлена задача минимизации времени выполнения проекта $T = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{t_i + \tau_i\}$ только за счет собственных средств или с фиксированным значением привлеченных средств (отметим, что при последовательном выполнении операций время завершения проекта не зависит от порядка выполнения операций):

$$\begin{cases} T \to \min\limits_{\{t_i\}} \\ R = const, \ \ f(t) \geq 0, \ \forall t \geq 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Таким образом, возможны самые разные постановки. Во всех оптимизационных задачах требуется найти оптимальную последовательность выполнения операций, то есть оптимальный механизм самофинансирования. При введении дисконтирования, по аналогии с (3), можно максимизировать конечную (дисконтированную) прибыль и т. д. При наличии технологических ограничений, они должны быть добавлены в ограничения задач (2)–(3).

Следует отметить, что на сегодняшний день не существует универсальных и эффективных методов решения задач из рассматриваемого класса. Понятно, что так как число допустимых вариантов (последовательностей) конечно, то все они могут быть найдены перебором. Однако даже при не очень большом числе операций (порядка нескольких десятков) перебор оказывается чрезвычайно трудоемким. Поэтому при решении задач сетевого планирования используют методы целенаправленного перебора, ветвей и границ и др. Рассмотрим в качестве примера использование для решения задачи (3) следующего эвристического ***алгоритма***.

1. Определяем все комбинации операций, которые могут быть начаты (являются допустимыми с точки зрения бюджетного ограничения) в нулевой момент времени.

2. Для каждого из допустимых вариантов определяем в момент окончания одной из операций, какие из еще невыполненных операций могут быть начаты. Если ни одна из операций не может быть начата, то для данного варианта ждем момента окончания следующей операции и так далее до тех пор, пока все операции не закончатся и/или ни одна не сможет быть начата.

Применение шагов 1 и 2 дает все допустимые с точки зрения балансового ограничения варианты (получаем дерево вариантов). Среди висячих вершин могут оказаться и те, которым соответствует выполнение не всех операций.

Сравнивая продолжительности тех вариантов – висячих вершин, которые соответствуют выполнению всех операций проекта, определяем решение задачи (3) – варианты минимальной продолжительности.

В общем случае описанный выше алгоритм менее трудоемок, чем простой перебор, так как сразу отсеиваются неудовлетворительные варианты и не рассматриваются поддеревья, для которых они являются корневыми вариантами. Можно предложить и другие эвристические алгоритмы численного решения задачи (3), быстродействие которых зависит от соотношения исходных параметров.

Аналитические методы получения оптимального решения существуют лишь для задачи (2), алгоритм решения которой описывается ниже.

Рассмотрим $(n+1)$-вершинный граф (см. Приложение 2), в котором вершины $1, 2, \dots, n$ соответствуют операциям, вершина 0 – нулевая операция. Предположим, что с нулевой вершины начинается реализация проекта, ее затраты и доход равны 0 ($\alpha_0 = 0$). Пусть $\mu = (0, i_1, i_2, \dots, i_n, 0)$ – произвольный гамильтонов контур, то есть контур, проходящий через все вершины графа ровно один раз [7, 11] (см. основные определения теории графов в Приложении 2).

Обозначим $M_j(\mu) = \sum_{k=1}^{j} \left(\beta_{i_k} - \alpha_{i_{k-1}}\right)$ – сумму длин первых j дуг контура μ. Заход некоторой дуги в вершину i ($i = \overline{1, n}$) требует затрат β_i, исход дуги из вершины i соответствует получению дохода α_i. Так как в рассматриваемой модели все операции могут выполняться одновременно (не существует технологических ограничений на последовательность их выполнения), то, очевидно, минимуму привлеченных средств будет соответствовать последовательное выполнение операций (время реализации всего проекта при этом равно $T=\sum_{i=1}^{n}\tau_i$), а граф, построенный для нашей задачи, будет полным и симметричным [7].

Таким образом, задача свелась к определению оптимальной последовательности выполнения операций, то есть такой последовательности, при которой величина привлеченных средств будет минимальной. Последовательному выполнению всех операций (ни одна из операций не выполняется дважды) соответствует некоторый гамильтонов контур. Если под длиной дуги ℓ_{ij} понимать разность между затратами на выполнение j-й операции и доходом от i-й операции, то есть $\ell_{ij} = \beta_j - \alpha_i$ (рис. 4.4), то легко видеть, что полученный граф является псевдопотенциальным [11]. Действительно, любой гамильтонов контур соответствует выполнению всех операций. Независимо от последовательности суммирования длин дуг получим инвариантную (не зависящую от последовательности, то есть контура) величину $\left(\beta-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$. Тогда величина $M_j(\mu)$ есть взятый с обратным знаком чистый доход от выполнения первых $(j-1)$ операций контура μ и начала j-й операции.

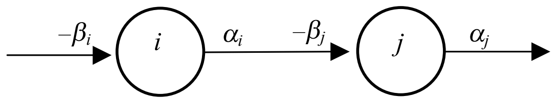


Рис. 4.4. *Фрагмент гамильтонова контура*

С другой стороны, $M_j(\mu)$ может интерпретироваться как нехватка собственных средств на выполнение j-й (в контуре μ) операции. Если $M_j(\mu) > 0$, то именно такую величину придется занимать. Если $M_j(\mu) \le 0$, то собственных средств центра хватает на выполнение j-й операции.

Предположим теперь, что задача центра заключается в определении последовательности выполнения операций, при которой максимальная величина однократного заема внешних средств минимальна при условии, что собственные средства отсутствуют (то есть $R_0 = 0$). Формально эту задачу можно представить в следующем виде: определить гамильтонов контур μ, имеющий минимальное значение $M(\mu) = \max\limits_{j=\overline{1,n}} M_j(\mu)$.

Решение этой задачи дается следующей теоремой [7]: существует оптимальное решение задачи

$$M(\mu) \to \min_{\mu}, \tag{4}$$

в котором сначала идут вершины с $\gamma_i \geq 0$ в порядке возрастания величин β_i, а затем вершины с $\gamma_i \leq 0$ в порядке убывания величин α_i (Приложение 2), где $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$ – прибыль i-й операции.

Обозначим $M_{min} = \min\limits_{\mu} M(\mu)$, а $\mu = (0, i_1, i_2, \ldots, i_n, 0)$ – оптимальный гамильтонов контур (решение задачи (4)). Тогда для него имеет место следующая система неравенств:

$$\begin{cases} M_{min} \geq \beta_{i_1} \\ M_{min} + \gamma_{i_1} \geq \beta_{i_2} \\ M_{min} + \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} \geq \beta_{i_3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{min} + \gamma_{i_1} + \ldots.. + \gamma_{i_{n-1}} \geq \beta_{i_n} \end{cases}, \tag{5}$$

причем

$$M_{min} = \max\left[\beta_{i_1}, \max_{1 \leq k < n}\left(\beta_{i_{k+1}} - \sum_{j=1}^{k} \gamma_{i_j}\right)\right]. \tag{6}$$

Система неравенств (5) и выражение (6) могут интерпретироваться следующим образом. Первое неравенство утверждает, что минимальная величина привлеченных средств не может быть меньше, чем затраты на операцию, выполняемую первой. Действительно, мы предположили, что величина собственных средств равна нулю (если она не равна нулю, то на нее уменьшится M_{min}). Следовательно, на первую операцию придется затратить β_{i_1}, так как никакие операции еще не выполнялись (нет доходов от их выполнения). Второе неравенство требует, чтобы затраты β_{i_2} на выполнение второй операции были меньше, чем заемные средства M_{min} плюс доход от выполнения первой операции γ_{i_1} (и так далее для всех операций).

Итак, **оптимальное решение** имеет следующую структуру:

– упорядочим прибыльные операции (для которых $\gamma_i \geq 0$) в порядке возрастания затрат (величин β_i) и включим их в последовательность (гамильтонов контур);
– добавим к полученной последовательности убыточные операции (для которых $\gamma_i \leq 0$) в порядке убывания доходов (величин α_i).

Таким образом, оптимальной является следующая последовательность: выполнять сначала прибыльные операции в порядке возрастания затрат (сначала более дешевые), затем выполнять убыточные операции в порядке убывания дохода (сначала приносящие наибольший доход).

Минимальная величина заемных средств при этом определяется выражением (6). Содержательная интерпретация этого выражения следующая: как минимум, придется занимать либо величину затрат первой операции (если при этом дохода от нее и последующих операций будет хватать на реализацию невыполненных или если заем не будет превосходить β_{i_1}), либо максимум по остальным операциям из нехватки собственных средств на их выполнение.

4.5. Механизмы страхования

Прежде чем рассматривать механизмы страхования, опишем один из возможных способов учета отношения людей к риску. Пусть некоторому индивидууму предлагают вложить деньги с высокой доходностью, но и с высоким риском. Предположим, что p – вероятность неполучения дохода (доход равен нулю), $(1 - p)$ – вероятность получения дохода x. Ожидаемый доход составит, очевидно, $Ex = (1 - p)\,x$. Зададимся вопросом – какую сумму x_0 индивидуум готов заплатить за участие в такой лотерее (см. также Приложение 3)?

Принято условно разделять субъектов на три группы:

1) *нейтральные к риску* (*risk-neutral*) – готовые участвовать в лотерее за ожидаемый выигрыш, то есть $x_0 = (1 - p)\,x$;

2) *несклонные к риску* (*risk-averse*) – готовые внести за участие в лотерее сумму, строго меньшую ожидаемого дохода, то есть $x_0 < (1 - p)\,x$;

3) *склонные к риску* – готовые участвовать в лотерее даже при условии, что ожидаемый выигрыш меньше их взноса, то есть $x_0 > (1 - p)\,x$.

Примерные графики зависимости $x_0\,(x)$ для нейтральных, склонных и несклонных к риску людей приведены на рисунке 4.5.

Числовой характеристикой предпочтений людей на множестве альтернатив, зависящих от случайных величин, выступает полезность. Если обозначить: x – альтернативу (например, размер денежного выигрыша в лотерее), $u(\cdot)$ – функцию полезности, определенную на множестве альтернатив, то люди, нейтральные к риску, имеют линейные функции полезности ($u' = Const > 0,\ \ u'' = 0$; полезность определяется с точностью до монотонного линейного преобразования), склонные к риску – выпуклые ($u' > 0$, $u'' > 0$), а несклонные – вогнутые ($u' > 0$, $u'' < 0$) функции полезности.

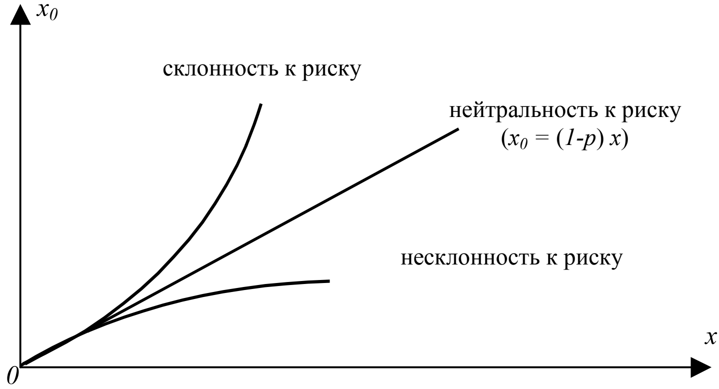


Рис. 4.5. *Зависимость взноса от выигрыша*

Графическая интерпретация функций полезности субъектов, имеющих различное отношение к риску, позволяет привести следующий пример. Представим себе, что субъект обладает некоторой суммой денег M_0 и ему предлагают принять участие в лотерее, в которой он с равными вероятностями выигрывает сумму ΔM и проигрывает такую же сумму. Если функция полезности линейна ($u(x) = x$), то прирост полезности от выигрыша $\Delta u_1 = \Delta M$ по абсолютной величине равен уменьшению полезности от проигрыша $\Delta u_2 = \Delta M$, – субъект нейтрален к риску. Если же функция полезности вогнута, то прирост полезности Δu_1 от выигрыша по абсолютной величине строго меньше уменьшения полезности Δu_2 при проигрыше, – субъект с такой функцией полезности предпочтет не рисковать (не станет принимать участие в рассматриваемой лотерее). Аналогично для субъекта, склонного к риску (имеющего выпуклую функцию полезности), прирост полезности от выигрыша превысит уменьшение полезности при проигрыше.

Таким образом, вид функции полезности отражает «глобальное»[52] отношение к риску. Известны (и подтверждены многочисленными исследованиями) следующие факты: коммерческие лотереи, рискованные финансовые операции и так далее рассчитаны на людей, склонных к риску; страхователи, как правило, не склонны к риску и получают от «передачи» страховщику своего риска гораздо большую «полезность», чем просто компенсацию ожидаемых потерь, упущенного дохода и так далее; страховщики в большинстве случаев нейтральны к риску (снижение рисков у страховщиков достигается за счет агрегирования большого числа мелких рисков и их диверсификации).

Рассмотрим некоторые свойства механизмов страхования, возникающие как следствие активного поведения страхователей (агентов) и/или страховщика (центра) [10, 14, 33].

Основная цель страхования заключается в перераспределении рисков – если у нескольких экономических объектов/субъектов существует небольшой риск возникновения страхового случая, при котором они несут существенные издержки, то им может оказаться выгодным «объединить усилия» – создать фонд, используемый для возмещения (как правило, частичного) потерь. В роли «аккумулятора» могут выступать сами экономические объекты (взаимное страхование, имеющее наименьшую коммерческую направленность), государство (государственное страхование) или частные страховые компании (коммерческое страхование).

---

[52] Распространенной «локальной» (дифференциальной) характеристикой отношения к риску является логарифмическая производная от производной функции полезности, взятая с обратным знаком.

Страховой случай является недетерминированной величиной, и даже при известном распределении вероятностей, несмотря на использование в моделях страхования ожидаемых значений, вероятность разорения страховщика при работе с малым числом однородных страхователей выше, чем при страховании многих. Это очевидное свойство: увеличение стабильности страхового портфеля с ростом числа страхователей у одного и того же страховщика лежит фактически в основе всего страхового дела.

В работах [10, 14] был получен вывод, совпадающий с выводом, сделанным при анализе моделей теории контрактов (см. выше), и заключающийся в том, что при нейтральных к риску страховщике и страхователе страхование, как таковое, теряет смысл: страхователь отдает в страховой фонд столько, сколько из него и получает (при этом может нарушиться требование обязательной полной компенсации ущерба и необходимо использовать другие механизмы определения страхового взноса). Приведем иллюстрирующий это утверждение пример.

Рассмотрим набор $N = \{1, 2, ..., n\}$ страхователей, у которых страховые случаи независимы и происходят с вероятностями $\{p_i\}$. Соответственно может произойти один страховой случай, два и так далее до n.

Обозначим H_i – доход i-го страхователя в благоприятной ситуации, доход равен нулю при страховом случае, r_i – страховой взнос, h_i – страховое возмещение, p_i – вероятность наступления страхового случая, c_i – затраты.

Тогда ожидаемое значение целевой функции i-го страхователя имеет вид:

$$f_i = (1 - p_i)H_i + p_i h_i - c_i - r_i,\ i \in N. \tag{1}$$

Страховщик получает в свой фонд сумму $\widetilde{R} = \sum_{i=1}^{n} r_i$ и выплачивает в среднем $R = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i$. Определим, каким требованиям должен удовлетворять механизм страхования.

1. Система страхования не должна побуждать страхователя «способствовать» наступлению страхового случая (например, страховое возмещение в случае пожара не должно превышать стоимости сгоревшего объекта и т. д.). Это значит, что в благоприятном случае целевая функция страхователя должна принимать большее значение, чем в страховом, то есть $h_i \le H_i$, $i \in N$.

Введенное ограничение отражает свойство *морального риска* (*moral hazard*), учет которого необходим при исследовании механизмов страхования. Действительно, людям свойственно изменять свое поведение, избавившись от риска (точнее – переложив его на плечи других людей или организаций). Так, например, человек, застраховавший свою машину от угона, станет менее внимателен к ее безопасности; человек, застраховавший свою дачу от пожара, вряд ли будет покупать новые огнетушители и т. д.

Второе свойство, характерное для механизмов страхования – проблема *некорректного отбора* (*adverse selection*): потенциальные страхователи могут обладать информацией, недоступной для страховщика. Так, например, страхование от несчастного случая гораздо более привлекательно для человека рассеянного и забывчивого, чем для аккуратного и внимательного.

2. Страхование должно иметь смысл для страхователя, то есть (более слабое условие суммарного баланса приведено ниже):

$$r_i \le p_i\, h_i\ ,\ i \in N.$$

3. Потребуем, чтобы значения целевых функций страхователей в любой ситуации были неотрицательны:

$$H_i - c_i - r_i \geq 0,\ h_i - c_i - r_i \geq 0,\ i \in N.$$

4. Страхование должно иметь смысл для страховщика, то есть:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n} h_i p_i \geq 0\,. \qquad (2)$$

Последнее условие означает, что ожидаемые страховые выплаты не должны превосходить суммы страховых взносов. Это, однако, не гарантирует защищенности страховщика от разорения. К четвертому ограничению можно добавить условие того, что вероятность выплат, превосходящих страховой фонд, не должна превышать некоторой, наперед заданной, достаточно малой величины. Отметим также, что нулевое значение в правой части неравенства соответствует взаимному страхованию (нагрузки к нетто-ставкам минимальны – равны нулю). В случае коммерческого страхования страховщик должен обеспечить средства для собственной деятельности, то есть получить ненулевой ожидаемый доход.

В [14, 33] показано, что для рассматриваемого класса механизмов область допустимых механизмов страхования, описываемая условиями 1–4, во многих случаях пуста. Кроме того, даже если она не пуста, то перераспределение риска (страхование) между субъектами, нейтральными к риску, не имеет смысла. Поэтому рассмотрим случай, когда страхователи не склонны к риску.

Опишем модель с одним страхователем и одним страховщиком. Пусть страхователь не склонен к риску и имеет строго монотонно возрастающую непрерывно дифференцируемую вогнутую функцию полезности $u(\cdot)$, а страховщик нейтрален к риску и имеет линейную функцию полезности.

Предположим, что возможны два значения дохода $x \in R^1$ страхователя: $0 < x_1 < x_2$, реализующиеся соответственно с вероятностями $(1 - p)$ и p ($p \in [0; 1]$), то есть вероятность наступления страхового случая (который заключается в получении страхователем меньшего дохода) равна $(1 - p)$. Ожидаемая полезность центра имеет вид:

$$\Phi = r - h(1 - p), \tag{3}$$

где $r \geq 0$ – страховой взнос, $h \geq 0$ – страховое возмещение.

В случае заключения страхового контракта страхователь либо получает доход $\tilde{x}_1 = x_1 - r + h$ – при наступлении страхового случая, либо доход $\tilde{x}_2 = x_2 - r$ – если страхового случая не происходит.

Ожидаемая полезность страхователя без заключения страхового контракта равна: $U = u(x_1)(1 - p) + u(x_2)p$, а при заключении страхового контракта: $\tilde{U} = u\tilde{x}_1(1 - p) + u(\tilde{x}_2)p$.

Будем считать, что центр заключает страховой контракт только в том случае, если этот контракт обеспечивает ему некоторую неотрицательную ожидаемую полезность H, то есть $\Phi = H > 0$ (условие участия).

Под *некоммерческим страхованием* будем понимать страхование, при котором ожидаемая полезность страховщика в точности равна нулю, то есть $H = 0$.

Под *коммерческим страхованием* будем понимать страхование, обеспечивающее страховщику строго положительное значение ожидаемой полезности.

Страховой контракт в рассматриваемой модели описывается кортежем $\{h, r, H; x_1, x_2, p, u(\cdot)\}$, причем параметры x_1, x_2, p, $u(\cdot)$ являются параметрами собственно страхователя, а h, r и H (или, что тоже самое, $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$) – параметры механизма страхования, выбираемые страховщиком.

Под *допустимым страховым контрактом* понимают такой набор неотрицательных чисел $\{h, r, H\}$, что выполняется $\Phi \geq H$ и страхование выгодно для страхователя, то есть допустимым является страховой контракт, выгодный и для страховщика, и для страхователя. Последнее условие означает, что в случае заключения страхового контракта, предлагаемого страховщиком, ожидаемая полезность страхователя будет не меньше, чем без участия в данном контракте.

Найдем ограничения на параметры страхового контракта, то есть область возможных значений (h, H), при которых страхование выгодно для страхователя. Подставляя условие $\Phi = H$ в целевую функцию центра, выразим величину страхового взноса через страховое возмещение и ожидаемый доход страховщика. Получим:

$$\widetilde{x}_1 = x_1 + p\, h - H\ , \tag{4}$$

$$\widetilde{x}_2 = x_2 - (1-p)\, h - H\ . \tag{5}$$

Вычислим ожидаемые значения дохода страхователя: $Ex = (1-p)x_1 + px_2$ – без заключения страхового контракта; $E\widetilde{x} = (1-p)\widetilde{x}_1 + p\widetilde{x}_2$ – при заключении страхового контракта.

Легко видеть, что $E\widetilde{x} = Ex - H$. Введем в рассмотрение следующие функции и величины (при $\Delta x = x_1 - x_2 = 0$, как и при $h = \Delta x$, задача вырождается):

$$U(x) = \frac{[u(x_2) - u(x_1)]x + u(x_1)\,x_2 - u(x_2)\,x_1}{x_2 - x_1},\ \ x \in [x_1,\, x_2];$$

$$\widetilde{U}(x) = \frac{[u(\widetilde{x}_2) - u(\widetilde{x}_1)]\,x + u(\widetilde{x}_1)\widetilde{x}_2 - u(\widetilde{x}_2)\widetilde{x}_1}{\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_1},\ \ x \in [\widetilde{x}_1,\, \widetilde{x}_2];$$

$$x'(p) = max\left\{x \in R^1 \mid u(x) \leq U(Ex)\right\} = u^{-1}(U),$$

где $u^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная к функции полезности страхователя.

Так как $Ex \in [x_1; x_2]$, то в силу вогнутости функции полезности $\forall\, p \in [0; 1]$ $x'(p) \in [x_1; Ex]$. Содержательно при $x = Ex$ $U(x)$ – ожидаемая полезность страхователя от участия в лотерее между альтернативами x_1 и x_2 с вероятностями $(1 - p)$ и p соответственно. В свою очередь при $x = E\tilde{x}$ $\tilde{U}(x)$ – ожидаемая полезность страхователя от участия в лотерее между альтернативами $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ с вероятностями $(1 - p)$ и p соответственно.

Величина $\Delta u = u(x) - U(x) \geq 0$ может интерпретироваться как премия за риск, измеренная в единицах полезности и характеризующая минимальную величину дополнительных гарантированных выплат страхователю, при которой он будет безразличен (с точки зрения ожидаемой полезности) между участием в лотерее и безусловным получением дохода, равного Ex. Положительность Δu обусловлена неприятием риска страхователем. Для нейтрального к риску страхователя премия за риск тождественно равна нулю. Если же страхователь склонен к риску, то есть имеет выпуклую функцию полезности, то, повторяя приведенные выше рассуждения, можно сделать вывод, что премия за риск будет неположительна, то есть такой страхователь готов заплатить за возможность участия в лотерее (в общем случае дифференциальной мерой склонности к риску может считаться, например, логарифмическая производная функции полезности). Поэтому $x'(p)$ – действие, эквивалентное (с точки зрения ожидаемой полезности) для страхователя участию в лотерее (рис. 4.6).

Условие выгодности для страхователя заключения страхового контракта имеет вид:

$$\tilde{U}(E\tilde{x}) \geq U(Ex). \qquad (6)$$

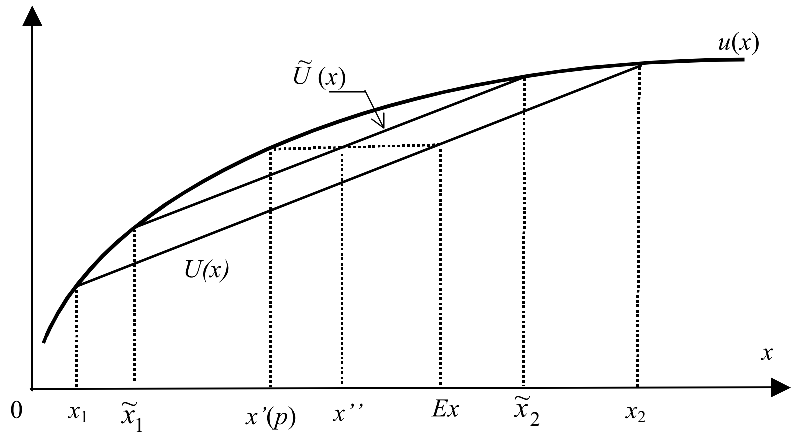


Рис. 4.6. *Полезность и ожидаемая полезность страхователя*

Условие (6) совместно с $\Phi \geq H$ является критерием допустимости страхового контракта. Однако его использование при решении задачи синтеза оптимального страхового контракта достаточно затруднительно – ограничения, накладываемые на параметры механизма могут оказаться чрезвычайно громоздкими. Поэтому приведем простые конструктивные и содержательно интерпретируемые достаточные условия.

Из свойств вогнутых функций следует, что достаточным для выполнения (6) в случае коммерческого страхования является следующая система неравенств:

$$x_1 \leq x'(p) \leq \tilde{x}_1 \leq Ex \leq \tilde{x}_2\,; \tag{7}$$

а в случае некоммерческого страхования достаточно выполнения следующего условия:

$$x_1 \leq \tilde{x}_1 \leq Ex \leq \tilde{x}_2 \leq x_2\,. \tag{8}$$

Рассмотрим для начала простейший случай – некоммерческое страхование. Для некоммерческого страхования (при $H = 0$) $E\tilde{x} = Ex$. Остальные условия системы неравенств (8) также выполнены, причем для любого механизма (для исключения морального риска, когда наступление страхового случая становится выгодным для страхователя, и обеспечения $\tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_2$ логично потребовать выполнения условия $h \leq \Delta x$).

Выгодность для страхователя некоммерческого страхования можно обосновать и не прибегая к системе неравенств (7)–(8). Покажем, что имеет место (6). Действительно, независимо от величины страхового возмещения, в силу вогнутости функции $u(\cdot)$ справедлива следующая оценка:

$$[u(x_1 + ph) - u(x_1)](1-p) + u(x_2 - h(1-p)) - u(x_2)p \geq$$
$$\geq p(1-p)h[u'(x_1 + ph) - u'(x_2 - h(1-p))] \geq 0.$$

Таким образом, мы пришли к следующему выводу: в рамках рассматриваемой модели некоммерческое страхование всегда выгодно для нейтрального или несклонного к риску страхователя. Это утверждение вполне соответствует интуитивному пониманию страхования как перераспределения риска: при использовании взаимовыгодного механизма некоммерческого страхования страхователь перекладывает на страховщика часть риска, что выгодно им обоим, так как страхователь не склонен к риску, а страховщик нейтрален к риску.

Определим наиболее выгодное для страхователя значение величины страхового возмещения. Из анализа зависимости $\tilde{U}(h)$ следует, что несмотря на то, что $r = h\,(1-p)$ и страховой взнос растет с ростом страхового возмещения, оптимальное значение h совпадает с максимально возможным – Δx. При этом $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = E\tilde{x} = Ex$, и страхователь фактически исключает неопределенность и получает ожидаемую полезность, равную $u(Ex)$. Очевидно, что $u(Ex) \geq E\,u(x)$, то есть страхование действительно выгодно для страхователя, а страховщик безразличен между участием и неучастием в страховом контракте.

Интересно отметить следующие свойства рассмотренного механизма некоммерческого страхования: параметры механизма (ограничения и оптимальные значения) не зависят от функции полезности страхователя; параметры механизма (ограничения и оптимальные значения) зависят только от Δx и не зависят от величин дохода по отдельности; страховое возмещение не превосходит возможных потерь Δx от наступления страхового случая; при предельном переходе к детерминированной модели имеем: если $\Delta x = 0$, то $h = r = 0$, если $p = 0$, то $h = r = \Delta x$, если $p = 1$, то $h = \Delta x$, $r = 0$ (но страховое возмещение выплачивается с нулевой вероятностью); при фиксированном страховом возмещении величина страхового взноса растет с ростом вероятности наступления страхового случая; при фиксированной вероятности страхового случая величина страхового взноса растет с ростом страхового возмещения; если страхователь нейтрален к риску, то страхование (перераспределение риска с нейтральным к риску центром) не имеет смысла: его ожидаемая полезность одинакова при любых значениях страхового возмещения.

Рассмотрим теперь механизм коммерческого страхования. Система неравенств (7) позволяет найти ограничения на величину страхового возмещения в зависимости от ожидаемого дохода страховщика для случая коммерческого страхования. Последовательно учитывая следующие условия: $x_1 \leq \widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_1 \leq Ex$, $Ex \leq \widetilde{x}_2$, получаем:

$$H \leq p\,h, \tag{9}$$

$$H \geq p\,[h - \Delta x], \tag{10}$$

$$H \leq (1 - p)\,[\Delta x - h]. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что выполнено

$$h \leq \Delta x, \tag{12}$$

что исключает моральный риск, причем всегда имеет место $\tilde{x}_2 < x_2$. Более того, к ограничениям (9)–(12) добавляется следующее условие: $x_1 \le x'(p) \le \tilde{x}_1$ (см. также (7)). В приведенном на рисунке 4.6 частном случае последнее условие нарушено.

Если функция полезности страхователя линейна, то $x'(p) = Ex$ и (7) может иметь место только при $x'(p) = \tilde{x}_1 = Ex$, что в силу (12) приводит к $H \equiv 0$, то есть в случае нейтрального к риску страхователя коммерческое страхование невозможно (нельзя получить прибыль от перераспределения риска).

В [10, 14] показано, что назначение граничных значений параметров механизма оптимально для страховщика (в смысле максимальной эффективности, понимаемой как значение его ожидаемой полезности). Обоснование этого утверждения следующее.

Из определений $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ получаем:

$$\Phi = p(x_2 - \tilde{x}_2) - (1 - p)(\tilde{x}_1 - x_1).$$

Видно, что эффективность механизма Φ монотонна по $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$, причем чем меньше значения этих параметров, тем выше эффективность. С другой стороны, минимально возможные их значения определяются именно (7). Таким образом, достаточно выбрать параметры механизма, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\tilde{x}_1 = x'(p),\ \tilde{x}_2 = Ex. \tag{13}$$

Вспомним, что условия (7) являются достаточными. Механизм, удовлетворяющий (13), является допустимым, но не гарантирует достижения максимально возможной ожидаемой полезности страховщика на множестве всех допустимых (выгодных для страхователя) механизмов. Содержательно (13) соответствует тому, что страхователю предлагается вместо исходной лотереи принять участие в новой лотерее, в которой его полезность от минимально возможного дохода не меньше, чем полезность от ожидаемого дохода в исходной лотерее. Понятно, что для страхователя это выгодно. Страховщик при этом получит неотрицательную ожидаемую полезность (строго большую нуля, если $p \neq 0$, $p \neq 1$, $\Delta x \neq 0$). Но эта оценка в общем случае улучшаема. То есть использование условий типа (13) упрощает анализ и позволяет найти параметры механизма без трудоемких вычислений, но за простоту приходится «платить» возможной потерей эффективности.

Рассмотрим в качестве иллюстрации частный случай, в котором доход страхователя при наступлении страхового случая равен нулю, а страховое возмещение при этом равно x_2, то есть $x_1 = 0$, $h = x_2$. Обозначим страховую ставку β. Страховая ставка складывается из нетто ставки β_0 и нагрузки ξ, то есть $\beta = \beta_0\,(1+\xi)$. Из принципа эквивалентности следует, что $\beta_0 = 1 - p$. Записывая условия выгодности страхового контракта для страхователя, можно получить следующую оценку максимального значения нагрузки ξ_{max} (очевидно, что страховщик заинтересован в максимизации нагрузки):

$$\xi_{max} = \frac{px_2 - u^{-1}(pu(x_2))}{(1-p)x_2}. \qquad (14)$$

Легко видеть, что ξ_{max} возрастает по p и x_2 и вогнута по x_2. Содержательные интерпретации такой монотонности очевидны. Если страхователь нейтрален к риску, то $\xi_{max} = 0$, то есть страховщик не может получить прибыль от заключения страхового контракта со страхователем, который так же, как и он сам, относится к риску. Если функция полезности страхователя строго вогнута, то значение ξ_{max} строго положительно. Например, при $u(x) = \sqrt{x}$ из (14) следует, что $\xi_{max} = p$.

Из проведенного анализа механизма страхования видно, что выгодность перераспределения риска обусловлена различным к нему отношением страхователя и страховщика. Несклонность к риску страхователя достаточно понятна. Поэтому рассмотрим, почему страховщик может быть нейтрален к риску и каковы качественные отличия механизмов страхования в многоэлементных системах от описанной выше одноэлементной модели.

Пусть ОС состоит из n страхователей (индекс $i=\overline{1,n}$ соответствует номеру страхователя). Суммарный страховой взнос элементов равен $\sum_{i=1}^{n} r_i$, ожидаемое страховое возмещение – $\sum_{i=1}^{n}(1-p_i)h_i$. Задача синтеза оптимального страхового контракта заключается в поиске допустимого набора $\{r_i, h_i\}$, максимизирующего ожидаемую полезность центра

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}[p_i(x_{2_i}-\tilde{x}_{2_i})-(1-p_i)(\tilde{x}_{1_i}-x_{1_i})],$$

где $h_i=\Delta x_i-\Delta\tilde{x}_i$, $r_i=x_{2_i}-\tilde{x}_{2_i}$.

Известно, что страхование выгодно при большом числе страхователей. Это объясняется, во-первых, тем, что с ростом числа страхователей вероятность разорения страховщика уменьшается (при этом, помимо ожидаемой полезности, необходимо анализировать и вторые моменты, то есть целевые функции и ограничения механизма могут отличаться от рассмотренных выше). Во-вторых, даже если страховщик не склонен к риску, страхование может оказаться выгодным для него. Поясним последнее утверждение.

Пусть имеются n одинаковых страхователей, а страховщик имеет ту же функцию полезности (предположим, что функции полезности строго вогнуты), что и страхователи. Если $n = 1$, то страхование никому не выгодно: перераспределять риск между агентами, одинаково к нему относящимися, бессмысленно. Из рассмотренных выше моделей следует, что страхование выгодно, когда премии за риск страхователя и страховщика различаются. С ростом n при строго вогнутой функции полезности страховщика его премия за риск уменьшается, в то время как у каждого из страхователей остается постоянной (система событий – возможных исходов при этом будет, естественно, более сложной, чем в одноэлементном случае). Иными словами, перераспределение риска между двумя агентами взаимовыгодно, если один из них имеет «менее вогнутую» функцию полезности, чем другой.

Модели **взаимного страхования** достаточно подробно описаны в [10]. Рассмотрим кратко основные подходы и результаты. Пусть имеются n страхователей. Результатом деятельности каждого страхователя является случайная величина, принимающая одно из двух значений, соответствующих благоприятной ситуации и неблагоприятной ситуации (страховому случаю). Вероятность наступления страхового случая у i-го страхователя равна p_i и известна «страховщику», которым может являться объединение страхователей (в последнем случае получаем, что все вероятности известны всем страхователям, участвующим во взаимном страховании). Отметим, что рассматриваемая модель непосредственно обобщается на случай любого конечного числа возможных результатов деятельности страхователей. Для простоты пока положим, что страховой случай может наступить у одного и только одного страхователя.

Пусть при наступлении страхового случая у i-го страхователя требуется страховое возмещение в объеме h_i, отражающее, например, стоимость восстановительных работ и компенсационных выплат третьим лицам в результате ущерба, нанесенного аварией на предприятии, представленном данным страхователем.

Предположим, что величина h_i известна только i-му страхователю и неизвестна остальным. Тогда при разработке механизма страхования придется использовать либо некоторые оценки величин $\{h_i\}$, восстанавливаемые по косвенной информации (например, в результате проведения экологической экспертизы или по имеющимся статистическим данным), либо оценки $\{s_i\}$, сообщаемые страхователями. Если требуется обеспечить полное гарантированное покрытие возможного ущерба, то для этого необходимо иметь резерв $\max_i \{h_i\}$. Но так как $\{h_i\}$ неизвестны, то будем считать, что резерв (страховой фонд) определяется как $\max_i \{s_i\}$.

Рассмотрим целевые функции страхователей. Страхователь с номером i получает доход H_i, выплачивает страховой взнос $r_i(s)$, где $s = (s_1, \ldots , s_n)$ – вектор сообщений страхователей. В благоприятной ситуации страхователь несет затраты C_i, в неблагоприятной – $(C_i + h_i)$. В неблагоприятной ситуации страхователь получает страховое возмещение s_i. Таким образом ожидаемое значение целевой функции i-го страхователя определяется выражением:

$$f_i = H_i - r_i(s) - C_i + p_i(s_i - h_i),\ i \in N = \{1, 2, ..., n\}. \quad (15)$$

Пусть страховщик использует следующую процедуру для определения страхового взноса:

$$r_i(s) = \frac{(p_i s_i)}{\sum_{j=1}^{n}(s_j p_j)} R,\ i \in N, \quad (16)$$

то есть каждый страхователь делает в страховой фонд взнос, пропорциональный своей заявке (очевидно,

$\forall s$ $\sum_{i=1}^{n} r_i(s) = R$, $\forall\, i \in N$ $r_i(s)$ возрастает по s_i). Легко видеть, что максимум выражения ($p_i\, s_i - r_i(s)$) по s_i при фиксированной обстановке $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ достигается при $\tilde{s}_i = \max_{j \neq i}\{s_j\}$. Очевидно, сообщение достоверной информации в общем случае не будет равновесием Нэша. Более того, равновесной оказывается каждая ситуация игры, в которой все агенты сообщают одинаковые заявки.

Легко видеть, что вместо (16) достаточно взять $r_i(s) = p_i\, s_i$. Тогда целевая функция страхователя не будет зависеть от s и в силу гипотезы благожелательности он сообщит $s_i = r_i$, $i \in N$. Итак, каждый страхователь вносит в страховой фонд (фонд взаимного страхования) взнос, в точности равный ожидаемой нехватке средств. Но при этом сумма взносов может оказаться меньше требуемых выплат, то есть не исключена ситуация, в которой найдется страхователь с номером j, таким, что $h_j > \sum_{i=1}^{n} p_i h_i$. Такую возможность надо учитывать, и использовать ожидаемые значения следует очень аккуратно.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств механизмов страхования, обусловленных активностью их участников. Один аспект активности мы уже учли: страховщик и страхователь не станут заключать страховой контракт, если он не выгоден хотя бы одному из них.

В [10, 14] перечислены перспективные направления исследований механизмов управления, которые в подобных ситуациях может использовать страховщик.

Если центру известна нижняя оценка вероятности наступления страхового случая, то оптимальный страховой контракт может рассчитываться на основании этой оценки, что будет соответствовать использованию страховщиком принципа максимального гарантированного результата. В частности, в упомянутой работе отмечалось, что возможно использование так называемых компенсационных процедур. Так как страхователю выгодно занижать оценку вероятности наступления страхового случая, то, «встраивая» в механизм процедуру, снижающую доход страхователя от занижения оценки (то есть компенсируя эффект от занижения), центр может добиться сообщения страхователем если не достоверной, то по крайней мере более точной информации. В случае, когда число страхователей велико и все они работают в одинаковых условиях, можно устроить многоканальный конкурс страхователей (см. раздел 5.3), результаты которого будут определяться сообщенными страхователями оценками вероятностей наступления страхового случая: сообщивший более «точную» (максимальную, минимальную и т. д.) оценку получает льготные условия страхования. Если условия деятельности различных страхователей отличаются, но все они имеют информацию друг о друге, то за счет сообщения этой информации при использовании механизмов теории реализуемости (см. обзор в [61]) существующая неопределенность может быть уменьшена, а эффективность страхования – повышена.

В заключение настоящего раздела сделаем следующее замечание. Основные «технические» трудности анализа механизмов страхования возникают из-за нелинейности функции полезности страхователя. В то же время именно эта нелинейность, отражающая его несклонность к риску, делает страхование возможным и взаимовыгодным для страхователя и страховщика. Поэтому для упрощения моделей рассмотрим возможные способы учета несклонности страхователя к риску, не использующие в явном виде функции полезности. Для этого введем в его целевую функцию рисковую премию, отражающую ценность страхового возмещения, получаемого при наступлении страхового случая.

Пусть g – составляющая целевой функции страхователя, не зависящая от случайных событий, Q – его дополнительные затраты, которые он несет при наступлении страхового случая, $\Delta h(h)$ – «ценность» страхового возмещения. Тогда ожидаемое значение целевой функции страхователя может быть записано как

$$Ef = g - r + p\,(\Delta h(h) - Q),$$

где p – вероятность наступления страхового случая.

Заключение страхового контракта будет выгодно для страхователя, если

$$p\,\Delta h(h) \geq r.$$

Из принципа эквивалентности следует, что нагрузка к нетто-ставке есть $(\Delta h(h) - h)$, следовательно, страховой контракт будет выгоден страховщику, если $\Delta h(h) \geq h$.

Например, при $\Delta h(h) = h\,e^{\xi}$, где $\xi \geq 0$ – константа, отражающая несклонность страхователя к риску (нейтральности к риску соответствует равенство этой константы нулю), получаем, что при малых ξ из формулы Тейлора следует, что $\Delta h(h) \approx h + \xi\,h$, то есть ξ может интерпретироваться как максимальная нагрузка к нетто-ставке.

4.6. Механизмы оптимизации производственного цикла

Длительность производственного цикла оказывает существенное влияние на эффективность производства и величину требуемых оборотных средств. Сокращение производственного цикла включается, как правило, в план развития предприятия как одна из ключевых проблем. Рассмотрим задачу оптимального согласованного планирования мероприятий по *сокращению производственного цикла*.

Представим производственный процесс в виде технологической сети, вершины которой соответствуют цехам (участкам), а дуги отражают необходимую технологию производственного процесса. Обозначим τ_i – продолжительность процесса в i-м цехе. Тогда продолжительность производственного цикла определяется длиной максимального (критического) пути в сети [7, 11] (см. также Приложение 2). Если существенными являются времена доставки продукции из одного цеха в другой, то эти времена можно учесть, вводя длины соответствующих дуг.

Рассмотрим задачу сокращения продолжительности цикла на заданную величину Δ.

Опишем сначала частный случай, когда технологическая сеть представляет собой последовательную цепочку из n цехов. Каждый цех – агент – разрабатывает и представляет в отдел стратегического развития (центр) мероприятия по сокращению продолжительности производственного цикла. В агрегированном виде эти мероприятия можно описать зависимостью $S_i(\tau_i)$ затрат, требуемых на сокращение производственного цикла на величину τ_i. Рассмотрим два механизма решения поставленной задачи.

Первый механизм. План мероприятий по сокращению продолжительности производственного цикла на величину Δ определяется в результате решения следующей задачи: $\sum_{i=1}^{n} S_i(\tau_i) \to min$, при условии $\sum_{i=1}^{n} \tau_i = \Delta$. Пусть τ_i^* – оптимальное решение этой задачи. Тогда i-й цех получает плановое задание на сокращение продолжительности производственного цикла на τ_i^* и ему обеспечивается финансирование соответствующих мероприятий в объеме $S_i(\tau_i^*)$.

Второй механизм. В этом механизме величина финансирования мероприятий цеха по сокращению продолжительности производственного цикла прямо пропорциональна величине τ_i сокращения продолжительности производственного процесса в цехе, то есть $S_i = \lambda\ \tau_i$, где λ – величина финансирования, выделяемая на сокращение продолжительности производственного процесса на единицу времени (см. также разделы 2.7 и 3.4). Для определения плана мероприятий и величины λ каждый цех представляет в отдел стратегического развития вариант сокращения продолжительности производственного процесса в цехе в зависимости от величины λ. Обозначим $\tau_i = \xi_i(\lambda)$ предлагаемую цехом величину сокращения производственного процесса при финансировании $\lambda\ \tau_i$.

Отдел стратегического развития определяет величину λ и план сокращения продолжительности производственного цикла из условия $\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\lambda) \geq \Delta$, то есть определяется минимальное λ^*, удовлетворяющее этому условию. Далее каждый цех i получает задание на сокращение продолжительности производственного процесса на величину $\tau_i^* = \xi_i(\lambda^*)$ и соответствующее финансирование $\lambda^* \tau_i^*$.

Для исследования сравнительной эффективности этих двух механизмов рассмотрим производственные функции $S_i(\tau_i)$ типа Кобба-Дугласа, то есть $S_i(\tau_i) = \frac{1}{\alpha} \tau_i^{\alpha} r_i^{1-\alpha},\ i = \overline{1, n},\ \alpha > 1$, где параметр r_i характеризует технологическую эффективность мероприятий по снижению продолжительности цикла.

Примем, что целевой функцией каждого цеха является разность между тем объемом финансирования, которое он получает на проведение мероприятий по сокращению производственного цикла, и объективно необходимой величиной средств на эти мероприятия.

В работе [11] показано, что оба механизма обеспечивают одинаковое превышение выделяемых средств над объективно необходимыми и в этом смысле являются эквивалентными по эффективности. Однако существенным преимуществом второго механизма является тот факт, что он стимулирует представление достоверных сведений о величине объективно требуемых объемов финансирования, то есть является механизмом честной игры (см. третью главу). Это свойство является решающим для создания на предприятии корпоративного духа, одним из основных условий которого являются доверительные отношения между подразделениями.

Таким образом, анализ показал преимущества второго механизма, поскольку при том же объеме финансирования он обладает важным свойством – достоверности информации, поступающей от агентов. Поэтому рассмотрим второй механизм для случая произвольной технологической сети.

Итак, пусть все цеха сообщили зависимости $\tau_i = \xi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим T_0 – длину критического пути. Для решения задачи используем следующий ***алгоритм.***

1 шаг. Определяем λ_0 по формуле $\lambda^* = \left(\dfrac{\Delta}{S}\right)^{\alpha-1}$ (см. также раздел 3.4), где S – сумма оценок s_i операций критического пути, и полагаем $t_i^1 = t_i - \xi_i(\lambda_0)$.

2 шаг. Определяем длину критического пути при продолжительностях соответствующих операций, равных t_i^1. Обозначим эту длину через T_1, а сам путь через μ_1. Если $T_1 > T_0 - \Delta$, то определяем новое значение λ_1 по той же формуле, в которой $\Delta = T(\mu_1) - T_0 + \Delta$, где $T(\mu_1)$ – длина пути μ_1 при начальных продолжительностях операций $\{t_i\}$, а S равно сумме оценок s_i агентов, составляющих путь μ_1.

Заметим, что $\lambda_1 > \lambda_0$. Находим критический путь μ_2 и его длину $T(\mu_2)$ при продолжительностях операций $t_i^2 = t_i - \xi_i(\lambda_2)$ и повторяем процедуру.

В силу конечности числа путей сети за конечное число шагов получим минимальное значение λ^*, такое что длина критического пути в сети равна $(T_0 - \Delta)$ при продолжительностях операций пути μ_k, равных $t_i - \xi_i(\lambda^*)$.

Теперь необходимо определить плановые задания τ_i цехам по сокращению продолжительности цикла, имея в виду, что продолжительности операций должны удовлетворять условиям $t_i' = t_i - \xi_i(\lambda^*) \leq t_i - \tau_i \leq t_i$.

На этом этапе алгоритма критерием служит объем финансирования мероприятий, который равен $\sum_{i=1}^{n} \lambda^* \tau_i$. Эта задача является частным случаем широко известной задачи оптимизации сети по стоимости [7].

До сих пор мы рассматривали задачу оптимального согласованного планирования производственного цикла. Не менее важной задачей является *планирование коммерческого цикла*, поскольку именно от продвижения товара от предприятия к потребителю (транспортировка, складирование, продажа) зависит конечный финансовый результат, то есть получение прибыли. Коммерческий цикл представляет собой последовательность различных операций. При планировании коммерческого цикла, как правило, учитываются такие факторы, как затраты на транспортировку, хранение и продажу, продолжительность цикла от производства до продажи, включая реализацию товара, полученного по бартеру, доход от реализации товара и различного рода риски. Все эти факторы взаимосвязаны. Так, увеличивая затраты, можно уменьшить продолжительность цикла и риски, повысить спрос (за счет рекламы) и т. д.

4.7. Механизмы назначения[53]

В третьей главе (раздел 3.5) рассматривались конкурсные механизмы, в которых претенденты упорядочивались по определенному (одному) критерию. В более сложных конкурсах, например, когда подбираются исполнители операций проекта, каждый агент может претендовать на право реализации различных операций.

Обозначим A_{ij} – минимальную цену, по которой агент i еще берется за операцию j; S_{ij} – цену за операцию, предлагаемую агентом i (очевидно, $S_{ij} \geq A_{ij}$). Центр (руководитель проекта) должен назначить все операции так, чтобы суммарная стоимость их реализации была минимальной. Примем, что каждый агент берется за реализацию не более одной операции. Для формализации задачи принятия решений центром обозначим $x_{ij} = 1$, если операция j назначается агенту i, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда задачу распределения операций по агентам (в случае $m = n$) можно представить в виде следующей математической задачи:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j} x_{ij}\ S_{ij} \to min \\ \sum\limits_{i} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,\ m}\,, \\ \sum\limits_{j} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,\ n} \end{cases} \qquad (1)$$

где n – число агентов, m – число операций.

Тогда стоимость j-й операции: $q_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} S_{ij}$.

Фактически здесь переплетаются несколько конкурсов (по числу операций), связанных между собой условием, что агент может быть победителем только в одном из них (то есть может выполнять в итоге только одну опера-

[53] Раздел написан совместно с В. Н. Бурковым.

цию). Анализ данного конкурсного механизма в существенной степени зависит от соотношения числа операций и числа агентов.

Можно показать, что ситуации равновесия Нэша соответствует назначение операций, минимизирующее сумму объективных затрат

$$C = \sum_{i,j} x_{ij} \ A_{ij} \ . \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $\{S^*_{ij}\}$ – ситуация равновесия. Пусть $x^*_{ij} = 1$. Обозначим $\Delta_i = S^*_{ij} - A_{ij} = q_j = A_{ij}$. Заметим, что если $S_{ik} - A_{ik} > \Delta_i$, то агент будет уменьшать S_{ik}, надеясь получить операцию k и обеспечить больший выигрыш. Это уменьшение будет продолжаться до $S_{ik} = A_{ik} + \Delta_i$. Если же $S_{ik} < A_{ik} + \Delta_i$, то увеличение S_{ik} до величины $A_{ik} + \Delta_i$, очевидно, не изменит назначения операций. Поэтому решение задачи (1) со значениями $\{S^*_{ij}\}$ эквивалентно решению такой же задачи со значениями $S_{ij} = A_{ij} + \Delta_i$, $i, j = \overline{1, n}$. Наконец, естественно принять, что все агенты, не получившие операций, будут сообщать минимальные оценки $S_{ij} = A_{ij}$, надеясь получить какую-либо операцию. Отсюда следует, что назначение операций, минимизирующее $\sum_{i,j} (A_{ij} + \Delta_i) x_{ij}$, минимизирует и $\sum_{i,j} A_{ij} x_{ij}$. Однако отсюда не следует, что операции будут назначены по минимальным ценам A_{ij}, поскольку значения Δ_i могут быть весьма высокими. Утверждение доказано.

Рассмотрим сначала случай, когда число агентов равно числу операций.

Пусть $S = \{S_{ij}\}$ – некоторая ситуация (совокупность цен, предлагаемых агентами), а $x_{ij}(S)$ соответствует решению задачи назначения. Заметим, что если агент увеличит цены всех операций на одну и ту же величину $S'_{ij} = S_{ij} + \Delta_i$, $j=\overline{1,n}$, то решение задачи назначения не изменится и агент получит ту же операцию, но по более высокой цене. Поэтому, естественно, возникает тенденция роста цен. До каких пор? Ограничим цену каждой операции некоторой величиной L_j (лимитная цена операции). Ясно, что хотя бы по одной операции каждый агент предложит лимитную цену.

Пусть агенты перенумерованы таким образом, что в оптимальном решении задачи назначения операций при $S_{ij} = A_{ij}$ операцию i получает агент с номером i, и поэтому $q_i = S_{ii}$. Примем начальные цены $q_i^0 = L_i$, а начальные оценки $S_{ij}^0 = L_j$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$. Далее проводим корректировку оценок и цен по формулам:

$$S_{ij} = min\,\{L_i, q_i + A_{ij} - A_{ii}\}\,, j \neq i, \tag{3}$$

$$S_{ii} = q_i = min\,\{L_i,\ \min_{j\neq i} S_{ji}\}. \tag{4}$$

Можно показать, что эта процедура конечна и в результате будут получены равновесные оценки $\{S_{ij}^*\}$ и, соответственно, равновесные цены $q_i^* = S_{ii}^*$, $i=\overline{1,n}$. Для нас важно, что отправной точкой процедуры являются максимальные (лимитные) цены. Более того, хотя бы одна операция будет назначена по лимитной цене.

Таким образом, случай распределения равного числа агентов и операций лишь условно можно считать конкурсным механизмом. Скорее он близок к монопольному варианту финансирования операций. Это особенно очевидно, если каждый агент специализируется на определенном виде операций, например, агент i специализируется на операции i.

Пример 4.1. Пусть $L_i = L$; $A_{ii} = \alpha < L$; $A_{ij} = L$, $j \neq i$. Очевидно, что ситуация равновесия $S_{ij}^* = L$ для всех i, j. Соответствующее равновесное решение задачи назначения операций: $x_{ii}^* = 1$; $x_{ij}^* = 0$, $j \neq i$; $q_i^* = L$, $i = \overline{1, n}$. Эффективность конкурсного механизма, оцениваемая по отношению минимальной стоимости всех операций $S_{min} = n\,\alpha$ к их стоимости в ситуации равновесия $S = L\,n$, будет равна: $K = \dfrac{S_{min}}{S^*} = \dfrac{a}{L} << 1$, если $\alpha << L$.

Пример 4.2. Пусть имеются две операции и два агента. Значения A_{ij} приведены в таблице 4.5.

Таблица 4.5

Параметры операций и агентов

$i \backslash j$	1	2
1	15	10
2	25	15

Лимитные цены операций $L_1 = 120$, $L_2 = 100$. Определим равновесные оценки S_{ij}^* и цены q_j^*. Имеем:

$$\begin{array}{c} S_{21}^0 = S_{11}^0 = L_1 = 120,\ S_{12}^0 = S_{22}^0 = 100 \\ q_1^0 = 120,\ q_2^0 = 100 \end{array}.$$

Вычислим: $S_{12}^1 = min\left[L_2;\, q_1^0 + A_{12} - A_{11}\right] = 100$,

$$S_{21}^1 = min\left[L_1;\, q_2^0 + A_{21} - A_{22}\right] = 110,$$

$$S_{11}^1 = q_1^1 = min\left[L_1;\, S_{21}^1\right] = 110,$$

$$S_{22}^1 = q_1^2 = min\left[L_2;\, S_{12}^1\right] = 100.$$

Получили равновесную ситуацию:

$$\begin{array}{c} S_{11}^* = S_{21}^* = 110,\ S_{22}^* = S_{12}^* = 100 \\ q_1^* = 110,\ q_2^* = 100 \end{array}.$$

Эффективность конкурсного механизма в данном случае $K = \frac{1}{7}$, то есть весьма мала.

Ситуация в корне меняется при появлении еще одного агента. Самое главное, что при этом договорные цены в ситуации равновесия определяются уже не лимитными ценами $\{L_j\}$, а минимальными ценами $\{A_{ij}\}$. Чтобы показать это, примем, что лимитные цены достаточно велики, и покажем, что они никак не влияют на равновесные. Пусть агенты перенумерованы таким образом, что агент с номером i получает операцию i, а агент с номером $(m + 1)$ вообще не получает операции. В этом случае $\Phi_0 = \sum_i A_{ii}$ определяет оптимальное решение задачи минимизации $\sum_{i,j} A_{ij} x_{ij}$.

Как уже отмечалось выше, агент $(m + 1)$ сообщает в равновесии минимальные цены $S_{m+1,j} = A_{m+1,j}$, а остальные агенты –

$$S_{ij} = A_{ij} + \Delta_i,\ i = \overline{1, m}\,.$$

Для определения Δ_i решим m задач следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{m} \left[A_{m+1,j} x_{m+1,j} + \sum_{i \neq k} A_{ij} x_{ij} \right] \to min \qquad (5)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\sum_j x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,\ m+1},\ i \neq k, \\ &\sum_{i \neq k} x_{ij} + x_{m+1,j} = 1,\ j = \overline{1,\ m}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Фактически мы заменили агента k на агента $(m + 1)$ в задаче назначения операций. Обозначим Φ_k значение целевой функции в оптимальном решении этой задачи. Заметим, что $\Phi_k \geq \Phi_0$ для всех k.

Пусть теперь $\Delta_k > \Phi_k - \Phi_0$. В этом случае решение задачи минимизации $\sum_{i,j}\left(A_{ij} + \Delta_i\right)x_{ij}$ не будет совпадать с решением задачи минимизации $\sum_{i,j} A_{ij}x_{ij}$. Поэтому в ситуации равновесия должно иметь место $\Delta_k \le \Phi_k - \Phi_0$, а так как агенты заинтересованы в увеличении Δ_k, то в равновесии $\Delta_k = \Phi_k - \Phi_0$ и $S_{ij}^* = A_{ij} + \Phi_i - \Phi_0$, $\Phi_{m+1} = \Phi_0$. Эффективность конкурсного механизма в случае $n = m + 1$ определяется выражением:

$$K = \frac{\Phi}{\sum_{i=1}^{m}\Phi_i - (m-1)\Phi_0}.$$

Поскольку все Φ_i, $i = \overline{1, n}$ определяются на основе минимальных цен A_{ij}, то эффективность конкурсного механизма определяется только минимальными ценами и не зависит от лимитных цен (при достаточно больших лимитных ценах).

Пример 4.3. Возьмем задачу из примера 4.1 и добавим одного агента, который может взяться и за первую, и за вторую операции, которые для него одинаково выгодны, то есть $A_{31} = A_{32} = \beta$. Пусть $\alpha < \beta < L$.

В этом случае $\Phi_0 = 2\alpha$, $\Phi_1 = \Phi_2 = \alpha + \beta$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \beta - \alpha$ и эффективность конкурсного механизма

$$K = \frac{2\alpha}{2\beta} = \frac{\alpha}{\beta},$$

а цены обеих операций равны $q_1^* = q_2^* = \beta$.

Пример 4.4. Добавим теперь одного агента в задаче примера 4.2 со следующими данными: $A_{31} = 40$, $A_{32} = 20$.

Имеем: $A = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 15 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}$, $\Phi_0 = 30$, $\Phi_1 = 45$, $\Phi_2 = 35$, $\Delta_1 = 15$, $\Delta_2 = 5$.

Ситуация равновесия:

$$S_{11}^* = 30,\ S_{12}^* = 25,$$
$$S_{21}^* = 30,\ S_{22}^* = 20,$$
$$S_{31}^* = 40,\ S_{32}^* = 20.$$

Назначение операций $x_{11}^* = x_{22}^* = 1$, остальные $x_{ij} = 0$.

Итак, первый агент получает первую операцию по цене $q_1^* = 30$, а второй – вторую по цене $q_2^* = 20$. Эффективность конкурсного механизма стала $K = \dfrac{30}{50} = 0{,}6$, то есть повысилась по сравнению с предыдущим случаем $K = \dfrac{1}{7}$ примерно в 4,2 раза.

Приведенные примеры иллюстрируют, насколько резко может увеличиться эффективность конкурсного механизма при добавлении всего одного нового агента.

Эффективность конкурсного механизма максимальна, если в конкурсе участвуют равные соперники, то есть $A_{ij} = A_j$ для всех $i = \overline{1, n}$ и, следовательно, $\Phi_k = \Phi_0$, $\Delta_k = 0$, то есть все операции назначаются по минимальным ценам A_j, $i = \overline{1, m}$.

Таким образом, с увеличением числа участников конкурса эффективность конкурсного механизма, как правило, увеличивается (во всяком случае не уменьшается).

Если $n > m + 1$, то анализ конкурсного механизма проводится аналогично предыдущему случаю. Однако объем вычислений быстро растет с ростом n. Так, при $n = m + 2$ необходимо рассмотреть C_m^2 задач, получаемых заменой любых двух агентов i, j, получивших операции, на двух агентов, не получивших операций в равновесии.

Обозначим

$$\Phi_{ij} = min\sum_{s}\sum_{k\neq i,j} x_{ks}A_{ks}$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum\limits_{k\neq i,j} x_{ks} = 1,\ s = \overline{1, m} \\ \sum\limits_{s=1}^{m} x_{ks} = 1,\ k \neq i,\ j. \end{cases}$$

В этом случае любое оптимальное по Парето решение системы неравенств

$$\begin{cases} \Delta_i + \Delta_j \le \Phi_{ij} - \Phi_0,\ i,\ j = \overline{1, m}, \\ 0 \le \Delta_i \le \Phi_i - \Phi_0,\ i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

определяет ситуацию равновесия. Эффективность конкурсного механизма можно оценить, определив: $\Delta_{max} = \ max\sum_{i}\Delta_i$. Она равна $K = \dfrac{\Phi_0}{\Phi_0 + \Delta_{max}}$.

Пример 4.5. К трем агентам из примера 4.4 добавим четвертого:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 15 \\ 40 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

Имеем: $\Phi_1 = 35$, $\Phi_2 = 30$, $\Phi_{12} = 40$, $\Phi_0 = 30$,

$$\Delta_1 \le 35 - 30 = 5,\ \Delta_2 \le 30 - 30 = 0.$$

В данном случае, ситуация равновесия:

$$S_{11} = 20,\ S_{21} = 25,\ S_{31} = 40,\ S_{41} = 20;$$
$$S_{21} = 15,\ S_{22} = 15,\ S_{32} = 20,\ S_{42} = 40.$$

Существуют два варианта назначения операций. В первом варианте первую операцию получает первый агент, а во втором – четвертый агент. Вторую операцию в первом варианте получает второй агент, а во втором – первый агент.

Эффективность конкурсного механизма при увеличении участников конкурса до четырех увеличивается до $K = 0,84 > 0,6$.

Таким образом, рассмотренные в настоящем разделе механизмы назначения позволяют эффективно решать задачи определения оптимального состава участников ОС (например, исполнителей проекта).

Глава 5

МЕХАНИЗМЫ КОНТРОЛЯ

Настоящая глава содержит описание механизмов контроля, среди которых можно выделить механизмы получения и обработки информации об управляемой системе: механизмы комплексного оценивания (раздел 5.1), механизмы согласия (раздел 5.2) и многоканальные механизмы (раздел 5.3); а также механизмы оперативного управления, позволяющие центру своевременно корректировать управляющие воздействия в зависимости от состояния управляемой системы и внешних возмущений: механизмы дополнительных соглашений (раздел 5.4).

5.1. Механизмы комплексного оценивания

Для выработки эффективных управляющих воздействий, начиная с этапа целеполагания и заканчивая этапом оперативного управления, управляющему органу необходимо обладать достаточной информацией о поведении управляемых субъектов, в частности – относительно результатов их деятельности. В сложных системах (многоэлементных, многоуровневых, деятельность которых описывается многими критериями) в силу ограниченности возможностей управляющего органа по переработке информации или в силу отсутствия детальной информации целесообразно использование *механизмов комплексного оценивания*, которые позволяют осуществлять свертку показателей, то есть агрегировать информацию о результатах деятельности отдельных элементов системы.

Большие системы, включающие значительное число элементов, имеют, как правило, сложную иерархическую структуру. Результат деятельности системы в целом сложным образом зависит от действий всех ее элементов. Что понимать под успешным функционированием системы, по каким критериям ее оценивать?

Для успешного функционирования системы в целом, как правило, необходимо решить ряд задач (обеспечить успешное функционирование подсистем более низкого уровня). Решение этих задач требует решения еще более частных задач и т. д.

Последовательно детализируя структуру задач системы, получим дерево, которое называют *деревом целей*. Корневой его вершиной будет агрегированный показатель качества функционирования системы в целом, висячими вершинами – показатели деятельности отдельных структурных подразделений, агентов и т. д. Степень достижения каждой из целей (вершины построенного дерева) будем оценивать по некоторой дискретной шкале.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть проект заключается в развитии образовательного учреждения (ОУ). В качестве комплексного показателя выберем «уровень развития ОУ», который определяется «качеством образования» и «экономическим состоянием элементов ОУ». В качестве последних могут выступать, например, его филиалы. Предположим, что качество образования определяется критериями «качество общего образования» и «качество специального образования».

Соответствующее данному примеру[54] дерево изображено на рисунке 5.1.

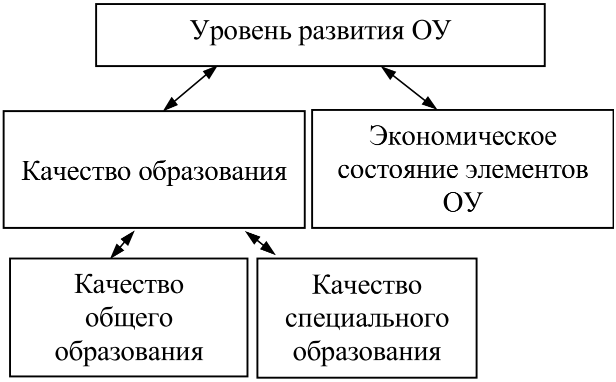


Рис. 5.1. *Дерево целей образовательного учреждения*

Таким образом, мы описали функционирование ОУ в виде дерева целей, степень достижения которых оценивается по некоторой дискретной шкале (см. ниже). Для определения оценки на некотором уровне необходимо знать правила ее получения из оценок более низкого уровня; оценки самого нижнего уровня определяются экспертно или в соответствии с некоторой заранее установленной процедурой «перевода» имеющейся количественной или качественной информации в дискретную шкалу. Таким образом, первая задача – определение правила агрегирования оценок.

Для достижения определенных значений оценок элементами системы ее руководство должно выделить им соответствующие финансовые и другие ресурсы. Следовательно, возникает задача – определить, как затраты на

[54] Отметим, что все используемые в данном примере численные значения выбраны достаточно произвольно и сам пример носит чисто модельный характер, не претендуя на полное описание какого-либо реального ОУ.

реорганизацию ОУ в целом зависят от затрат элементов ОУ в смысле соответствующих оценок.

Система комплексного оценивания. Введем для каждого из критериев (для каждой из вершин дерева целей) дискретную шкалу. Каждому из значений этой порядковой шкалы поставим в соответствие числа 1, 2, ... Емкость шкалы ничем не ограничена и число различных оценок-градаций может выбираться, во-первых, с учетом специфики ОУ и показателя, а, во-вторых, с учетом того, что с ростом емкости шкалы растет вычислительная сложность оптимизационных задач. Для выбранного нами примера возьмем шкалу, состоящую из четырех возможных значений оценок – плохо (1), удовлетворительно (2), хорошо (3) и отлично (4).

Теперь определим процедуру агрегирования оценок. Пусть оценка по некоторому обобщенному (агрегированному) критерию зависит от оценок по двум (агрегируемым) критериям нижнего уровня. Введем матрицу $A = \|a(i, j)\|$, где $a(i, j)$ – оценка по агрегированному критерию при оценках i и j по агрегируемым критериям. Размерность матрицы и число ее попарно различных элементов определяются соответствующими шкалами. Если для рассматриваемого примера взять матрицы свертки, приведенные на рисунке 5.2, то, например, при получении оценки «хорошо» (3) по критерию К1 – «качество общего образования» и оценки «удовлетворительно» (2) по критерию К2 – «качество специального образования» мы получаем агрегированную оценку «удовлетворительно» по критерию К4 – «качество образования». Если по критерию К3 – «экономическое состояние элементов ОК» была достигнута оценка «отлично», то итоговая оценка по критерию К – «уровень развития ОК» будет – «хорошо» (3).

Качество общего образования (К1) → Качество образования (К4)

4	3	3	3	4
3	2	**2**	3	4
2	2	2	3	3
1	1	1	2	2
	1	2	3	4

Качество специального образования (К2)

Экономическое состояние элементов ОУ (К3) → Уровень развития ОУ (К)

4	2	**3**	4	4
3	2	3	3	3
2	1	2	2	3
1	1	1	2	2
	1	2	3	4

Качество образования (К4)

***Рис. 5.2**. Матрицы свертки*

Возникает естественный вопрос: кто должен выбирать структуру дерева целей, шкалы оценок и формировать матрицы свертки? Предполагается, что указанные параметры выбираются лицами, принимающими решения (ЛПР – руководитель или руководители соответствующего элемента ОУ или органа управления образованием), и/или коллективом экспертов. С одной стороны, система матриц может быть легко модифицирована с учетом изменения приоритетов, а с другой стороны, приходится признать, что такая процедура принципиально не может быть избавлена от субъективизма.

При формировании системы матриц свертки предлагается следовать правилу монотонности: агрегированная оценка, получаемая при увеличении хотя бы одной агрегируемой оценки, должна быть не меньше первоначальной. То есть при движении из левого нижнего угла матрицы вправо или вверх оценки не должны убывать.

Мы описали использование двумерных матриц (бинарных сверток), определяющих процедуру агрегирования оценок двух критериев в одну. Понятно, что, введя трехмерные матрицы или матрицы любой другой конечной размерности, также можно агрегировать любое конечное число оценок, и все излагаемые методы справедливы и для этих случаев. Тем не менее использование именно бинарных сверток позволяет наиболее наглядно отразить структуру предпочтений и приоритетов ЛПР. Так как между двумерным и многомерным случаем нет принципиальных различий, то для простоты будем рассматривать именно двумерный случай.

Анализ затрат. Следующим этапом будет формирование *дерева оценок*. Имея дерево целей и набор логических матриц, для каждой из возможных итоговых оценок определим приводящие к ним наборы оценок для элементов нижнего уровня. Для этого, спускаясь по дереву целей сверху вниз, определяем на каждом уровне, какими комбинациями оценок нижнего уровня может быть получена данная оценка. Для рассматриваемого примера значение К = 4 может быть получено следующими комбинациями оценок по критериям (К1, К2, К3): (4; 4; 4); (3; 4; 4); (4; 1; 4); (4; 2; 4); (4; 3; 4); (3; 3; 4); (2; 3; 4); (2; 4; 4). Такие же деревья строятся и для всех других значений оценок по агрегированному критерию К (итоговых оценок).

Набор оценок нижнего уровня, приводящих к достижению требуемой итоговой комплексной оценки, называют *вариантом развития* или просто вариантом.

Понятно, что, имея деревья оценок и затраты на достижение каждой из оценок нижнего уровня, можно решить задачу минимизации затрат на реализацию той или иной итоговой оценки. Для этого, начиная с самого нижнего уровня дерева оценок, считая заданными затраты на достижение этой фиксированной оценки, двигаясь вверх, определяем вариант минимальной стоимости. Затраты на получение каждой агрегированной оценки считаются как сумма затрат на достижение агрегируемых оценок. Затраты в точке ветвления (когда есть несколько альтернатив) определяются как минимум среди затрат альтернатив, дающих требуемое значение оценки. Вариант минимальной стоимости определяется методом обратного хода (сверху вниз).

Итак, мы описали, как построить систему комплексного оценивания, дерево оценок и определить затраты варианта. Теперь необходимо связать между собой эти величины и исследовать характер их взаимозависимости для того, чтобы получить возможность проводить выбор наилучшего с той или иной точки зрения варианта. Так как мы допустили, что элементы нижнего уровня оцениваемого ОУ или его части независимы, то рассмотрим один из них.

Так как каждый вариант оценивается по критериям качества и затрат, то понятие «оптимальный вариант» неоднозначно и в рамках предложенной модели возникает целый класс оптимизационных задач. Опишем алгоритм поиска допустимых значений качества и затрат.

1. Для каждого возможного изменения оценки элемента нижнего уровня дерева целей определим минимальные затраты (см. выше).

2. Если фонд финансирования ограничен, то среди полученных комбинаций оставляем те, для которых выполнено бюджетное ограничение.

3. Для каждой из допустимых комбинаций финансирования определяем значения суммарных затрат на финансирование и комплексной оценки. В результате получаем множество точек в пространстве «качество × затраты», то есть допустимую область. Каждой из таких точек соответствует допустимый вариант финансирования.

4. Внутри допустимого множества выбираем точку или множество точек, оптимальных с точки зрения, например, максимума оценки качества и так далее (в зависимости от решаемой задачи).

В больших системах вычислительная сложность описанного алгоритма может быть достаточно велика, однако при этом мы охватываем все возможные варианты (то есть производится глобальная оптимизация). На практике целесообразно использовать модификации этого алгоритма, учитывающие специфику конкретной задачи. В качестве иллюстрации рассмотрим метод построения так называемых *напряженных вариантов*.

Напряженным назовем такой вариант развития, что недостижение оценки хотя бы по одному критерию приводит к недостижению требуемого значения комплексной оценки. Для оценки К = 4 напряженным является вариант (К3 = 4; К4 = 3). Соответственно для получения значения оценки К4 = 3 напряженными являются варианты (К1 = 4; К2 = 1) и (К1 = 2; К2 = 3).

Напряженные варианты обладают рядом достоинств. Во-первых, число возможных комбинаций сразу резко ограничивается (для рассматриваемого примера необходимо анализировать уже два варианта, а не восемь). Во-вторых, так как при использовании напряженных вариантов в системе отсутствует «избыточность», в том смысле, что сбой в одном из элементов приводит к срыву всего их комплекса, есть веские основания считать, что напряженные варианты являются вариантами минимальной стоимости (и минимального риска – см. методы учета риска в моделях комплексного оценивания в [1, 14]). Использование напряженных вариантов особенно удобно для решения задачи минимизации величины финансирования, необходимого для достижения требуемого значения комплексной оценки.

В заключение настоящего раздела рассмотрим ***процедуры нечеткого комплексного оценивания*** на следующем условном примере. Предположим, что требуется оценить уровень социально-экономического развития некоторого региона (критерий X – рис. 5.3), который определяется уровнем экономического развития (критерий $X1$) и уровнем социального развития (критерий $X2$). Уровень экономического развития в свою очередь определяется уровнем инвестиций (критерий $X11$) и средней заработной платой (критерий $X12$), а уровень социального развития – уровнем цен (критерий $X21$) и экологической обстановкой (критерий $X22$).

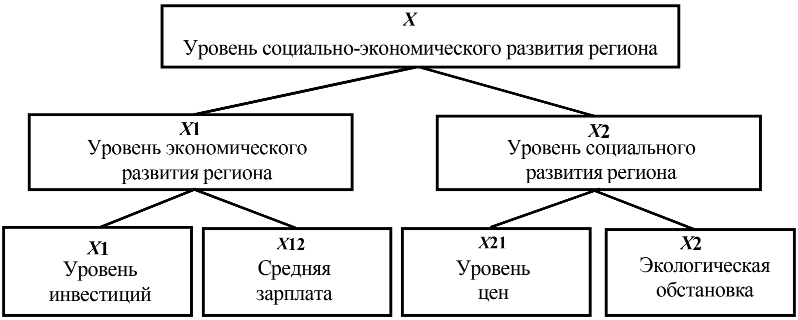


Рис. 5.3. *Дерево критериев*

Пусть оценки по каждому критерию могут принимать конечное число значений (для простоты будем использовать четырехбалльную шкалу: 1 – «плохо», 2 – «удовлетворительно», 3 – «хорошо» и 4 – «отлично»). Требуется, имея оценки по критериям $X11, X12, X21, X22$ нижнего уровня, получить агрегированную оценку по критерию X. В случае бинарного дерева для свертки критериев используют логические матрицы (матрицы свертки), значения элементов которых определяют агрегированную оценку при условии, что оценки по агрегируемым критериям являются номерами соответствующих строк и столбцов (см. выше).

X2					X
1	1	2	2	3	
2	1	2	3	3	
3	2	2	3	4	
4	2	3	3	4	
	1	**2**	**3**	**4**	X1

X12					X1
1	1	1	2	2	
2	1	2	3	3	
3	2	3	3	4	
4	2	3	4	4	
	1	**2**	**3**	**4**	X11

X22					X2
1	1	1	3	3	
2	1	2	3	3	
3	1	2	3	4	
4	2	2	3	4	
	1	**2**	**3**	**4**	X21

Рис. 5.4. *Матрицы свертки*

Если использовать в рассматриваемом примере матрицы свертки, приведенные на рисунке 5.4, то при $X11 = 4$, $X12 = 3$, $X21 = 2$, $X22 = 3$ получим, что $X1 = 4$, $X2 = 2$, а $X = 3$ (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Агрегирование четких оценок

Критерии	Четкие значения
X	3
$X1$	4
$X2$	2
$X11$	4
$X12$	3
$X21$	2
$X22$	3

Обобщением описанной выше системы комплексного оценивания является система нечеткого комплексного оценивания, в которой оценки по каждому из критериев являются в общем случае нечеткими и агрегируются в соответствии с матрицами свертки. Нечетким оценкам могут соответствовать вектора степеней уверенности экспертов в достижении четких оценок. Получаемая в результате агрегирования оценка также является нечеткой и несет в себе больше информации, чем четкие.

Пусть $\tilde{x}_1$ – нечеткая оценка по первому критерию, задаваемая функцией принадлежности $\mu_{\tilde{x}_1}(x_1)$ на универсальном множестве, определяемом соответствующей шкалой (в рассматриваемом примере это множество – $\{1, 2, 3, 4\}$), $\tilde{x}_2$ – нечеткая оценка по второму критерию, задаваемая функцией принадлежности $\mu_{\tilde{x}_2}(x_2)$.

В соответствии с принципом обобщения [59] (см. также Приложение 4) полученная в результате агрегирования по процедуре $f(\cdot,\cdot)$, задаваемой матрицей свертки, нечеткая оценка $\tilde{x}$ будет определяться функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \sup_{\{(x_1,x_2)\,|\,f(x_1,x_2)=x\}} \min\{\mu_{\tilde{x}_1}(x_1),\ \mu_{\tilde{x}_2}(x_2)\}. \quad (1)$$

В предельном случае, то есть когда агрегируются четкие оценки, естественно, агрегированная оценка является четкой и совпадает с получающейся в результате использования четкой процедуры комплексного оценивания с логическими матрицами.

Пусть для рассматриваемого примера нечеткие оценки по критериям нижнего уровня принимают значения, приведенные в таблице 5.2. Используя матрицы свертки, приведенные на рисунке 5.4, и выражение (1), получаем нечеткие оценки по агрегированным критериям (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Агрегирование нечетких оценок

Критерии	Нечеткие значения			
	1	2	3	4
X	0,00	0,20	0,70	0,30
*X*1	0,00	0,10	0,40	0,70
*X*2	0,20	0,90	0,30	0,10
*X*11	0,00	0,20	0,40	0,70
*X*12	0,00	0,10	1,00	0,40
*X*21	0,20	0,90	0,30	0,10
*X*22	0,00	0,30	0,95	0,40

Нечеткие оценки по критериям *X, X*1 и *X*2 для рассматриваемого примера приведены на рисунке 5.5.

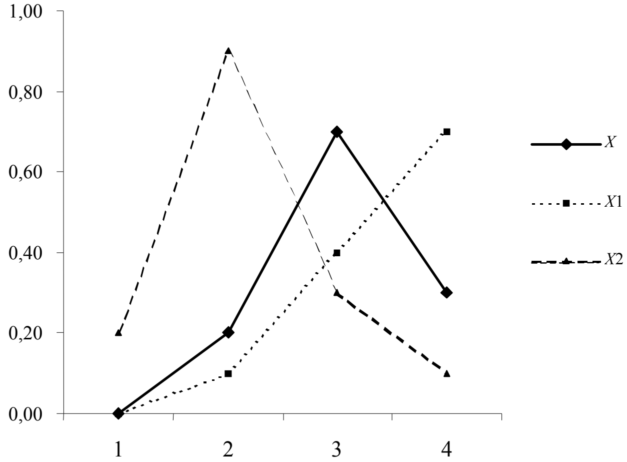


Рис. 5.5. *Нечеткие оценки по критериям X, X1 и X2*

Отметим простоту реализации методов агрегирования (все приводимые в настоящем разделе рисунки и таблицы импортированы из реализованной в *Excel* системы нечеткого комплексного оценивания).

По аналогии с напряженными вариантами в системах четкого комплексного оценивания можно рассматривать нечеткие напряженные варианты. Пусть задан нечеткий вектор оценок агрегированного критерия (в рассматриваемом примере это вектор $X = (0; 0{,}2; 0{,}7; 0{,}3)$). Напряженными назовем минимальные вектора агрегируемых оценок, приводящие к заданному нечеткому вектору агрегированных оценок. Легко убедиться, что в рассматриваемом примере это вектора $X1 = (0; 0; 0{,}2; 0{,}7)$ и $X_2 = (0{,}2; 0{,}7; 0{,}3; 0)$. Напряженному варианту будет соответствовать следующий набор значений оценок нижнего уровня: $X11 = (0; 0; 0{,}2; 0{,}7)$, $X12 = (0; 0; 0{,}7; 0)$, $X21 = (0{,}2; 0{,}7; 0{,}3; 0)$, $X22 = (0; 0; 0{,}7; 0)$. Разности между приведенными в таблице 5.3 значениями оценок и напряженными можно считать резервами по соответствующим критериям, что позволяет ставить и решать задачи оптимизации резервов, затрат и риска.

Таким образом, процедуры комплексного оценивания являются гибким и эффективным инструментом обработки информации, используемой при принятии управленческих решений.

5.2. Механизмы согласия

Рассмотрим механизм экспертного оценивания, в котором результатом коллективного решения является распределение финансирования между агентами. Решение принимается коллегиально *экспертным советом*, члены которого – представители агентов – выступают в качестве экспертов для оценки обоснования объемов финансирования (в качестве экспертов могут привлекаться и независимые эксперты, а не только представители агентов).

Очевидно, что каждый эксперт имеет собственное представление о распределении имеющегося (ограниченного) объема финансирования, и мнения различных экспертов редко совпадают. Как принимать решение в этом случае? Как уйти от ситуации, когда каждый эксперт «тянет одеяло на себя» и может искажать информацию?

Механизм принятия согласованных решений при наличии несовпадающих точек зрения получил название *механизма согласия*.

Недостатки используемых на практике механизмов финансирования, основывающихся на экспертных оценках, очевидны. Как правило, сумма заявок превышает имеющийся ресурс, и на центр ложится тяжесть «урезания» объемов финансирования. Тенденция завышения заявок имеет место и в случае независимых экспертов. Как преодолеть эти негативные явления?

Опишем механизм согласия. Основная идея заключается в декомпозиции процедуры экспертизы, то есть создаются экспертные советы по смежным проблемам, одна из которых является базовой.

Рассмотрим пример, в котором имеются три критерия – «уровень жизни» ($К_1$), «экологическая ситуация» ($К_2$), «социальное развитие» ($К_3$). Выберем в качестве базового, например, уровень социального развития. В этом случае создаются два экспертных совета – каждый для пары критериев. Первый экспертный совет занимается оценкой направлений (критериев) $К_1$ и $К_3$, а второй – $К_2$ и $К_3$. Каждый экспертный совет вырабатывает решение об относительных размерах финансирования каждого из направлений. А именно, во сколько раз финансирование по направлению $К_1$ (соответственно, $К_2$) должно быть больше (или меньше), чем финансирование по базовому направлению $К_3$.

Обозначим соответствующие оценки σ_1 и σ_2. Величина σ_1 (σ_2) свидетельствует о том, что финансирование x_1 (x_2) по направлению $К_1$ ($К_2$) должно быть в σ_1 (σ_2) раз больше, чем финансирование по направлению $К_3$, то есть $\sigma_1 = x_1 / x_3$ ($\sigma_2 = x_2 / x_3$). Очевидно, что $\sigma_i \geq 0,\ i = 1, 2$. На основе этой информации определяется вариант финансирования направлений:

$$x_i = \frac{\sigma_i}{1+\sigma},\ i = \overline{1, 3}, \qquad (1)$$

где $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_3 \equiv 1$. Отметим, что x_i – доля от имеющегося общего объема финансирования. То есть если между направлениями $К_1$, $К_2$ и $К_3$ необходимо распределить R единиц ресурса, то i-е направление получит $x_i R$.

Предложенный механизм обладает рядом достоинств. Во-первых, учитывается мнение самих агентов, входящих в экспертные советы. Во-вторых, выделение базового направления позволяет произвести обмен опытом между агентами. И наконец, в-третьих, что наиболее важно, предложенный механизм согласия защищен от манипулирования. Проиллюстрируем последнее утверждение на следующем примере.

В таблице 5.3 приведены истинные относительные объемы финансирования направлений $К_1$ и $К_2$ относительно базового направления $К_3$.

Таблица 5.3

Экспертные советы	Направления		
	$К_1$	$К_2$	$К_3$
1	$r_{11} = 3$	$r_{12} = 1$	1
2	$r_{21} = 3$	$r_{22} = 4$	1

Для полноты картины мы привели мнения экспертов и по тем вопросам, которые они не оценивают (информация о r_{12} и r_{21}). Видно, что эксперты считают собственные направления гораздо более важными и заслуживающими большего финансирования, чем базовое направление ($r_{11} = 3 > 1$, $r_{21} = 4 > 1$).

Пусть общий объем финансирования равен 100 единицам. Если экспертные советы представят достоверную информацию, то финансирование будет распределено следующим образом:

$$x_1(r_{11}, r_{22}) = \frac{3}{8} \cdot 100 = 37{,}5; \; x_2(r_{11}, r_{22}) = \frac{4}{8} \cdot 100 = 50;$$

$$x_3(r_{11}, r_{22}) = \frac{1}{8} \cdot 100 = 12{,}5.$$

Отметим, что балансовое ограничение выполняется «автоматически» при любых сообщениях ($x_1 + x_2 + x_3 = R$).

С точки зрения первого экспертного совета распределение объемов финансирования должно быть следующим:

$$x_1(r_{11}, r_{12}) = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60; \; x_2(r_{11}, r_{12}) = \frac{1}{5} \cdot 100 = 20;$$

$$x_3(r_{11}, r_{12}) = \frac{1}{5} \cdot 100 = 20.$$

С точки зрения второго экспертного совета распределение объемов должно быть таким:

$$x_1(r_{21}, r_{22}) = \frac{3}{8} \cdot 100 = 37{,}5; \; x_2(r_{21}, r_{22}) = \frac{4}{8} \cdot 100 = 50;$$

$$x_3(r_{21}, r_{22}) = \frac{1}{8} \cdot 100 = 12{,}5.$$

То есть финансирование, принятое при сообщении достоверной информации, полностью совпадает с мнением второго экспертного совета (в данном примере). Первый же совет считает, что направление $К_1$ должно получить больше, $К_2$ – намного меньше, а $К_3$ – чуть больше.

Очевидно, что первый экспертный совет хотел бы увеличить объем финансирования по первому и третьему проектам за счет второго. Посмотрим, может ли он, манипулируя, то есть сообщая $\sigma_1 \neq r_1$, добиться этого.

Пусть, например, первый экспертный совет сообщил завышенную оценку $\sigma_1 = 5$. Тогда финансирование распределится следующим образом:

$$x_1(\sigma_1, r_{22}) = \frac{5}{10} \cdot 100 = 50; \; x_2(\sigma_1, r_{22}) = \frac{4}{10} \cdot 100 = 40;$$

$$x_3(\sigma_1, r_{22}) = \frac{1}{10} \cdot 100 = 10.$$

Вряд ли такое распределение финансирования удовлетворит представителей третьего направления. Да и первый экспертный совет вряд ли останется доволен, ведь он хотел увеличить и свое финансирование, и финансирование третьего направления (необходимо подчеркнуть, что «забота» о базовом направлении как раз и определяет неманипулируемость механизма).

Рассмотрим другой вариант манипулирования. Пусть первый экспертный совет занижает оценку и сообщает $\sigma_1 = 1$. Тогда:

$$x_1(\sigma_1, r_{22}) = \frac{1}{6} \cdot 100 = 16,(6); \;\; x_2(\sigma_1, r_{22}) = \frac{4}{6} \cdot 100 = 66,(6);$$

$$x_3(\sigma_1, r_{22}) = \frac{1}{6} \cdot 100 = 16,(6).$$

При этом первый экспертный совет увеличил финансирование третьего направления, но зато увеличил финансирование второго и, что самое главное, уменьшил свое финансирование.

Мы рассмотрели случай, когда $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_1 = 5$. Можно показать, что, сообщая $\sigma_1 \neq r_1$, первый экспертный совет не может одновременно увеличить финансирование первого и третьего направлений за счет второго.

Теперь определим целевую функцию i-го экспертного совета:

$$f_i(r_i, x_i, x_j) = \min_j \left\{ \frac{x_j}{r_{ij}} \right\}, \; j = \overline{1,3}; \; i = 1, 2 . \qquad (2)$$

Если каждый экспертный совет заинтересован в максимизации своей целевой функции, то, например, для первого экспертного совета в рассматриваемом примере $f_1 = min \; \{x_1 / r_{11}; x_2 / r_{12}; x_3 / r_{13})$ достигает максимума именно при сообщении $\sigma_1 \equiv r_1$.

Структура целевой функции (2) такова, что каждый экспертный совет стремится минимизировать наибольшее из отклонений реального и «справедливого» с его точки зрения объема финансирования. Можно показать, что сообщение достоверной информации максимизирует целевые функции типа (2) (является доминантной стратегией) в случае произвольного числа экспертов при достаточно общих предположениях.

Одно из предположений (*гипотеза достаточной заинтересованности* (ДЗ)), в частности, заключается в том, что оценка каждого экспертного совета по своему направлению превышает истинные оценки этого направления другими экспертами. Иначе говоря, каждый из экспертов считает свое направление наиболее важным. В рассмотренном выше примере эта гипотеза была выполнена ($r_{11} = 3 > r_{12} = 1$; $r_{22} = 4 > r_{21} = 3$). Таким образом, если эксперты имеют целевые функции типа (2), то механизм согласия является неманипулируемым. Если направлений всего три, то всегда можно выбрать базовое так, что гипотеза ДЗ выполнена [33].

В случае, когда экспертных советов (направлений) больше чем три, целесообразно структурировать экспертные советы в иерархию по «тройкам». Как разбить экспертные советы на «тройки», чтобы в них попали эксперты, заинтересованные друг в друге (а целевая функция вида (2) подразумевает такую заинтересованность), – в этом заключается искусство центра.

5.3. Многоканальные механизмы

В последнее время широкое распространение получили механизмы *поддержки принятия решений* (ППР), отличительной особенностью которых является формирование решений (рекомендаций) в нескольких параллельных блоках (каналах) формирования решений «советниками» – экспертами. Такие механизмы получили название *многоканальных*. Причиной их достаточно высокой эффективности является взаимодействие каналов, то есть взаимодействие экспертов. Как побудить экспертов повышать эффективность предлагаемых решений, как на основании их советов выработать наилучшее управленческое решение? Одним из способов является применение систем сравнительных оценок эффективностей решений каналов и их стимулирование по результатам этого сравнения. В настоящем разделе рассматривается несколько моделей многоканальных механизмов на примере экспертизы.

Многоканальные механизмы, использующие модели управляемой системы. Если центр – организатор экспертизы, лицо, принимающее решения, – хочет стимулировать экспертов на основании эффективности предлагаемых ими решений, то, естественно, ему необходимо знать, а что было бы, если бы было использовано управление (решение), предложенное каждым конкретным экспертом? Проводить эксперименты и смотреть, как ведет себя управляемая система при различных управлениях, в большинстве случаев не представляется возможным. Значит необходимо использовать модель управляемой системы. Рассмотрим следующий пример.

Пусть эффективность $Э$ принятого управленческого решения U зависит от параметров модели и окружающей среды q, не известных априори центру. Предположим, что $Э = U - U^2/2\,q$. Если центр использует решение U_0 и фактическая эффективность оказывается равной $Э_0$, то можно оценить реализовавшееся значение неизвестного параметра: $q = U_0^2/2\,(U_0 - Э_0)$. Пусть имеются n экспертов, тогда, подставляя эту оценку в исходное выражение для эффективности, получим формулу, определяющую, какова была бы эффективность i-го эксперта $Э_i$, если бы использовалось предложенное им управление U_i:

$$Э_i(U_i) = U_i - \frac{U_i^2}{U_0^2}\left(U_0 - Э_0\right),\ i = \overline{1, n}\,.$$

Как следует стимулировать экспертов? Наверное, на основании оценок $Э_i(U_i)$ (отметим, что если $U_i = U_0$, то $Э_i = Э_0$), то есть чем выше эффективность предложенного решения, тем больше должно быть вознаграждение эксперта. Введем $Э_m = \max\limits_{i=\overline{1,n}} Э_i$ – *нормативную эффективность*, равную максимальной эффективности. В простейшем случае стимулирование центра зависит от эффективности $Э_0$ принятого им решения U_0 и нормативной эффективности:

$$f_0 = Э_0 - \begin{cases} \alpha(Э_0 - Э_m), \text{ если } Э_0 \geq Э_m \\ \beta(Э_m - Э_0), \text{ если } Э_0 \leq Э_m \end{cases}, \ 0 < \alpha < 1, \ \beta > 0.$$

То есть если решение центра оказалось лучше наиболее эффективного решения, предложенного экспертами ($Э_0 \geq Э_m$), то центр поощряется пропорционально величине ($Э_0 - Э_m$). Если эффективность $Э_0$ оказалась ниже эффективности решений, предложенных экспертами, то поощрение пропорционально ($Э_m - Э_0$).

Стимулирование самих экспертов производится аналогичным образом на основе сравнения $Э_i$ и $Э_0$ или $Э_i$ и $Э_m$:

$$f_i = Э_i - \begin{cases} \alpha(Э_i - Э_0), \text{ если } Э_i \geq Э_0 \\ \beta(Э_0 - Э_i), \text{ если } Э_i \leq Э_0 \end{cases}, \ 0 < \alpha < 1, \ \beta > 0.$$

Какими следует выбирать коэффициенты α и β в функциях стимулирования? Приведем следующие рассуждения. Не исключена ситуация, в которой центр, имея возможность влиять на фактическую эффективность $Э_0$ принятого им решения U_0, сознательно уменьшит эту эффективность для того, чтобы изменить соответственно оценки эффективностей каналов (экспертов). Когда может возникнуть такая ситуация? В большинстве моделей управляемых систем существует монотонная зависимость между эффективностью $Э_0$ и эффективностью каналов. В рассматриваемом примере (см. формулу выше) чем больше $Э_0$, тем больше $Э_i$. Если эффективность решения центра $Э_0$ выше нормативной ($Э_0 \geq Э_m$), то целевая функция центра $f_0 = (1-\alpha)Э_0 + \alpha Э_m$ является возрастающей функцией $Э_0$ и, следовательно, центр не заинтересован в занижении $Э_0$. Проблемы появляются, если $Э_0 < Э_m$, то есть если решение центра менее эффективно, чем решения экспертов. В этом случае

$$f_0 = (1+\beta)Э_0 - \beta Э_m,$$

и центр может быть заинтересован в снижении эффективности каналов $Э_i$, а соответственно, и в снижении $Э_m$.

В рассматриваемом примере в этом случае целевая функция центра имеет вид:

$$f_0 = \beta U_m(\frac{U_m}{U_0} - 1) + Э_0(1 + \beta - \beta\frac{U_m^2}{U_0^2}).$$

Если $U_m > U_0$ ($Э_0 < Э_m$) и β достаточно велико, то центр заинтересован в снижении фактической эффективности $Э_0$ (без изменения U_0). Для того чтобы исключить такую заинтересованность, β не следует брать слишком большим, а именно $\beta < \frac{U_0^2}{(U_m^2 - U_0^2)}$.

Большие штрафы (большая величина β) в случае, если решение центра хуже нормативного, нежелательны также, с той точки зрения, что центр, не желая «ошибиться», может просто предпочесть выбрать одно из решений, предложенных экспертами. Понятно, что это приведет к нежелательной потере самостоятельности и инициативности центра.

Автономные механизмы экспертизы. В предыдущем разделе стимулирование экспертов осуществлялось на основе сравнения эффективностей предлагаемых решений, оцениваемых с помощью модели управляемой системы. Однако иногда управляемая система настолько сложна, что построить ее адекватную модель достаточно трудно. Как поступить в этой ситуации центру? Одним из способов является «переложить всю тяжесть» по решению задачи управления на экспертов, получить от них одно согласованное решение, а не несколько, и использовать именно его. Рассмотрим, в каких условиях можно побудить экспертов работать автономно, согласовывать решения и предлагать центру наилучшее решение.

Пусть от экспертов требуется предложить решение, как поступить в некоторой конкретной ситуации. В силу различного образования, опыта и так далее одни эксперты могут оказаться более квалифицированными в одной области, другие – в другой, в зависимости от ситуации, для которой необходимо предлагать решение (то есть в зависимости от области возможных ситуаций). На рисунке 5.11 качественно изображена зависимость эффективности решений $Э_i(x)$, которые может предложить i-й эксперт, $i=\overline{1,n}$, от ситуации x.

Центр хотел бы, чтобы в любой ситуации предлагаемое экспертами решение было наиболее эффективным, то есть желательно, чтобы эффективность коллектива экспертов имела вид:

$$Э(x) = \max_{i=\overline{1,n}}\{Э_i(x)\}$$

(графиком является огибающая кривых на рисунке 5.6).

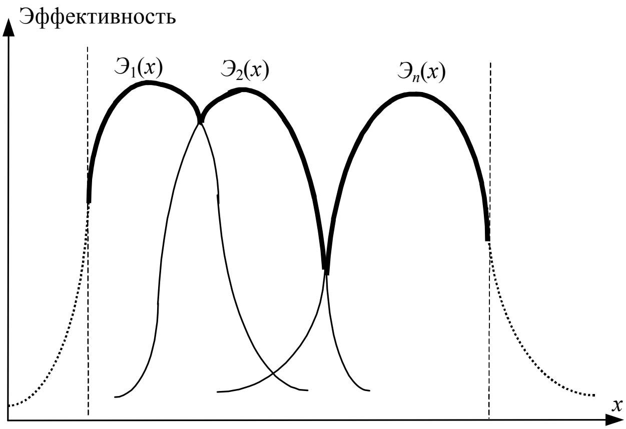


Рис. 5.6. *Эффективности решений*

Предположим, что каждый из экспертов знает собственную эффективность $Э_i(x)$ и не знает эффективностей остальных экспертов (следовательно, каждый может искажать информацию), но все эксперты точно идентифицируют ситуацию x. Как центр может побудить экспертов предпочесть в любой ситуации наиболее эффективное решение?

Рассмотрим следующий механизм. Центр предлагает экспертам: «Пусть каждый из вас сообщает (остальным экспертам) пару ($U_i(x)$, $Э_i(x)$), где U_i – предлагаемое управление в ситуации x, $Э_i(x)$ – эффективность этого решения (i-й эксперт точно знает истинную эффективность того или иного решения, которое он предлагает в каждой ситуации). После этого вы сообщаете мне решение, имеющее в сложившейся ситуации наибольшую эффективность, а я стимулирую вас пропорционально эффективности этого предложенного решения».

Такой механизм действительно прост – эксперты сами между собой решают, какое решение предложить центру, то есть работают автономно. Возникает закономерный вопрос: а будут ли эксперты сообщать правду? Покажем, что сообщение достоверной информации в этом механизме является равновесием Нэша.

Если все эксперты сказали правду, то есть сообщили ($Э_1(x)$, ..., $Э_n(x)$), то центру предложат решение $Э(x) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{Э_i(x)\}$, и если стимулирование экспертов пропорционально $Э(x)$, то целевая функция i-го эксперта имеет вид:

$$f_i(Э_1(x),...,Э_n(x)) = \alpha_i - \beta_i \left| Э(x) - \tilde{Э}(x) \right|, i = \overline{1,n},\ \ 0 < \sum_{i=1}^{n} \beta_i < 1,$$

где α_i – постоянная составляющая, а $\tilde{Э}(x)$ – истинное (реализовавшееся) значение эффективности.

Предположим теперь, что j-й эксперт пытается исказить информацию, то есть сообщить $\tilde{Э}_j(x) \neq Э_j(x)$ (фактически он объявляет, что эффективность его решения в ситуации x равна $\tilde{Э}_j(x)$). Если $Э_j(x) = Э(x)$, то, так как j-й эксперт знает, что истинная эффективность $\tilde{Э}(x) = Э_j(x)$, то сообщая $\tilde{Э}_j(x) > Э_j(x)$ или $\tilde{Э}_j(x) < Э_j(x)$, он уменьшает значение своей целевой функции. Если $Э_j(x) \neq Э(x)$, то есть другой эксперт с номером, например k, предложил решение с большей эффективностью $Э_k(x) = Э(x) > Э_j(x)$, то, сообщая $\tilde{Э}_j(x) < Э_j(x)$, j-й эксперт не изменит итогового решения (а следовательно, и значения своей целевой функции), а сообщая $\tilde{Э}_j(x) > Э_j(x)$, то есть добиваясь того, что $Э(x) = \tilde{Э}_j(x)$, он только уменьшит свой выигрыш, так как $\tilde{Э}(x) = Э_j(x) < \tilde{Э}_j(x)$. То есть мы показали, что сообщение достоверной информации – равновесие Нэша.

Достоинством автономных механизмов экспертизы является, во-первых, «разгрузка» центра, который получает сразу оптимальное (с точки зрения экспертов) решение, и, во-вторых, его неманипулируемость. При использовании автономных механизмов центр должен быть уверен, что эксперты точно идентифицируют ситуацию и не ошибаются при прогнозе эффективности своего решения.

Многоканальная структура системы управления как способ снижения неопределенности. Предположим, что эффективность управления $Э(u)$ есть функция неизвестного центру параметра q: $Э(u) = u - u^2/2q$. Пусть центру известно, что параметр q принадлежит отрезку $[a; b]$, то есть существует неопределенность, обусловленная незнанием истинного значения параметра. Какое управление следует выбрать центру? Возможны различные подходы к решению этой задачи.

Первый подход заключается в том, что центр может выбирать управление, рассчитывая на наихудшее для него значение q (использовать метод максимального гарантированного результата). Действительно, если $a > 0$, то в наихудшей ситуации $q = a$. Выбирая $u = a$, центр максимизирует эффективность в этой ситуации: $u = a$ и обеспечивает значение эффективности, равное $Э(a) = a/2$. В ряде случаев такой подход может оказаться слишком пессимистичным.

Если известно распределение вероятностей реализации параметра q, то центр может выбором управления максимизировать ожидаемое значение эффективности. Так, например, если q равномерно распределен на $[a; b]$ (вероятности любых значений из этого отрезка одинаковы), то ожидаемое значение целевой функции равно $\left[u - \frac{u^2}{2(b-a)} ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$. Оно достигает максимума, равного $\frac{b-a}{2\,ln\frac{b}{a}}$, в точке $u = u^* = \frac{b-a}{ln\frac{b}{a}}$.

Если распределение вероятностей неизвестно центру или метод максимального гарантированного результата дает слишком заниженное значение эффективности, можно использовать процедуры экспертного оценивания для получения дополнительной информации (снижения неопределенности) о параметре q. Если эксперты обладают большей информацией о параметре q, чем центр, то можно попросить их сообщать непосредственно оценки параметра q. Соответствующая модель активной экспертизы рассматривалась выше (в этом случае $d = a$, $D = b$ и возможно построение неманипулируемого механизма).

Альтернативой является использование многоканальных механизмов. Если центру известно, что зависимость эффективности управленческого решения, предлагаемого экспертами, имеет вид $Э_i(u_i) = u_i - (u_i^2 / 2q)$, и если центр уверен, что эксперт обладает более полной информацией о параметре q, то он может попросить экспертов сообщить не оценки неизвестного параметра, а то, какие управления выбрали бы они сами. Предположим, что центр получил от экспертов информацию об $\{u_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Теперь он может поставить себя на место экспертов и решить, почему они выбрали те или иные значения u_i. Если эксперты выбором u_i стремятся максимизировать свою целевую функцию при имеющейся у них информации о параметре q (то есть $u_i = u_i(q)$), то, зная вид целевых функций экспертов, центр может на основании выбранных экспертами управлений u_i «восстановить» информацию о q. Отметим, что если принятое центром решение затрагивает интересы экспертов, то необходимо учитывать дальновидность последних, которая может приводить к искажению информации.

Максимум целевой функции эксперта (при фиксированном q) достигается при $u = q$, точнее $u_i = q_i$, $i = \overline{1, n}$, так как каждый эксперт может иметь свое представление q_i о значении параметра q. Значит, зная $Э_i(q) = q/2$, то есть зная $u_i = q_i$, центр получает информацию о $(q_1, q_2, ..., q_n)$. Эта дополнительная информация может позволить снизить неопределенность и принять более эффективное решение.

Таким образом, используя многоканальный механизм, центр может провести «косвенную» экспертизу (оценить q не непосредственно, а на основании косвенной информации), предсказав поведение экспертов, и снизить неопределенность за счет использования этого механизма.

5.4. Механизмы дополнительных соглашений

Оперативное принятие управленческих решений является предметом многих исследований в теории управления организационными системами: динамические модели управления ОС [22, 29, 51], механизмы оперативного управления проектами [29, 30], включающие компенсационные механизмы [5, 14], механизмы опережающего самоконтроля [14] и др. В настоящем разделе идеология анализа и синтеза механизмов оперативного управления иллюстрируется на примере механизмов дополнительных соглашений [35].

На практике распространены ситуации, когда взаимовыгодные для сторон параметры заключенного договора становятся невыгодными в силу изменившихся обстоятельств, внешних условий, ошибок прогнозирования и планирования и т. д. Тогда у одной (или одновременно у обоих) сторон возникает желание изменить параметры договора – внести дополнительные соглашения. Такую ситуацию называют *перезаключением договора* (пересоглашением контракта).

В соответствии с подходом, предложенным в [51], примем, что пересоглашение контракта происходит в том и только в том случае, если каждому из участников системы (заказчику – центру – и всем исполнителям – агентам) новый контракт обеспечивает не меньшие значения полезностей (целевых функций), чем старый контракт. Иначе говоря, каждый из участников обладает правом вето: если при новом контракте он получает полезность строго меньше, чем при старом, то он имеет право блокировать пересоглашение, и старый контракт остается в силе. Отметим, что так как заказчик выражает интересы системы в целом (эффективность управления определяется через его целевую функцию – см. выше), то приведенное выше условие пересоглашения означает следующее: если пересоглашение произошло, то эффективность управления возросла (не уменьшилась). Таким образом, задача исследования условий пересоглашения контракта свелась к задаче определения условий того, что с учетом вновь поступившей информации возможно синтезировать контракт (найти параметры нового договора), обеспечивающий всем участникам не меньшие полезности.

В литературе по теории контрактов [48, 68] различают контракты с обязательствами и контракты без обязательств. В первом случае, если кто-то из участников нарушает условия контракта, то на него накладываются достаточно сильные штрафы (сильные настолько, что нарушение становится невыгодным). Поэтому в контрактах с обязательствами при рассмотрении механизмов пересоглашения необходимо сравнивать две ситуации: когда заказчик и исполнитель следуют условиям первоначального контракта и когда они (оба!) следуют условиям нового контракта. В контрактах без обязательств участники могут нарушать условия первоначального контракта, выбирая стратегии, которые являются оптимальными с учетом вновь поступившей информации. Ниже мы ограничимся рассмотрением контрактов с обязательствами.

Пусть функции дохода заказчика и затрат исполнителя зависят от неопределенных параметров – соответственно $\lambda \geq 0$ и $r > 0$: $H(y, \lambda)$ и $c(y, r)$. Содержательно λ может интерпретироваться как внешняя цена продукции, производимой исполнителем, r – как эффективность деятельности исполнителя. Допустим, что $\forall\ \lambda \geq 0$ $H(0, \lambda) = 0$ и $\forall\ r > 0$ $c(0, r) = 0$.

Таким образом, целевые функции участников системы можно записать в виде (см. также модели стимулирования в разделе 2.1):

$$\Phi(\sigma(\cdot), y, \lambda) = H(y, \lambda) - \sigma(y), \qquad (1)$$

$$f(\sigma(\cdot), y, r) = \sigma(y) - c(y, r). \qquad (2)$$

Пусть договор заключался при значениях λ_0 и r_0 (фактических или прогнозируемых). Вычислим оптимальное с точки зрения заказчика действие исполнителя:

$$x^*(\lambda_0, r_0) = arg \max_{y \in A} [H(y, \lambda_0) - c(y, r_0)]. \qquad (3)$$

Тогда оптимальные параметры исходного договора[55] (в рамках компенсаторной системы стимулирования – см. раздел 2.1) – действие исполнителя $x^*(\lambda_0, r_0)$ и вознаграждение $c(x^*(\lambda_0, r_0), r_0)$. В рамках исходного договора полезность заказчика равна:

$$\Delta(\lambda_0, r_0) = H(x^*(\lambda_0, r_0), \lambda_0) - c(x^*(\lambda_0, r_0), r_0), \qquad (4)$$

а полезность исполнителя равна нулю (в силу принципа компенсации затрат).

Фактические значения параметров λ и r могут отличаться от прогнозируемых λ_0 и r_0, что может приводить к тому, что фактические полезности заказчика и исполнителя могут отличаться от прогнозируемых.

Определим следующие величины:

$$\Delta(\lambda_0, \lambda, r_0, r) = H(x^*(\lambda_0, r_0), \lambda) - c(x^*(\lambda_0, r_0), r_0), \qquad (5)$$

$$\delta(\lambda_0, \lambda, r_0, r) = c(x^*(\lambda_0, r_0), r_0) - c(x^*(\lambda_0, r_0), r), \qquad (6)$$

$$\Delta_0(\lambda, r) = H(x^*(\lambda, r), \lambda) - c(x^*(\lambda, r), r). \qquad (7)$$

Выражение (5) определяет полезность заказчика при изменившихся условиях в рамках исходного договора, выражение (6) –полезность исполнителя при изменившихся условиях в рамках исходного договора, выражение (7) – полезность заказчика в новых условиях (при новом контракте, оптимальном в изменившихся условиях).

[55] Напомним, что в рамках рассматриваемых теоретико-игровых моделей контракт (договор) определяется парой – («действие исполнителя»; «вознаграждение со стороны заказчика»).

Предположим, что функция затрат исполнителя монотонно убывает с ростом параметра r. Рассмотрим два случая.

В первом случае $r < r_0$. Тогда полезность исполнителя $\delta(\lambda_0, \lambda, r_0, r) < 0$, и для него пересмотр условий договора выгоден. Для заказчика заключение договора с параметрами $(x^*(\lambda, r);\ c(x^*(\lambda, r), r))$ выгодно, если выполнено следующее неравенство:

$$\Delta_0(\lambda, r) \geq \Delta(\lambda_0, \lambda, r_0, r). \qquad (8)$$

Во втором случае $r > r_0$. Тогда полезность исполнителя $\delta(\lambda_0, \lambda, r_0, r) > 0$, и для него пересмотр условий договора выгоден только если он при новых условиях договора получит полезность не менее $\delta(\lambda_0, \lambda, r_0, r)$. Тогда условие выгодности перезаключения договора для заказчика можно записать в виде:

$$\Delta_0(\lambda, r) - \delta(\lambda_0, \lambda, r_0, r) \geq \Delta(\lambda_0, \lambda, r_0, r). \qquad (9)$$

Таким образом, мы показали, что если функция затрат исполнителя монотонно убывает с ростом параметра r, то при $r < r_0$ условием пересоглашения является выполнение неравенства (8), а при $r > r_0$ условием пересоглашения является выполнение неравенства (9).

В заключение настоящего подраздела рассмотрим пример, в котором функция дохода заказчика равна $H(y, \lambda) = \lambda\, y$, $\lambda \geq 0$, а функция затрат исполнителя – $c(y, r) = y^2/2\, r$, $r > 0$.

Тогда $y_0 = \lambda_0\, r_0$ – оптимальное с точки зрения заказчика действие исполнителя при параметрах $(\lambda_0; r_0)$. Платеж в исходном договоре равен $(\lambda_0)^2\, r_0/2$. Заказчик при этом рассчитывает получить полезность $\Phi_0(\lambda_0; r_0) = (\lambda_0)^2\, r_0/2$, а исполнителю гарантируется нулевая полезность.

Если значения параметров оказываются равными $(\lambda; r)$, то при $r \geq r_0$ в рамках исходного договора заказчик получает полезность $\Phi(\lambda_0; \lambda; r_0; r) = \lambda_0\, r_0\, (\lambda - \lambda_0/2)$, а исполнитель – $f(\lambda_0; \lambda; r_0; r) = (\lambda_0)^2\, r_0\, (r - r_0)/2\, r$. Если же $r < r_0$, то в рамках исходного договора полезность исполнителя отрицательна и он откажется работать, выбрав нулевое действие.

Если заключается новый контракт с действием $y = \lambda\, r$ и платежом $\lambda^2\, r/2$, то полезность заказчика равна $\Phi(\lambda; r) = \lambda^2\, r/2$, а полезность исполнителя – нулю. Рассмотрим возможные варианты.

Если $r < r_0$, то исполнитель безразличен к перезаключению контракта, так как при любых значениях параметра λ он получает нулевую полезность. Центру перезаключение выгодно, если выполнено следующее условие: $\Phi(\lambda; r) \geq \Phi(\lambda_0; \lambda; r_0; r)$, то есть должно иметь место $\lambda^2\, r - 2\,\lambda\,\lambda_0\, r_0 + r_0 (\lambda_0)^2 \geq 0$.

Если $r < r_0$, то $f(\lambda_0; \lambda; r_0; r) = (\lambda_0)^2\, r_0\, (r - r_0)/2r \leq 0$, и исполнитель, будет выбирать нулевое действие, если центр не предложит ему договор, в котором пообещает вознаграждение $\lambda^2\, r/2 + (\lambda_0)^2\, r_0\, (r - r_0)/2\, r$ за выбор действия $y = \lambda\, r$. Легко проверить, что сделать такое предложение заказчику всегда выгодно, так как

$$\Phi(\lambda_0; \lambda; r_0; r) = \lambda_0\, r_0\, (\lambda - \lambda_0/2) \geq \lambda^2\, r/2 - (\lambda_0)^2\, r_0\, (r - r_0)/2r.$$

Итак, перезаключение договора произойдет (так как оно будет выгодно обеим сторонам, если при $r < r_0$ выполнено условие

$$\lambda^2\, r - 2\,\lambda\,\lambda_0\, r_0 + r_0\, (\lambda_0)^2 \geq 0.$$

Область значений параметров λ и r, в которой возможно пересоглашение договора (заключение дополнительных соглашений) при начальных условиях $\lambda_0 = 8$, $r_0 = 8$, заштрихована на рисунке 5.7.

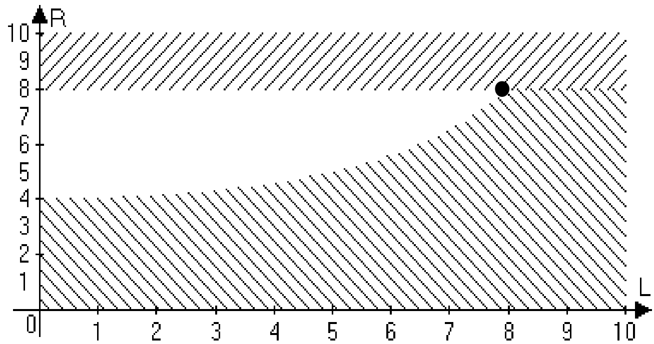


Рис. 5.7. *Область значений параметров λ и r, в которой возможно заключение дополнительных соглашений*

Таким образом, в настоящем разделе описана модель пересоглашения договоров (заключения дополнительных соглашений) в системе с одним заказчиком и одним исполнителем. Полученные результаты свидетельствуют, что если пересоглашение возможно, то следует пересматривать условия контракта. Анализ показывает, что пересоглашение эффективно в широком классе систем, поэтому стремление к его использованию на практике (при соответствующем анализе условий взаимовыгодности) оправданно и целесообразно.

Глава 6

МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ СОСТАВОМ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

В настоящей главе рассматриваются модели и методы управления составом организационных систем – набор персонала, увольнение и т. д. Вне рассмотрения остаются *задачи о назначении* (распределении агентов по должностям и работам), а также *задачи развития* (*обучения*) *персонала*. Соответствующие модели можно найти в [22, 37] и [2, 28].

Классификация задач управления составом. Проведем краткий обзор постановок и результатов решения задач оптимизации состава ОС.

В большинстве работ по теории управления ОС используется предположение, что состав участников системы (далее для краткости – *состав*), то есть набор управляющих органов – центров – и управляемых субъектов – агентов – фиксирован. Если известно решение задачи управления для фиксированного состава (см. главы 2–5), то появляется возможность рассмотрения задачи управления составом ОС, то есть задачи определения оптимального (в оговариваемом ниже смысле) набора агентов и центров, которых следует включить в систему.

Перечислим основные известные подходы к решению задач управления составом.

В теории контрактов исследовались модели определения оптимального числа работников (в основном однородных) при ограничениях согласованности стимулирования и резервной заработной платы [47, 48].

В рамках экономики труда основной результат, определяющий оптимальное количество работников, отражает равенство производимого ими предельного продукта (предельной производительности) и предельных затрат на их привлечение и удержание. Количество дополнительной продукции (дохода), которое получает фирма, нанимая одного дополнительного (сверх уже работающих) работника (единицу труда), называется *предельным продуктом труда*. Предельные издержки есть затраты центра на стимулирование при приеме на работу дополнительного работника. Условие максимизации прибыли (разности между доходом центра и его затратами на стимулирование) требует, чтобы прибыль была максимальна. Для этого следует изменять число занятых (увеличивать, если предельный доход превышает предельные издержки, и уменьшать в противном случае) до тех пор, пока предельный доход не будет равен предельным издержкам [32, 47].

В экономике организаций принят следующий общий подход к определению оптимального размера организации (см. подробное обсуждение и ссылки в [36]). С одной стороны, существует рынок – как система обмена прав собственности. С другой стороны, экономические агенты объединяются в организации, взаимодействующие на рынке. Объяснением существования экономических организаций служит необходимость компромисса между трансакционными и организационными издержками, которые определяются «затратами на координацию» внутри организации, которые растут с увеличением ее размеров.

Трансакционные издержки препятствуют рынку заместить собой организацию, а организационные издержки препятствуют организации заместить собой рынок. Основная идея (качественная), используемая в экономике организаций при обсуждении задач формирования состава, заключается в том, что так как и трансакционные, и организационные издержки зависят от размера организации и ее структуры, то теоретически должны существовать оптимальные параметры организации, при которых достигается уравновешивание упомянутых тенденций замещения (см. также девятую главу настоящей работы).

Обсудим теперь кратко результаты, полученные в рамках теории активных систем.

Впервые в теории активных систем задачи формирования состава рассматривались в [5] для случая назначения проектов. Вообще, задача о назначении (с неизвестными центру и сообщаемыми ему агентами параметрами эффективности их деятельности на различных должностях) неоднократно привлекала внимание исследователей, особенно в области управления проектами (см. [13, 14, 33], а также раздел 4.7).

Несколько моделей, в которых определялось оптимальное с точки зрения информационной нагрузки на центр число агентов, которых следует включать в систему, рассматривались в работе [43] при изучении факторов, определяющих эффективность управления многоуровневыми организационными системами.

Широкое распространение в задачах управления ОС нашли методы теории графов. Задачи определения оптимальной последовательности выполнения операций (сокращение производственного цикла, коммерческого цикла, задачи снабжения и др. [11, 13]) также могут рассматриваться как задачи формирования состава.

Наиболее представительным классом механизмов управления ОС, которые могут рассматриваться как задачи формирования состава, являются *конкурсные* и *аукционные* *механизмы*, в которых ресурс или работы распределяются между претендентами на основании упорядочения эффективностей их деятельности. Примерами являются прямые, простые и двухэтапные конкурсы, задачи назначения исполнителей (так называемые сложные конкурсы) и др. (см. разделы 3.5 и 4.7).

Первые систематические постановки задач формирования состава (отметим, что речь идет именно о задачах формирования состава, а не управления составом, так как в большинстве известных моделей речь идет о формировании состава ОС «с нуля») появились недавно (см. монографию [53]). В упомянутой работе выделяются три общих подхода к решению задач формирования состава ОС на основании рассмотрения задач стимулирования. Первый подход заключается в «лобовом» рассмотрении всех возможных комбинаций потенциальных участников ОС. Его достоинство – нахождение оптимального решения, недостаток – высокая вычислительная сложность. Второй подход основывается на методах локальной оптимизации (перебора составов ОС из некоторой окрестности определенного состава). Используемые при этом эвристические методы в общем случае не дают оптимального решения и поэтому требуют оценивания их гарантированной эффективности. И наконец, третий подход заключается в исключении заведомо неэффективных комбинаций агентов на основании анализа специфики задачи. При этом вычислительная сложность резко сокращается, и иногда удается получить точное (оптимальное) решение, но, к сожалению, данный подход применим далеко не всегда, и в каждом конкретном случае возможность его использования требует соответствующего обоснования.

Завершив краткий обзор моделей оптимизации состава ОС, приведем классификацию задач управления составом ОС.

Введем следующие обозначения:

$N_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$ – фактический (начальный) состав ОС, состоящей из n агентов, $|N_0| = n$;

N – конечный состав ОС (результат решения задачи управления составом);

N' – множество потенциальных (фактических и претендентов) участников ОС – универсальное множество: $N \subseteq N'$, $N_0 \subseteq N'$;

$\Delta^+(N, N_0) = N \setminus N_0$ – множество агентов, принятых на работу (включенных в состав ОС);

$\Delta^-(N, N_0) = N_0 \setminus N$ – множество агентов, уволенных с работы (исключенных из состава ОС);

$\Phi(N, N_0)$ – функционал, ставящий в соответствие начальному и конечному составу действительное число – *эффективность управления составом*.

Остановимся на обсуждении природы функционала эффективности управления составом более подробно. Как отмечалось выше, существует задача управления фиксированным составом (рис. 6.1). Ее решением является набор стратегий центра (центров), которые максимизируют эффективность управления, определяемую как гарантированное значение целевой функции центра на множестве решений игры агентов (см. главы 2–5).

Задача формирования состава ОС формулируется как задача поиска допустимого состава, эффективность управления которым была бы максимальной. При этом явно или по умолчанию подразумевается, что ОС как бы формируется заново. Если же речь идет о формировании нового состава для уже существующей ОС, то есть об *оптимизации состава* – переходе от состава N_0 к составу N, то критерий эффективности управления должен зависеть и от начального, и от конечного состава, так как часть увольняемых работников необходимо трудоустраивать, обеспечивать их пособиями и т. д.

Таким образом, из множества задач управления составом ОС можно выделить задачи формирования состава и задачи оптимизации состава (критерий классификации – наличие или отсутствие начального состава) (рис. 6.1). Среди задач оптимизации состава выделим как частные случаи *задачи расширения состава* ($|N| > |N_0|$), *задачи сокращения состава* ($|N| < |N_0|$) и *задачи замены состава* ($N \neq N_0$) (рис. 6.1). Приведем формальные постановки задач управления составом ОС.

Задача формирования состава характеризуется отсутствием начального состава ($N_0 = \varnothing$):

$$\Phi(N, \varnothing) \to \max_{N \in 2^{N'}}. \qquad (1)$$

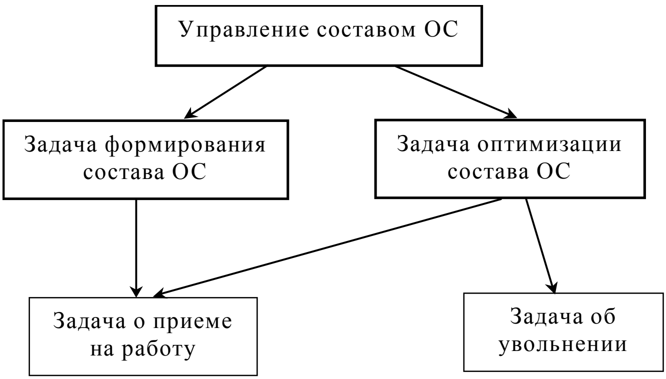


Рис. 6.1. *Задачи управления составом ОС*

Задача оптимизации состава[56] (при фиксированном начальном составе N_0) в общем случае имеет вид:

$$\Phi(N, N_0) \to \max_{N \in 2^{N'}}. \qquad (2)$$

---

[56] Понятно, что задача оптимизации состава может рассматриваться как общая задача управления составом, а все остальные задачи (формирования состава, его изменения и т. д.) – как ее частные случаи. Выделение задачи формирования состава обусловлено исторической традицией.

Задача расширения состава (иногда ее называют *задачей о приеме на работу*) отличается от (2) тем, что $\Delta^- = \varnothing$ и может решаться при ограничении (сверху или снизу) на число вновь включаемых в состав ОС агентов. Например, если первоначальный состав включал n агентов и задано ограничение m на максимальное число вновь принимаемых на работу агентов, то задача примет вид:

$$\Phi(N, N_0) \to \max_{N \in 2^{N'}:\, N_0 \subseteq N,\, |N| \le n+m}. \qquad (3)$$

Задача сокращения состава (иногда ее называют *задачей об увольнении*) формулируется аналогичным образом (отличие в том, что новый состав не может превышать первоначальный) – найти множество $\Delta^- \subseteq 2^{N_0}$, максимизирующее эффективность (при условии, что $\Delta^+ = \varnothing$). Например, если первоначальный состав включал n агентов и задано ограничение m на минимальное число сокращаемых агентов, то задача примет вид:

$$\Phi(N, N_0) \to \max_{N = N_0 \setminus \text{Д}^-,\, |\text{Д}^-| \ge m}. \qquad (4)$$

Задача замены состава заключается в поиске множеств увольняемых и нанимаемых сотрудников, максимизирующих эффективность. Например, если первоначальный состав включал n агентов и задано число m заменяемых сотрудников, то задача примет вид:

$$\Phi(N, N_0) \to \max_{N \in 2^{N'},\, |\text{Д}^-| = |\text{Д}^+| = m}. \qquad (5)$$

Общим недостатком рассматриваемого класса моделей, отчасти объясняющим их достаточно редкое использование на практике, является лежащая в их основе гипотеза о полной взаимозаменяемости агентов. Между тем, любому менеджеру-практику известно, что замена одного работника на другого (даже той же самой квалификации) всегда оборачивается определенными потерями для фирмы. Это связано с тем, что существуют несколько ступеней *адаптации* работника к ОС, в составе которой он функционирует. Вообще говоря, максимально возможное действие y_{max} работника в единицу времени есть функция от продолжительности t его пребывания в составе данной фирмы – график этой функции схематично представлен на рисунке 6.2.

Функция $y_{max}(t)$ представляет собой «склейку» обобщенных логистических кривых, а сам процесс адаптации можно представить как процесс обучения сотрудника очередным институциональным нормам (как формальным, так и неформальным), существующим в данной ОС (см. также девятую главу настоящей работы).

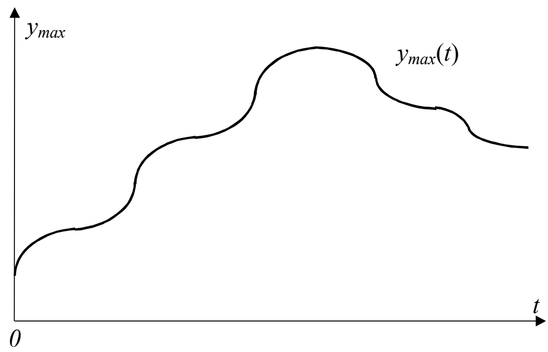


Рис. 6.2. *Процесс адаптации*

Заметим, что наличие убывающего участка «кривой научения» $y_{max}(t)$ не является всеобщей закономерностью: возможное снижение функциональных способностей работника и эффективности его труда может быть обусловлено возрастными причинами и в значительной степени зависит от возложенных на него должностных обязанностей.

Возрастание роли человеческого капитала в производственных процессах, в том числе – специфических умений и навыков работников, приводит к снижению адекватности моделей, рассматривающих сотрудников в качестве взаимозаменяемых «винтиков» в производственных механизмах. Поэтому учет процессов адаптации сотрудников представляется перспективным направлением дальнейших исследований. Тем не менее в большинстве существующих моделей теории управления эффекты адаптации не учитываются, поэтому, перечислив основные постановки задач управления составом ОС, приведем примеры их решения (общие теоретические результаты исследования моделей управления составом ОС приведены в [28, 43, 53]).

Примеры решения задач управления составом. Рассмотрим модель, в которой определяется оптимальное с точки зрения информационной нагрузки на центр число агентов, которых следует включать в ОС [74].

Пример 6.1. Предположим, что задача стимулирования заключается в распределении между *n однородными* (одинаковыми) агентами фонда заработной платы (ФЗП) R. Если функция затрат каждого агента есть $c(y) = y^2/2\beta$, а доход центра пропорционален сумме действий агентов, то при постоянном фонде заработной платы зависимость эффективности стимулирования от числа агентов имеет вид: $\Phi^*(n) = \sqrt{2\beta\, R\, n} - R$.

Содержательно, если выполнены введенные в первой главе предположения относительно целевых функций (дополнительно потребуем, чтобы имело место: $c'(0) = 0$, $H''(y) > 0$), центру выгодно задействовать как можно большее число агентов, стимулируя их за выполнение сколь угодно малых действий потому, что в окрестности действия, минимизирующего затраты ($y = 0$), предельные затраты каждого агента минимальны. Следовательно, при фиксированном фонде заработной платы (максимум $\Phi^*(n)$ по R достигается при ФЗП, пропорциональном числу агентов в ОС: $R^* = \beta\, n / 2$) центр заинтересован в неограниченном увеличении числа агентов (напомним, что рассматривается случай, в котором центр не обязан гарантировать агентам даже сколь угодно малую положительную полезность – см. также ниже), то есть оптимальным является *максимальный состав*.

Ситуация меняется, если управляющие возможности (возможности по переработке информации) центра ограничены. В большинстве работ (см. ссылки в [43]) используется следующая оценка числа связей между n подчиненными агентами, контролируемыми одним центром: $\approx 2^n$. Содержательно эта оценка соответствует числу возможных коалиций и, следовательно, связей между n агентами.

Учтем информационные ограничения, умножив $\Phi^*(n)$ на показатель $2^{-\xi n}$, где $\xi \geq 0$, то есть:

$$\Phi(n) = (\sqrt{2\,\beta\,R\,n} - R)\,2^{-\xi\,n}.$$

Максимум выражения $\Phi(n)$ по n достигается при $n = n_{max}$, где

$$n_{max} = \frac{R}{8\beta}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\beta}{\xi R ln 2}}\right)^2.$$

Предположим теперь, что центр обязан гарантировать каждому агенту, включенному в ОС, некоторый минимальный уровень полезности $\overline{U} \leq \beta/2$ (ограничение резервной заработной платы или ограничение пособия по безработице – см. вторую главу). Тогда, решая задачу определения оптимального размера вознаграждений агентов, получаем, что при постоянном ФЗП R зависимость эффективности стимулирования от числа агентов имеет вид:

$$\Phi^*(n) = \sqrt{2\beta(R - n\overline{U})n} - R.$$

Максимум этого выражения достигается при $n = \dfrac{R}{2\overline{U}}$,

то есть ограничение резервной заработной платы определяет оптимальный состав (в случае однородных агентов – оптимальный размер) организационной системы.

Рассмотрим теперь ряд примеров, в которых существенной является резервная полезность агентов.

Пример 6.2. Введем следующие предположения: целевая функция центра имеет вид: $H(y_N) = \sum_{i \in N} y_i$, и $\forall\ y_{-i} \in A_{-i}$ функция затрат i-го агента $c_i(y)$ выпукла по $y_i \in A_i$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

В качестве обоснования сделанных допущений можно привести следующее рассуждение. Пусть функция дохода центра аддитивна, то есть $H(y_N) = \sum_{i \in N} H_i(y_i)$, где $H_i(y_i)$ – вогнутые функции. Тогда, делая замену переменных, то есть переходя к $H(y_N) = \sum_{i \in N} y_i$, получим, что изменятся (оставаясь выпуклыми) функции затрат агентов, что достаточно для условий существования (и единственности, если она обеспечивалась первоначально) максимума целевой функции центра. Другими словами, технологические связи между агентами при линеаризации функции дохода центра учитываются в несепарабельных функциях затрат агентов [47].

Перейдем к рассмотрению задач формирования состава ОС, последовательно усложняя рассматриваемые модели – от ОС с сепарабельными затратами агентов к ОС с несепарабельными затратами агентов (напомним, что несепарабельность затрат отражает взаимозависимость агентов – см. раздел 2.5).

Предположим, что затраты агентов сепарабельны, то есть $c_i = c_i(y_i)$, $i \in N$. Тогда, решая задачу стимулирования (см. раздел 2.5), получаем, что эффективность оптимального управления составом N равна:

$$\Phi(N) = \max_{y_N \in A_N} \sum_{i \in N} \{y_i - c_i(y_i)\}. \qquad (6)$$

Задача поиска оптимального состава ОС при этом заключается в поиске состава N, максимизирующего выражение (6) на множестве неотрицательных его значений.

В [43, 53] доказано, что в рамках введенных предположений решением задачи (6) является максимальный состав ОС, то есть $N^* = N'$. Этот результат обусловлен тремя факторами: во-первых, в окрестности нулевого действия доход центра растет быстрее, чем затраты агентов; во-вторых, центр имеет постоянный доход на масштаб производства (его функция дохода линейна, то есть не существует никаких технологических ограничений на число агентов, осуществляющих совместную деятельность в рамках данной ОС); и наконец, в-третьих, агенты получают в равновесии нулевую полезность (то есть они безразличны с точки зрения значения своей целевой функции между участием и неучастием в данной ОС и входят в состав ОС только в силу благожелательного отношения к центру).

Для того чтобы исследовать класс моделей, в которых оптимален состав ОС, отличный от максимального состава, рассмотрим последовательно модели, в которых имеется один из перечисленных выше трех факторов.

Предположим, что центр должен гарантировать i-му агенту в равновесии минимальный уровень полезности $\overline{U}_{i_{max}}$, если он включен в ОС, и минимальный уровень полезности $\overline{U}_{i_{min}}$, если он не включен в ОС, $\overline{U}_{i_{max}} \geq \overline{U}_{i_{min}}$, $i \in N'$.

Из результатов разделов 2.1 и 2.5 следует, что в рамках гипотезы благожелательности при сепарабельных затратах агентов минимальной системой стимулирования, реализующей действие y^*, является следующая квазикомпенсаторная система стимулирования:

$$\sigma_i(y^*, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i) + \overline{U}_{i_{max}}, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \ i \in N. \qquad (7)$$

Определим следующие величины:

$$\Phi_i^* = \max_{y_i \in A_i} \{y_i - c_i(y_i) - \overline{U}_{i_{max}}\},\ i \in N. \qquad (8)$$

При этом целевая функция центра имеет вид:

$$\Phi(N) = \sum_{i \in N} \Phi_i^* - \sum_{i \in N' \setminus N} \overline{U}_{i_{min}}.$$

Следовательно, оптимален состав $N^* = \{i \in N' \mid \Phi_i^* \geq -\overline{U}_{i_{min}}\}$. Если же $\Phi^* = \Phi(N^*) = \sum_{i \in I^*} \Phi_i^* - \sum_{i \in N' \setminus N^*} \overline{U}_{i_{min}} < 0$, то ни один из составов не является допустимым. Значит в состав ОС следует включать только тех агентов, доход от деятельности которых с учетом затрат на их стимулирование превышает затраты на выплату им компенсаций в случае исключения из состава ОС. Если значение целевой функции центра Φ^* на этом составе строго отрицательно, то это значит, что значения резервных заработных плат агентов из набора N' слишком велики по сравнению с тем эффектом, который приносит центру их участие в рассматриваемой ОС.

Пример 6.3. Пусть функции затрат агентов имеют вид: $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$. Тогда $\Phi(N) = \sum_{i \in N} \{\frac{r_i}{2} - \overline{U}_{i_{max}}\} - \sum_{i \in N' \setminus N} \overline{U}_{i_{min}}$.

Рассмотрим сначала случай однородных агентов: $r_i = r$, $\overline{U}_{i_{max}} = \overline{U}_{max}$, $\overline{U}_{i_{min}} = \overline{U}_{min}$, $i \in N'$, $\overline{U}_{min} \leq \overline{U}_{max}$. При этом

$$\Phi(n) = n\,(r/2 - \overline{U}_{max}) - (|N'| - n)\,\overline{U}_{min},\ n = \overline{0, |N'|}.$$

Решение задачи $\Phi(n) \to \max_{0 \leq n \leq |N'|}$ имеет вид:

$$n^* = \begin{cases} |N'|, & r \geq 2(\overline{U}_{max} - \overline{U}_{min}) \\ 0, & r < 2(\overline{U}_{max} - \overline{U}_{min}) \end{cases}.$$

Рассмотрим теперь случай шести неоднородных агентов, параметры которых приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Параметры агентов в примере 6.3

Параметр \ i	1	2	3	4	5	6
r_i	12	10	8	6	4	2
$\overline{U}_{i_{max}}$	4	4	3	1	2	2
$\overline{U}_{i_{min}}$	1	1	1	1	1	1
Φ_i^*	2	1	1	2	0	–1

Рассчитаем значения целевых функций центра при различных составах ОС (понятно, что при одинаковых $\overline{U}_{i_{min}}$ включать агентов в ОС следует в порядке убывания Φ_i^*):

$$\Phi^*(\{1\}) = -3,\ \Phi^*(\{1\}\cup\{4\}) = 0,\ \Phi^*(\{1\}\cup\{2\}\cup\{4\}) = 2,$$
$$\Phi^*(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}) = 4,$$
$$\Phi^*(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}) = 5,$$
$$\Phi^*(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}\cup\{6\}) = 5.$$

Таким образом, оптимальным является либо максимальный состав ОС, либо включение первых пяти агентов (в таблице шестой агент помечен серым цветом). При этом центр безразличен по отношению к включению или невключению в состав ОС[57] шестого агента, так как для него имеет место $\Phi_6^* = -\overline{U}_{6_{min}}$ – потери от его участия в ОС в точности равны той компенсации, которую центру пришлось бы выплачивать ему, не включая в состав ОС.

Предположим теперь, что «плата за участие в организационной системе» $\{\overline{U}_{i_{max}}\}$ понизилась и стала равна нулю, а величины $\{\overline{U}_{i_{min}}\}$ стали равны 3 (табл. 6.2).

[57] В подобных случаях, наверное, целесообразно принять гипотезу благожелательного отношения центра к агентам – включение агента в состав ОС (трудоустройство), даже при обеспечении ему нулевого уровня полезности, является важным мотивирующим фактором.

Таблица 6.2

Новые параметры агентов в примере 6.3

Параметр \ i	1	2	3	4	5	6
r_i	12	10	8	6	4	2
$\overline{U}_{i_{max}}$	0	0	0	0	0	0
$\overline{U}_{i_{min}}$	3	3	3	3	3	3
Φ_i^*	6	5	4	3	2	1

Вычислим значения критерия эффективности для различных составов:

$$\Phi^*(\{1\}) = -9,$$
$$\Phi^*(\{1\} \cup \{2\}) = -1,$$
$$\Phi^*(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = 6,$$
$$\Phi^*(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}) = 12,$$
$$\Phi^*(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\}) = 17,$$
$$\Phi^*(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) = 21.$$

Теперь центру выгодно включать в состав ОС все шесть агентов.

Рассмотрим теперь задачу формирования состава ОС в случае, когда центр использует унифицированную пропорциональную систему стимулирования (см. оценки эффективности и другие свойства пропорциональных систем стимулирования в разделе 5.1) со ставкой оплаты[58] $\lambda < 1$. Тогда действия, выбираемые агентами, есть $y_i^* = \xi_i(\lambda)$, где $\xi_i(\cdot) = c_i'^{-1}(\cdot)$, $i \in N$.

Целевая функция центра, представляющая собой разность между линейным доходом (см. соответствующее

[58] Так как функция дохода центра прямо пропорциональна действиям агентов, то использование ставок оплаты, больших единицы, приведет к отрицательным значениям целевой функции центра и ее убыванию по любым допустимым действиям агентов.

предположение выше) и затратами на стимулирование, имеет при этом вид:

$$\Phi(y_N) = (1 - \lambda) \sum_{i \in N} \xi_i(\lambda) . \qquad (9)$$

Легко видеть, что $\xi_i(\cdot)$ – непрерывные возрастающие вогнутые функции, поэтому (9) также вогнутая функция. Следовательно, для каждого фиксированного состава ОС N существует единственная оптимальная с точки зрения центра ставка оплаты $\lambda^*(N)$. Другими словами, оптимальной будет следующая стратегия центра – либо включать в состав ОС всех агентов, либо никого.

Для того чтобы уйти от полученного тривиального решения предположим, что у каждого агента существует свой резервный уровень заработной платы $\overline{U}_i$ (отметим, что речь идет о резервной заработной плате, а не соответствующей ей резервной полезности), то есть агент соглашается участвовать в ОС, только если его вознаграждение превышает резервную заработную плату. Таким образом, условие участия i-го агента имеет вид:

$$\lambda\, \xi_i(\lambda) \geq \overline{U}_i ,\ i \in N. \qquad (10)$$

Обозначим λ_i – решение уравнения $\lambda\, \xi_i(\lambda) = \overline{U}_i$, $i \in N$, относительно λ и упорядочим агентов в порядке возрастания λ_i. Значение целевой функции центра при включении в ОС первых k агентов равно:

$$\Phi(k) = (1 - \lambda_k) \sum_{i=1}^{k} \xi_i(\lambda_k) ,\ k = \overline{1, |N'|} . \qquad (11)$$

Решение задачи синтеза оптимального состава ОС имеет вид: $N^* = \{1, 2, \ldots, k^*\}$, где

$$k^* = arg \max_{k=\overline{1,|N'|}} \Phi(k). \qquad (12)$$

Таким образом, решение задачи оптимизации состава свелось к упорядочению агентов в порядке возрастания λ_i и определению такого их числа k^*, которое максимизировало бы целевую функцию центра (11).

Пример 6.4. Пусть в условиях примера 6.2 функции затрат агентов имеют вид: $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$, тогда

$$\xi_i(\lambda) = \lambda\, r_i,\ \Phi(y_N) = (1 - \lambda)\, \lambda \sum_{i \in N} r_i .$$

Минимальные ставки оплаты, за которые соответствующие агенты согласятся участвовать в ОС, равны: $\lambda_i = \sqrt{\dfrac{\overline{U}_i}{r_i}}$. Если имеется всего пять агентов – претендентов на участие в ОС – с параметрами, приведенными в таблице 6.3, то $k^* = 4$, то есть оптимальным является состав ОС, включающий первые (в упорядочении λ_i) четыре агента.

Таблица 6.3

Значения параметров агентов в примере 6.4

Параметр \ i	1	2	3	4	5
r_i	1	1	1	1	1
$\overline{U}_i$	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
λ_i	0,77	0,84	0,87	0,89	0,95
$\Phi(i)$	0,1746	0,2733	0,3481	0,3777	0,2434

Проведенный анализ задач формирования состава многоэлементных ОС с сепарабельными затратами агентов позволяет сделать вывод, что в этом классе моделей на основании имеющейся информации удается упорядочить агентов и решать задачу определения оптимальной комбинации агентов на множестве N комбинаций, а не на множестве всех возможных 2^N комбинаций.

Откажемся от предположения о сепарабельности затрат. Тогда задача синтеза оптимального состава ОС примет вид:

$$N^* = arg \max_{N \subseteq N'} \Phi(N), \tag{13}$$

где

$$\Phi(N) = \max_{y_I \in A_I} \sum_{i \in N} \{y_i - c_i(y_I)\}, \qquad (14)$$

при условии, что $\Phi(N^*) \geq 0$[59].

Как отмечалось выше, при решении задач типа (13) возникают две основные проблемы: высокая вычислительная сложность (большое число составов ОС, для которых необходимо вычислять максимальные эффективности управления и сравнивать их между собой) и необходимость конструктивного определения затрат агентов в зависимости от состава ОС и действий всех агентов, входящих в этот состав. Рассмотрим пример, иллюстрирующий специфику сформулированной задачи.

Пример 6.5. Пусть агенты однородны и имеют следующие функции затрат ($|\alpha| \leq 1/n$):

$$c_i(y_N) = \frac{\left(y_i + \alpha \sum_{j \in N \setminus i} y_j\right)^2}{2r}, \; i \in N. \qquad (15)$$

Если центр должен гарантировать каждому агенту уровень полезности $\overline{U}$, то оптимальной является квазикомпенсаторная система стимулирования (см. разделы 2.1 и 2.5), при использовании которой значение целевой функции центра равно:

$$\Phi(y_N) = g(n) \sum_{i \in N} y_i - \sum_{i \in N} c_i(y_N) - n\,\overline{U}, \qquad (16)$$

где $n = |N|$, $g(n)$ – множитель, отвечающий за убывание дохода центра с ростом числа агентов, включенных в состав ОС.

[59] Данное ограничение может не рассматриваться, если $\Phi(\varnothing) = 0$ и $\varnothing \subseteq N'$.

Определим действия агентов, наиболее выгодные для центра: $y^* = \dfrac{rg(n)}{(1+\alpha(n-1))^2}$.

Тогда зависимость целевой функции центра от числа n агентов, входящих в ОС, имеет вид:

$$\Phi(n) = \frac{ng^2(n)r}{2(1+\alpha(n-1))^2} - n\,\overline{U}\,. \tag{17}$$

Будем считать, что $\alpha < 0$, тогда при $g(n) = n^{-1/2}$ получаем, что

$$\Phi(n) = \frac{r}{2(1+\alpha(n-1))^2} - n\,\overline{U}\,.$$

Максимизируя $\Phi(n)$ по n, получаем оптимальный размер ОС.

В заключение настоящей главы рассмотрим модель оптимизации состава ОС, использующую приведенные в [47] результаты экспериментального исследования индивидуальных стратегий предложения труда.

Напомним, что качественно эти результаты заключаются в следующем. Экспериментальные данные свидетельствуют, что на основании анализа реальных кривых $\tau(\alpha)$ – зависимости желательной для агента продолжительности ежедневного рабочего времени τ от почасовой ставки оплаты α – можно выделить четыре качественно различных типа агентов, различающихся индивидуальными стратегиями предложения труда:

первый тип: желательная продолжительность рабочего времени не зависит или почти не зависит от ставки оплаты, начиная с некоторой ее величины α_0;

второй тип: желательная продолжительность рабочего времени монотонно возрастает с ростом ставки оплаты;

третий тип: желательная продолжительность рабочего времени монотонно убывает с ростом ставки оплаты;

четвертый тип: желательная продолжительность рабочего времени сначала возрастает с ростом ставки оплаты, а затем убывает.

Предположим, что задача заключается в определении состава ОС, осуществляющей производство некоторой продукции. Существует заказ на суммарный объем производства R; рыночная цена единицы продукции известна и равна λ. На рынке труда имеется множество N' агентов, способных производить требуемую продукцию с постоянной во времени интенсивностью δ. Набор N' потенциальных претендентов характеризуется долей агентов того или иного из четырех перечисленных выше типов. Обозначим n_1^0 – число претендентов первого типа (тип соответствует стратегии предложения труда), n_2^0 – число претендентов второго типа, n_3^0 – третьего типа и n_4^0 – четвертого типа. Очевидно, что выполнено

$$n_1^0 + n_2^0 + n_3^0 + n_4^0 = |N'|.$$

Предположим, что для каждого типа агентов известны: минимальный уровень резервной полезности $\overline{U}_i$, $i = \overline{1, 4}$, который должен быть обеспечен ему центром в случае найма на работу, и одинаковая для всех типов агентов минимальная ставка оплаты α_0.

Задача управления (формирования состава) заключается в выборе набора агентов $N \subseteq N'$ и установлении вектора ставок оплаты $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ агентов различных типов таким образом, чтобы максимизировать прибыль ОС, равную:

$$\Phi(\alpha, N) = \lambda R - \sum_{i \in N} [\alpha^i \tau^i (\alpha^i) + \overline{U}_i], \tag{18}$$

где α^i – ставка оплаты i-го агента, $i \in N$.

Формально задача управления выглядит следующим образом:

$$\Phi(\alpha, N) \to \max_{\alpha, N}. \tag{19}$$

Состав N можно определить как число агентов каждого типа, включаемых в ОС, то есть $N = (n_1, n_2, n_3, n_4)$. Очевидно, что должно выполняться $n_i \le n_i^0$, $i = \overline{1, 4}$. Пусть для агента каждого типа известна зависимость $\tau_i(\alpha_i)$, $i = \overline{1, 4}$, желательной продолжительности рабочего времени от ставки оплаты. Кроме этого, из определения первого типа следует, что $\forall\ \alpha \ge \alpha_0\ \tau_1(\alpha) = \tau_1$.

Обозначим $T = R / \delta$. Тогда задачу (19) можно записать в виде:

$$(\alpha_1 \tau_1(\alpha_1) + \overline{U}_1)\, n_1 + (\alpha_2 \tau_2(\alpha_2) + \overline{U}_2)\, n_2 + (\alpha_3 \tau_3(\alpha_3) + \overline{U}_3)\, n_3 + \\ + (\alpha_4 \tau_4(\alpha_4) + \overline{U}_4)\, n_4 \to \min_{(n_i \le n_i^0,\ \alpha_i \ge \alpha_0)_{i=1}^4} \tag{20}$$

при ограничении

$$n_1\, \tau_1 + \tau_2(\alpha_2)\, n_2 + \tau_3(\alpha_3)\, n_3 + \tau_4(\alpha_4)\, n_4 \ge T. \tag{21}$$

Иногда к ограничению (21) добавляют ограничение

$$\tau_i(\alpha_i) \le 16,\ i \in N, \tag{22}$$

которое в явном виде ограничивает максимальную продолжительность ежедневного рабочего времени каждого агента шестнадцатью часами (предполагается, что как минимум восемь часов в сутки агенту требуется на сон, еду и т. д.).

В задаче управления (20)–(22), помимо состава, ищется набор ставок оплаты, в общем случае каждая для своего типа агентов. Наряду с этим, существуют унифицированные системы стимулирования (УСС) (см. раздел 2.7), в которых условия оплаты труда всех агенты одинаковы. В рассматриваемой модели унифицированность системы стимулирования означает, что ставка оплаты одинакова для агентов всех типов. Обозначая эту ставку α, задачу формирования состава можно записать в следующем виде:

$$(\alpha\, \tau_1(\alpha) + \overline{U}_1)\, n_1 + (\alpha\, \tau_2(\alpha) + \overline{U}_2)\, n_2 + (\alpha\, \tau_3(\alpha) + \overline{U}_3)\, n_3 + \\ + (\alpha\, \tau_4(\alpha) + \overline{U}_4)\, n_4 \to \min_{(n_i \le n_i^0)_{i=1}^4,\ \alpha \ge \alpha_0} \tag{23}$$

при ограничении

$$n_1\,\tau_1(\alpha) + \tau_2(\alpha)\,n_2 + \tau_3(\alpha)\,n_3 + \tau_4(\alpha)\,n_4 \geq T. \qquad (24)$$

Обозначим K – оптимальное значение целевой функции (20), $K_{УСС}$ – оптимальное значение целевой функции (24). Очевидно, что всегда имеет место $K \geq K_{УСС}$.

Задача формирования состава системы (20)–(21) является достаточно сложной, так как в ней присутствует дискретная компонента. Тем не менее задачи этого класса легко могут быть решены численно при не очень большом числе претендентов (см. примеры в [47]).

Таким образом, в настоящей главе рассмотрены возможности использования результатов исследования моделей мотивационного управления при постановке и решении задач управления составом ОС. Более полное представление о современном состоянии данной области исследований можно получить из монографий [28, 43, 53].

Глава 7

МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРОЙ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ[60]

Под *структурой* будем понимать совокупность устойчивых связей между элементами системы. Для организационных систем это могут быть информационные, управляющие и другие связи между участниками, включая отношения подчиненности и распределение прав принятия решений.

Под *организационной структурой* (оргструктурой) можно понимать либо *структуру процесса организации* как совокупность временных, причинно-следственных и других связей между его этапами, либо *структуру ОС*. Общепринятым является последнее определение, поэтому по умолчанию будем подразумевать под организационной структурой именно структуру ОС.

В качестве *типовых структур ОС* выделим следующие. Во-первых, это – *вырожденная структура* (ВС), в которой отсутствуют какие-либо связи между участниками. Во вторых, это – *линейная структура* (ЛС), при которой подчиненность участников ОС имеет вид дерева, то есть каждый участник подчинен одному и только одному участнику следующего (более высокого) уровня иерархии (следует отметить, что в подавляющем большинстве работ, содержащих формальные модели управления организаци-

[60] Глава написана совместно с М. В. Губко и С. П. Мишиным.

онными системами, рассматривались модели ОС, характеризуемые именно древовидными структурами). И наконец, в третьих, это *матричная структура* (МС), в которой некоторые участники ОС могут быть подчинены одновременно нескольким участникам, находящимся либо на одном и том же (более высоком), либо на различных уровнях иерархии (соответственно так называемое двойное подчинение, межуровневое взаимодействие и распределенный контроль [43, 54]).

Возможны и другие, более или менее детальные классификации по таким основаниям декомпозиции, как: цели, функции, территориальное расположение, продуктовая специализация и др. Например, выделяются следующие основные виды организационных структур промышленных фирм: иерархическая (которая порождается декомпозицией высшей цели организации на цели, подцели и т. д.), функциональная (декомпозиция производится на основании функций – исследование, производство, маркетинг и т. д.), дивизиональные (декомпозиция по относительно независимым отделениям, каждое из которых может иметь ту или иную структуру), матричная (наложение «горизонтальной» ответственности руководителей проектов на функциональную структуру [50]).

Существуют «переходные» структуры, например, дивизионально-региональная, дивизионально-технологическая, дивизионально-продуктовая и др. Тем не менее любая из перечисленных структур ОС может быть отнесена (используемые при этом критерии должны отражать специфику решаемой задачи) к одной из трех типовых: ВС, ЛС или МС.

Если выделенные выше типовые структуры отражают статические характеристики ОС, то для описания их изменений во времени целесообразно введение понятия *сетевой структуры* (СС), в которой потенциально существуют связи между всеми участниками, некоторые из которых актуализируются, порождая из ВС линейную или матричную, на время решения стоящей перед системой задачи, а затем разрушаются (возвращаясь к ВС) до момента появления новых задач. То есть сетевые структуры – это такие структуры ОС, в которых могут возникать и двойное подчинение, и межуровневое взаимодействие, причем одни и те же субъекты могут выступать как в роли управляющих органов, так и в роли управляемых агентов, то есть вступать в сетевое взаимодействие [50]. Образно говоря, сетевая структура – это набор априори равноправных агентов, в котором могут возникать вре́менные иерархические и другие структуры, определяемые решаемыми системой задачами.

Упорядоченность взаимодействия и механизм управления (иерархия) возникают в сетевой структуре в результате необходимости специализации, позволяющей эффективно решать частные задачи. Например, в процессе многократного решения схожих задач ЛС возникает в СС как механизм снижения трансакционных издержек [42]. Другими словами, разнообразие решаемых задач порождает в вырожденной структуре организационные системы как вре́менные иерархии. Следовательно, тип структуры ОС, обнаруживаемый исследователем операций, зависит от времени наблюдения: на больших (по сравнению с характерным временем изменения внешних условий) временн*ы*х промежутках ОС может рассматриваться как сеть, на малых – как имеющая одну из типовых структур – ВС, ЛС или МС.

Условно можно считать, что типовые структуры ОС различаются степенью проявлений таких свойств, как иерархичность (противоположностью является распределенность) и число связей. С точки зрения иерархичности ЛС является полностью иерархичной, на другом полюсе находится ВС, в которой отсутствует иерархичность, а промежуточное место занимает МС, в которой имеют место как наличие иерархии, так и распределенность. С точки зрения числа постоянных связей наименьшее их число имеет ВС, наибольшее – МС, а ЛС занимает промежуточное место (напомним, что выше предлагалось рассматривать МС как наложение друг на друга нескольких ЛС).

В каких же случаях эффективными оказываются те или иные структуры, под влиянием каких факторов одна структура трансформируется в другую? Эффективность и трансформация структур обусловлена существующими и, соответственно, изменяющимися внешними и внутренними условиями функционирования. *Внешними условиями* являются требования, предъявляемые к ОС внешней средой, – нормы, нормативы, ограничения, ожидания, характеристики рынка, социальный заказ и т. д. *Внутренние условия* в первую очередь характеризуются *организационными издержками*, зависящими от условий взаимодействия участников ОС (затраты на их взаимодействие, а также на организацию и координацию этого взаимодействия – число связей, информационная нагрузка и т. д.).

В общем случае *задача управления структурой ОС* формулируется как задача поиска структуры или набора структур, которая минимизировала бы организационные издержки (или максимизировала некоторый функционал, который может отражать в агрегированном виде предпочтения участников ОС и/или других субъектов) при ограничении удовлетворения системой внешним требованиям.

Введем два предположения относительно сравнительной эффективности типовых структур. Первое предположение упорядочивает три типовые структуры по «сложности», которая в первом приближении может определяться как число связей между элементами ОС. Будем считать, что наиболее «простой» является ВС, наиболее «сложной» – МС, а ЛС занимает промежуточное положение между ними. Второе предположение связывает сложность типовой структуры с ее организационными издержками и, следовательно, с эффективностью в зависимости от частоты изменения внешних условий. А именно, будем считать, что более простые структуры характеризуются меньшими организационными издержками и эффективны при большей частоте изменения внешних условий.

Из введенных предположений следует, что при появлении у организации новых задач, проектов и так далее и/или при увеличении допустимых организационных издержек возникают новые иерархии, то есть происходит усложнение структуры и осуществляется «сдвиг» от ВС к МС (рис. 7.1а, на котором петля означает сохранение типа структуры). При сокращении числа задач, завершении проектов и так далее и/или при уменьшении допустимых организационных издержек разрушается часть существующих иерархий, то есть происходит упрощение структуры и осуществляется «сдвиг» от МС к ВС (рис. 7.1б). Аналогично при увеличении частоты изменения внешних условий происходит упрощение структуры.

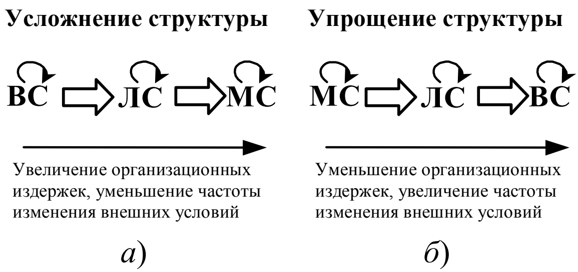


Рис. 7.1. *Закономерности усложнения и упрощения структуры ОС*

Таким образом, качественно МС оказываются эффективными при неизменных внешних условиях и высоких организационных издержках, ВС – при изменяющихся внешних условиях и низких организационных издержках, а ЛС занимают промежуточное положение (рис. 7.2).

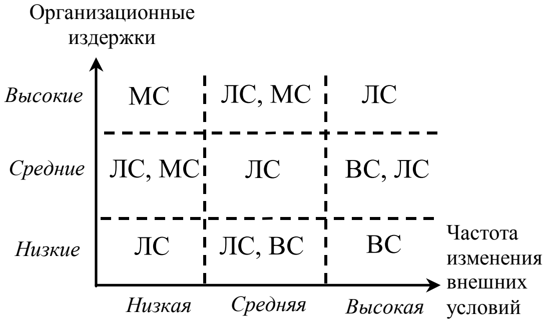


Рис. 7.2. *Области эффективности типовых структур ОС и закономерности их трансформации*

Рассмотрим теперь качественно возможные переходы между типовыми структурами и причины этих переходов. Как отмечалось выше, снижение эффективности некоторой структуры может быть обусловлено изменением внешних условий и/или изменением организационных издержек.

Процесс трансформации может описываться как появление или исчезновение новых иерархий (элементарных линейных структур). Из описанных выше закономерностей упрощения и усложнения структур следует, что непротиворечивыми с точки зрения введенных предположений являются закономерности трансформации типовых структур, приведенные на рисунке 7.2 (интересно отметить «универсальность» ЛС).

Итак, одной из важных задач руководства организации является построение рациональной организационной структуры, то есть организационной структуры, наиболее полно соответствующей предназначению организации и приводящей к максимальной эффективности ее функционирования.

Задачи управления организационной структурой на настоящий момент являются малоизученными. Это связано в первую очередь со сложностью самой задачи оптимизации, ведь на принципы построения организационной структуры оказывает влияние весьма большое число факторов – размер организации, специфика технологии ее функционирования, структура ее документооборота, ограничения по возможностям передачи и переработки информации в системе управления, законодательные ограничения и др.

Вторая сложность связана с тем, что задача построения организационной структуры является «задачей верхнего уровня» по отношению к другим задачам управления. Действительно, пусть необходимо определить эффективность некоторой структуры управления. Для этого необходимо, исходя из имеющихся людских ресурсов и возможностей дополнительного найма, определить, какие именно люди должны занять те или иные должности в структуре управления организацией, чтобы эффективность функционирования организации в рамках заданной структуры была максимальна, то есть решить *задачу формирования оптимального состава* (см. шестую главу настоящей работы). Для того чтобы оценить эффективность того или иного состава, вообще говоря, необходимо решить *задачу синтеза оптимальных механизмов управления* с учетом заданного состава (см. главы 2–5 настоящей работы), в частности, рассчитать оптимальную систему стимулирования для данного состава сотрудников. Только в этом случае можно обоснованно вычислить эффективность функционирования организации с заданными структурой и составом. Все перечисленные действия необходимо повторить для каждого из предлагаемых вариантов структуры! На практике такой процесс почти нереализуем и может быть проведен только для сравнения двух-трех организационных структур.

Таким образом, решение задачи формирования организационной структуры требует умения решать задачи формирования состава и задачи построения оптимальных механизмов управления. Для того чтобы эффективно решать задачу формирования организационной структуры, рассматривая большое число возможных вариантов структуры, эту задачу приходится несколько искусственно «отделять» от других задач управления и искать рациональную структуру с некоторым «типичным» составом и «стандартными» механизмами управления. И даже при этих упрощениях задачи построения структуры остаются настолько сложными, что какие-либо общие методы их решения на настоящий момент отсутствуют.

Тем не менее ниже рассматривается ряд моделей, каждая из которых позволяет решать те или иные задачи формирования структуры организационной системы (более полное представление заинтересованный читатель может получить из монографий [19, 37, 43, 50]). Так, в разделе 7.1 описано решение задачи синтеза оптимальной иерархии над технологическим графом, а в разделе 7.2 – над технологической цепью. Раздел 7.3 посвящен задачам выбора типа структуры (линейной или матричной) организационной системы, раздел 7.4 – моделям сетевых структур.

7.1. Иерархия над технологическим графом

Известно, что именно структура технологических потоков в наибольшей степени определяет организационную структуру, поэтому рассмотрим несколько простых моделей оптимальной *структуры управления технологическими связями* организации [19, 37].

Технологическим графом над множеством вершин N назовем ориентированный граф (см. основные понятия теории графов в Приложении 2) без петель $T = \langle N, E_T \rangle$, ребрам которого $(u,v) \in E_T$ сопоставлены r-мерные вектора $l_T(u,v)$ с неотрицательными компонентами: $l_T : E_T \to R_+^r$. Вершины данного графа – это элементарные операции технологического процесса предприятия или конечные исполнители (рабочие места). Связь $(u,v) \in E_T$ в технологическом графе означает, что от элемента u к элементу v идет r-компонентный поток сырья, материалов, энергии, информации и т. п. Интенсивность каждой компоненты потока описывается компонентами вектора $l_T(u,v)$.

Пример технологического графа с двухкомпонентными потоками (первая компонента отражает печатные документы, циркулирующие в организации, вторая – «устную информацию») приведен на рисунке 7.3. Числовые значения данных компонент для каждой из дуг технологического графа описывают объемы печатных документов и устной информации, передаваемых с одного рабочего места на другое.

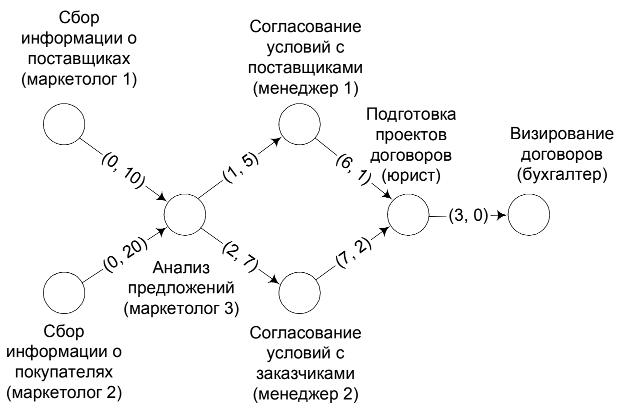


Рис. 7.3. *Технологический граф процесса подписания договоров в производственной фирме*

В принципе, вершины данного графа можно рассматривать и как рабочие места, и как операции технологического процесса.

Часто при организации подобных технологических процессов ограничиваются тем, что назначают ответственных за выполнение той или иной операции (вводят так называемую матрицу ответственности). Однако для нормального функционирования системы этого недостаточно, так как технологические связи между операциями (исполнителями) не контролируются.

Действительно, возьмем, например, маркетолога 3. В его обязанности входит анализ предложений маркетологов 1 и 2 для выбора варианта поставки. Однако обеспечение своевременного поступления информации от этих сотрудников, контроль ее полноты и достоверности, согласование формы подачи информации не входит в круг его обязанностей. Таким образом, необходимо создание структуры (системы управления технологическими связями), которая контролировала бы потоки между отдельными элементами технологического графа. Для краткости будем называть такую структуру *организацией*.

Если «расположить» технологический граф в горизонтальной плоскости (рис. 7.4), то создание организации можно сформулировать как задачу надстройки над технологическим графом дерева, «верхними» узлами которого будут менеджеры-контролеры, а «нижними» узлами, или листьями, – вершины технологического графа. Дуги дерева ориентированные и направлены от подчиненного к начальнику.

На рисунке 7.4 изображена система управления, состоящая из вершин 1–7 изображенного на рисунке 7.3 технологического графа и трех дополнительных узлов (менеджеров-контролеров): I, II, III. Подчиненными узла I являются все маркетологи (вершины 1–3 технологического графа), подчиненными узла II – менеджеры и юрист (вершины 4–6), в подчинении узла III – узлы I, II и бухгалтер (вершина 7).

Каждое из этих деревьев полностью *контролирует* все вершины и связи технологического графа, поскольку в каждом дереве присутствует корневой узел, в подчинении которого (возможно, посредством промежуточных узлов) находятся все до одной вершины технологического графа.

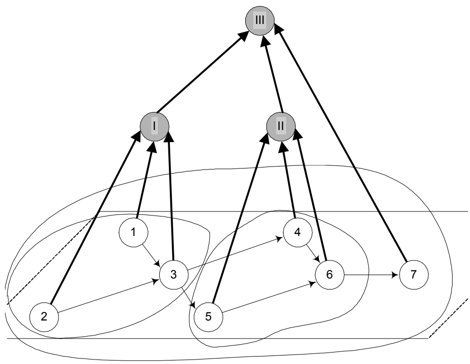


Рис. 7.4. *Пример структуры системы управления технологическими связями*

Таким образом, различные организации (точнее – организационные структуры – иерархии над технологическим графом) отличаются только затратами на свое содержание, и задача поиска оптимальной организации состоит в поиске дерева минимальной стоимости.

Для того чтобы определить стоимость графа организации, введем понятие *группы, контролируемой узлом графа организации*. Группой $g(v)$ узла v графа организации назовем подмножество вершин технологического графа (являющихся одновременно листьями дерева организации), из которых в графе организации есть путь в узел v.

Например, на рисунке 7.4 группа узла I состоит из элементов $\{1, 2, 3\}$, группа узла II – $\{4, 5, 6\}$, группа узла III совпадает со всем множеством N (на рисунке 7.4 группы узлов графа организации обведены). Группы в узлах 1–7 состоят из одного элемента – самого этого узла.

Для произвольного узла v графа организации обозначим $Q(v)$ – множество узлов, *непосредственно* подчиненных ему в графе организации. Для узла I на рисунке 7.4 его непосредственными подчиненными являются узлы 1, 2 и 3, для узла II – узлы 4, 5 и 6, для узла III – узлы I, II и 7.

Легко проверить, что группа в узле v графа организации является объединением групп в узлах, непосредственно подчиненных узлу v: $g(v) = \bigcup_{v' \in Q(v)} g(v')$.

Предположим, что узел v графа организации контролирует технологические потоки только между вершинами подчиненной ему группы $g(v)$ (ниже рассматривается и другая модель, в которой узел вынужден контролировать также внешние по отношению к группе потоки). Определим вектор $l_T(g)$ суммарного потока между вершинами произвольной группы g:

$$l_T(g) := \sum_{\substack{u,v \in g \\ (u,v) \in E_T}} l_T(u,v).$$

Поскольку общий поток внутри группы $g(v)$ узла v равен $l_T(g(v))$, а потоки $l_T(g(v_1)), ..., l_T(g(v_k))$ уже контролируются непосредственными подчиненными узла v, то узел v должен непосредственно контролировать лишь поток

$$L_T(v) = l_T(g(v)) - l_T(g(v_1)) - ... - l_T(g(v_k)),$$

где $g(v_1), ..., g(v_k)$ – группы в узлах-подчиненных $\{v_1, ..., v_k\} = Q(v)$.

В результате построения графа организации для каждой связи технологического графа должен быть назначен ответственный, контролирующий данную связь. Если технологический граф T связный, то для того, чтобы каждая его связь кем-то контролировалась, необходимо наличие в графе организации узла, группа в котором совпадает со всем множеством исполнителей N. Это и будет корневой узел дерева организации.

Содержание каждого из узлов графа организации связано с определенными затратами. Будем считать, что затраты на содержание узла v зависят от потока $L_T(v)$, который непосредственно контролирует данный узел, и описываются некоторой функцией $K(L_T(v)) \geq 0$[61].

Тогда стоимость $P(G)$ всего графа организации $G = \langle V, E \rangle$ (где V – множество управляющих узлов графа организации (то есть вершин, имеющих подчиненных), а E – множество дуг, определяющих взаимную подчиненность узлов) равна сумме стоимостей его узлов: $P(G) = \sum_{v \in V} K(L_T(v))$.

Таким образом, задачу определения структуры оптимальной системы управления технологическими связями в терминах работы [37] можно сформулировать как задачу поиска оптимального дерева организации одной группы N на множестве исполнителей N с функционалом стоимости узла, заданным формулой:

$$P(G) = \sum_{v \in V} K(L_T(v)).$$

Определим, какими свойствами обладает функция затрат $K(\cdot)$. Эта функция описывает затраты на содержание узла графа организации, и ее значение зависит от объема

[61] В описываемой модели для простоты считается, что стоимость содержания управляющего узла не зависит от конкретного человека, занимающего данную должность. За рамками модели остаются также вопросы мотивации менеджеров – предполагается, что затраты на стимулирование входят в общие затраты содержания узла.

потока (информации), непосредственно контролируемого данным узлом, поэтому логично предположить, что затраты возрастают при росте значения любой из компонент контролируемого потока. Мы считаем, что в каждом узле графа организации находится человек – менеджер-контролер. У людей есть ограничения на перерабатываемый объем информации – каждая новая единица информации усваивается тяжелее, чем предыдущая, требует больше времени, усилий и, в конце концов, большей квалификации. Отражением этого свойства процесса переработки информации является выпуклость функции затрат $K(\cdot)$ по каждой из компонент потока.

Значение функции затрат при нулевом перерабатываемом потоке отражает «начальные» затраты, необходимые для поддержания функционирования менеджера-контролера (минимальная зарплата, стоимость организации рабочего места и т. д.) даже в отсутствие контролируемого потока.

Можно показать [37], что при нулевых (или очень малых) начальных затратах выгодно содержать как можно большее число менеджеров (узлов графа организации), каждый из которых контролирует как можно меньший поток. Абсурдность этого вывода с точки зрения большинства практических приложений говорит о том, что начальные затраты на содержание узла играют важную роль в процессе формирования организационной структуры. Чтобы проиллюстрировать на примере построение (приближенно) оптимальной организации, сделаем еще предположение о том, что функция $K(\cdot)$ зависит только от линейной комбинации компонент вектора потока: $K(L) = K'(\alpha_1 L^1 + ... + \alpha_r L^r)$, где $K'(\cdot)$ – выпуклая функция одной переменной, причем $K'(0) > 0$.

Пусть мы построили некоторый граф организации G: определены узлы $v_1, \ldots, v_n$, управляющие группами $g_1, \ldots, g_n$ и контролирующие потоки $L_1, \ldots, L_n$. Стоимость такой организации равна:

$$P(G) = \sum_{i=1}^{n} K(L_i).$$

Обозначим $L_T = \sum_{(u,v)\in E_T} l_T(u,v)$ сумму всех потоков технологического графа T. Для произвольной организации G выполнено равенство $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_T$.

Временно допустим, что после построения графа организации мы можем произвольно перераспределять потоки между его узлами для уменьшения загруженности одних узлов и увеличения загруженности других. Тогда при заданном наборе узлов $v_1, \ldots, v_n$ для определения их загруженности $L_1^{'},\ldots,L_n^{'}$, приводящей к минимальной стоимости системы управления, необходимо решить задачу

$$(L_1^{'},\ldots,L_n^{'}) = arg \min_{L_1,\ldots,L_n} [\sum_{i=1}^{n} K(L_i)]$$

с учетом условия $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_T$.

В силу зависимости функции $K(\cdot)$ от линейной комбинации компонент, можно заменить r-компонентные потоки $l_T(u,v) = (l_T(u,v)^1,\ldots,l_T(u,v)^r)$ на однокомпонентные потоки $l_T^{'}(u,v)$: $l_T^{'}(u,v) = \alpha_1 l_T(u,v)^1 + \ldots + \alpha_r l_T(u,v)^r$.

Следовательно, имеем задачу с однокомпонентными потоками и выпуклой функцией затрат $K'(\cdot)$. Решением данной задачи является равное распределение нагрузки между узлами графа организации: $L_1^{'} = \ldots = L_n^{'} = L_T / n$.

Стоимость организации при такой загруженности узлов равна $n \cdot K'(L_T / n)$, и это минимальная стоимость организации суммарного потока L_T с n управляющими узлами.

Однако произвольное перераспределение загруженности между управляющими узлами невозможно, поскольку оно полностью определяется группами, которые контролируют узлы, и группами, которые контролируют их непосредственные подчиненные. Следовательно, мы можем только изменить граф организации, передав часть подчиненных одного узла другому. Вместе с передачей подчиненных произойдет и перераспределение потоков.

Например, возьмем узел v графа организации и два подчиненных ему узла $v', v'' \in Q(v)$. Изменим граф организации, передав узел v'' в подчинение узлу v'. Если при этом сумма стоимостей узлов v и v' $K(L_T(v)) + K(L_T(v'))$ в новом графе будет меньше, чем сумма их стоимостей в старом, то и общая стоимость нового графа уменьшится по сравнению со старым, так как стоимости остальных узлов не изменились.

Возможны и ситуации, когда стоимость организации будет уменьшаться при передаче подчиненного узла в обратном направлении.

Таким образом, если в некотором графе организации возможна передача подчиненных от более загруженного узла v_1 менее загруженному узлу v_2, сглаживающая разницу в контролируемых ими потоках, то такой граф не является оптимальным.

Итак, мы определили, какие организации не будут оптимальными. Но как найти оптимальную организацию? Даже в столь упрощенной постановке задача поиска оптимального графа организации остается вычислительно сложной. Однако на практике обычно достаточно найти «хорошую» организацию, затраты на содержание которой не сильно превышают минимальные. Для решения же этой задачи можно предложить следующий ***алгоритм.***

1. Найдем примерное количество узлов в дереве организации:

$$n^* = arg \min_{n=\overline{1,|N|-1}} n \cdot K'(L_T / n).$$

Если бы мы могли распределить потоки поровну между n узлами графа организации, то при количестве узлов в графе, равном n^*, достигался бы минимум затрат на содержание организации.

2. Определим «эталонный» поток $L := L_T / n^*$, приходящийся на один узел.

3. Будем последовательно добавлять в граф организации узлы таким образом, чтобы контролируемый ими поток был как можно ближе к эталонному потоку L до тех пор, пора каждая связь технологического графа не будет контролироваться одним из узлов графа организации.

Рассмотрим следующий пример. Пусть для технологического графа, приведенного на рисунке 7.5, функция $K(L) = 300 + (L_1 + L_2)^2$. Тогда

$$n^* = 4,\ L = 16,\ P^*(n^*) := n^* K(L_T / n^*) = 2224.$$

Одна из организаций, построенных по приведенному выше алгоритму, изображена на рисунке 7.5. Загруженность управляющих узлов I–IV: $L_{\mathrm{I}} = 16$, $L_{\mathrm{II}} = 15$, $L_{\mathrm{III}} = 13$, $L_{\mathrm{IV}} = 20$, стоимость организации $P(G) = 2250$, что не сильно отличается от минимально возможной стоимости системы с четырьмя управляющими узлами $P^*(4) = 2224$.

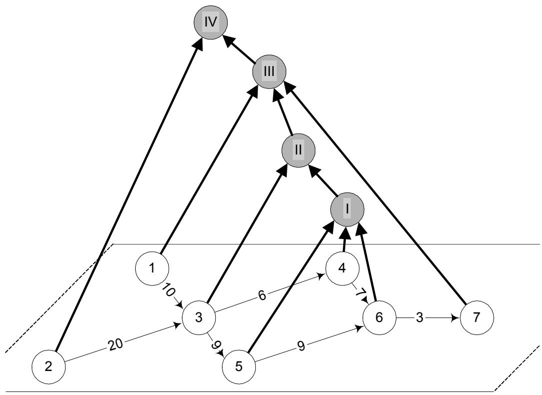


Рис. 7.5. *Пример приближенно оптимальной структуры системы управления технологическими связями*

7.2. Иерархия над технологической цепью

В рассмотренной выше модели предполагалось, что затраты менеджера зависят только от суммы потоков внутри управляемой группы исполнителей. Таким образом, менеджер не «нес ответственности» за то, какими потоками «его» группа обменивается с остальной частью организации или с внешней средой. Подобное предположение существенно ограничивает применимость модели. Пусть, например, функция затрат выпукла и начальные затраты отсутствуют. Тогда если отказаться от требования древовидности графа организации, позволив подчиненному иметь более одного непосредственного начальника, то оптимальной будет иерархия, в которой каждый менеджер управляет отдельным потоком.

Избежать указанного недостатка позволяет небольшое усложнение модели. Проиллюстрируем идею на следующем примере [37]. Ниже предполагается, что все потоки одномерны, то есть имеют одну компоненту.

На рисунке 7.6 приведена технологическая цепь производства некоторого товара (услуги). Исполнитель w_1 принимает сырье от поставщика, проводит первичную обработку и передает результат исполнителю w_2. Тот выполняет очередную технологическую операцию и передает результат далее. Последний исполнитель (в примере – w_3), выполнив последнюю технологическую операцию, отгружает продукцию потребителю. Если все потоки одинаковы, то подобный граф назовем *симметричной цепью*. Интенсивность потоков в симметричной цепи обозначим λ.

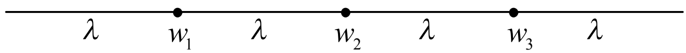


Рис. 7.6. *Симметричная цепь*

В рассматриваемой модели мы допускаем наличие потоков между вершиной технологического графа и внешней средой, изображенных на рисунке 7.6 «висячими» связями.

Рассмотрим иерархию, изображенную на рисунке 7.7. Предположим, что произошло нарушение потока между исполнителями w_2 и w_3 (например, в результате конфликта между ними). Исполнитель w_2 сообщает своему непосредственному начальнику m_1, что у него возникли проблемы. Менеджер m_1 не в состоянии разрешить конфликт, так как исполнитель w_3 ему не подчинен. Аналогично менеджер m_2 не в состоянии самостоятельно справится с конфликтом, о котором ему сообщил исполнитель w_3. В итоге менеджеры m_1 и m_2 сообщат о конфликте своему непосредственному начальнику m, который и примет решение, ликвидирующее конфликт. Это решение менеджеры m_1 и m_2 передадут соответственно исполнителям w_2 и w_3. Аналогично можно рассмотреть планирование потока между исполнителями w_2 и w_3. Менеджер m передает план потока менеджерам m_1 и m_2, которые доводят план до исполнителей w_2 и w_3 соответственно. Факт выполнения плана доводится до менеджера m в обратном порядке.

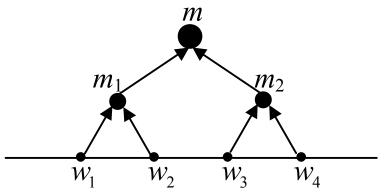


Рис. 7.7. *Дерево управления цепью*

Таким образом, в управлении потоком от w_2 к w_3 задействованы менеджеры m_1, m_2 и m. В управлении потоком от w_1 к w_2 задействован только менеджер m_1, так как он самостоятельно принимает все решения, связанные с этим потоком. Аналогично в управлении потоком от w_3 к w_4 задействован только менеджер m_2.

В управлении потоком из внешней среды к w_1 участвуют менеджеры m_1 и m (например, план закупок определяется менеджером m, уточняется менеджером m_1 и передается исполнителю w_1). Аналогично в управлении внешним потоком от w_4 во внешнюю среду участвуют менеджеры m_2 и m.

Из примера видно, что суммарный поток, управляемый менеджером, состоит из двух частей:

1) потока внутри управляемой группы, который не управляется подчиненными менеджерами (как и в предыдущей модели);

2) внешнего потока (то есть потока между подчиненной группой и всеми остальными исполнителями и потока между подчиненной группой и внешней средой).

Будем рассматривать всевозможные иерархии, управляющие технологическим графом. Под управлением мы будем подразумевать, что в иерархии найдется хотя бы один менеджер, который управляет всеми исполнителями (непосредственно или с помощью подчиненных менеджеров). Тогда можно показать, что найдется оптимальная иерархия, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) все менеджеры управляют различными группами исполнителей;

2) только один менеджер не имеет начальников. Этому менеджеру подчинены все остальные менеджеры и все исполнители;

3) среди сотрудников, непосредственно подчиненных одному менеджеру, ни один не управляет другим.

Условие 1 означает отсутствие полного дублирования, при котором два менеджера управляют одной и той же группой исполнителей. На рисунке 7.8а приведен пример подобного дублирования. Два менеджера управляют одной и той же группой $\{w_1, w_2, w_3\}$. При этом один них может быть удален, а всем его начальникам можно подчинить другого менеджера, не увеличивая затрат.

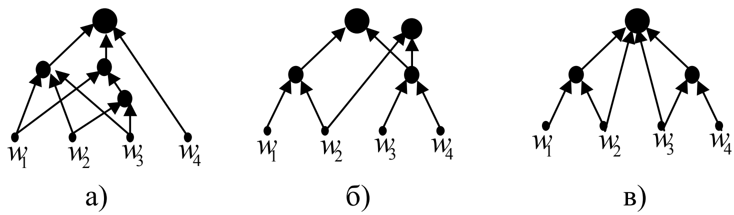


Рис. 7.8. *Иерархии «а»–«в» нарушают свойства 1–3 соответственно*

В соответствии с условием 2 найдется только один менеджер m, который не имеет начальников. Этому менеджеру подчинены все исполнители и все остальные менеджеры иерархии. Будем называть *m высшим менеджером*. Это соответствует практике построения организаций, при которой только один высший менеджер может принимать решения, обязательные для всех сотрудников (например, может разрешить конфликт между любыми сотрудниками). На рисунке 7.8б приведен пример, в котором два менеджера не имеют начальников, то есть нарушается условие 2. Очевидно, что «лишний» менеджер может быть удален без увеличения затрат иерархии.

Условие 3 можно интерпретировать следующим образом. Пусть менеджер m_2 непосредственно подчинен менеджеру m_1. Тогда m_1 непосредственно не управляет подчиненными менеджера m_2. Это соответствует «нормальному» функционированию организации, при котором менеджер управляет всеми подчиненными сотрудниками через непосредственных подчиненных, а не напрямую. На рисунке 7.8в приведен пример, в котором высший менеджер m непосредственно управляет исполнителями w_2 и w_3, несмотря на то, что ими уже управляют непосредственные подчиненные менеджера m.

Также легко показать [37], что если функция затрат вогнута, то оптимальна двухуровневая иерархия, в которой единственный начальник управляет всеми вершинами технологического графа.

Подобным образом могут описываться небольшие организации, в которых двухуровневые иерархии весьма распространены. Однако при росте организации, то есть при достаточно большой величине потока, функция затрат перестает быть вогнутой, поскольку менеджер чрезмерно загружен, что ведет к росту его предельных издержек. Другими словами, каждая дополнительная единица потока влечет все возрастающие затраты, и функция затрат становится выпуклой. Ниже для выпуклой функции затрат приведен вид оптимальной иерархии, управляющей симметричной цепью, и показано, что в достаточно большой организации оптимальная иерархия будет многоуровневой.

Покажем, что оптимальная иерархия может не быть древовидной. Пусть в несимметричной цепи имеется 4 исполнителя и потоки $f(w_{env},w_1) = 3$, $f(w_1, w_2) = 1$, $f(w_2, w_3) = 5$, $f(w_3, w_4) = 1$, $f(w_4, w_{env}) = 3$. Функция затрат менеджера $\varphi(x) = x^3$, то есть затраты равны кубу контролируемых им потоков. Оптимальная иерархия для этого примера изображена на рисунке 7.9.

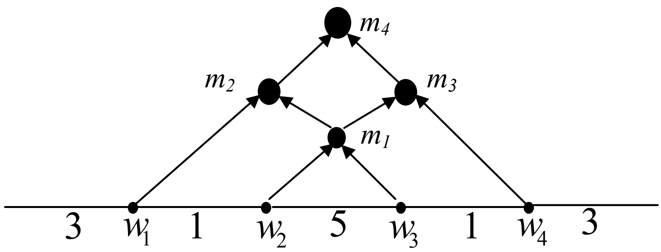
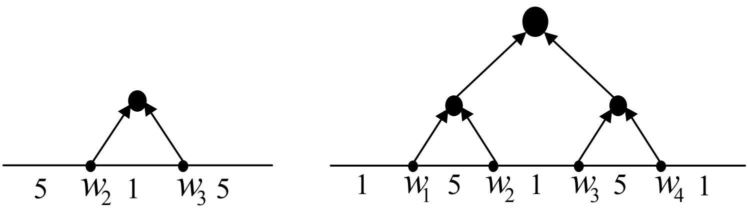


Рис. 7.9. *Оптимальная иерархия над асимметричной цепью*

Данный пример иллюстрирует общее правило: *потоки наибольшей мощности должны управляться на нижних уровнях иерархии*. В примере рассмотрен предельный случай, в котором для управления наибольшим потоком специально должен быть выделен менеджер нижнего уровня.

Следующий пример показывает, что расширение технологического графа может и не приводить к увеличению затрат на управление им.

Рассмотрим несимметричную цепь из 4-х исполнителей с потоками $f(w_{env}, w_1) = 1$, $f(w_1, w_2) = 5$, $f(w_2, w_3) = 1$, $f(w_3, w_4) = 5$, $f(w_4, w_{env}) = 1$. Функция затрат менеджера имеет вид $\varphi(x) = x^2$, то есть затраты равны квадрату потоков, которые контролирует менеджер. Сначала предположим, что к организации относятся только исполнители w_2 и w_3. Тогда существует только одна иерархия, изображенная на рисунке 7.10а.



а)　　　　　　　б)

Рис. 7.10. *Рост организации с одновременным снижением затрат на управление*

Предположим, что мы имеем возможность расширить организацию, включив в нее еще двух исполнителей w_1 и w_4. Содержательно это можно интерпретировать следующим образом. Крупная компания оптовой торговли покупает фирму-производителя товара (исполнителя w_1) и сеть розничных магазинов (исполнителя w_4), стремясь управлять всей цепочкой от производства до конечной реализации товаров. Большой поток $f(w_1, w_2) = 5$ может соответствовать, например, потоку информации, который связан с проблемами компании при взаимодействии с производителем (скажем из-за большого количества брака). Аналогично большой поток $f(w_3, w_4) = 5$ может быть связан с проблемами взаимодействия с розничной сетью, например, с большим числом возвратов товара покупателями.

Таким образом, после расширения организация будет управлять исполнителями w_1, w_2, w_3, w_4. При этом имеется возможность перестроить иерархию управления так, как показано на рисунке 7.10б, то есть нанять двух менеджеров нижнего уровня, которые будут ответственны за управление большими потоками. Сравним затраты иерархий:

$$(5 + 1 + 5)^2 = 121,$$

$$(1 + 5 + 1)^2 + (1 + 5 + 1)^2 + (1 + 1 + 1)^2 = 49 + 49 + 9 = 107.$$

Таким образом, затраты на управление могут снизиться при расширении технологического графа (включении новых исполнителей – части внешней среды). Это может служить одной из причин покупки нового бизнеса, который неприбылен сам по себе, но позволяет снизить расходы на управление основным бизнесом.

На практике имеется множество подобных фактов. Например, в России в 90-х годах многие заводы пищевой промышленности трансформировались в вертикально интегрированные агропромышленные компании после покупки сельхозпредприятий своего региона, которые не были прибыльными, но позволяли обеспечить бесперебойную поставку дешевого сырья.

Приведенные примеры показывают, что за счет небольшой модификации модели удается описывать многие интересные эффекты, имеющие место в реальных организациях.

Рассмотрим задачу об оптимальной иерархии, управляющей симметричной цепью. Можно доказать, что найдется дерево, которое будет оптимальной иерархией над симметричной цепью [37]. В этом дереве каждый менеджер управляет группой исполнителей, идущих в цепи последовательно. Если функция затрат выпукла, то у различных менеджеров этого дерева количество непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу.

Таким образом, можно не рассматривать недревовидные иерархии. То есть при поиске оптимальной иерархии достаточно ограничиться классом деревьев (рассмотренный выше пример показывает, что для несимметричной цепи это неверно).

Кроме того, можно рассматривать только такие деревья, в которых каждому менеджеру подчинена группа из исполнителей, идущих подряд. То есть *каждый менеджер* *должен управлять одним участком технологической цепи.* Попытка подчинить менеджеру несвязанные части производства увеличит затраты иерархии и приведет к ее неоптимальности.

Для степенной функции затрат можно найти оптимальную иерархию аналитически: пусть функция затрат имеет вид $\varphi(x) = x^{\alpha}, \alpha > 1$. Тогда для симметричной цепи оптимальной иерархией будет любое дерево, в котором у каждого менеджера ровно $r_* = (\alpha + 1)/(\alpha - 1)$ непосредственных подчиненных.

Если указанное значение r_* нецелое, то необходимо взять одно из двух ближайших целых значений.

Таким образом определяется оптимальная *норма управляемости*, то есть количество подчиненных одного менеджера. Этот параметр организации обсуждается во многих работах по менеджменту. При $\alpha \geq 3$ выполнено $(\alpha + 1)/(\alpha - 1) \leq 2$, то есть оптимально дерево с минимальным количеством непосредственных подчиненных $r_* = 2$.

Для того чтобы существовало дерево с r_* непосредственными подчиненными каждого начальника, необходимо, чтобы $n - 1$ делилось нацело на $r_* - 1$. Например, при $r_* = 3$ возможны следующие значения n = 3, 5, 7, 9…

Если выполнено $n = r_*^l$, то можно построить оптимальное симметричное дерево с l уровнями иерархии, в котором каждому менеджеру первого уровня подчинены r_* исполнителей, каждому менеджеру следующего уровня подчинено ровно r_* менеджеров предыдущего уровня. Для $r_* = 3$ и n = 9 такое дерево приведено на рисунке 7.11.

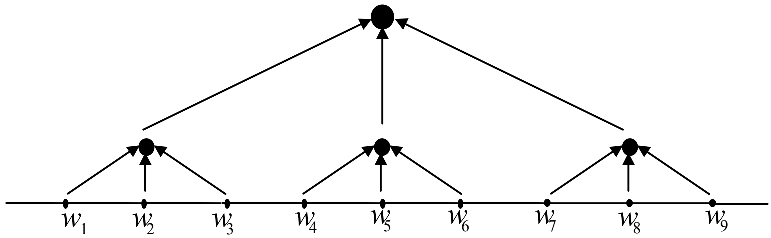


Рис. 7.11. *Пример симметричного дерева над цепью*

Указанная выше зависимость оптимального числа непосредственных подчиненных r_* от α изображена на рисунке 7.12. Из рисунка видно, что при приближении α к 1 оптимальная норма управляемости стремится к $+\infty$. То есть по мере приближения функции $\varphi(\cdot)$ к вогнутой, двухуровневая иерархия становится оптимальной для все большего n, то есть один менеджер может управлять все большим числом исполнителей. При $\alpha \leq 1$ функция $\varphi(\cdot)$ вогнута, то есть двухуровневая иерархия оптимальна при любом количестве исполнителей n. В этой иерархии один менеджер управляет всеми потоками.

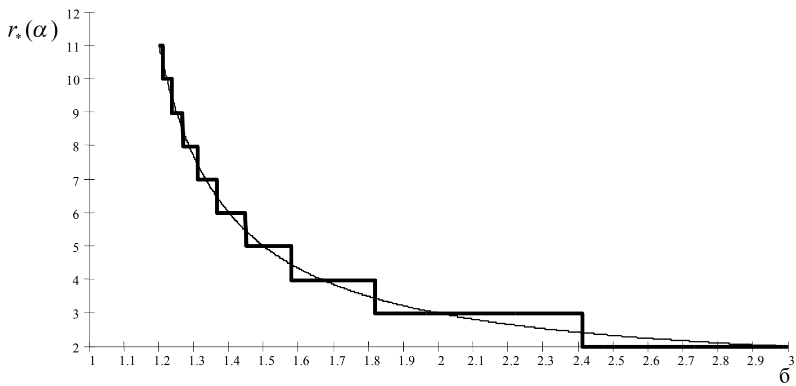


Рис. 7.12. *Оптимальная норма управляемости* $r_*(\alpha)$

При $\alpha \geq 3$ имеем противоположную ситуацию. При любом n оптимальной будет иерархия, в которой норма управляемости минимальна и равна двум, то есть у каждого менеджера всего два непосредственных подчиненных. Общее количество менеджеров будет равно $n - 1$, то есть оптимально наибольшее количество менеджеров, каждый из которых управляет минимальным количеством потоков.

В большинстве реальных организаций иерархия представляет собой промежуточный вариант, при котором у каждого менеджера имеется от трех до десяти непосредственных подчиненных (в некоторых случаях число непосредственных подчиненных может доходить до нескольких сотен). Этим случаям соответствует диапазон $1 < \alpha < 3$. На рисунке 7.12 приведен пример ступенчатого возрастания оптимальной нормы управляемости при уменьшении α от 3 до 1. Для любого $r \geq 2$ найдется некоторый диапазон, в котором оптимальной будет иерархия с r непосредственными подчиненными каждого менеджера.

Параметр α может интерпретироваться как степень нестабильности внешней среды. Если $\alpha = 1$, то среда полностью стабильна, исполнители самостоятельно справляются со своими обязанностями и один менеджер может непосредственно управлять любым количеством исполнителей. При возрастании α нестабильность внешней среды приводит к увеличению затрат менеджера, поскольку ему приходится оперативно решать вопросы, связанные с изменением поставок, сбыта, условий производства и т. п. В результате затраты менеджера резко возрастают и оптимальной становится иерархия, в которой весь объем работы разделен между несколькими менеджерами. Случай $\alpha \geq 3$ соответствует большой степени нестабильности, в которой для управления каждым потоком необходим отдельный менеджер.

7.3. Выбор типа структуры организации

Для большинства современных организаций и фирм (не только для компаний, управляющих реализацией корпоративных программ) актуальна проблема поиска рационального баланса между функциональной[62] и проектной структурой. Линейная структура, порождаемая функциональной специализацией, оказывается эффективной при процессном функционировании, то есть в условиях относительного постоянства набора реализуемых системой функций. При проектной структуре участники системы «привязаны» не к функциям, а к проектам, которые могут сменять друг друга во времени (см. подробное обсуждение свойств линейных, матричных и сетевых структур в [50]). «Гибридом» функциональной и проектной структур является матричная структура, в которой каждый исполнитель в общем случае подчинен одновременно нескольким руководителям, например, некоторому функциональному руководителю и руководителю определенного проекта.

Поэтому ниже рассматриваются модели, учитывающие плюсы и минусы различных структур и позволяющие определять оптимальные (по оговариваемому в каждом конкретном случае критерию) типы структур [22]. Отметим, что речь идет именно о типе структуры, так как задача синтеза оптимальной иерархической структуры в целом не рассматривается (см. соответствующие модели выше) – исследование ограничивается анализом простейших двухуровневых «блоков».

Модель «назначения». Пусть в системе имеются n агентов – исполнителей работ по корпоративным проек-

---

[62] Под функциональной структурой в общем случае понимается линейная (древовидная) структура, в которой подразделения выделяются по тому или иному признаку (на различных уровнях иерархии признаки могут быть различны): функциональному, территориальному, продуктовому и т. д.

там ($N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов) и $m \le n$ центров, каждому из которых поставлен в соответствие некоторый тип работ. Тогда проект (выбираемый за единицу времени) может характеризоваться вектором $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ объемов работ, где $v_j \ge 0$, $j \in M$ – множеству работ (центров).

Введем матрицу $||y_{ij}||_{i \in N, j \in M}$, элемент $y_{ij} \ge 0$ которой отражает объем работ j-го типа, выполняемый i-м агентом. Обозначим $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{im}) \in \Re^m$ – вектор объемов работ, выполняемых i-м агентом, $i \in N$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \Re^{mn}$ – вектор распределения работ по агентам.

Если $c_i(y)$: $\Re^{mn} \to \Re^1_+$ – функция затрат i-го агента, то задача распределения работ состоит в минимизации суммарных затрат $\sum_{i \in N} c_i(y)$ при условии полного выполнения каждой работы $j \in M$: $\sum_{i \in N} y_{ij} = v_j$. Отметим, что в этой задаче не учитываются ограничения на объемы работ, выполняемые агентами.

Если функции затрат выпуклые по соответствующим переменным, то получаем задачу выпуклого программирования. Минимальное значение суммарных затрат обозначим $C_0(v)$.

Например, если $\sum_{i \in N} c_i(y) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} y_{ij}^2 / 2r_{ij}$, то $y_{ij} = r_{ij}\, v_j / r_j$, где $r_j := \sum_{i \in N} r_{ij}$, $i \in N, j \in M$, и $C_0(v) = \sum_{j \in M} v_j^2 / 2r_j$.

Содержательно рассмотренная задача соответствует определению структуры взаимосвязей между агентами и центрами (напомним, что каждый центр «отвечает» за некоторый проект – работу). В общем случае каждый агент оказывается связан с каждым центром, так как первый выполняет в оптимальном распределении работ работы нескольких (быть может, даже всех) типов. Можно условно считать, что подобным связям соответствует матричная структура управления, эффективность которой зависит от рассматриваемого проекта v и равна $C_0(v)$. Такую задачу можно условно назвать *задачей синтеза оптимальной матричной структуры*.

Альтернативой является использование *функциональной структуры*, в которой каждый агент закреплен за одним и только одним центром (проектом или типом работ). Для того чтобы найти оптимальную функциональную структуру, следует решить задачу назначения исполнителей. Сформулируем эту задачу.

Пусть функции затрат агентов сепарабельны, то есть $c_i(y) = \sum_{j \in M} c_{ij}(y_{ij})$. Тогда задача поиска оптимальной функциональной структуры заключается в нахождении такого разбиения $\boldsymbol{S}$ множества агентов N на m непустых подмножеств $\boldsymbol{S} = \{S_j\}_{j \in M}$ (между элементами которых работа соответствующего типа распределяется по аналогии с задачей поиска оптимальной матричной структуры), что суммарные затраты по выполнению всего объема работ в рассматриваемом проекте минимальны.

Задача распределения объемов j-й работы между элементами множества $S_j \subseteq N$ состоит в минимизации суммарных затрат $\sum_{i \in S_j} c_{ij}(y_{ij})$ при условиях $\sum_{i \in S_j} y_{ij} = v_j$, где y_{S_j} – вектор действий агентов из множества S_j, $j \in M$.

Обозначим $C_j(S_j, v_j)$ – минимальное значение суммарных затрат по работе j. Тогда задача синтеза функциональной структуры заключается в нахождении разбиения $\boldsymbol{S}$, минимизирующего сумму затрат $\sum_{j \in M} C_j(S_j, v_j)$ по всем работам. Обозначим $C(v)$ – минимальные суммарные затраты в этом случае.

Легко показать [22], что в рамках рассматриваемых моделей $C(v) \geq C_0(v)$, то есть затраты оптимальной функциональной структуры всегда не меньше, чем затраты оптимальной матричной структуры. Эффективности $C(v)$ и $C_0(v)$ соответственно функциональной и матричной структур являются косвенными оценками максимальных дополнительных затрат на управление, возникающих при переходе от линейной (функциональной) к матричной структуре управления.

Поясним последнее утверждение. Функциональная структура, как известно, требует минимальных затрат на управление (собственное функционирование). Но она приводит к неэффективному распределению работ между агентами. С другой стороны, матричная структура приводит к более эффективному распределению работ, но требует бóльших затрат на управление. Поэтому при решении вопроса о выборе структуры (или переходе от одной структуры к другой) следует принимать во внимание оба фактора: затраты на управление и эффективность распределения работ.

Кроме того, во многих реальных организациях одна подструктура является матричной, а другая – линейной. Определение рационального баланса (между ними двумя одновременно) может производиться аналогично рассмотренному выше.

Задача поиска оптимальной функциональной структуры с математической точки зрения довольно сложна. Решение ее в случае больших значений m и n может оказаться чрезвычайно трудоемким. Поэтому для того, чтобы сделать хоть какие-то качественные выводы, введем ряд упрощающих предположений.

Рассмотрим частный случай, когда число агентов равно числу работ, затраты агентов сепарабельны и удельные затраты c_{ij} i-го агента по выполнению j-й работы постоянны, $i \in N, j \in M$.

Тогда элементы разбиения $\boldsymbol{S}$ – одноэлементные множества и задача поиска оптимальной матричной структуры принимает вид: минимизировать суммарные затраты $\sum_{i \in N} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}$ при условиях выполнения работ в полном объеме: $\sum_{i \in N} y_{ij} = v_j$ для всех работ $j \in M$, а задача поиска оптимального распределения одной работы между агентами превращается в следующую стандартную задачу о назначении (см. Приложение 2): $\sum_{i \in N} \sum_{j \in J} c_{ij} v_j x_{ij} \to \min_{\{y_{ij} \in \{0;1\}\}}$ при условиях $\sum_{i \in N} x_{ij} = 1, j \in M$, и $\sum_{j \in M} x_{ij} = 1$, $i \in N$.

В силу линейности минимизируемого выражения решение задачи распределения работы по агентам тривиально: $y_{ij} = v_j$, если $i = \arg \min_{i \in I} c_{ij}$ и $y_{ij} = 0$, если $i \neq \arg \min_{i \in N} c_{ij}$, $i \in N$, то есть весь объем работ j-го типа следует поручать тому агенту, который выполняет его с наименьшими удельными затратами. При этом может оказаться, что все работы выполняет один агент. Это распределение работ будет оптимально по критерию суммарных затрат, но может быть нереализуемо на практике.

Для того чтобы уйти от тривиального (и иногда нереализуемого) решения, введем ограничения Y_i на максимальный суммарный объем работ, которые может выполнять i-й агент, $i \in N$.

С этими ограничениями задача синтеза оптимальной функциональной структуры превращается в следующую стандартную транспортную задачу (см. Приложение 2):

минимизировать $\sum_{i \in N} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}$ при условиях $\sum_{i \in N} y_{ij} = v_j$, $j \in M$, $\sum_{j \in M} y_{ij} \le Y_i$, $i \in N$, которая разрешима при условии $\sum_{i \in N} Y_i \ge \sum_{j \in M} v_j$.

Рассмотренные выше задачи формулировались для случая одного проекта. Аналогично ставятся и решаются задачи синтеза оптимальных (матричных и линейных) структур и для случая, когда организационная система реализует последовательно набор проектов с заданными характеристиками (или характеристиками, относительно которых имеется статистическая информация). Матричной структуре при этом соответствуют изменяющиеся во времени (в зависимости от реализуемого проекта) распределения работ по агентам (с этой точки зрения матричная структура управления, определяемая в результате решения задач «назначения» на каждом шаге, близка к сетевой структуре [50]), линейной – постоянное закрепление агентов за определенными центрами (типами работ).

Эффективность той или иной структуры в динамике может оцениваться как сумма (или математическое ожидание, если характеристики потока достоверно неизвестны) затрат на реализацию всего набора проектов за рассматриваемый период времени. Вывод о том, что матричная структура характеризуется не бóльшими суммарными затратами агентов, чем линейная, в динамике также остается в силе[63].

---

[63] Следует отметить, что при этом не учитывались затраты на изменение оргструктуры, ведь использование оптимальной матричной структуры требует для каждого нового проекта использовать соответствующую оптимальную структуру. Модели, учитывающие затраты на «перестроение» оргструктур, рассматривались в [19, 37].

Приведем пример. Пусть имеются два типа работ и два агента, удельные затраты которых представлены матрицей $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$, ограничения объемов работ агентов: $Y_1 = Y_2 = 1$.

Предположим, что имеется поток из 60 проектов объемами (v_1, v_2), которые равномерно распределены на $v_1 + v_2 \le 2$.

Полученные в результате численного моделирования средние (по всем 60 проектам) значения затрат приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Средние затраты

Постоянная во времени линейная структура 1	Постоянная во времени линейная структура 2	Оптимальная матричная структура с ограничениями на объемы работ	Оптимальная линейная структура без ограничений на объемы работ	Оптимальная матричная структура без ограничений на объемы работ
3,08	3,02	2,81	2,76	2,29

На рисунке 7.13 приведены графики отношений $((c_1 / c) - 1)$ и $((c_2 / c) - 1)$, характеризующие потери в эффективности из-за использования постоянной (не зависящей от специфики реализуемого проекта) линейной структуры.

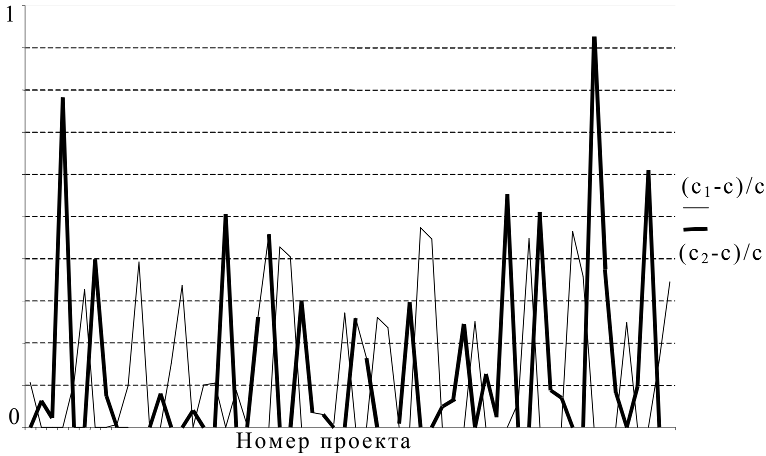


Рис. 7.13. *Относительная эффективность постоянной линейной структуры*

Таким образом, постановка и решение задач «назначения» позволяет оценивать сравнительную эффективность различных структур и закономерностей их трансформации, осуществлять выбор оптимальной или рациональной организационной структуры в зависимости от набора проектов, реализуемых в рамках корпоративной программы.

Модель распределенного контроля. Результаты анализа систем с распределенным контролем, в которых один и тот же агент одновременно подчинен нескольким центрам (см. раздел 2.9), свидетельствуют, что существуют два режима взаимодействия центров – режим сотрудничества и режим конкуренции.

В режиме сотрудничества агент выбирает действие, выгодное (в определенном смысле) всем центрам одновременно, и центры осуществляют совместное управление данным агентом. Такая ситуация соответствует матричной структуре управления.

В режиме конкуренции управление агентом осуществляется одним центром, который определяется по результатам анализа аукционного равновесия игры центров. Такая ситуация соответствует линейной (веерной) структуре управления.

Условием реализации режима сотрудничества (и, следовательно, матричной структуры) является непустота области компромисса. Для непустоты области компромисса, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы максимальное (по действиям агента) значение суммы целевых функции всех участников системы (всех центров и агента) было не меньше, чем сумма максимумов значений целевых функций центров, каждый из которых вычисляется в предположении, что данный центр осуществляет единоличное управление агентом.

Если целевые функции и допустимые множества участников системы зависят от некоторых параметров, то можно исследовать зависимость структуры системы от этих параметров – при тех комбинациях параметров, при которых имеет место вышеупомянутое условие, следует реализовывать матричную структуру, при остальных значениях параметров – линейную структуру. Если известна стоимость изменения этих параметров, то можно ставить и решать задачу развития, то есть задачу оптимального изменения параметров с учетом затрат на изменения и эффективности структур [2, 19].

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение описанного общего подхода для случая организационной системы с распределенным контролем, состоящей из одного агента и двух центров.

Стратегией агента является выбор действия $y \in [0; 1]$, содержательно интерпретируемого как доля всего рабочего времени агента, отрабатываемого на первый центр. Соответственно, $(1 - y)$ характеризует долю времени, отрабатываемого на второй центр.

Центры получают доходы, зависящие от того времени, которое на них отработал агент: $H_1(y) = y$, $H_2(y) = 1 - y$.

Агент несет затраты $c(y) = \alpha\, y^2/2 + (1 - y)^2/2$, где $\alpha \geq 0$. Минимум функции затрат агента достигается при действии $1/(1 + \alpha)$.

Определим наиболее выгодное для первого центра действие агента (максимизирующее разность между $H_1(y)$ и $c(y)$):

$$y_1^* = \begin{cases} 1, & \alpha \leq 1 \\ \dfrac{2}{1+\alpha}, & \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

Выигрыш первого центра при этом равен:

$$W_1 = \begin{cases} 1 - \alpha / 2, & \alpha \leq 1 \\ \dfrac{3-\alpha}{2(1+\alpha)}, & \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

Определим наиболее выгодное для второго центра действие агента (максимизирующее разность между $H_2(y)$ и $c(y)$): $y_2^* = 0$. Выигрыш второго центра при этом равен:

$$W_2 = 1/2.$$

Определим действие y_0, доставляющее максимум выражению $[H_1(y) + H_2(y) - c(y)]$: $y_0 = 1/(1 + \alpha)$, и вычислим следующую величину (см. раздел 2.9):

$$W_0 = [H_1(y_0) + H_2(y_0) - c(y_0)] = \frac{\alpha + 2}{2(\alpha + 1)}.$$

Условие непустоты области компромисса (и реализуемости матричной структуры) имеет вид: $W_1 + W_2 \leq W_0$.

Так как величины W_1 и W_0 зависят от параметра α, то можно найти множество значений этого параметра, при которых условие $W_1 + W_2 \leq W_0$ выполнено.

Возможны следующие варианты:

1) $\alpha \leq 1$, при этом $W_1 + W_2 \geq W_0$ и $W_1 \geq W_2$, следовательно, в данном диапазоне значений параметра α оптимальна линейная структура, в которой агент подчинен первому центру;

2) $\alpha \in [1; 2]$, при этом $W_1 + W_2 \geq W_0$ и $W_2 \geq W_1$, следовательно, в данном диапазоне значений параметра α оптимальна линейная структура, в которой агент подчинен второму центру;

3) $\alpha \geq 2$, при этом $W_1 + W_2 \leq W_0$, следовательно, в данном диапазоне значений параметра α оптимальна матричная структура.

Параметрический анализ, аналогичный проведенному выше, оказывается эффективным и в динамике, так как знание областей оптимальности различных структур при наличии прогноза изменений существенных параметров позволяет априори синтезировать структуру организации, обладающую максимальной (или максимальной ожидаемой, или допустимой и так далее – в зависимости от решаемой задачи) эффективностью.

7.4. Сетевые структуры

В большинстве моделей теории управления социально-экономическими системами подчиненность участников организационных систем считается заданной. Опишем различие между «ролями» участников ОС с теоретико-игровой точки зрения [25]. Качественное отличие иерархических игр [20, 23, 25, 34] от «обычных» неантагонистических игр заключается в наличии упорядочения участников ОС по последовательности выбора стратегий (напомним, что стратегией агента называется правило выбора им действий в зависимости от информации, имеющейся на момент осуществления выбора, – см. Приложение 1). Традиционно считается, что в двухуровневых системах управляющий орган – центр – обладает правом первого хода, то есть выбирает свою стратегию первым и сообщает ее другим участникам системы – управляемым субъектам – агентам.

В зависимости от того, может ли центр рассчитывать на то, что ему станет известно действие агента, он может выбирать свою стратегию либо как в «обычной» игре (то есть в виде отображения имеющейся у него информации во множество действий), либо в виде «функции» от выбора агента, либо в более сложной форме (см. Приложение 1 и [20, 34]). Тем самым центр превращается в *метаагента*, устанавливающего «правила игры» для остальных агентов (проявление отношения власти [43]). Таким образом, критерием отнесения конкретного участника двухуровневой ОС к множеству управляющих органов или к множеству управляемых субъектов является его приоритет в последовательности выбора стратегий и возможность выбирать в качестве своей стратегии «функцию» от действий (или в более общем случае – стратегий) агентов, имеющих более низкий приоритет [50].

Эту идею можно обобщить и на случай многоуровневых систем. Например, если в некоторой ОС участники принимают решения последовательно и имеются три «момента» принятия решений, то можно условно рассматривать данную ОС как трехуровневую иерархическую систему. Участники, делающие первый ход, при этом интерпретируются как центры верхнего уровня иерархии (метацентры), участники, делающие второй ход, – как центры промежуточного уровня (центры), а участники, выбирающие свои действия последними, – как управляемые субъекты (агенты). Стратегии метацентров могут быть функциями от стратегий центров промежуточного уровня и управляемых субъектов и т. д.

Следовательно, в рамках теоретико-игровой модели иерархическая структура ОС порождается фиксацией последовательности выбора стратегий, свойств множеств допустимых действий и информированности участников (см. Приложение 1).

Таким образом, в процессе сетевого взаимодействия (см. введение к настоящей главе) каждый из его участников в общем случае может выступать либо в роли центра того или иного уровня иерархии, либо в роли агента, находящегося на нижнем уровне. Фактическая роль участника определяется двумя факторами. Первый фактор заключается во влиянии имеющегося отношения власти, то есть институциональной возможности определенного участника выступать в той или иной роли. Второй фактор заключается в целесообразности (эффективности, в том числе и экономической) этой роли, как с точки зрения самого участника, так и с точки зрения других участников.

Фиксируем экзогенно заданное отношение власти и рассмотрим эффективность различных распределений ролей между участниками ОС (появления сетевой структуры – как вре́менной иерархии, построенной из вырожденной структуры). Другими словами, предположим, что имеются несколько агентов (участников ОС), каждый из которых может выбирать свои стратегии в определенные моменты времени и в зависимости от принятой последовательности выбора стратегий делать свое действие зависящим от стратегий участников, осуществляющих выбор позже него. Получаем метаигру – игру, в которой определяются роли участников (будем считать, что их выигрыши при каждом фиксированном распределении ролей могут быть вычислены). Такой подход может также интерпретироваться как моделирование процессов самоорганизации в организационных системах.

Подробное исследование теоретико-игровых моделей структурного синтеза проведено в работе [50]. Полученные в ней результаты можно разделить на несколько классов. Основным качественным результатом является осознание соответствия между структурой организационной системы и типом игры, которой описывается взаимодействие участников системы, а также вытекающая из этого соответствия формулировка задачи структурного синтеза как задачи поиска оптимальной (в смысле критерия эффективности, определенного на множестве состояний агентов, являющихся равновесиями их игры при данной структуре) структуры или, что тоже самое, поиска оптимального распределения ролей между агентами.

«Количественные», то есть формальные, результаты относятся:

– к характеризации решений задач структурного синтеза (для веерных структур, линейных ОС, структур с побочными платежами, а также для ОС, агенты которых характеризуются ограниченной рациональностью, и для задач последовательного синтеза);
– получению условий, при которых равновесное состояние агентов в той или иной степени не зависит от структуры;
– собственно решению задач структурного синтеза (для однородных ОС, для двухуровневых ОС, для ОС с побочными платежами, а также для ОС, агенты которых характеризуются ограниченной рациональностью);
– исследованию задач формирования сетевых структур для ряда прикладных моделей (модель внутренних цен, модель размещения производственного заказа, модель управления проектом).

Рассмотрим пример механизма управления в сетевых структурах, а именно механизм внутренних цен (см. раздел 3.4), в рамках которого определяется оптимальная веерная структура, то есть решается, кого из агентов (из заданного их множества) следует назначить центром.

Пусть имеются n агентов со следующими целевыми функциями: $f_i(\lambda, y_i, r_i) = \lambda\, y_i - c_i(y_i, r_i)$, $i \in N$, где λ – внутрифирменная цена единицы продукции, выпускаемой агентами, y_i – объем производства (выпуска) i-го агента, r_i – эффективность его деятельности, то есть параметр его функции затрат $c_i(y_i, r_i)$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множеству агентов.

Содержательно объединение агентов должно обеспечить суммарный объем выпуска R, который может интерпретироваться как внешний заказ. Пусть агенты имеют затраты типа Кобба-Дугласа: $c_i(y_i, r_i) = r_i\, \varphi(y_i / r_i)$, где $\varphi(\cdot)$ – монотонная выпуклая функция.

В случае если назначается внешний центр, то минимизации суммарных затрат агентов соответствует назначение цены, равной R / H, где $H = \sum_{i \in I} r_i$ (см. раздел 3.4).

Выберем для простоты $\varphi(z) = z^2/2$ и рассмотрим задачу синтеза оптимальной веерной структуры (напомним, что веерной называется двухуровневая иерархическая структура с одним центром на верхнем уровне), в которой агент, назначенный центром, обязан обеспечить реализацию заказа и выбирает оптимальную (с его точки зрения) цену (так называемую внутрифирменную цену), являющуюся единой для него и для его подчиненных. Содержательно центр в этом случае выступает в роли посредника, а выигрыш каждого участника системы (агента и центра) определяется разностью между внутрифирменной стоимостью произведенной им продукции и его затратами. Обозначим через $f_{ik}(\cdot)$ целевую функцию i-го агента при назначении центром k-го агента.

Целевая функция центра: $f_k(y_k, r_k) = \lambda_k\, y_k - c_k(y_k, r_k)$, целевые функции агентов:

$$f_{ik}(y_i) = \lambda_k\, y_i - c_i(y_i, r_i),\ i \in N\backslash\{k\}.$$

Фиксируем цену λ_k. Тогда действие, выбираемое i-м агентом ($i \neq k$), равно: $y_{ik} = \lambda_k\, r_i$. Следовательно, центр вынужден выбрать действие $y_k = R - \lambda_k\, H_{-k}$, где $Y_{-k} = \sum_{i \neq k} y_i$, $H_{-k} = \sum_{i \neq k} r_i$.

Оптимальная с точки зрения центра (то есть максимизирующая его целевую функцию) цена равна:

$$\lambda_k = \frac{RH}{H^2 - (r_k)^2}.$$

Будем рассматривать в качестве критерия эффективности суммарное значение целевых функций всех n агентов, входящих в ОС. Тогда решением задачи синтеза оптимальной веерной структуры будет назначение центром агента, имеющего максимальную эффективность (содержательные интерпретации очевидны). Например, пусть в рассматриваемой модели имеется 10 агентов, значения эффективностей которых равны: $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, ..., $r_{10} = 10$, тогда оптимальные действия и суммарная полезность участников системы при $R = 80$ примут значения, приведенные в таблице 7.2 (строки соответствуют номерам агентов, назначенных центрами).

В таблице 7.2 приведены также стоимость заказа (произведение $\lambda_k R$) и «прибыль», вычисляемая как разность между стоимостью заказа и суммарной полезностью участников системы. Кроме того, оптимальным с точки зрения заказчика является участие в выполнении заказа всех агентов, так как исключение любого из них не уменьшает стоимости заказа.

Таблица 7.2

Параметры механизма внутренних цен

Действия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Суммарная полезность	Стоимость заказа	"Прибыль"
1	1,43	2,91	4,37	5,82	7,28	8,73	10,19	11,64	13,10	14,55	**58,22**	**116,40**	**58,18**
2	1,46	2,81	4,37	5,83	7,28	8,74	10,20	11,65	13,11	14,56	**58,33**	**116,52**	**58,18**
3	1,46	2,92	4,14	5,84	7,29	8,75	10,21	11,67	13,13	14,59	**58,52**	**116,71**	**58,19**
4	1,46	2,92	4,39	5,42	7,31	8,77	10,24	11,70	13,16	14,62	**58,78**	**116,98**	**58,20**
5	1,47	2,93	4,40	5,87	6,67	8,80	10,27	11,73	13,20	14,67	**59,11**	**117,33**	**58,22**
6	1,47	2,94	4,42	5,89	7,36	7,87	10,30	11,78	13,25	14,72	**59,51**	**117,77**	**58,25**
7	1,48	2,96	4,44	5,91	7,39	8,87	9,03	11,83	13,31	14,78	**59,99**	**118,28**	**58,29**
8	1,49	2,97	4,46	5,94	7,43	8,92	10,40	10,16	13,37	14,86	**60,54**	**118,88**	**58,34**
9	1,49	2,99	4,48	5,98	7,47	8,97	10,46	11,96	11,25	14,95	**61,16**	**119,57**	**58,41**
10	1,50	3,01	4,51	6,02	7,52	9,03	10,53	12,03	13,54	12,31	**61,85**	**120,34**	**58,49**

Таким образом, в рассматриваемом примере с точки зрения полезностей участников системы следует назначать центром десятого агента, что обеспечит суммарную полезность 61,85 (табл. 7.2 и рис. 7.14). Если же назначить внешний центр (в рамках модели, рассмотренной в разделе 3.4), то сумма полезностей агентов окажется меньше и составит 58,18.

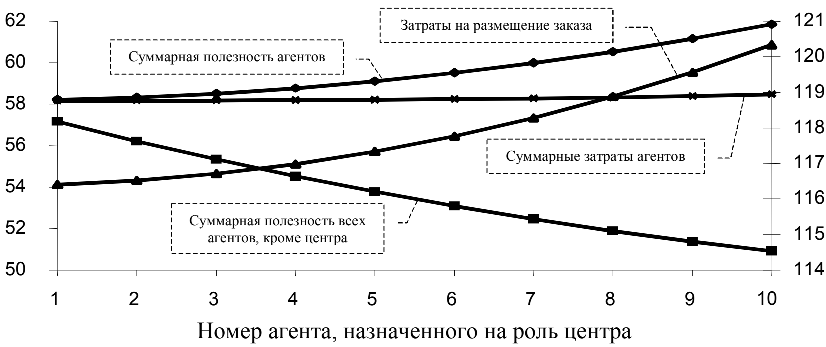


Рис. 7.14. *Критерии эффективности в зависимости от агента, назначенного на роль центра*

С точки зрения заказчика центром следует назначать первого агента, так как это обеспечит минимальные затраты на размещение заказа (минимизирует его стоимость).

Отметим, что отношение суммарной полезности к стоимости возрастает с ростом номера агента, назначаемого центром, поэтому если заказчик заинтересован в максимальной «рентабельности», то центром следует назначать опять же десятого агента.

Итак, оптимальное назначение центра в рассматриваемой модели неоднозначно и зависит от критерия эффективности, используемого лицом, принимающим решения (рис. 7.14).

Рассмотрим другую модель взаимодействия системы с внешним заказчиком и соответственно другой механизм взаимодействия участников системы между собой. Пусть известна рыночная цена (внешним заказчиком является рынок) λ_0 единицы продукции. Предположим, что центр получает доход $\lambda_0 R$ от выполнения заказа, несет затраты $c_k(y_k, r_k)$ и оплачивает другим агентам работу по единой ставке λ_k, то есть несет затраты на стимулирование $\lambda_k Y_{-k}$. Другими словами, если выше считалось, что центр косвенно оплачивает работу агентов, то теперь рассмотрим ситуацию, когда он сам оплачивает затраты на стимулирование.

Таким образом, целевая функция центра:

$$f_k(y_k, r_k) = \lambda_0 R - \lambda_k Y_{-k} - c_k (y_k, r_k),$$

целевые функции агентов:

$$f_{ik}(y_i) = \lambda_k y_i - c_i (y_i, r_i),\ i \in N \setminus \{k\}.$$

Отметим, что действие, выбираемое i-м агентом ($i \neq k$), по-прежнему равно $y_{ik} = \lambda_k r_i$, а действие центра есть $y_k = R - \lambda_k H_{-k}$. Изменится оптимальная для центра цена, которая станет равной: $\lambda_k = R / (H + r_k)$.

В предположении $R = 80$, $\lambda_0 = 2$ в рассматриваемом примере оптимальные действия и суммарная полезность, а также полезность центра примут значения, приведенные в таблице 7.3.

Интересно отметить, что во втором механизме бóльшую часть заказа выполняет центр, в то время как в первом механизме распределение работ было примерно одинаковым (ср. табл. 7.2 и 7.3). Кроме того, оказывается, что с точки зрения суммарной полезности всех агентов во втором механизме центром следует назначать первого (наименее эффективно работающего) агента.

Таблица 7.3

Оптимальные действия и суммарная полезность агентов в механизме внутренних цен

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Цена	Полезность центра	Суммарная полезность
1	2,86	2,86	4,29	5,71	7,14	8,57	10,00	11,43	12,86	14,29	1,43	78,78	133,88
2	1,40	5,61	4,21	5,61	7,02	8,42	9,82	11,23	12,63	14,04	1,40	80,20	132,40
3	1,38	2,76	8,28	5,52	6,90	8,28	9,66	11,03	12,41	13,79	1,38	81,63	131,10
4	1,36	2,71	4,07	10,85	6,78	8,14	9,49	10,85	12,20	13,56	1,36	83,06	129,94
5	1,33	2,67	4,00	5,33	13,33	8,00	9,33	10,67	12,00	13,33	1,33	84,49	128,93
6	1,31	2,62	3,93	5,25	6,56	15,74	9,18	10,49	11,80	13,11	1,31	85,92	128,06
7	1,29	2,58	3,87	5,16	6,45	7,74	18,06	10,32	11,61	12,90	1,29	87,35	127,31
8	1,27	2,54	3,81	5,08	6,35	7,62	8,89	20,32	11,43	12,70	1,27	88,78	126,67
9	1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	7,50	8,75	10,00	22,50	12,50	1,25	90,20	126,14
10	1,23	2,46	3,69	4,92	6,15	7,38	8,62	9,85	11,08	24,62	1,23	91,63	125,72

В обоих рассмотренных механизмах возможно снижение затрат на стимулирование за счет отказа от предположения об использовании единой ставки оплаты для всех агентов. В этом случае центр может назначать планы всем агентам и обещать компенсировать им затраты. Тогда оптимальные действия будут равны тем же, что и в случае пропорциональной оплаты, затраты на стимулирование снизятся в два раза (см. вторую главу), а суммарная полезность всех агентов, кроме центра, будет равна нулю.

Аналогичным образом можно рассматривать задачи синтеза иерархических структур на основе механизмов внутренних цен (в которых, например, метацентры будут устанавливать объемы работ и цены подчиненным им группам центров и агентов), а также обобщать многочисленные и подробно исследованные для систем с фиксированной структурой механизмы управления на случай сетевого взаимодействия.

Глава 8

ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ[64]

Настоящая глава посвящена рассмотрению прикладных математических моделей информационного управления организационными системами. Прежде чем рассматривать конкретные модели, обсудим, что понимается под информационным управлением (минимально необходимые сведения из теории рефлексивных игр приведены в Приложении 1).

Для этого сначала попробуем промоделировать ход рассуждений субъекта, принимающего решения (см. модели принятия решений в разделе 1.1 и Приложениях 1 и 3). Пусть он считает, что его оппоненты выберут определенные действия. Тогда он должен выбрать свое действие, являющееся наилучшим при сложившейся обстановке. Однако если он считает своих оппонентов такими же рациональными, как и он сам, то он должен предположить, что при выборе своих действий они будут ожидать соответствующего выбора от него. Но тогда он должен учитывать и то, что оппоненты знают о том, что он считает их рациональными, и так далее – получаем бесконечную цепочку «вложенных» рассуждений. Как же замкнуть эту бесконечную цепочку, какое решение принять в ситуации выбора? Наиболее распространенным способом такого «замыкания» является концепция так называемого *равно-*

---

[64] Глава написана совместно с А. Г. Чхартишвили.

весия Нэша. Равновесие Нэша – это такая ситуация, от которой никому из участников игры невыгодно отклоняться в одностороннем порядке (см. Приложение 1). Иными словами, «если все оппоненты выбирают именно эту ситуацию, то и я ничего не выигрываю, отклоняясь от нее» – и так для каждого игрока.

Рефлексия. Описанный выше процесс и результат размышлений агента о принципах принятия решений оппонентами и о выбираемых ими действиях называется *стратегической рефлексией* [57]. В отличие от стратегической рефлексии, в рамках *информационной рефлексии* субъект анализирует свои представления об информированности субъектов, представления об их представлениях и т. д.

Большинство концепций решения в теории игр (в том числе и равновесие Нэша) подразумевает, что игра, в которую играют участники (то есть состав участников игры, множества их стратегий, функции выигрыша), является *общим знанием*, то есть игра известна всем игрокам (агентам); всем известно, что игра всем известна; всем известно, что всем известно, что игра всем известна и так далее, опять же до бесконечности.

Конечно, общее знание (или, иначе говоря, *симметричное* общее знание) является частным случаем, а в общем случае представления агентов, представления о представлениях и так далее могут различаться. Например, возможно *асимметричное* общее знание, при котором игроки понимают игру по-разному, но само это различное понимание является общим знанием. Возможно также *субъективное* общее знание, когда игрок считает, что имеет место общее знание (а на самом деле его может не быть).

В общем случае *иерархия представлений* агентов называется *структурой информированности*. Моделью принятия агентами решений на основании иерархии их представлений является *рефлексивная игра*[65] [57], в которой каждый агент моделирует в рамках своих представлений поведение оппонентов (тем самым порождаются *фантомные агенты* первого уровня, то есть агенты, существующие в сознании реальных агентов). Фантомные агенты первого уровня моделируют поведение своих оппонентов, то есть в их сознании существуют фантомные агенты второго уровня и так далее (совокупность представлений реальных и фантомных агентов друг о друге и есть структура информированности). Другими словами, каждый агент выбирает свои действия, моделируя свое взаимодействие с фантомными агентами, ожидая от оппонентов выбора определенных действий. Устойчивый исход такого взаимодействия называется *информационным равновесием* [57].

Но после выбора реальными агентами своих действий они получают информацию, по которой можно явно или косвенно судить о том, какие действия выбрали оппоненты. Поэтому информационное равновесие может быть как *стабильным* (когда все агенты – реальные и фантомные – получают подтверждение своих ожиданий), так и нестабильным (когда чьи-то ожидания не оправдываются). Кроме того, стабильные равновесия можно в свою очередь подразделить на *истинные* (те стабильные информационные равновесия, которые остаются равновесиями, если агенты оказываются адекватно и полностью информированными) и *ложные*.

Информационное управление. Вернемся к рассмотрению информационного управления. Равновесие рефлексивной игры агентов зависит от структуры их информированности. Изменяя эту структуру, можно соответственно менять информационное равновесие. Поэтому *информаци-*

[65] Формальное определение рефлексивной игры и ее свойств приведено в Приложении 1.

онным управлением будем называть воздействие на структуру информированности агентов, осуществляемое с целью изменения информационного равновесия.

Задача информационного управления может быть на качественном уровне сформулирована следующим образом: найти такую структуру информированности агентов, чтобы информационное равновесие их рефлексивной игры было наиболее предпочтительно с точки зрения *центра* – субъекта, осуществляющего управление.

Сделаем важное терминологическое замечание. Под информационным управлением иногда понимают информационное воздействие – сообщение определенной информации. Мы же рассматриваем «информацию» как объект управления, а не как средство управления. Иными словами, мы исходим из того, что центр может сформировать у агентов ту или иную структуру информированности (из некоторого множества структур), и исследуем, что в результате этого получается. За рамками наших рассмотрений остается вопрос о том, как именно следует формировать эту структуру.

Для каждой конкретной модели решение задачи информационного управления может быть разбито на несколько этапов.

Первый (наверное, наиболее трудоемкий) этап, который можно назвать построением модели поведения агентов, – исследование информационного равновесия, то есть определение зависимости исхода рефлексивной игры агентов от структуры их информированности.

Второй этап заключается в решении собственно задачи управления: зная зависимость информационного равновесия от структуры информированности, необходимо найти наилучшую для центра структуру информированности. Под «наилучшей» имеется в виду допустимая структура, которая (с учетом затрат центра на ее формирование) побудит агентов выбрать как информационное равновесие наиболее выгодный для центра набор действий.

Третий этап включает исследование свойств информационного управления – его *эффективности*, определяемой как значение целевой функции центра на множестве информационных равновесий игры агентов, *стабильности* (можно накладывать требование, чтобы реализуемое центром информационное равновесие было стабильным) и *сложности*. Сложность информационного управления тесно связана с проблемой максимального ранга рефлексии, поэтому остановимся на этом свойстве информационного управления более подробно.

Проблема максимального ранга рефлексии. Структура информированности агентов представляет собой бесконечное дерево, на первом уровне которого находятся представления реальных агентов о существенных параметрах, на втором уровне – представления реальных агентов о представлениях оппонентов (то есть фантомные агенты первого уровня), на третьем – представления о представлениях о представлениях (то есть фантомные агенты второго уровня) и т. д.

Если начинающееся на каком-то уровне поддерево совпадает с поддеревом, имеющимся на более высоком уровне, то первое поддерево (и все его поддеревья) можно не рассматривать. Число попарно различных поддеревьев, входящих в информационную структуру, называется ее *сложностью*, а максимальная глубина дерева, получающегося после отбрасывания, начиная снизу, всех «повторяющихся» поддеревьев, – *глубиной* структуры информированности [57]. Глубина поддерева, соответствующего некоторому реальному агенту, характеризует (на единицу превосходит) его *ранг рефлексии*.

Проблема максимального ранга рефлексии заключается в следующем: существуют ли ограничения (и какие в каждом конкретном случае) на ранг рефлексии агентов, такие, что увеличение ранга рефлексии сверх этого ограничения не имеет смысла. Выражение «не имеет смысла» требует пояснений.

Во-первых, известно, что возможности человека по переработке информации ограничены и при принятии решений ни один человек не сможет рефлексировать «до бесконечности». Строгих результатов в этой области на сегодняшний день нет, а практика свидетельствует, что люди редко осуществляют рефлексию глубже второго-третьего уровня.

Во-вторых, во многих математических моделях удается показать, что увеличение глубины структуры информированности сверх некоторого уровня не приводит к появлению новых информационных равновесий [57, 66]. С точки зрения агентов это означает, что увеличивать ранг рефлексии сверх этого уровня бессмысленно. А с точки зрения центра это означает, что при решении задачи информационного управления без потери эффективности можно ограничиться классом структур информированности, глубина которых ограничена данным уровнем.

Поэтому одним из результатов исследования задач информационного управления является определение максимального ранга рефлексии агентов (называемого *максимальным целесообразным рангом*), влиянием на который достаточно ограничиться центру при формировании структуры их информированности.

Прикладные модели. Настоящая глава посвящена описанию постановок и результатов решения задач информационного управления для ряда широко распространенных на практике ситуаций [56]. Перечислим кратко рассматриваемые модели.

В разделе 8.1 рассматривается модель «***Производитель и посредник***», в которой участвуют агент, являющийся производителем некоторого вида продукции, и центр, выступающий в роли посредника между агентом и рынком. Предполагается, что посредник точно знает рыночную цену, а производитель – нет.

Производитель и посредник заранее оговаривают пропорцию, в которой они будут делить доход, затем посредник сообщает производителю информацию (не обязательно достоверную) о рыночной цене, и, наконец, производитель выбирает объем производства.

Выбор посредником сообщения о рыночной цене может трактоваться как информационное управление. Стабильным будет такое информационное управление, при котором реальный доход производителя равен тому доходу, на который он и рассчитывал исходя из сообщения посредника.

Оказывается, что, выбирая надлежащим образом информационное управление, посредник обеспечивает себе максимум дохода независимо от пропорции дележа (иными словами, посредник может соглашаться на любую долю, свой выигрыш он получит в любом случае). Интересно, что при этом в некоторых случаях производитель получает бóльшую прибыль, чем получил бы, если бы посредник сообщал истинное значение цены.

В модели «***Коррупция***» (раздел 8.2) каждый из чиновников имеет субъективные представления о силе штрафов, накладываемых в случае обнаружения факта взяточничества и зависящих от «среднего уровня коррумпированности». Оказывается, что если чиновники наблюдают средний уровень коррумпированности, то этот средний уровень в стабильной ситуации не зависит от взаимных представлений коррупционеров о типах друг друга. При этом не важно, являются сами эти представления истинными или ложными.

Отсюда вытекает, что невозможно повлиять на уровень коррумпированности лишь путем изменения взаимных представлений чиновников друг о друге, и любое стабильное информационное управление приводит к одному и тому же уровню коррумпированности.

В разделе 8.3 рассматривается модель «***Формирование команды***», в которой неопределенными параметрами являются эффективности деятельности агентов.

Под командой будем понимать коллектив (объединение людей, осуществляющих совместную деятельность и обладающих общими интересами), способный достигать цели автономно и согласованно, при минимальных управляющих воздействиях.

Существенными в определении команды являются два аспекта. Первый – достижение цели, то есть конечный результат совместной деятельности является для команды объединяющим фактором. Второй аспект – автономность и согласованность деятельности – означает, что каждый из членов команды демонстрирует поведение, требуемое в данных условиях (позволяющих достичь поставленной цели), то есть то поведение, которого от него ожидают другие члены команды.

На сегодняшний день, несмотря на большое количество качественных обсуждений, практически отсутствуют формальные модели формирования команды и ее функционирования, поэтому в разделе 8.3 рассматривается модель формирования команды, основывающаяся на рассмотрении иерархий взаимных представлений агентов об эффективностях индивидуальной деятельности друг друга.

В рамках существующих представлений каждый агент может предсказать, какие действия выберут другие агенты, какие они понесут индивидуальные «затраты» и каковы будут суммарные затраты. Если выбор действий производится многократно и наблюдаемая некоторым агентом реальность оказывается отличной от его представлений, то он вынужден корректировать свои представления и при очередном своем выборе использовать «новые» представления.

Анализ информационных равновесий показывает, что *командой* целесообразно считать множество агентов, выборы которых согласованы с иерархией их взаимных представлений друг о друге. Такое определение команды качественно близко к определениям стабильности и согласованности информационного управления, отвечающих за то, чтобы реальные действия или выигрыши агентов совпадали с ожидаемыми действиями или выигрышами.

Кроме того, можно сделать интересный вывод, что стабильность команды и слаженность ее работы может достигаться, в том числе, и при ложных представлениях членов команды друг о друге. Выход из ложного равновесия требует получения агентами дополнительной информации друг о друге.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что модели формирования команд и их деятельности, описываемые в терминах рефлексивных игр, не только отражают автономность и согласованность деятельности команды, но и позволяют ставить и решать задачи управления процессом формирования команды. Управленческие возможности заключаются в создании, во-первых, разнообразных ситуаций деятельности (обеспечивающих выявление существенных характеристик агентов – получаем модель научения) и, во-вторых, обеспечении максимальных коммуникаций и доступа членов команды ко всей существенной информации.

Раздел 8.4 посвящен рассмотрению модели «***Предвыборная борьба***», в которой информационное управление заключается в убеждении избирателей, поддерживающих определенных кандидатов, что их кандидаты не будут избраны и следует поддержать других кандидатов. Оказывается, что получающееся в итоге такого управления информационное равновесие может быть стабильным, и, более того, истинным.

В разделе 8.5 рассматривается модель «***Реклама товара***», в которой агент принимает решение о приобретении товара не только в зависимости от собственных предпочтений, но и от того, какая часть других агентов с его точки зрения собирается приобрести товар или ожидает от него приобретения данного товара. Оказывается, что большинство реальных рекламных кампаний могут быть описаны в рамках модели информационного управления с первым или вторым рангом рефлексии агентов.

8.1. Производитель и посредник

Рассмотрим ситуацию, в которой участвуют агент, являющийся производителем некоторого вида продукции, и центр, являющийся посредником. Они взаимодействуют следующим образом:

1) оговариваются доли λ и $(1 - \lambda)$, в соответствии с которыми доход делится между производителем и посредником соответственно, $\lambda \in (0; 1)$;

2) посредник сообщает производителю оценку $\tilde{\theta}$ рыночной цены θ;

3) производитель производит некоторый объем продукта $y \geq 0$ и передает его посреднику;

4) посредник реализует его по рыночной цене и передает производителю оговоренную долю дохода $\lambda\, \theta\, y$, а себе забирает $(1 - \lambda)\, \theta\, y$.

Предполагается, что посредник в точности знает рыночную цену, а производитель, напротив, не обладает никакой априорной информацией о ней.

Производитель характеризуется функцией издержек $c(y)$, которая связывает объем продукции и затраты на его производство (будем считать, что ограничения на мощность отсутствуют, то есть может производиться любой объем продукции).

В описанной ситуации ключевую роль играют три параметра – доля λ, цена θ и объем продукции y. О доле участники договариваются заранее, цену сообщает посредник, объем продукции выбирает производитель.

Теперь рассмотрим вопрос о том, как будут вести себя участники ситуации после того, как они договорились о долях λ и $(1 - \lambda)$. Производитель, стремясь максимизировать свою прибыль, выбирает объем производства y^* в зависимости от своей функции издержек, причитающейся ему доли дохода и сообщаемой посредником рыночной цены. Предположим, что производитель изначально доверяет посреднику, причем у производителя нет возможности проверить, насколько сообщение посредника соответствует действительности. В этом случае посредник может сообщить значение $\tilde{\theta}$, не совпадающее, вообще говоря, с истинным значением рыночной цены θ. Выбор посредником сообщения $\tilde{\theta}$ можно трактовать как осуществление информационного управления.

Наконец, предположим, что посредник стремится проводить стабильное информационное управление, то есть обеспечивать производителю тот доход, который он ожидает получить исходя из значения $\tilde{\theta}$.

В рамках описанных выше предположений целевые функции посредника и производителя выглядят, соответственно, следующим образом:

$$f_0(y, \tilde{\theta}) = \theta y - \tilde{\theta} \lambda y, \; f(y, \tilde{\theta}) = \tilde{\theta} \lambda y - c(y).$$

Подчеркнем, что эти целевые функции записаны с учетом стабилизации, то есть перераспределения доходов центром (в качестве центра здесь выступает посредник) с целью добиться стабильности управления (см. введение к настоящей главе).

Наложим на функцию издержек ограничения таким образом, чтобы прибыль производителя (равная разности дохода и издержек) принимала максимальное значение ровно в одной точке $y^* = y^*(\tilde{\theta}\,) > 0$. Для этого достаточно потребовать, чтобы она была дважды дифференцируемой, и выполнялись условия:

$$c(0) = c'(0) = 0, \quad c'(y) > 0, \quad c''(y) > 0 \quad \text{при} \quad y > 0,$$
$$c'(y) \to \infty \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Потребуем также выполнения следующего свойства: функция $(y\, c'(y))'$ является непрерывной, возрастающей и стремится к бесконечности при $y \to \infty$.

При этих условиях справедливы следующие утверждения.

1. Выбирая оптимальное для себя значение $\tilde{\theta}$, посредник может обеспечить максимальное значение своей целевой функции независимо от значения λ.

2. Существует $\lambda^* = \lambda^*(\theta\,)$, такое что:
   а) если $\lambda = \lambda^*$, то оптимальным для посредника является сообщение истинного значения цены (то есть $\tilde{\theta} = \theta\,$);
   б) если $\lambda < \lambda^*$ ($\lambda > \lambda^*$), то производитель получает бóльшую (меньшую) прибыль по сравнению с той, которую он получил бы при $\tilde{\theta} = \theta$ (то есть в случае сообщения посредником истинного значения цены).

3. Для степенных функций издержек $c(y) = ky^{\alpha}$ ($k > 0$, $\alpha > 1$) и только для них вышеупомянутое значение λ^* является константой (не зависит от цены $\theta\,$): $\lambda^* = 1/\alpha$.

Доказательство. Получив от посредника сообщение $\tilde{\theta}$, производитель максимизирует свою целевую функцию, выбирая объем производства $\tilde{y} = \arg\max\limits_{y \in A} f(y, \tilde{\theta})$ из условия $c'(\tilde{y}) = \tilde{\theta}\,\lambda$.

Подставим $\tilde{y}$ в целевую функцию посредника и с учетом соотношения $\dfrac{d\tilde{y}}{d\tilde{\theta}} = \dfrac{\lambda}{c''(\tilde{y})}$ приравняем нулю ее производную. После преобразований получаем уравнение:

$$c'(\tilde{y}) + \tilde{y}\,c''(\tilde{y}) = \theta. \quad (1)$$

Это уравнение имеет единственное решение $\tilde{y}$ (подчеркнем, что объем производства $\tilde{y}$ зависит только от реальной цены на рынке θ), которому соответствует оптимальное для посредника сообщение

$$\tilde{\theta} = \frac{c'(\tilde{y})}{\lambda}. \quad (2)$$

При этом функция полезности посредника

$$f_0(\tilde{y}, \tilde{\theta}) = \tilde{y}\,(\theta - c'(\tilde{y})),$$

очевидно, не зависит от доли λ. Заметим, что при этом прибыль производителя также не зависит от λ:

$$f(\tilde{y}, \tilde{\theta}) = \tilde{y}\,c'(\tilde{y}) - c(\tilde{y}). \quad (3)$$

Определим долю λ^* следующим образом:

$$\lambda^* = \frac{c'(\tilde{y})}{\theta}. \quad (4)$$

Сопоставляя (2) и (4), видим, что при $\lambda = \lambda^*$ оптимальным для посредника является сообщение $\tilde{\theta} = \theta$.

Пусть теперь $\lambda < \lambda^*$. Тогда для оптимального сообщения посредника имеем (из (2) и (4)):

$$\tilde{\theta} = \frac{\lambda^*}{\lambda}\theta > \theta. \quad (5)$$

Если бы посредник сообщил θ, то производитель выбрал бы y^*, решив уравнение

$$c'(y^*) = \theta\,\lambda, \tag{6}$$

и получил бы прибыль

$$f(\theta) = y^* c'(y^*) - c(y^*). \tag{7}$$

Сопоставляя (2), (5) и (6), получаем (с учетом возрастания $c'(y)$), что $\tilde{y} > y^*$. Далее нетрудно убедиться, что функция $y\,c'(y) - c(y)$ возрастает. Поэтому сравнение (3) и (7) показывает, что при сообщении θ прибыль производителя меньше, чем при сообщении $\tilde{\theta}$.

Аналогично доказывается, что при $\lambda > \lambda^*$ имеет место обратное: прибыль производителя при сообщении θ больше, чем при сообщении $\tilde{\theta}$.

Проверим, при каком условии на функцию издержек $c(y)$ правая часть (4) не зависит от θ. Из (1) видно, что для этого необходимо совместное выполнение соотношений

$$\frac{c'(y)}{\theta} = k_1,\ \ \frac{yc''(y)}{\theta} = 1 - k_1\ \ (k_1 - \text{константа}).$$

Деля второе из них на первое, получаем дифференциальное уравнение

$$yc''(y) - k_2 c'(y) = 0, \tag{8}$$

где $k_2 = (1 - k_1)/k_1$ – произвольная константа.

Решая уравнение (8), получаем (с учетом условий на функцию $c(y)$): $c(y) = ky^{\alpha}$, где $k > 0$, $\alpha > 1$. Нетрудно убедиться (воспользовавшись соотношениями (1) и (4)), что при этом $\lambda^* = 1/\alpha$.

8.2. Коррупция

Рассмотрим следующую теоретико-игровую модель коррупции. Пусть имеются n агентов – чиновников, дополнительный доход каждого из которых пропорционален сумме полученных им взяток $x_i \geq 0$, предложение которых будем считать неограниченным, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$. Пусть каждый из n агентов характеризуется своим типом $r_i > 0$, $i \in N$, и тип агента достоверно ему известен, но не известен остальным агентам. Содержательно тип агента может интерпретироваться как субъективное восприятие им «силы» штрафов.

За коррупционную деятельность ($x_i \geq 0$), вне зависимости от ее размера, на агента может быть наложен штраф $\chi_i(x, r_i)$, зависящий от действий $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n_+$ всех агентов и типа данного агента.

Таким образом, целевая функция i-го агента имеет вид:

$$f_i(x, r_i) = x_i - \chi_i(x, r_i),\ i \in N. \tag{1}$$

Относительно функции штрафов предположим, что она имеет вид:

$$\chi_i(x, r_i) = \varphi_i(x_i, Q_i(x_{-i}), r_i). \tag{2}$$

Содержательно предположение (2) означает, что штраф, накладываемый на i-го агента, зависит от его действия и от агрегированной обстановки $Q_i(x_{-i})$ (которая может интерпретироваться как «общий уровень коррумпированности остальных чиновников» с точки зрения i-го агента).

Предположим, что число агентов и общий вид целевых функций являются общим знанием, а относительно параметра $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Re^n_+$ каждый из агентов имеет иерархию представлений: r_{ij} – представление i-го агента о типе j-го агента, r_{ijk} – представление i-го агента о представлениях j-го агента о типе k-го агента и так далее, $i, j, k \in N$.

Предположим также, что агенты наблюдают общий уровень коррумпированности. Поэтому стабильность информационного равновесия будет иметь место при любых представлениях о типах реальных или фантомных оппонентов, таких, что соответствующее информационное равновесие приводит к одному и тому же значению агрегата $Q_i(\cdot)$ для любого $i \in N$.

Тогда, как нетрудно видеть, для целевых функций агентов (1), (2) выполнены достаточные условия стабильности и истинности равновесия [56, 66]. Поэтому для любого числа агентов и любой структуры информированности все стабильные равновесия в рассматриваемой игре являются истинными.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: пусть набор действий x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$ (где Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N) – стабильное информационное равновесие в игре (1), (2). Тогда это истинное равновесие.

Следовательно, уровень коррумпированности в стабильной ситуации не зависит от взаимных представлений коррупционеров о типах друг друга. При этом не важно, являются сами эти представления истинными или ложными.

Отсюда вытекает, что невозможно повлиять на уровень коррумпированности лишь путем изменения взаимных представлений. Поэтому любое стабильное информационное управление приводит к одному и тому же уровню коррумпированности.

Предположим, что

$$\varphi_i(x_i, Q_i(x_{-i}), r_i) = x_i\,(Q_i(x_{-i}) + x_i) / r_i,\ Q_i(x_{-i}) = \sum_{j \neq i} x_j,\ i \in N,$$

и все типы одинаковы: $r_1 = \ldots = r_n = r$.

Тогда, как нетрудно убедиться, равновесные действия агентов таковы: $x_i = \dfrac{r}{n+1}$, $i \in N$, а общий уровень коррумпированности составляет $\sum_{i \in N} x_i = \dfrac{nr}{n+1}$.

Изменить последнюю величину можно, лишь повлияв непосредственно на типы агентов.

8.3. Формирование команды

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ агентов. Стратегией i-го агента является выбор действия $y_i \geq 0$, что требует от него затрат $c_i(y_i, r_i)$, где $r_i > 0$ – тип данного агента, отражающий эффективность его деятельности[66] (будем считать, что функции затрат являются функциями типа Кобба-Дугласа $c_i(y_i, r_i) = y_i^{\alpha}\, r_i^{1-\alpha}/\alpha,\ i \in N$). Предположим, что целью совместной деятельности агентов является обеспечение суммарного «действия» $\sum_{i \in N} y_i = R$ с минимальными суммарными затратами $\sum_{i \in N} c_i(y_i, r_i)$. С теоретико-игровой точки зрения можно условно считать, что целевые функции агентов совпадают и определяются взятыми с обратным знаком суммарными затратами.

Содержательными интерпретациями данной задачи являются: выполнение заказа объединением предприятий, выполнение заданного объема работ бригадой, отделом и т. д. Без ограничения общности положим $R = 1$.

Если вектор $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ является общим знанием, то, решая задачу условной оптимизации, каждый из агентов может вычислить оптимальный вектор действий

$$y^*(r) = (y_1^*(r),\ y_2^*(r),\ \dots,\ y_n^*(r)),$$

где

$$y_i^*(r) = r_i / \sum_{j \in N} r_j\,,\ i \in N. \tag{1}$$

Рассмотрим несколько различных вариантов информированности агентов о векторе их типов, отличающихся от общего знания (в рассматриваемой модели имеется иерархия представлений агентов о параметрах друг друга).

---

[66] Предполагается, что чем выше эффективность деятельности агента (больше значение его типа), тем меньше его затраты.

А именно, ограничимся двумя случаями: в первом случае каждый агент имеет представления $r_{ij} > 0$ о типах других агентов, во втором – представления $r_{ijk} > 0$ об этих представлениях, $i, j, k \in N$.

В качестве отступления отметим, что если существует центр, которому известны истинные типы агентов и который осуществляет мотивационное управление, то, независимо от информированности агентов, при использовании центром пропорциональной системы стимулирования со ставкой оплаты $1/\sum_{j \in N} r_j$ каждый из агентов независимо выберет соответствующее действие (1) (см. разделы 2.7 и 3.4).

Будем считать, что свой тип каждому агенту известен достоверно. Кроме того, в рамках аксиомы автоинформированности [57] получаем, что $r_{ii} = r_i$, $r_{iij} = r_{ij}$, $r_{ijj} = r_{ij}$, $i, j \in N$.

В рамках своих представлений каждый агент может предсказать, какие действия выберут другие агенты, какие они понесут индивидуальные затраты и каковы будут суммарные затраты. Если выбор действий производится многократно и наблюдаемая некоторым агентом реальность оказывается отличной от его представлений, то он вынужден корректировать свои представления и при очередном своем выборе использовать «новые» представления.

Совокупность наблюдаемых i-м агентом параметров назовем его *субъективной историей игры* и обозначим h_i, $i \in N$. В рамках рассматриваемой модели субъективная история игры может включать:

1) действия, выбранные другими агентами (будем считать, что свои действия агент знает всегда):

$$y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n);$$

2) затраты (фактические) других агентов (при этом он может вычислить и суммарные затраты):

$$c_{-i} = (c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n);$$

3) суммарные затраты всех агентов: $c = \sum_{i \in N} c_i$;

4) действия и затраты (фактические) других агентов (при этом он может вычислить и суммарные затраты):

$$(y_{-i};\ c_{-i});$$

5) действия других агентов и суммарные затраты:

$$(y_{-i};\ c).$$

Видно, что варианты неравнозначны: вариант четыре наиболее «информативен», вариант три менее «информативен», чем вариант два и т. д. Выбор варианта информированности является одним из способов информационного управления со стороны центра.

Два случая структур информированности (представления вида r_{ij} и вида r_{ijk}) и пять вариантов субъективных историй игры (будем считать, что субъективные истории и структуры информированности всех агентов одинаковы, иначе число возможных вариантов резко возрастает) порождают десять моделей, условно обозначенных 1–10 (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Модели формирования команды

Субъективная история игры	Структура информированности	
	$\{r_{ij}\}$	$\{r_{ijk}\}$
y_{-i}	Модель 1	Модель 6
c_{-i}	Модель 2	Модель 7
c	Модель 3	Модель 8
$(y_{-i};\ c_{-i})$	Модель 4	Модель 9
$(y_{-i};\ c)$	Модель 5	Модель 10

Рассмотрим, какие процедуры принятия решений могут использовать агенты при выборе своих действий. В рамках структуры информированности $\{r_{ij}\}$ i-й агент может выбирать свое действие, либо следуя процедуре (1), тогда

$$y_i^*(\{r_{ij}\}) = r_i \,/ \sum_{j \in N} r_{ij}\ , \qquad (2)$$

либо он может, оценив действия оппонентов в соответствии с процедурой (2), вычислить свое действие, приводящее к требуемой сумме действий:

$$y_i^*(\{r_{ij}\}) = 1 - \sum_{k \neq i} (r_{ik} / \sum_{l \in N} r_{il}), \; i \in N. \qquad (3)$$

Легко видеть, что процедуры (2) и (3) эквивалентны.

В рамках структуры информированности $\{r_{ijk}\}$ i-й агент может, оценив действия оппонентов в соответствии с процедурой (1):

$$y_{ij}^*(\{r_{ijk}\}) = r_{ij} / \sum_{l \in N} r_{ijl}, \; j \in N, \qquad (4)$$

вычислить свое действие, приводящее к требуемой сумме действий:

$$y_i^*(\{r_{ijk}\}) = 1 - \sum_{l \neq i} (r_{il} / \sum_{q \in N} r_{ijq}), \; i \in N. \qquad (5)$$

Описав модели принятия агентами решений в статике, рассмотрим *динамику их коллективного поведения*.

Предположим, что на каждом шаге агенты принимают решения, используя информацию только о предыдущем шаге, то есть субъективная история игры включает только соответствующие значения предыдущего периода времени. Этим предположением мы исключаем из рассмотрения случай, когда принятие решений осуществляется на основании всей наблюдаемой рассматриваемым агентом предшествующей траектории игры. (Модели принятия решений в подобном случае чрезвычайно сложны (см. обзор и результаты исследования моделей динамических организационных систем в [51]) и вряд ли позволят сделать содержательно интерпретируемые выводы).

Обозначим $W_i^t(h_i^t)$ – текущее положение цели i-го агента в периоде t – его представления I_i^t о типах оппонентов, которые могли бы приводить к наблюдаемым данным агентом их выборам в периоде $t = 0, 1, \ldots, i \in N$.

Предположим, что первоначально агенты имеют представления I_i^t и изменяют их в зависимости от субъективной истории игры в соответствии с *гипотезой индикаторного поведения* [49]:

$$I_i^{t+1} = I_i^t + \gamma_i^t (W_i^t (h_i^t) - I_i^t),\ t = 0, 1, \dots, i \in N, \qquad (6)$$

где γ_i^t – вектор, компоненты которого – числа из отрезка [0; 1], интерпретируемые как «величины шагов».

Так как представления каждого агента описываются конечным числом параметров r_{ij} или r_{ijk}, $i, j, k \in N$, то под записью (6) будем понимать «векторную» формулировку закона независимого изменения компонент структуры информированности.

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы корректно определить, что будет пониматься под командой. А именно, командой будем считать множество агентов, выборы которых согласованы с иерархией их взаимных представлений друг о друге. В рассматриваемой модели командой будет набор агентов с такой структурой информированности, которая является неподвижной точкой отображения (6) при условии, что действия, выбираемые агентами в зависимости от структур их информированности, определяются выражениями (2) или (5). Введенное определение команды качественно близко к определениям свойств *стабильности* и *согласованности информационного управления*, отвечающих за то, чтобы реальные действия или выигрыши агентов совпадали с ожидаемыми действиями или выигрышами (см. выше и [56, 66]).

Таким образом, в каждом конкретном случае динамика изменения взаимных представлений агентов описывается зависимостью $W_i^t(\cdot)$ положения цели от субъективной истории игры. Рассмотрим модели 1–10 (табл. 8.1), детализировав историю игры и положения целей.

Модель 1. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ij}\}$, наблюдает действия x_{-i}, выбранные другими агентами.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых их действия, выбираемые в соответствии с выражением (2), совпадут с наблюдаемыми действиями x_{-i}:

$$\Omega_i^1 = \{r_{ij} > 0, j \in N \setminus \{i\} \mid r_{ij} / \sum_{j \in N} r_{ij} = x_j, j \in N \setminus \{i\}\}. \quad (7)$$

Обозначим $w_{ij}^t(x_{-i}^t)$ – j-ю проекцию ближайшей к точке $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^1. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать следующим образом:

$$r_{ij}^{t+1} = r_{ij}^t + \gamma_{ij}^t \, (w_{ij}^t(x_{-i}^t) - r_{ij}^t), j \in N \setminus \{i\}, t = 0, 1, \dots, i \in N, \quad (8)$$

а выбор им действий будет следовать выражению (2).

Модель 2. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ij}\}$, наблюдает затраты c_{-i} других агентов.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых их затраты, при действиях, выбираемых в соответствии с выражением (2), совпадут с наблюдаемыми затратами c_{-i}:

$$\Omega_i^2 = \{r_{ij} > 0, j \in N \setminus \{i\} \mid c_j(r_{ij} / \sum_{l \in N} r_{il}, r_{ij}) = c_j, j \in N \setminus \{i\}\}. \quad (9)$$

Обозначим $w_{ij}^t(c_{-i})$ – j-ю проекцию ближайшей к точке $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^2. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать процедурой (8), а выбор им действий будет следовать выражению (2).

Качественно данный случай (в смысле информативности и разрешимости соответствующей системы уравнений – см. выражения (7) и (9)) не сильно отличается от модели 1.

Модель 3. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ij}\}$, наблюдает суммарные затраты c всех агентов.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых суммарные затраты совпадут с наблюдаемыми суммарными затратами c:

$$\Omega_i^3 = \{r_{ij} > 0, j \in N \setminus \{i\} \mid c_i(y_i, r_i) + \sum_{l \in N \setminus \{i\}} [c_j(r_{il} / \sum_{q \in N} r_{iq}, r_{ij})] = c\}. \quad (10)$$

Обозначим $w_{ij}^t(c)$ – j-ю проекцию ближайшей к точке $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^3. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать процедурой (8), а выбор им действий будет следовать выражению (2).

Качественно данный случай (в смысле информативности и множественности решений уравнения, входящего в определение множества Ω_i^3 в выражении (10), а также сложности моделирования) существенно отличается от моделей 1 и 2.

Модели 4 и ***5*** описываются по аналогии с моделями 1 и 2, поэтому рассматривать их подробно мы не будем.

Модель 6. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ijk}\}$, наблюдает действия x_{-i}, выбранные другими агентами.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых их действия, выбираемые в соответствии с выражением (4), совпадут с наблюдаемыми действиями x_{-i}:

$$\Omega_i^6 = \{r_{ijk} > 0, j \in N \setminus \{i\}, k \in N \mid r_{ij} / \sum_{l \in N} r_{ijl} = x_j, j \in N \setminus \{i\}\}. \quad (11)$$

Обозначим $w_{ijk}^t(x_{-i}^t)$ – jk-ю проекцию ближайшей к точке $(r_{ijk}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^6. Тогда динамику представлений агента с номером i можно описать следующим образом:

$$r_{ijk}^{t+1} = r_{ijk}^t + \gamma_{ij}^t (w_{ijk}^t(x_{-i}^t) - r_{ijk}^t), j \in N \setminus \{i\}, t = 0, 1, \dots, i \in N, \quad (12)$$

а выбор им действий будет следовать выражению (5), то есть:

$$y_i^{t^*}(\{r_{ijk}^t\}) = 1 - \sum_{j \neq i} (r_{il}^t \; / \sum_{q \in N} r_{ijq}^t) \; i \in N. \qquad (13)$$

Модель 6 по технике описания и анализа аналогична модели 1, модель 7 – модели 2 и так далее, поэтому рассматривать подробно модели 7–10 мы не будем.

Итак, с точки зрения каждого из агентов в модели 1 имеется $n - 1$ уравнение с $n - 1$ неизвестными, в модели 2: $n - 1$ уравнение с $n - 1$ неизвестными, в модели 3: одно уравнение с $n - 1$ неизвестными, в модели 4: $2(n - 1)$ уравнений с $n - 1$ неизвестными, в модели 5: n уравнений с $n - 1$ неизвестными, в модели 6: $n - 1$ уравнение с $n(n - 1)$ неизвестными и т. д.

В заключение настоящего раздела рассмотрим наиболее простую из десяти перечисленных выше моделей, а именно – модель 1 системы из трех агентов, имеющих сепарабельные квадратичные функции затрат $c_i(y_i, r_i) = (y_i)^2 / 2\, r_i$.

Модель 1 (пример). Из (7) вычисляем:

$$w_{13}(x_2, x_3) = x_3\, r_1 / (1 - x_2 - x_3),$$
$$w_{12}(x_2, x_3) = x_2\, r_1 / (1 - x_2 - x_3),$$
$$w_{21}(x_1, x_3) = x_1\, r_2 / (1 - x_1 - x_3),$$
$$w_{23}(x_1, x_3) = x_3\, r_2 / (1 - x_1 - x_3),$$
$$w_{31}(x_1, x_2) = x_1\, r_3 / (1 - x_1 - x_2),$$
$$w_{32}(x_1, x_2) = x_2\, r_3 / (1 - x_1 - x_2).$$

Пусть $r_1 = 1{,}8;$ $r_2 = 2;$ $r_3 = 2{,}2$, а начальные представления агентов о типах друг друга одинаковы и равны 2. Объективно оптимальным (в смысле минимума суммарных затрат) является вектор действий (0,30; 0,33; 0,37).

Предположим, что агенты действуют следующим образом: на основании собственных представлений о своем типе и типах оппонентов они вычисляют в соответствии с процедурой (2) действия оппонентов, доставляющие «субъективный» суммарный минимум сумме затрат (предсказывают действия оппонентов); сравнивают наблюдаемые действия с предсказанными и изменяют свои представления о типах оппонентов пропорционально разности между наблюдаемыми и предсказанными действиями с коэффициентом пропорциональности $\gamma_{ij}^{t} = 0{,}25$, $i, j \in N$, $t = 0, 1, \ldots$

В результате такой процедуры через 200 шагов получаем вектор действий (0,316; 0,339, 0,345) и следующие представления агентов о типах друг друга: $r_{12} = 1{,}93 < r_2$, $r_{13} = 1{,}94 < r_3$, $r_{21} = 1{,}86 > r_1$, $r_{23} = 2{,}01 < r_3$, $r_{31} = 2{,}02 > r_1$, $r_{32} = 2{,}17 > r_2$. Несмотря на несовпадение представлений с реальностью ситуация является стабильной – ожидаемые действия и наблюдаемые совпадают с точностью до четырех знаков после запятой.

Пусть при $r_1 = 1{,}8$; $r_2 = 2$; $r_3 = 2{,}2$ начальные представления агентов о типах друг друга изменились и стали равны следующим значениям:

$$r_{12}^{0} = 2,\ r_{13}^{0} = 2{,}5,\ r_{21}^{0} = 1{,}5,\ r_{23}^{0} = 2{,}5,\ r_{31}^{0} = 1{,}5,\ r_{32}^{0} = 2.$$

Объективно оптимальным (в смысле минимума суммарных затрат) по-прежнему является вектор действий (0,30; 0,33; 0,37).

Через 200 шагов получим вектор действий (0,298; 0,3484; 0,3524) и следующие представления агентов о типах друг друга: $r_{12} = 2{,}1 > r_2$, $r_{13} = 2{,}12 < r_3$, $r_{21} = 1{,}71 < r_1$, $r_{23} = 2{,}01 < r_3$, $r_{31} = 1{,}85 > r_1$, $r_{32} = 2{,}16 > r_2$. Несмотря на несовпадение представлений с реальностью ситуация является стабильной – ожидаемые действия и наблюдаемые совпадают с точностью до четырех знаков после запятой.

При использовании процедуры (8) при тех же начальных данных получаем вектор действий (0,318; 0,341, 0,341) и следующие представления агентов о типах друг друга: $r_{12} = 1{,}93 < r_2$, $r_{13} = 1{,}93 < r_3$, $r_{21} = 1{,}87 > r_1$, $r_{23} = 2{,}00 < r_3$, $r_{31} = 1{,}05 > r_1$, $r_{32} = 2{,}2 > r_2$. Несмотря на несовпадение представлений с реальностью в этом случае ситуация также является стабильной – ожидаемые действия и наблюдаемые совпадают с точностью до шести знаков после запятой.

Такое явление, как стабильность информационного равновесия, в котором представления агентов друг о друге не совпадают с истиной, имеет простое объяснение: набор систем уравнений (7) для всех агентов относительно представлений агентов и их действий имеет не единственное решение. Действительно, например, в случае двух агентов система из трех уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{r_{12}}{r_1 + r_{12}} = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ \dfrac{r_{21}}{r_2 + r_{21}} = x_1 \end{cases} \qquad (14)$$

с четырьмя неизвестными r_{12}, r_{21}, x_1, x_2 имеет бесконечное множество решений: выражая все неизвестные через x_1 получим следующее семейство решений (при подстановке представлений агентов в (2) получаются тождества): $r_{12} = r_1 (1/x_1 - 1)$, $r_{21} = r_2\, x_1/(1 - x_1)$, $x_2 = 1 - x_1$, $x_1 \in (0; 1)$.

Отметим, что переход к модели 4, то есть добавление информации о затратах оппонентов, может сузить множество решений соответствующей системы уравнений. В рассматриваемой модели одновременное наблюдение затрат и действий агента позволяет однозначно определить его тип (за один шаг).

Приведем пример. Пусть имеются два агента, у которых $r_1 = 1{,}5$; $r_2 = 2{,}5$. Начальные представления: $r_{12}^0 = 1{,}8$, $r_{21}^0 = 2{,}2$, то есть существенно «неправильные». Конечные (через 200 шагов) представления агентов друг о друге равны: $r_{12} = 1{,}747$; $r_{21} = 2{,}147$, то есть не приблизились к истине.

Субъективно равновесными являются действия $x_1 = 0{,}4614$; $x_2 = 0{,}5376$. При этом наблюдаемые действия являются информационным равновесием – они согласованы с индивидуальными представлениями агентов (удовлетворяют системе уравнений (14)).

Множество субъективных равновесий для рассматриваемого примера изображено на рисунке 8.1, на котором кружком помечена начальная точка, ромбиком – истинные значения типов, стрелкой указано изменение представлений агентов.

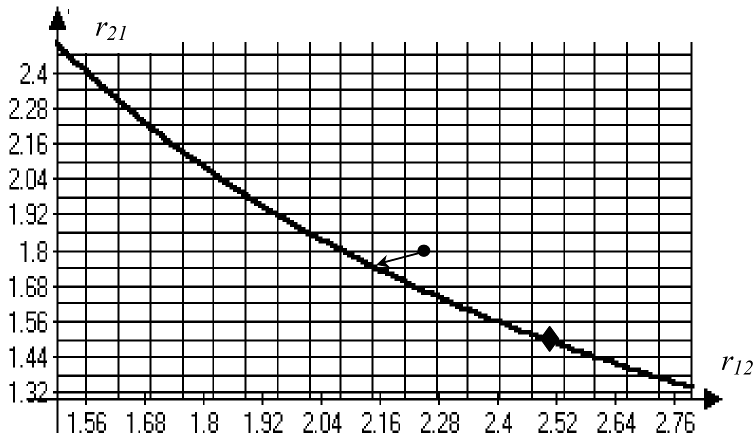


Рис. 8.1. *Множество субъективных равновесий*

Из системы уравнений (14) следует, что стабильными будут все информационные равновесия, удовлетворяющие следующему условию:

$$r_{12}\, r_{21} = r_1\, r_2. \tag{15}$$

Множество взаимных представлений (r_{12}; r_{21}), удовлетворяющих (15) представляет собой гиперболу на соответствующей плоскости. Пример такой гиперболы для случая $r_1 = 2$; $r_2 = 1$ приведен на рисунке 8.2.

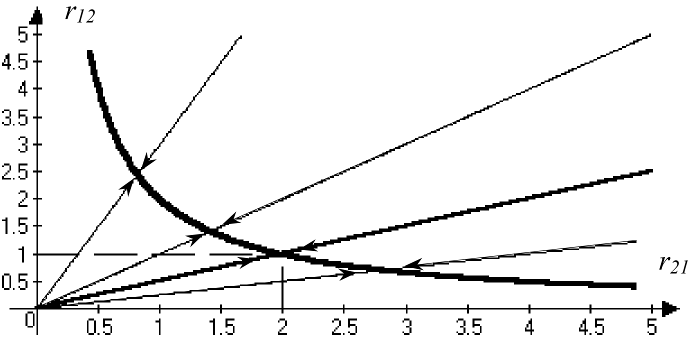


Рис. 8.2. *Множество субъективных равновесий и области их притяжения*

Проведенный анализ дает возможность не только определить множество ложных равновесий (15), но и исследовать области их притяжения: из (8) следует, что динамика взаимных представлений удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\Delta r_{12}^{t+1}}{\Delta r_{21}^{t+1}} = \frac{\gamma_{12}^{t+1}}{\gamma_{21}^{t+1}} \frac{r_{12}^{t}}{r_{21}^{t}}, \ t = 0, 1, \dots , \qquad (16)$$

следовательно, при постоянных и одинаковых «шагах» γ траекториями изменения взаимных представлений будут прямые, проходящие через ноль. Угол наклона этих прямых (рис. 8.2) – областей притяжения точек их пересечения с гиперболой (15) – определяется начальной точкой (например, любая начальная точка, лежащая на выделенной на рис. 8.2 жирным прямой $r_{12} = r_{21} / 2$, приводит к истинному равновесию).

Данный факт представляет интерес с точки зрения информационного управления: зная интересующую его конечную точку, центр легко может вычислить множество начальных точек (прямую), начав движение из которой, агенты сами придут в требуемое для центра равновесие[67] (отметим, что для этого центр должен быть адекватно информирован о типах подчиненных).

Завершив рассмотрение примера, можно сделать вывод, что стабильность команды и слаженность ее работы может достигаться, в том числе, и при ложных представлениях членов команды друг о друге. Выход из ложного равновесия требует получения агентами дополнительной информации друг о друге.

Таким образом, модели формирования и деятельности команд, описываемые в терминах рефлексивных игр, не только отражают автономность и согласованность деятельности команды, но и позволяют ставить и решать задачи управления процессом формирования команды.

Действительно, из рассмотрения моделей 1–10 следует, что существенной является та информация об истории игры, которой обладают агенты. Поэтому одна из управленческих возможностей заключается, во-первых, в создании разнообразных ситуаций деятельности и, во-вторых, обеспечении максимальных коммуникаций и доступа ко всей существенной информации.

Кроме того, проведенный анализ свидетельствует, что на скорость формирования команды (скорость сходимости к равновесию) существенно влияют параметры $\{\gamma\}$ – «размеры шагов», фигурирующие в процедурах динамики коллектив-

---

[67] В случае переменных «шагов» задача сводится к поиску траектории, удовлетворяющей (16) и проходящей через заданную точку множества (16).

ного поведения агентов. Влияние на эти параметры также может рассматриваться как управление со стороны центра[68].

В связи с приведенными примерами возникает естественный вопрос: насколько ситуация ложного равновесия характерна? Попытаемся прояснить это, сформулировав в общем случае условия его возникновения (применительно к модели 1).

Пусть вектор типов агентов $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ является общим знанием, и при данном векторе существует единственный оптимальный вектор действий $y^*(r) = (y_1^*(r), y_2^*(r), ..., y_n^*(r))$.

Тем самым определено n функций φ_i: $r \to y_i^*(r)$, $i \in N$, ставящих в соответствие вектору типов r оптимальное действие i-го агента (будем считать, что функции φ_i определены лишь на таких векторах типов, для которых существует (притом единственный) вектор оптимальных действий.)

Теперь предположим, что только что описанная ситуация выполняется *субъективно*: каждый из агентов *считает*, что вектор типов является общим знанием. Тогда структура информированности игры описывается N векторами вида $(r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in})$, $i \in N$. Информационное равновесие $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ будет стабильным, если каждый из агентов увидит те действия оппонентов, какие и ожидает. Это означает выполнение соотношений

$$\varphi_i(r_{j1}, r_{j2}, \ldots, r_{jn}) = y_i^*, \; i, j \in N. \tag{17}$$

Если равновесие y^* является произвольным, то (17) задает n^2 ограничений на структуру информированности. Если, далее, тип каждого агента фиксирован (и, разумеется, извес-

---

[68] Следует иметь в виду, что, с одной стороны, увеличение размера шага ведет к увеличению скорости сходимости, однако при слишком больших размерах шагов процедура может оказаться неустойчивой.

тен самому агенту), то для выполнения соотношений (17) требуется вычислить $n(n-1)$ величину r_{ij}, $i, j \in N$, $i \neq j$.

Системе (17) заведомо удовлетворяет набор r_{ij}, для которого $r_{ij} = r_j$ при всех i и j. Таким образом, вопрос о существовании ложного равновесия при фиксированном наборе типов $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ сводится к следующему: существует ли у системы (17) более одного решения?

Можно выдвинуть следующую гипотезу: ситуация ложного равновесия является скорее исключением, и его возникновение в рассмотренных выше примерах обусловлено специфическим видом взаимодействия агентов. Этот тезис подтверждают некоторые из рассматриваемых в [56, 66] примеров, в которых ложного равновесия не возникает.

8.4. Предвыборная борьба

Рассмотрим пример рефлексивного управления в предвыборной борьбе. Пусть имеются три кандидата – a, b и c, и выборы проводятся по принципу простого большинства (кандидату для победы достаточно получить поддержку половины избирателей плюс один голос). Если ни один из кандидатов не набрал большинства голосов, то состоится следующий тур с другими кандидатами, которых обозначим d. Допустим, что имеются три группы избирателей, доли которых составляют α_1, α_2 и α_3 ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$). Строгие предпочтения групп избирателей, являющиеся общим знанием, приведены в таблице 8.2 (чем выше расположен кандидат, тем он предпочтительнее).

Таблица 8.2

Предпочтения групп избирателей

α_1	α_2	α_3
a	b	c
b	c	a
c	a	b
d	d	d

Вычислим для каждого попарного сравнения кандидатов число (долю) избирателей, считающих, что один кандидат лучше другого: $S_{ab} = \alpha_1 + \alpha_3$, $S_{ac} = \alpha_1$, $S_{ba} = \alpha_2$, $S_{bc} = \alpha_1 + \alpha_2$, $S_{ca} = \alpha_2 + \alpha_3$, $S_{cb} = \alpha_3$.

Рассмотрим игру избирателей, в которой множество стратегий каждого из них есть $A = \{a, b, c\}$. Предполагая, что вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$ является общим знанием, получаем, что множество равновесий Нэша составляют шесть векторов:

$$(a, a, a) \to a,\ (b, b, b) \to b,\ (c, c, c) \to c,$$
$$(a, b, a) \to a,\ (a, c, c) \to c,\ (b, b, c) \to b.$$

Рассмотрим теперь рефлексивную игру, считая, что активные действия по навязыванию структуры информированности второму и третьему агентам предпринимает первый агент, цель которого – «избрать» кандидата *a*. Пусть структура информированности соответствует *графу рефлексивной игры*[69], приведенному на рисунке 8.3.

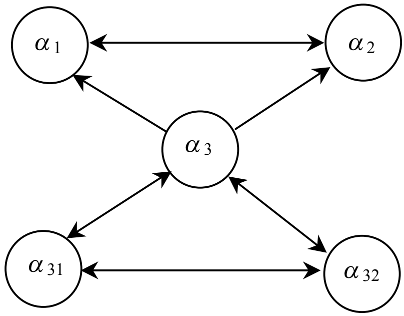


Рис. 8.3. *Граф рефлексивной игры «Выборы»*

Цель первой группы – во-первых, убедить третью группу, что наиболее предпочтительный с ее точки зрения кандидат *c* «не пройдет» (и это якобы является общим

[69] Формальное определение графа рефлексивной игры приведено в Приложении 1.

знанием), и следует поддержать кандидата a. Для этого должно достаточно выполнения:

$$\alpha_{32} + \alpha_3 < 1/2,\ \alpha_{31} + \alpha_3 > 1/2,\ \alpha_{31} + \alpha_3 + \alpha_{32} = 1. \quad (1)$$

Во-вторых, первой группе следует убедить вторую, что будет избран кандидат a и от ее действий ничего не зависит (поддерживать кандидата a вторая группа будет в последнюю очередь). Для этого достаточно, чтобы она была адекватно информирована о представлениях третьей группы (рис. 8.3).

Так как от второй группы исход выборов не зависит, то можно считать, что она проголосует за наиболее предпочтительного с ее точки зрения кандидата b, то есть информационным равновесием будет вектор (a, b, a). Этот вектор является стабильным информационным равновесием. Более того, так как (a, b, a) – одно из равновесий Нэша в условиях полного знания (см. выше), то это – истинное равновесие (хотя представления третей группы могут быть ложными).

8.5. Реклама товара

В настоящем разделе рассматриваются модели информационного управления, осуществляемого средствами массовой информации (СМИ), на примере рекламы и предвыборных технологий.

1. Предположим, что имеется агент – объект информационного воздействия. Цель воздействия – сформировать у агента определенное отношение к конкретному объекту или субъекту.

В случае рекламы агентом является потребитель, а объектом – товар или услуга. Требуется, чтобы потребитель приобрел данный товар или услугу.

В случае предвыборных технологий агентом является избиратель, а субъектом – кандидат. Требуется, чтобы избиратель проголосовал за данного кандидата.

Рассмотрим i-го агента. Всех остальных агентов объединим в одного, для обозначения которого будем использовать индекс j. Пусть $\theta \in \Omega$ – объективная характеристика объекта, неизвестная достоверно ни одному из агентов. В качестве характеристик могут выступать потребительские свойства товаров, качества кандидатов и т. д.

Обозначим $\theta_i \in \Omega$ – представления i-го агента об объекте, $\theta_{ij} \in \Omega$ – его представления о представлениях об объекте j-го агента и т. д.

Предположим для простоты, во-первых, что множество возможных действий каждого агента состоит из двух действий: $X_i = X_j = \{a; r\}$, где действие a (*accept*) соответствует приобретению товара или услуги, голосованию за рассматриваемого кандидата и так далее, а действие r (*reject*) – отказу от приобретения товара или услуги, голосованию за других кандидатов и так далее. Во-вторых, предположим, что множество Ω состоит из двух элементов, характеризующих качества объекта, – g (*good*) и b (*bad*), то есть $\Omega = \{g; b\}$.

Рассмотрим последовательно (в порядке усложнения) ряд моделей поведения агента.

Модель 0 (рефлексия отсутствует). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множества Ω свойств объекта во множество X_i действий агента, то есть $B_i: \Omega \to X_i$. Примером такого отображения может служить следующее: $B_i(g) = a$, $B_i(b) = r$, то есть если агент считает, что товар (кандидат) хороший, то он его приобретает (отдает за него свой голос), и отвергает в противном случае.

В данной модели информационное управление заключается в формировании у агента представлений об объекте, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$. В настоящей работе технологии информационного управления (то есть способы формирования требуемых представлений) не рассматриваются.

Модель 1 (первый ранг рефлексии). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Omega \ni \theta_i$ свойств объекта и $\Omega \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов – во множество X_i его действий, то есть B_i: $\Omega \times \Omega \to X_i$. Примерами такого отображения могут служить следующие:

$$B_i(g, g) = a,\ B_i(g, b) = a,\ B_i(b, g) = r,\ B_i(b, b) = r,$$

и

$$B_i(g, g) = a,\ B_i(g, b) = r,\ B_i(b, g) = a,\ B_i(b, b) = r.$$

В первом случае агент ориентируется на собственное мнение, во втором – на мнение других агентов («общественное мнение»).

В данной модели информационное управление является рефлексивным управлением и заключается в формировании у агента представлений об объекте и о представлениях других агентов, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо в первом случае сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$, θ_{ij} – любое, а во втором случае – $\theta_{ij} = g$, θ_i – любое.

Следует подчеркнуть, что в информационном управлении посредством СМИ воздействие не всегда направлено на формирование непосредственно θ_{ij} – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно: у агента формируются представления о поведении (выбираемых действиях) других агентов, по которым данный агент может восстановить их представления. Примерами косвенного формирования представлений θ_{ij} могут служить рекламные лозунги «Новое поколение выбирает *Pepsi*», «В то время, когда все настоящие мужики…», обращение к мнению авторитетных людей и так далее; информация о том, что по опросам общественного мнения значительное число избирателей собирается поддержать данного кандидата и т. д.

Модель 2 (второй ранг рефлексии). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Omega \ni \theta_i$ свойств объекта, $\Omega \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов, и $\Omega \ni \theta_{iji}$ – представлений агента о представлениях других агентов о его собственных представлениях – во множество X_i его действий, то есть B_i: $\Omega \times \Omega \times \Omega \to X_i$. Примером такого отображения, в котором проявляются отличные от нулевой и первой моделей свойства, может служить следующее:

$$\forall\ \theta \in \Omega\ \ B_i(\theta, \theta, g) = a, B_i(\theta, \theta, b) = r.$$

В данном случае агент следует своей «социальной роли» и производит выбор, которого от него ожидают другие агенты.

В рассматриваемой модели информационное управление является рефлексивным управлением и заключается в формировании у агента представлений о представлениях других агентов о его собственных представлениях, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_{iji} = g$.

Следует отметить, что в информационном управлении воздействие не всегда направлено на формирование непосредственно θ_{iji} – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно: у агента формируются представления о том, что другие агенты ожидают от него определенных действий. В данном случае речь идет о так называемом социальном влиянии, многочисленные примеры которого можно найти в учебниках по социальной психологии (см. ссылки на работы по технологии информационного воздействия в [57, 66]).

Примерами косвенного формирования представлений θ_{iji} могут служить лозунги «Ты записался добровольцем?», «А ты купил (сделал)…?», «В Вашем положении (при Вашем статусе)…?» и так далее; информация о том, что по опросам общественного мнения большинство представителей социальной группы, к которой принадлежит (или с которой идентифицирует себя) агент, собирается поддержать данного кандидата и т. д.

Таким образом, мы рассмотрели простейшие модели информационного управления посредством СМИ, сформулированные в терминах рефлексивных моделей принятия решений и структур информированности. Во всех этих моделях ранг рефлексии не превышал двух (исключением является, наверное, очень редко встречающаяся на практике ситуация, когда информационное воздействие направлено на формирование сразу всей информационной структуры, например, путем навязывания «общего знания»: «Голосуй сердцем!», «… – наш выбор!» и т. д.).

Представить себе реальные ситуации, в которых информационное воздействие направлено на более глубокие компоненты структуры информированности, затруднительно. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является изучение формальных моделей информационного управления (и технологий этого управления) агентами, осуществляющими коллективное принятие решений в условиях взаимосвязанной информированности.

2. Предположим теперь, что имеется два типа агентов: агенты первого типа склонны приобретать товар независимо от его рекламы, агенты второго типа в отсутствии рекламы

приобретать товар не склонны. Обозначим $\theta \in [0; 1]$ – долю агентов первого типа.

Агенты второго типа, доля которых есть $1 - \theta$, подвержены влиянию рекламы, но не осознают этого. Социальное влияние отразим следующим образом: будем считать, что агенты второго типа с вероятностью $p(\theta)$ выбирают действие a, и с вероятностью $1 - p(\theta)$ выбирают действие r. Зависимость $p(\cdot)$ – вероятности выбора – от доли агентов, склонных приобретать товар, отражает нежелание агентов быть «белыми воронами».

Если истинная доля θ агентов первого типа является общим знанием, то агенты ожидают, что именно θ агентов приобретут товар, а фактически наблюдают, что товар приобрели

$$x(\theta) = \theta + (1 - \theta)\, p(\theta) \qquad (1)$$

агентов (напомним, что мы предположили, что влияние рекламы не осознается агентами). Так как $\forall\ \theta \in [0; 1]$ $\theta \le x(\theta)$, то косвенное социальное влияние оказывается самоподтверждающим – «Смотрите, оказывается склонны приобретать товар больше людей, чем мы считали!».

Проанализируем теперь асимметричную информированность. Так как агенты первого типа выбирают свои действия независимо, то можно считать их адекватно информированными как о параметре θ, так и о представлениях агентов второго типа.

Рассмотрим модель информационного регулирования, в которой центр, проводящий рекламную акцию, формирует у агентов второго типа представления θ_2 о значении параметра θ.

Сделав маленькое отступление, обсудим свойства функции $p(\theta)$. Будем считать, что $p(\cdot)$ – неубывающая на $[0; 1]$ функция, такая, что $p(0) = \varepsilon$, $p(1) = 1 - \delta$, где ε и δ – константы, принадлежащие единичному отрезку, такие, что $\varepsilon \leq 1 - \delta$. Содержательно ε соответствует тому, что некоторые агенты второго типа «ошибаются» и, даже если считают, что все остальные агенты имеют второй тип, – приобретают товар. Константа δ характеризует в некотором смысле подверженность агентов влиянию – у агента второго типа имеется шанс быть самостоятельным и, даже если он считает, что все остальные агенты приобретут товар, отказаться от покупки. Частный случай $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$ соответствует независимым агентам второго типа, отказывающимся от приобретения товара.

Так как агенты не подозревают о наличии манипуляции со стороны центра (см. принцип доверия в [55, 57]), то они ожидают увидеть, что θ_2 агентов приобретут товар. Фактически же его приобретут

$$x(\theta, \theta_2) = \theta + (1 - \theta)\, p(\theta_2). \qquad (2)$$

Если доход центра пропорционален доле агентов, приобретающих товар, а затраты на рекламу $c(\theta, \theta_2)$ являются неубывающей функцией θ_2, то целевая функция центра (разность между доходом и затратами) в отсутствии рекламы равна (1), а в ее присутствии:

$$\Phi(\theta, \theta_2) = x(\theta, \theta_2) - c(\theta, \theta_2). \qquad (3)$$

Следовательно, эффективность информационного регулирования можно определить как разность между (3) и (1), а задачу информационного регулирования записать в виде:

$$\Phi(\theta, \theta_2) - x(\theta) \to \max_{\theta_2}. \qquad (4)$$

Обсудим теперь ограничения задачи (4).

Первое ограничение: $\theta_2 \in [0; 1]$, точнее, $\theta_2 \geq \theta$.

Рассмотрим пример.

Пусть $p(\theta) = \sqrt{\theta}$, $c(\theta, \theta_2) = (\theta_2 - \theta)/2\sqrt{r}$, где $r > 0$ – размерная константа. Тогда задача (4) имеет вид:

$$(1 - \theta)\,(\sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta}\,) - (\theta_2 - \theta)/2\sqrt{r} \to \max_{\theta_2 \in [\theta; 1]}. \qquad (5)$$

Решение задачи (5) имеет вид: $\theta_2(\theta) = max\,\{\theta; r\,(1-\theta)^2\}$, то есть при $\theta \geq \dfrac{(2r+1)-\sqrt{4r+1}}{2r}$ информационное регулирование для центра не имеет смысла (затраты на рекламу не окупаются, так как достаточная доля агентов приобретает товар в отсутствии рекламы).

Наложим теперь дополнительно к $\theta_2 \in [\theta; 1]$ требование стабильности информационного регулирования, а именно в предположении наблюдаемости доли агентов, приобретающих товар, будем считать, что агенты второго типа должны наблюдать значение доли агентов, приобретающих товар, не меньшее, чем им сообщил центр, то есть условие стабильности имеет вид:

$$x(\theta, \theta_2) \geq \theta_2.$$

Подставляя (2), получим:

$$\theta + (1 - \theta)\, p(\theta_2) \geq \theta_2. \qquad (6)$$

Следовательно, оптимальным стабильным решением задачи информационного регулирования будем решение задачи максимизации (4) при ограничении (6).

Легко проверить, что в рассматриваемом примере любое информационное регулирование будет стабильным в смысле (6). Если же понимать под стабильностью полное совпадение ожидаемых и наблюдаемых агентами результатов (то есть потребовать выполнение (6) как равенства), то единственным стабильным информационным регулированием будет сообщение центра, что все агенты являются агентами второго типа, то есть $\theta_2 = 1$ (что чаще всего и имеет место в рекламе).

В заключение настоящего раздела отметим, что решение задачи (4), (6) является ложным равновесием, так как если агенты второго типа узнают истинное значение $\theta \in [0; 1]$, то они смогут констатировать, что $\theta \leq \theta_2$ и их действия изменятся.

Глава 9

ИНСТИТУЦИОНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Настоящая глава посвящена описанию такого типа управления организационными системами, как институциональное управление, понимаемое как целенаправленное воздействие на ограничения и нормы деятельности участников организационных систем.

Ограничения и номы деятельности. При рассмотрении модели организационной системы (см. первую главу) перечислялись пять ее компонентов (состав, структура, предпочтения, ограничения и информированность), порождающих соответственно пять типов управления. Управление ограничениями деятельности участников ОС было названо институциональным управлением.

В соответствии с определением, приведенным в Словаре иностранных слов, *институт* – «1) в социологии – определенная организация общественной деятельности и социальных отношений, воплощающая в себе нормы экономической, политической, правовой, нравственной и т. п. жизни общества, а также социальные правила жизнедеятельности и поведения людей; 2) в праве – совокупность норм права, регулирующих какие-либо однородные обособленные общественные отношения». Таким образом, ключевым является понятие *нормы* – «узаконенного установления, признанного обязательным порядка». Поэтому под *институциональным управлением* будем понимать целенаправленное воздействие как на ограничения, так и на нормы деятельности участников ОС.

Различают *явные* (например, закон, контракт, должностная инструкция и т. д.) и *неявные нормы* (например, этические нормы, организационная или корпоративная культура и т. д.). Как правило, явные нормы носят *ограничивающий характер*, а неявные – *побуждающий*, то есть последние отражают то поведение субъекта, которого от него ожидают остальные (см., например, модель формирования команды в главе 8).

Теоретико-игровые модели управления нормами деятельности практически не рассматривались, а модели управления ограничениями деятельности касались:

– игр с запрещенными ситуациями [20];
– динамических моделей, в которых множество допустимых действий агента зависело от параметра, выбираемого центром (см. обзор в [51]);
– производственных цепочек [54], в которых существует технология, накладывающая ограничения на последовательный выбор агентами своих действий;
– механизмов управления с сообщением информации [61], в которых центр, изменяя множества допустимых сообщений агентов, мог добиться score неманипулируемости механизма (то есть того, чтобы всем агентам было выгодно сообщать достоверную информацию).

Первоначально роль институтов начала исследоваться в таком разделе экономической науки, как институциональная экономика.

Институциональная экономика – раздел экономической теории, исследующий роль и влияние институтов и включающий два научных направления: неоинституциональная экономика (включая теории общественного выбора и прав собственности), связанная в первую очередь с именем Рональда Коуза, и новая институциональная экономика (Дуглас Норт) (см. ссылки в [36, 42]).

Совокупность институтов образует институциональную структуру общества и экономики. Институты, по мнению Д. Норта, создают базовые структуры, с помощью которых люди снижают степень своей неуверенности. Институты по Д. Норту – «правила игры» в обществе, которые организуют отношения между людьми. В составе институтов он выделяет три главные составляющие:

1) формальные правила (конституции, законы, административные акты, официально закрепленные нормы права);

2) неформальные ограничения (традиции, обычаи, договоры, соглашения, добровольно взятые на себя нормы поведения, неписаные кодексы чести, достоинства, профессионального самосознания и пр.);

3) механизмы принуждения, обеспечивающие соблюдение правил (суды, полиция и т. д.).

Несмотря на нерядоположенность перечисления, можно видеть, что формальные правила отражают запрещающие нормы, а неформальные ограничения – побуждающие нормы.

Роль институтов – уменьшение неопределенности путем установления устойчивой, хотя и не всегда эффективной, структуры взаимодействия между людьми, определение и ограничение набора альтернатив, которые имеются у каждого человека. Институциональные предпосылки оказывают решающее влияние на то, какие именно организации возникают, и на то, как они развиваются. Но, в свою очередь, и организации оказывают влияние на процесс изменения институциональных рамок. Результирующее направление институциональных изменений формируется, во-первых, «эффектом блокировки», возникающим вследствие сращивания институтов и организаций на основе структуры побудительных мотивов, создаваемой этими институтами, и, во-вторых, обратным влиянием изменений в наборе возможностей на восприятие и реакцию индивидов.

В работах Д. Норта и его последователей построена общая концепция институтов и институциональной динамики, опирающаяся на понятия прав собственности, трансакционных издержек, контрактных отношений и групповых интересов. Благодаря освоению экономической наукой этих понятий стало возможно изучение институциональной структуры производства (институты влияют на экономические процессы тем, что, в том числе, оказывают воздействие на издержки обмена и производства). Отдельным и чрезвычайно важным вопросом, изучаемым институциональной экономикой, является роль государства (государственного регулирования) в экономике.

Таким образом, институты являются предметом исследований в институциональной экономике, однако отсутствие соответствующих формальных моделей и конструктивных результатов делают возможным использование данного раздела экономической теории лишь в качестве методологической основы институционального управления ОС.

Структура изложения. Изложение материала настоящей главы имеет следующую структуру. В разделе 9.1 приводится постановка задачи управления ограничениями деятельности и обсуждаются методы ее решения. Раздел 9.2 посвящен изучению моделей совместного использования институционального и мотивационного управления. В разделе 9.3 на качественном уровне обсуждается специфика институционального управления в многоэлементных системах. В разделе 9.4 приводится постановка задачи управления нормами деятельности и обсуждаются методы ее решения. Разделы 9.5 и 9.6 содержат примеры решения задач институционального управления – соответственно модель аккордной оплаты труда и модель олигополии Курно.

9.1. Задача управления ограничениями деятельности

В соответствии с результатами раздела 1.1 выбор агента из множества A, максимизирующий его целевую функцию $f(\cdot)$, есть множество $C(f, A) = Arg \max_{y \in A} f(y)$. Предположим, что задано некоторое универсальное множество X и задачей центра (задачей управления ограничениями) является выбор ограничения $B \subseteq X$ множества допустимых действий агента с учетом того, что последний выберет действие из множества $C(f, B) = Arg \max_{y \in B} f(y)$.

Пусть предпочтения центра заданы функционалом $\Phi(y, B)$: $X \times 2^X \to \Re^1$, позволяющим сравнивать пары «действие агента – множество его допустимых действий».

Зависимость предпочтений центра от множества B допустимых действий агента обусловлена тем, что введение тех или иных ограничений может потребовать от центра определенных затрат. Если функционал центра $\Phi(y)$ не зависит от допустимого множества B, то задача институционального управления вырождается: центру достаточно выбрать $B = \{x\}$, где $x = arg \max_{y \in X} \Phi(y)$.

В соответствии с общим подходом теории управления к постановке задачи управления (см. раздел 1.2), назовем *эффективностью управления $B \subseteq X$ ограничениями деятельности* следующую величину:

$$K(B) = \max_{y \in C(f, B)} \Phi(y, B). \qquad (1)$$

При определении эффективности (1) предполагается, что агент благожелательно настроен к центру и из множества максимумов своей целевой функции выбирает действие, которое наиболее благоприятно с точки зрения центра.

Задача управления ограничениями деятельности заключается в выборе *оптимального управления* $B^* \subseteq X$, то есть допустимого управления, имеющего максимальную эффективность:

$$K(B) \to \max_{B \in 2^X}, \tag{2}$$

то есть

$$B^* = \arg\max_{B \in 2^X} \max_{y \in C(f, B)} \Phi(y, B). \tag{3}$$

Перебор всех элементов булеана 2^X множества X может оказаться чрезвычайно трудоемкой задачей даже в случае конечного множества X. В случае же бесконечного множества X эта задача может оказаться неразрешимой. Поэтому рассмотрим ряд случаев, в которых удается использовать специфику целевых функций и/или допустимых множеств для того, чтобы свести задачу (2) к той или иной известной оптимизационной задаче.

Предположим, что целевая функция агента непрерывна и действительнозначна, а множество X – компакт в $\Re^m$. Определим следующие величины и множества:

$$f^- = \min_{y \in X} f(y), \tag{4}$$

$$f^+ = \max_{y \in X} f(y), \tag{5}$$

$$l(w) = \{y \in X \mid f(y) \le w\},\ w \in [f^-; f^+], \tag{6}$$

$$h(w) = \{y \in X \mid f(y) = w\},\ w \in [f^-; f^+], \tag{7}$$

$$L(x) = \{y \in X \mid f(y) \le f(x)\},\ x \in X, \tag{8}$$

$$x(B) = \arg\max_{y \in C(f, B)} \Phi(y, B),\ B \subseteq X, \tag{9}$$

$$B(x) = \arg\max_{B \in \{D \in 2^X \mid x \in C(f, D)\}} \Phi(y, B),\ x \in X. \tag{10}$$

В рамках введенных определений имеет место

$$x \in C(f, L(x)),\ x \in X, \tag{11}$$

$$h(w) = C(f, l(w)),\ w \in [f^-; f^+], \tag{12}$$

поэтому задачу (2)–(3) можно записать в виде:

$$B^* = B(y^*), \tag{13}$$

где

$$y^* = arg\ \max_{y \in X} \Phi(y,\ B(y)), \tag{14}$$

или в виде:

$$B^* = arg\ \max_{B \in 2^X} \Phi\,(x\,(B),\ B). \tag{15}$$

Видно, что задачи нахождения максимумов (14) и (15) в общем случае не проще, чем исходная задача (3). Поэтому рассмотрим случай, когда задана параметрическая (с параметрами $\alpha \in [0;\ 1]$ и $x_0 \in X$) система множеств M_α, такая, что $M_0 = x_0,\ M_1 = X$ и $\forall\ 0 \le \alpha \le \beta \le 1,\ M_\alpha \subseteq M_\beta$.

Величина α может интерпретироваться как «степень централизации управления» – значение $\alpha = 0$ соответствует полной централизации («все, кроме x_0, запрещено»), значение $\alpha = 1$ соответствует полной децентрализации («все разрешено»).

Определим функционал $\Phi_\alpha(y) = \Phi\,(y,\ M_\alpha),\quad y \in X$, $\alpha \in [0;\ 1]$. Тогда при фиксированном $x_0 \in X$ в качестве институционального управления можно рассматривать параметр α, а его эффективностью считать величину (ср. с (1)):

$$K(\alpha) = \max_{y \in C(f,\,M_\alpha)} \Phi_\alpha(y). \tag{16}$$

В рамках рассматриваемой модели задача институционального управления примет вид:

$$K(\alpha) \to \max_{\alpha \in [0;1]}, \tag{17}$$

а оптимальным будет значение:

$$\alpha^* = arg\ \max_{\alpha \in [0;1]}\ \max_{y \in C(f,\,M_\alpha)} \Phi_\alpha(y). \tag{18}$$

По аналогии с (4)–(14) задача (17) может быть преобразована следующим образом. Обозначим

$$x\,(\alpha) = arg\ \max_{y \in C(\,f,\,M_\alpha\,)} \Phi_\alpha(y),\ \alpha \in [0;\ 1], \tag{19}$$

$$\alpha\,(x) = arg\ \max_{\alpha \in \{\beta\, \in [0;1] \,|\, x \in C(f,\,M_\alpha)\}} \Phi_\alpha(y),\ x \in X, \tag{20}$$

$$y^* = arg\ \max_{y \in X} \Phi_{\alpha(y)}(y), \tag{21}$$

$$\alpha^* = arg\ \max_{\alpha \in [0;1]} \Phi_{\alpha}(x(\alpha)). \tag{22}$$

Задачи (21) и (22) являются стандартными оптимизационными задачами, поэтому основная сложность заключатся в вычислении зависимостей (19) и (20). Для этого необходимо определять множества, по которым берутся максимумы, – множество выбора агента при заданном управлении в (19) и множество таких управлений, при которых данное действие доставляет максимум целевой функции агента (см. (20)).

Предположим, что непрерывная функция $f(\cdot)$ на допустимом множестве X имеет конечное число n локальных максимумов.

Обозначим точки максимума $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (как минимум один из них – глобальный), которые пронумерованы так, что $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n$, где $\alpha_i = min\ \{\alpha \in [0;\ 1] \mid x_i \in M_\alpha\}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда $x(\alpha)$ – непрерывная справа функция с возможными точками разрыва $\{\alpha_i\}$.

Обозначим $\alpha' = min\ \{\alpha \in [0;\ 1] \mid \max_{y \in X} f(y) = \max_{y \in M_\alpha} f(y)\}$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $X \subseteq \Re^1$, а $f(\cdot)$ – вогнутая функция. Тогда существует единственный максимум x_1 и $x(\alpha)$ – непрерывная функция при $\alpha \in [0;\ \alpha']$, а (22) является стандартной оптимизационной задачей.

Пусть $X = [0;\ 1]$, $\Phi(y) = y - \gamma y^2$, где $\gamma > 0$ – константа, $M_\alpha = [0;\ \alpha]$, $f(y) = y - y^2$.

Тогда $\alpha' = 1/2$, и $x(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \alpha \in [0;\ \alpha'] \\ 1/2, & \alpha \notin [0;\ \alpha'] \end{cases}$, а

$\Phi_\alpha(x(\alpha)) = x(\alpha) - \gamma\,(x(\alpha))^2 = \alpha - \gamma\,\alpha^2$ при $\alpha \in [0;\ 1/2]$ и $\Phi_\alpha(x(\alpha)) = 1/2 - \gamma / 4$ при $\alpha \in [1/2;\ 1]$.

Решением задачи управления ограничениями деятельности является $\alpha^* = \begin{cases} 1/(2\gamma), \gamma \geq 1 \\ 1/2, \qquad \gamma \in [0; 1] \end{cases}$.

9.2. Институциональное и мотивационное управление

Введем в целевую функцию центра в явном виде затраты $Q(B)$, Q: $2^X \to \Re^1$, на управление ограничениями B:

$$\Phi(y, B) = H(y) - Q(B), \tag{1}$$

где $H(y)$, H: $X \to \Re^1$, – функция дохода центра.

Определим множества

$$D(x) = \{y \in X \mid f(y) > f(x)\},\ x \in X. \tag{2}$$

Очевидно, что $y \in C(f(\cdot), B)$ тогда и только тогда, когда $D(y) \cap B = \varnothing$, поэтому управление ограничениями можно рассматривать не только как выбор множества допустимых действий агента, но и как запрет выбора определенных его действий. Определим «стоимость запрета»:

$$q(x) = \min_{\{B \subseteq X \mid B \cap D(x) = \varnothing\}} Q(B),\ x \in X. \tag{3}$$

Величина $q(x)$, определяемая выражением (3), может рассматриваться как *минимальные затраты центра на управление* ограничениями деятельности при реализации (побуждении агента к выбору) действия $x \in X$.

При известных минимальных затратах центра на управление задача управления сводится к задаче оптимального согласованного планирования – определить оптимальное реализуемое действие агента, то есть

$$x_I^* = \arg\max_{y \in X}\ [H(y) - q(y)]. \tag{4}$$

Эффективность институционального управления при этом равна:

$$K_I = H(x_I^*) - q(x_I^*). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь мотивационное управление, которое заключается в побуждении центром агента к выбору определенных действий за счет введения системы доплат, зависящих от этого выбора. Другими словами, центр поощряет агента в случае выбора требуемых действий (планов). Известно (см. главу 2), что минимальные затраты центра на мотивационное управление по реализации (побуждения агента к выбору) действия $x \in X$ равны:

$$c(x) = \max_{y \in X} f(y) - f(x),\ x \in X. \qquad (6)$$

Используя компенсаторную систему стимулирования

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} c(x) + \Delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases},$$

где $\Delta > 0$ – сколь угодно малая строго положительная константа, центр побуждает агента выбрать действие $x \in X$ как единственную точку максимума его целевой функции $f(y) + \sigma(x, y)$.

При известных минимальных затратах центра на мотивационное управление задача мотивационного управления сводится к задаче оптимального согласованного планирования – определить оптимальное реализуемое действие агента, то есть

$$x_m^* = arg \max_{y \in X} [H(y) - c(y)]. \qquad (7)$$

Эффективность мотивационного управления при этом равна:

$$K_m = H(x_m^*) - q(x_m^*). \qquad (8)$$

Сравнение минимальных затрат центра на управление (3) и (6) позволяет делать выводы о сравнительной эффективности институционального и мотивационного управления.

Таким образом, для того чтобы $K_I \geq K_m$, то есть эффективность институционального управления была не ниже эффективности мотивационного управления, достаточно, чтобы имело место

$$\forall\ x \in X\ \ q(x) \leq c(x). \qquad (9)$$

Отметим, что условие (9) является достаточно грубым и, естественно, не является необходимым условием.

На практике, институциональное и мотивационное управление используются совместно, то есть выбор некоторых действий запрещается центром, а за некоторые из разрешенных действий он устанавливает дополнительные вознаграждения. Поэтому рассмотрим формальную модель, позволяющую определить рациональный баланс между институциональным и мотивационным управлением.

Так как в рамках мотивационного управления агент производит выбор действия, максимизирующего его целевую функцию (с учетом установленного центром стимулирования) на множестве допустимых действий, а «допустимые» действия агента определяются институциональным управлением со стороны центра, то определим по аналогии с (6) минимальные затраты центра на мотивационное управление по реализации действия (побуждения агента к выбору) $x \in B$:

$$c(x, B) = \max_{y \in B} f(y) - f(x),\ x \in B. \tag{10}$$

Тогда целевую функцию центра (1) можно записать в виде:

$$\Phi(y, B) = H(y) - c(y, B) - Q(B),\ y \in B,\ B \subseteq X. \tag{11}$$

Первое слагаемое – доход центра, второе слагаемое – затраты по обеспечению выбора агентом из множества B именно действия y, третье слагаемое – затраты на институциональное управление.

Вычислим минимальные затраты центра на совместное институциональное и мотивационное управление по реализации (побуждения агента к выбору) действия $x \in X$:

$$G(y) = \min_{\{B \subseteq X \mid y \in B\}} \{c(y, B) + Q(B)\},\ y \in X. \qquad 12)$$

Если известна зависимость (12), то задача совместного мотивационного и институционального управления заключается в решении задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = arg \max_{y \in X} [H(y) - G(y)]. \qquad (13)$$

В качестве иллюстрации вернемся к примеру, рассмотренному в конце предыдущего раздела. Пусть $X = [0; 1]$, $H(y) = y$, $M_\alpha = [0; \alpha]$, $Q(\alpha) = \gamma \alpha^2$, где $\gamma > 0$ – константа, $f(y) = y - y^2$. Тогда:

$$c(y, \alpha) = f(min\{\alpha; 1/2\}) - f(y),$$

$$G(y) = \min_{\alpha \in [0; y]} \{f(min\{\alpha; 1/2\}) - f(y) + Q(\alpha)\},$$

то есть

$$x^* = \max_{y \in [0;1]} [y - \min_{\alpha \in [0; y]} \{min\{\alpha; 1/2\} - (min\{\alpha; 1/2\})^2 - y + y^2 + \gamma\alpha^2\}].$$

Таким образом, результаты настоящего раздела позволяют сравнивать эффективности институционального и мотивационного управления, а также определять рациональный баланс между запретами и мотивацией агента. Следует отметить, что высокая сложность задач институционального управления приводит к тому, что на практике они решаются либо для частных случаев (ситуаций, когда множества допустимых действий или варианты накладываемых ограничений конечны[70]), либо путем сравнения конечного числа вариантов управления определяется не оптимальный, а рациональный вариант, эффективность которого устраивает центр.

---

[70] Задачу управления ограничениями можно формулировать и следующим образом: существует конечное число возможных ограничений, требуется найти оптимальную комбинацию этих ограничений. Данная задача дискретной оптимизации может быть решена методом динамического программирования.

9.3. Институциональное управление в многоэлементных системах

Рассмотрим ОС, состоящую из одного центра и n агентов с целевыми функциями $f_i(y)$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Предположим, что помимо индивидуальных ограничений на множества допустимых стратегий: $y_i \in A_i$, $i \in N$, существуют глобальные ограничения B на выбор состояний агентами, то есть $y \in A' \cap B$, где $A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

Можно выделить несколько методов учета глобальных ограничений, то есть методов сведения теоретико-игровых моделей с глобальными ограничениями на множества допустимых стратегий игроков к моделям, для которых имеет место *гипотеза независимого поведения* (ГНП), в соответствии с которой допустимым является любой вектор действий агентов, все компоненты которого принадлежат соответствующим допустимым множествам (другими словами, отсутствуют ограничения, кроме $y \in A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$).

Метод штрафов. Данный метод заключается в том, что в случае, когда вектор действий агентов оказывается вне множества B, целевые функции игроков считаются равными минус бесконечности – игроки штрафуются за нарушение ограничений. Далее можно рассматривать игру с «новыми» целевыми функциями, в которой отсутствуют глобальные ограничения. В зависимости от информированности игроков и того, кто из игроков нарушает глобальные ограничения, строятся гарантирующие стратегии [20].

Метод расширения стратегий. В исходной игре все агенты выбирают свои стратегии одновременно и независимо, не обмениваясь информацией с другими игроками (возможность и целесообразность обмена информацией – информационные расширения игр – в играх с запрещенными ситуациями описаны в [20, 34]). Можно рассмотреть игру, в которой каждый из игроков делает предположения о выборе других игроков или реакции других игроков на выбор им той или иной стратегии. В подобных играх используют концепцию П-решения (см. также Байесовское равновесие, равновесие Штакельберга и др. [12, 25, 69]), которая включает в себя максиминные равновесия, равновесия Нэша и ряд других как частные случаи.

Существует несколько частных случаев, в которых учет глобальных ограничений производится «автоматически». Если у каждого из игроков имеется доминантная стратегия (или в игре существует единственное равновесие Нэша) и игра характеризуется полной информированностью, то каждый из игроков может вычислить доминантные стратегии всех остальных игроков (соответственно – точку Нэша). Если при этом вектор доминантных стратегий (или точка Нэша) удовлетворяет глобальным ограничениям, то проблем их учета не возникает.

Отметим, что метод расширения стратегий зачастую требует введения трудно обосновываемых предположений о принципах поведения игроков.

Если в методе штрафов и в методе расширения стратегий никак не оговаривалось наличие управления со стороны центра, то следующие два метода учета глобальных ограничений существенно используют управляющие возможности центра.

Метод согласования. Основная идея метода согласования заключается в следующем (см. также методы решения задач стимулирования и метод согласованного планирования в главе 2). На первом шаге решения задачи управления (стимулирования) для каждого вектора действий, принадлежащего множеству A' (без учета глобальных ограничений), центр ищет допустимое управление, при котором данный вектор действий принадлежит множеству решений игры агентов. Результатом первого шага, например, в задаче стимулирования, является множество A_M действий агентов, реализуемых при данных ограничениях M на систему стимулирования, $A_M \subseteq A'$. Затем на втором шаге центр ищет множество A^* действий агентов, которые, во-первых, реализуемы, во-вторых, удовлетворяют заданным глобальным ограничениям B и на которых достигается максимум его целевой функции. То есть на втором шаге центр решает следующую задачу:

$$A^* = Arg \max_{y \in A',\, M \in M(y),\, B \in B(y)} \Phi(y), \qquad (1)$$

где $M(y)$ – множество управлений, реализующих действие $y \in A'$, а $B(y)$ –ограничения, которые не исключают y.

Максимальная эффективность управления при этом равна $\Phi(y^*)$, где y^* – произвольный элемент множества A^*.

Метод изменения порядка функционирования. Обычно предполагается, что при известной стратегии центра агенты выбирают свои действия одновременно и независимо. Если центр (как метаигрок) может изменить порядок функционирования, то есть последовательность получения информации и выбора стратегий агентами, то, варьируя последовательность выбора стратегий агентами, можно существенно упростить задачу учета глобальных ограничений [50, 53]. Если существует нумерация агентов, такая что допустимые множества имеют вид: $A_i = A_i(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1})$, то каждый агент должен при выборе своей стратегии учитывать ограничения, наложенные совместно глобальным ограничением и уже выбранными стратегиями агентов с меньшими номерами.

Например, допустимой с рассматриваемой точки зрения является последовательность функционирования ОС, имеющая вид сетевого графика (без контуров). Частным случаем является последовательный выбор стратегий агентами – так называемые производственные цепочки [53].

Еще раз подчеркнем, что возможность использования метода изменения порядка функционирования должна быть предусмотрена «правилами игры», то есть учтена в модели ОС. Кроме того, следует иметь в виду, что множество равновесий в новой «иерархической» игре может отличаться от множества равновесий в исходной игре [50, 54].

Применение перечисленных методов подробно рассмотрено в [42, 53].

9.4. Задача управления нормами деятельности

Пусть ОС состоит из n агентов, выбирающих действия $y_i \in A_i$ из компактных множеств A_i и имеющих непрерывные целевые функции $f_i(\theta, y)$, где $\theta \in \Omega$ – состояние природы, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A' = \prod_{i \in N} A_i$, $i \in N$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов.

Нормой деятельности будем называть отображение $\aleph: \Omega \to A'$ множества возможных состояний природы во множество допустимых векторов действий агентов. Содержательно i-я компонента вектор-функции $\aleph(\cdot)$ определяет, какое действие i-го агента от него ожидают остальные агенты и центр.

Пусть предпочтения центра заданы на множестве состояний природы, норм деятельности и действий агентов: $\Phi(\theta, \aleph(\cdot), y)$. Предполагая, что агенты следуют установленным нормам, обозначим $K(\aleph(\cdot)) = F_\theta(\Phi(\theta, \aleph(\cdot), \aleph(\theta)))$ – *эффективность управления* $\aleph(\cdot)$ *нормами деятельности*, где $F_\theta(\cdot)$ – оператор устранения неопределенности. В качестве оператора устранения неопределенности (в зависимости от информированности центра) может использоваться гарантированный результат по множеству Ω или математическое ожидание по известному распределению вероятностей $p(\theta)$ на множестве Ω и т. д. (см. методы устранения неопределенности в разделе 1.1).

Тогда *задачей управления нормами деятельности* при ограничениях $M_\aleph$ на нормы деятельности будет выбор допустимой нормы $\aleph^*(\cdot) \in M_\aleph$, имеющей максимальную эффективность:

$$\aleph^*(\cdot) = arg \max_{\aleph(\cdot) \in M_\aleph} K(\aleph(\cdot)), \tag{1}$$

при условии, что агенты следуют установленным нормам деятельности.

Последнее условие требует пояснений. Так как агенты активны и выбирают свои действия самостоятельно, то выбор агента будет совпадать с выбором, предписываемым нормой, только в том случае, если агенту это выгодно. Детализируем, что можно понимать под «выгодностью».

По аналогии с моделями ограниченной рациональности, рассмотренными в [42, 50], определим *параметрическое равновесие Нэша* [25, 69] и рациональное поведение для каждого из трех типов ограниченной рациональности:

$$E_N^0(\theta) = \{x \in A' \mid \forall\, i \in N, \forall\, y_i \in A_i\ f_i(\theta, x) \geq f_i(\theta, x_{-i}, y_i)\}, \tag{2}$$

$$E_N^1(\theta, \overline{U}) = \{x \in A' \mid \forall\, i \in N\ f_i(\theta, x) \geq \overline{U}_i\}, \tag{3}$$

$$E_N^2(\theta, \varepsilon) = \{x \in A' \mid \forall\, i \in N, \forall\, y_i \in A_i f_i(\theta, x) \geq f_i(\theta, x_{-i}, y_i) - \varepsilon_i\}, \tag{4}$$

$$E_N^3(\theta, \delta) = \{x \in A' \mid \forall\, i \in N, \forall\, y_i \in A_i f_i(\theta, x) \geq (1 - \delta_i) f_i(\theta, x_{-i}, y_i)\}. \tag{5}$$

Будем называть норму $\aleph(\cdot)$ *согласованной* с j-м типом рационального поведения, $j = \overline{0, 3}$, если

$$\forall\ \theta \in \Omega\ \ E_N^j(\theta) \cap \aleph(\theta) \neq \varnothing. \tag{6}$$

Условие (6) можно интерпретировать следующим образом: норма деятельности *реализует* то или иное *равновесие*, если для любого состояния природы выбор, предписываемый нормой, не противоречит рациональности поведения агентов (обеспечивает им соответствующий выигрыш и/или делает невыгодным одностороннее отклонение от нормы). Если $\aleph(\cdot)$ – однозначное отображение, что мы и будем предполагать в дальнейшем, то навязывание центром согласованной нормы деятельности может рассматриваться как сужение множества равновесий (подсказка о существовании фокальной точки и т. д. – см. обсуждение проблемы множественности равновесий в [20, 25, 66, 69]). С этой точки зрения управление нормами деятельности можно рассматривать как задачу реализации соответствия группового выбора (см. обзор результатов теории реализуемости в [61]), в которой $\theta \in \Omega$ является вектором индивидуальных характеристик агентов.

Условия (2) и (6) совместно можно записать в следующем виде: норма $\aleph(\cdot)$ является согласованной тогда и только тогда, когда

$$\forall\ \theta \in \Omega,\ \forall\ i \in N,\ \forall\ y_i \in A_i\ f_i(\theta, \aleph(\theta)) \geq f_i(\theta, \aleph_{-i}(\theta), y_i). \quad (7)$$

Условие (7) означает, что норма согласована с интересами агентов, если при любом состоянии природы каждому агенту выгодно следовать норме деятельности при условии, что остальные агенты также следуют этой норме. Аналогичным условию (7) образом можно записать и условия (3)–(5).

Рассмотрим, какой информированностью должны обладать агенты для того, чтобы существовала согласованная норма. Легко видеть, что условия игры – множество агентов, целевые функции, допустимые множества, а также норма деятельности и состояние природы должны быть *общим знанием*. Напомним, что общим знанием в теории игр [57, 69] называется факт, о котором:

а) известно всем игрокам;

б) всем игрокам известно а);

в) всем игрокам известно б),

и так далее до бесконечности.

Действительно, для вычисления параметрического равновесия Нэша в рамках действующих норм деятельности каждый агент должен быть уверен, что и остальные агенты вычислят то же равновесие, что и он. Для этого он должен поставить себя на место остальных агентов, моделирующих его поведение, и т. д. Одним из способов создания общего знания является публичное сообщение факта всем агентам, собранным вместе. Наверное, в том числе, этим объясняется то, что для формирования корпоративной культуры, корпоративных стандартов поведения и так далее в современных фирмах так много внимания уделяется неформальному общению сотрудников, лояльности фирме, то есть созданию у работников впечатления принадлежности общему делу, разделения общих ценностей, – все это нужно для существования общего знания.

Таким образом, под задачей институционального управления, как управления нормами деятельности, будем понимать задачу (1), (7) поиска нормы, обладающей максимальной эффективностью на множестве допустимых и согласованных норм.

Обозначим $S_{\aleph}$ – множество норм (всевозможных отображений $\aleph: \Omega \to A'$), удовлетворяющих условию (7). Тогда задачу управления можно записать в виде:

$$K(\aleph(\cdot)) \to \max_{\aleph(\cdot) \in M_{\aleph} \cap S_{\aleph}}, \qquad (8)$$

То есть решение задачи управления нормами деятельности заключается в следующем: 1) найти множество $S_{\aleph}$ согласованных норм; 2) найти множество $S_{\aleph} \cap M_{\aleph}$ норм, являющихся одновременно согласованными и допустимыми; 3) выбрать из этого множества норму, обладающую максимальной эффективностью с точки зрения центра.

Первый этап решения задачи (8) является задачей согласованного управления (см. главу 2). Высокая вычислительная сложность этой задачи обусловлена тем, что искомыми переменными являются отображения $\aleph$: $\Omega \to A'$, поэтому исследуем ее более подробно.

Пусть институциональное управление используется совместно с мотивационным, в рамках которого целевая функция i-го агента принимает вид:

$$g_i(\theta, y, \sigma_i) = f_i(\theta, y) + \sigma_i(\theta, \aleph(\cdot), y), y \in X, i \in N, \quad (9)$$

где σ_i: $\Omega \times M_\aleph \times A' \to \Re^1_+$ – функция стимулирования i-го агента.

Получаем, что:

а) при использовании центром мотивационного управления

$$\sigma_i(\theta, \aleph(\cdot), y) = \begin{cases} s_i(\theta, \aleph_{-i}(\theta)), & y_i = \aleph_i(\theta) \\ 0, & y_i \neq \aleph_i(\theta) \end{cases}, \ i \in N, \quad (10)$$

где

$$s_i = \max_{y_i \in A_i} f_i(\theta, \aleph_{-i}(\theta), y_i) - f_i(\theta, \aleph(\theta)) + \Delta_i, \ i \in N, \quad (11)$$

$\Delta_i > 0$ – сколь угодно малая строго положительная константа, $i \in N$, норма $\aleph(\cdot)$ является согласованной;

б) не существует другого мотивационного управления, реализующего $\aleph(\theta)$ как единственное равновесие Нэша игры агентов и требующего от центра строго меньших затрат на стимулирование.

Выражение (11) характеризует минимальные затраты центра на мотивацию i-го агента, побуждающего последнего следовать норме деятельности $\aleph(\cdot)$. Сумма выражения (11) по всем агентам

$$C(\theta, \aleph(\cdot)) = \sum_{i \in N} \max_{y_i \in A_i} f_i(\theta, \aleph_{-i}(\theta), y_i) - \sum_{i \in N} f_i(\theta, \aleph(\theta)) \quad (12)$$

есть ни что иное, как минимальные затраты центра на согласованное (совместное институциональное и мотивационное) управление. Поэтому если целевую функцию центра $\Phi(\theta, \aleph(\cdot), y)$ представить в виде разности дохода $H(y)$ и затрат на управление $C(\theta, \aleph(\cdot))$, то в силу согласованности управления получим:

$$\Phi(\theta, \aleph(\cdot)) = H(\aleph(\theta)) - C(\theta, \aleph(\cdot)). \qquad (13)$$

Тогда эффективность институционального управления $\aleph(\cdot)$ можно определить как

$$K(\aleph(\cdot)) = F_\theta(H(\aleph(\theta)) - C(\theta, \aleph(\cdot))),$$

где $F_\theta(\cdot)$ – оператор устранения неопределенности.

Задача институционального управления

$$F_\theta(H(\aleph(\theta)) - C(\theta, \aleph(\cdot))) \to \max_{\aleph(\cdot) \in M_\aleph} \qquad (14)$$

отличается от задачи (8) тем, что максимизация ведется по множеству всех допустимых норм деятельности, а условие согласованности учтено в максимизируемом критерии[71].

Частным случаем задачи институционального управления является ситуация, в которой центр должен использовать *унифицированное управление*, то есть управление, одинаковое для всех агентов. Понятно, что эффективность унифицированного управления не выше, чем рассмотренного выше персонифицированного (когда в общем случае каждому агенту устанавливается своя норма деятельности). Результаты исследования эффективности унифицированного управления нормами деятельности можно найти в [42].

[71] В качестве отступления отметим, что так как норма деятельности предполагается однозначным отображением, то представляется, что использования мотивационного управления с гибким планом (планом, зависящим от состояния природы) оказывается достаточным. Другими словами, для любого институционального управления в рамках рассматриваемой модели найдется мотивационное управление не меньшей эффективности. При этом процесс решения задачи мотивационного управления намного проще процесса решения задачи институционального управления, так как в первом случае максимизация ведется по множеству действий агентов, а не по множеству отображений.

9.5. Аккордная оплата труда[72]

Рассмотрим ОС, состоящую из центра и n агентов, осуществляющих совместную деятельность.

Стратегией i-го агента является выбор действия $y_i \in A_i = \Re^1_+$, $i \in N$, стратегией центра – выбор системы стимулирования, определяющей размер вознаграждения каждого агента в зависимости от результата их совместной деятельности. Предположим, что технология взаимодействия агентов такова, что для достижения требуемого результата необходимо, чтобы сумма их действий была не меньше заданной величины $\theta \in \Omega$. В этом случае i-й агент получает от центра фиксированное вознаграждение σ_i, $i \in N$, в случае же $\sum_{i \in N} y_i < \theta$ вознаграждения всех агентов равны нулю.

Выбор действия $y_i \geq 0$ требует от i-го агента затрат $c_i(y, r_i)$, где $r_i > 0$ – его тип (параметр, описывающий индивидуальные характеристики), $i \in N$.

Относительно функций затрат агентов предположим, что $c_i(y, r_i)$ – непрерывная возрастающая по y_i и убывающая по r_i функция, причем $\forall\, y_{-i} \in A_{-i}$, $\forall\, r_i > 0$ $c_i(0, y_{-i}, r_i) = 0$, $i \in N$.

Определим множество индивидуально рациональных действий агентов

$$IR = \{y \in A' \mid \forall\, i \in N\ \sigma_i(y) \geq c_i(y, r_i)\}. \qquad (1)$$

В случае если затраты агентов сепарабельны, то есть затраты $c_i(y_i, r_i)$ каждого агента зависят только от его собственных действий и не зависят от действий других агентов, получаем, что $IR = \prod_{i \in N} [0; y_i^+]$, где

$$y_i^+ = max\ \{y_i \geq 0 \mid c_i(y_i, r_i) \leq \sigma_i\},\ i \in N. \qquad (2)$$

[72] Раздел написан совместно с А. Г. Чхартишвили.

Обозначим

$$Y(\theta) = \{y \in A' \mid \sum_{i \in N} y_i = \theta\}, \qquad (3)$$

$$Y^*(\theta) = Arg \min_{y \in Y(\theta)} \sum_{i \in N} c_i(y, r_i). \qquad (4)$$

Рассмотрим последовательно различные варианты информированности агентов о значении параметра $\theta \in \Omega$.

Вариант I. Предположим, что значение $\theta \in \Omega$ является общим знанием. Тогда равновесием игры агентов является параметрическое равновесие Нэша, принадлежащее множеству равновесий Нэша:

$$E_N(\theta) = IR \cap Y(\theta). \qquad (5)$$

Определим также множество эффективных по Парето действий агентов:

$$Par(\theta) = IR \cap Y^*(\theta). \qquad (6)$$

Так как $\forall\ \theta \in \Omega\ \ Y^*(\theta) \subseteq Y(\theta)$, то из (5) и (6) следует, что множество эффективных по Парето действий является одним из равновесий Нэша. Но множество равновесий Нэша может оказаться шире – в частности, при $\theta \geq \max_{i \in N} y_i^+$ оно всегда содержит вектор нулевых действий.

Отметим, что множество (6) Парето-эффективных действий может быть сделано непустым за счет мотивационного управления, то есть выбора соответствующего вектора вознаграждений $\{\sigma_i\}$.

Из того, что $\forall\ \theta \in \Omega\ \ Par(\theta) \subseteq E_N(\theta)$, следует, что любая норма деятельности $\aleph(\cdot)$, для которой выполнено

$$\forall\ \theta \in \Omega\ \ \aleph(\theta) \in Par(\theta), \qquad (7)$$

является одновременно и согласованной, и эффективной по Парето. Содержательно при использовании нормы, удовлетворяющей (7), центр указывает агентам среди достаточно широкого множества равновесий Нэша (при том, что каждому агенту наиболее выгоден выбор минимального действия, принадлежащего соответствующей проекции множества равновесий Нэша (5)) конкретную точку, которая является эффективной по Парето, то есть минимизирует суммарные затраты агентов по достижению требуемого результата.

Приведем пример. Пусть имеются $n = 2$ агента с функциями затрат типа Кобба-Дугласа: $c_i(y_i, r_i) = r_i\, \varphi(y_i / r_i)$, где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, удовлетворяющая $\varphi(0) = 0$.

Тогда эффективной по Парето является единственная точка: $y^*(\theta) = \{ y_i^*(\theta)\}$, где $y_i^*(\theta) = \theta\, r_i / \sum_{j \in N} r_j$, $i \in N$.

Вычислим $y_i^+ = r_i\, \varphi^{-1}(\sigma_i / r_i)$, $i \in N$, тогда при

$$\sigma_i \geq r_i\, \varphi(\theta / \sum_{j \in N} r_j),\ i \in N, \tag{8}$$

множество Парето не пусто (причем множество Парето при различных $\theta \in \Omega$ составляет отрезок прямой с углом наклона, равным отношению типов агентов) и согласованной является норма

$$\aleph_i(\theta) = y_i^*,\ i \in N.$$

Множества равновесий Нэша в рассматриваемом примере для двух значений θ: $\theta_2 > \theta_1$ приведены на рисунке 9.1 (точка (0; 0) является равновесием Нэша в обоих случаях).

Итак, мы рассмотрели первый вариант информированности агентов, соответствующий ситуации, когда значение параметра $\theta \in \Omega$ является общим знанием. Рассмотрим следующий (в порядке возрастания сложности структуры информированности агентов) вариант информированности, в рамках которого общим знанием являются индивидуальные представления $\{\theta_i\}$ агентов о значении параметра $\theta \in \Omega$.

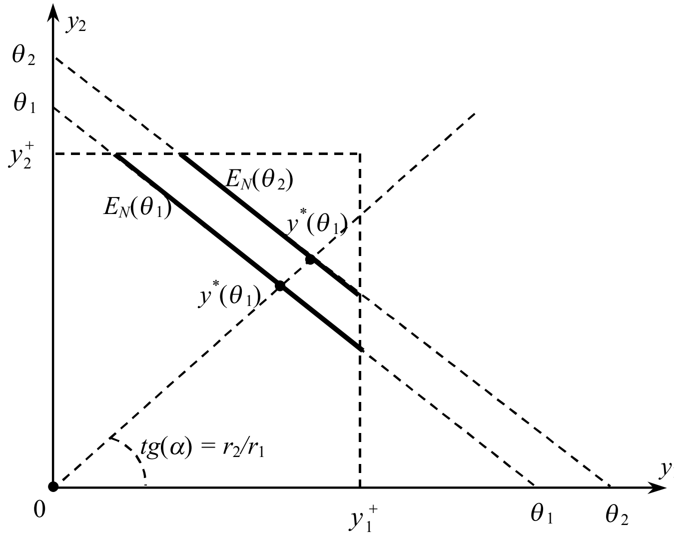


Рис. 9.1. *Параметрическое равновесие Нэша игры агентов*

Вариант II. Предположим, что представления агентов о неопределенном параметре попарно различны (и при этом являются общим знанием). Не ограничивая общности, занумеруем агентов таким образом, чтобы их представления возрастали: $\theta_1 < \ldots < \theta_n$.

Структура возможных равновесий в этой ситуации описывается следующим утверждением [42, 56]: в игре «аккордная оплата труда», для которой $\theta_i \neq \theta_j$ при $i \neq j$, равновесными (в зависимости от соотношения между параметрами) могут быть следующие $(n + 1)$ исходов: $\{y^* \mid y_i^* = 0,\ i \in N\}$; $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0,\ i \in N,\ i \neq k\},\ k \in N$. Содержательно это означает следующее: либо никто не работает, либо работает один k-й агент, выбирая действие θ_k.

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких соотношениях между параметрами θ_i, y_i^+, $i \in N$, реализуется каждое из $(n + 1)$ равновесий, перечисленных выше.

Вектор (0, …, 0) является равновесным в случае, когда никакой i-й агент не может собственными усилиями выполнить достаточную (с его точки зрения) для получения вознаграждения работу (либо это усилие составляет в точности y_i^+, так что выигрыш i-го агента остается нулевым). Это условие формально записывается следующим образом: $y_i^+ \le \theta_i$ для любого i.

Вектор $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0,\ i \ne k\}$ является равновесным, если $\theta_k \le y_k^+$, а все агенты с номерами $i > k$, считая, что вознаграждения не будет, являются недостаточно эффективными, чтобы собственными усилиями компенсировать величину $\theta_i - \theta_k$. Формально: $\theta_k + y_i^+ \le \theta_i$ для любого $i > k$.

Возможные равновесия в игре двух агентов изображены на рисунке 9.2. Заметим, что, в отличие от варианта I, существует область, в которой равновесие отсутствует.

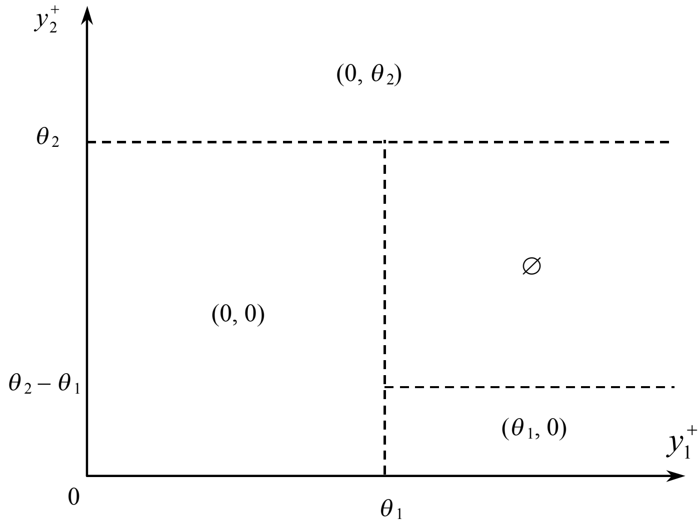


Рис. 9.2. *Равновесия в игре двух агентов (область, где равновесия нет, обозначена символом «∅»)*

Рассмотрим теперь общий случай, когда представления агентов могут и совпадать: $\theta_1 \le \ldots \le \theta_n$. В этом случае может появиться целая область равновесий, аналогично варианту I. Пусть, например, выполняются соотношения $\theta_m = \theta_{m+1} = \ldots = \theta_{m+p}$, $\theta_i \ne \theta_m$ при $i \notin \{m, \ldots, m+p\}$.

Тогда при выполнении условий $\sum_{k=m}^{m+p} y_k^* \ge \theta_m$ и $\theta_m + y_i^+ \le \theta_i$, $i > m$, равновесным является любой вектор $\{y^* \mid \sum_{k=m}^{m+p} y_k^* = \theta_m, \quad y_k^* \le y_k^+, \quad k \in \{m, \ldots, m+p\}; \quad y_i^* = 0, i \notin \{m, \ldots, m+p\}\}$. Содержательно это означает, что в равновесии всю работу выполняют агенты, которые одинаково представляют себе необходимый для получения вознаграждения объем работы.

Вариант III. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину 2, но каждый агент считает, что играет в игру с асимметричным общим знанием. В этом случае множество возможных равновесных ситуаций становится максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; y_i^+]$.

Более того, справедливо следующее утверждение [42]: в игре «аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два (при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием), что вектор y^* является единственным равновесием.

Для того чтобы доказать это утверждение, достаточно для каждого $i \in N$ положить $\theta_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0; \\ y_i^+ + \varepsilon, & y_i^* = 0 \end{cases}$ (здесь ε – произвольное положительное число) и выбрать любые

$\theta_{ij} > \sum_{k \in N} y_k^+$, $j \in N \setminus \{i\}$. Тогда i-й агент ожидает от оппонентов нулевых действий, а его собственным субъективно равновесным действием является y_i^*.

Отметим, что, во-первых, построенное равновесие является (объективно) Парето-эффективным, если сумма $\sum_{i \in N} y_i^*$ равна истинному значению неопределенного параметра θ. Во-вторых, действие $y_i^* = y_i^+$ является равновесным, если $\theta_i = y_i^+$. Однако при этом равновесным будет и действие $y_i^* = 0$ – в обоих случаях субъективно ожидаемый i-м агентом выигрыш равен нулю.

Вариант IV. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину два и на нижнем уровне имеется симметричное общее знание. Иными словами, каждый фантомный агент считает: неопределенный параметр равен θ, и это общее знание.

Оказывается, что и в этом случае множество равновесных ситуаций является максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение [42]: в игре «аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два с симметричным общим знанием на нижнем уровне, что вектор y^* является единственным равновесием.

Строится эта структура информированности следующим образом. Возьмем любое значение $\theta > \sum_{i \in N} y_i^+$ и будем считать, что это значение является общим знанием среди фантомных агентов. Тогда единственным равновесием в игре фантомных агентов является выбор каждым из них нулевого действия. Достаточно для каждого $i \in N$ положить $\theta_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0; \\ y_i^+ + \varepsilon, & y_i^* = 0 \end{cases}$ (здесь ε – произвольное положительное число) и выбрать любые $\theta_{ij} > \sum_{i \in N} y_i^+$, $j \in N \setminus \{i\}$. Тогда i-й агент ожидает от оппонентов нулевых действий, а его собственным субъективно равновесным действием является y_i^*.

Таким образом, игра «аккордная оплата труда», помимо эффектов сложной зависимости структуры информационных равновесий от вида структур информированности и рефлексивного управления, интересна тем, что она иллюстрирует роль управления нормами деятельности в случаях, когда множество равновесий игры агентов состоит более чем из одной точки.

9.6. Дуополия Курно

В настоящем разделе рассматривается пример, иллюстрирующий целесообразность совместного использования информационного и институционального управления.

Напомним, что нормой деятельности называется отображение $\aleph: \Omega \to X'$ множества возможных состояний природы во множество допустимых векторов действий агентов.

Пусть предпочтения центра заданы на множестве состояний природы, норм деятельности и действий агентов: $\Phi(\theta, \aleph(\cdot), y)$. Предполагая, что агенты следуют установленным нормам, обозначим $K(\aleph(\cdot)) = F_\theta(\Phi(\theta, \aleph(\cdot), \aleph(\theta)))$ – *эффективность институционального управления* $\aleph(\cdot)$, где $F_\theta(\cdot)$ – оператор устранения неопределенности. В качестве оператора устранения неопределенности (в зависимости от информированности центра) может использоваться гарантированный результат по множеству Ω или математическое ожидание по известному распределению вероятностей $p(\theta)$ на множестве Ω и т. д.

Тогда *задачей институционального управления* при ограничениях $M_\aleph$ на нормы деятельности будет выбор допустимой нормы $\aleph^*(\cdot) \in M_\aleph$, имеющей максимальную эффективность:

$$\aleph^*(\cdot) = arg \max_{\aleph(\cdot)\in M_\aleph} K(\aleph(\cdot)),$$

при условии, что агенты следуют установленным нормам деятельности. Выше предложено называть норму $\aleph(\cdot)$ *согласованной*, если предписываемое ей действие является информационным равновесием игры агентов.

Можно сформулировать *обратную задачу информационного управления*: пусть задан вектор $x^* \in X'$ действий агентов, требуется найти множество $I(x)$ структур информированности, при которых данный вектор действий является информационным равновесием. Имея решение этой задачи, можно ставить и решать множество других задач управления – как институционального, так и информационного, например, совместного определения информационной структуры и нормы, реализующих заданные действия агентов, и др.

Пусть ОС состоит из двух агентов, имеющих целевые функции

$$f_i(\theta, y) = (\theta - y_1 - y_2)\, y_i - (y_i)^2 / 2,\ i = 1, 2, \qquad (1)$$

множества допустимых действий составляют положительную полуось, а $\Omega = [1; 2]$.

Множества наилучших ответов агентов в рассматриваемом примере состоят из одной точки:

$$BR_1(\theta_1, y_2) = (\theta_1 - y_2) / 3, \qquad (2)$$

$$BR_2(\theta_2, y_1) = (\theta_2 - y_1) / 3. \qquad (3)$$

Предположим, что субъективные представления агентов о состоянии природы являются общим знанием, тогда параметрическое равновесие Нэша есть

$$y_i^*(\theta_1, \theta_2) = (3\ \theta_i - \theta_{3-i}) / 8,\ i = 1, 2. \qquad (4)$$

На рисунке 9.3 приведены множества наилучших ответов агентов при различных $\theta \in \Omega$, а также следующие множества (см. также обозначения, введенные в восьмой главе, а также в четвертом разделе Приложения 1, посвященном рефлексивным играм):

$E_N^0 = \bigcup\limits_{\theta \in \Omega} E_N(\theta, \theta, ..., \theta)$ – множество всевозможных параметрических равновесий Нэша – отрезок FG;

$E_N = \bigcup\limits_{\theta \in \Omega^n} E_N(\theta)$ – четырехугольник $AGCF$;

$E = \prod\limits_{i \in N} Proj_i E_N$ – квадрат $ABCD$;

E^4 (см. определение ниже) – шестиугольник $KLMNPH$.

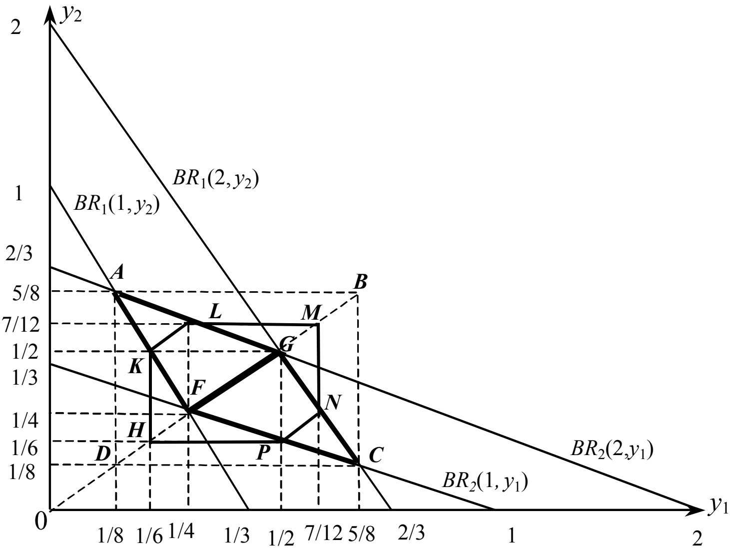


Рис. 9.3. *Множества равновесий*

Приведем решения обратных задач информационного управления для следующих вариантов.

Вариант I. Пусть центр осуществляет унифицированное (однородное) информационное регулирование, то есть структура информированности i-го агента есть $I_i = \theta$, $i \in N$, $\theta \in \Omega$, и сообщаемое центром значение состояния природы θ является общим знанием. Фрагмент (для i-го и j-го агентов) графа соответствующей рефлексивной игры имеет вид $\theta \leftrightarrow \theta$ и не зависит от рассматриваемых агентов.

Множество всевозможных информационных равновесий игры агентов в этом случае есть отрезок (1/4; 1/4)–(1/2; 1/2). Множество информационных равновесий при фиксированном $\theta \in [1; 2]$ есть точка с координатами $(\theta/4; \theta/4)$. Поэтому согласованной является единственная норма $\aleph_i^1(\theta) = \theta/4$, $i = 1, 2$.

Решение обратной задачи следующее: реализуемыми как информационные равновесия являются одинаковые действия обоих агентов из отрезка [1/4; 1/2]. Для того чтобы агенты выбрали вектор действий $x^1 = (\alpha, \alpha)$, следует выбрать $\theta = 4\,\alpha$, $\alpha \in [1/4; 1/2]$.

Вариант II. Пусть центр осуществляет персонифицированное информационное регулирование, то есть структура информированности i-го агента есть $I_i = \theta_i$, $\theta_i \in \Omega$, $i \in N$, и индивидуальные представления агентов о состоянии природы являются общим знанием. Фрагмент (для i-го и j-го агентов) графа соответствующей рефлексивной игры имеет вид $\theta_i \leftrightarrow \theta_j$. Тогда множество всевозможных информационных равновесий игры агентов есть E_N, то есть шире, чем в первом варианте.

Множество всевозможных информационных равновесий E_N игры агентов в этом случае – параллелограмм $AGCF$ (рис. 9.3). Множество информационных равновесий при фиксированном векторе $(\theta_1, \theta_2) \in [1; 2]^2$

есть точка с координатами, определяемыми выражением (4). Поэтому согласованной является единственная норма $\aleph_i^2(\theta_1, \theta_2) = (3\,\theta_i - \theta_{3-i}) / 8$, $i = 1, 2$.

Решение обратной задачи следующее: реализуемыми как информационные равновесия являются действия агентов из параллелограмма *AGCF*. Для того чтобы агенты выбрали вектор действий $x^2 = (x_1^2,\ x_2^2)$, следует выбрать $\theta_1 = 3\ x_1^2\ +\ x_2^2$, $\theta_2 =\ x_1^2\ +3\ x_2^2$.

Вариант III. Пусть центр осуществляет рефлексивное управление, сообщая каждому агенту информацию о неопределенном параметре, а также то, что о значениях этого параметра думают («знают») остальные агенты, то есть структура информированности i-го агента есть $I_i = \{\theta_i, \theta_{ij}\}$, $\theta_i, \theta_{ij} \in \Omega$, $i, j \in N$. Фрагмент (для i-го агента) графа соответствующей рефлексивной игры имеет вид: $\theta_i \leftrightarrow \theta_{ij}$.

Множество всевозможных информационных равновесий E игры агентов в этом случае – квадрат *ABCD* (рис. 9.3).

Рассмотрим для примера первого агента. С его субъективной точки зрения множество информационных равновесий при фиксированном векторе $(\theta_1, \theta_{12}) \in [1; 2]^2$ есть точка с координатами, определяемыми выражением (4), то есть

$$y_1^*(\theta_1, \theta_{12}) = (3\ \theta_l - \theta_{12})/8,\ y_{12}^*(\theta_1, \theta_{12}) = (3\ \theta_{12} - \theta_1)/8. \quad (7)$$

Из (7) получаем, что для того, чтобы первый агент выбрал действие $x_1^3\ \in\ X_1^0\ = [1/8; 5/8]$, вектор (θ_1, θ_{12}) должен удовлетворять:

$$(3\ \theta_1 - \theta_{12}) / 8 =\ x_1^3, \quad (8)$$

$$(3\ \theta_{12} - \theta_1) / 8 \in BR_2(\theta_{12},\ x_1^3) = (\theta_{12} -\ x_1^3) / 3. \quad (9)$$

Условие (9) выполнено всегда в силу определения информационного равновесия, поэтому

$$\Omega_1^3(x_1^3) = \{(\theta_1, \theta_{12}) \in [1; 2]^2 \mid (3\ \theta_1 - \theta_{12}) / 8 =\ x_1^3\}. \quad (10)$$

Аналогично, для второго агента:

$$\Omega_2^3(x_2^3) = \{(\theta_2, \theta_{21}) \in [1; 2]^2 \mid (3\,\theta_2 - \theta_{21})/8 = x_2^3\}. \quad (11)$$

Согласованной является норма

$$\aleph_i^3(\theta_i, \theta_{ij}) = (3\ \theta_i - \theta_{ij})/8,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2.$$

Вариант IV. Альтернативой варианту III является следующий варинт: центр формирует у i-го агента (например, путем публичного сообщения значения параметра $\theta \in \Omega$, а затем частного сообщения значения параметра $\theta_i \in \Omega$) структуру информированности $I_i = (\theta_i, \{\theta_{ij} = \theta\}_{j \neq i})$. Обозначим $\theta_i^4 = (\theta_i, \theta) \in \Omega^2$, $i \in N$.

Фрагмент (для i-го агента) графа соответствующей рефлексивной игры (см. главу 8 и Приложение 1) имеет вид $\theta_i \leftarrow \theta \leftrightarrow \theta$. Множество равновесий Нэша игры фантомных агентов второго и третьего уровня структуры информированности есть $E_N(\theta, \theta, \ldots, \theta)$ (см. выражение (3)), причем это множество могут вычислить все агенты. Следовательно, $X_i^4(\theta_i, \theta) = BR_i(\theta_i, (E_N(\theta, \theta, \ldots, \theta))_{-i})$. Обозначим множество возможных информационных равновесий в рассматриваемом варианте

$$E^4 = \bigcup_{\theta \in \Omega} \{y \in A' \mid y_i \in \bigcup_{\theta_i \in \Omega} X_i^4(\theta_i, \theta)\}. \quad (12)$$

В рассматриваемом примере множество E^4 представляет собой шестиугольник $KLMNPH$ (рис. 9.3).

Фиксируем вектор $x^4 \in X'$ действий агентов. Обозначим $\Omega^4(x^4)$ – такое множество значений векторов параметров $(\{\theta_i\}_{i \in N}, \theta) \in \Omega^{n+1}$, при котором данный вектор действий является информационным равновесием (решение обратной задачи информационного управления):

$$\Omega^4(x^4) = \{(\{\theta_i\}_{i \in N}, \theta) \in \Omega^{n+1} \mid \forall\ i \in N$$
$$x_i^4 \in BR_i(\theta_i, (E_N(\theta, \theta, \ldots, \theta))_{-i})\}. \quad (13)$$

Так как информированностью i-го агента является вектор $\theta_i^4 \in \Omega^2$, то получаем, что в рассматриваемом варианте IV норма $\aleph_i^4(\cdot)$ является согласованной, если

$$\forall\ \theta_i^4 \in \Omega^2,\ \aleph_i^4(\theta_i^4) \in X_i^4(\theta_i^4). \qquad (14)$$

Результаты исследования обратных задач информационного управления для четырех рассмотренных вариантов позволяют сделать вывод, что с точки зрения множеств информационных равновесий эти варианты соотносятся следующим образом [42]:

$$\mathrm{I} \subseteq \mathrm{II} \subseteq \mathrm{III},\ \mathrm{IV} \subseteq \mathrm{III},\ \mathrm{II} \subseteq \mathrm{IV};\ \mathrm{II} \cap \mathrm{IV} \neq \varnothing,$$

а с точки зрения множеств согласованных норм: $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{IV} \subseteq \mathrm{III} = \mathrm{II}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в теории управления организационными системами теоретические результаты нашли свое применение при создании прикладных моделей, которые, в свою очередь, использовались на практике при синтезе или модификации механизмов управления реальными социально-экономическими системами. Следует отметить, что многие классы одних и тех же прикладных механизмов с соответствующими модификациями использовались при решении самых разных прикладных задач.

Ниже перечисляются области внедрения и основные работы, содержащие описание методик внедрения и опыта практического использования прикладных моделей.

С точки зрения масштаба наиболее крупным объектом управления являются регионы. При разработке и реализации *программ регионального развития* используются методы комплексного оценивания состояния региона, конкурсные механизмы отбора предприятий в программу регионального развития, методы оптимизации программ по стоимости, механизмы распределения финансовых ресурсов, в том числе механизмы согласия и экспертные механизмы [1, 13].

Наиболее богатый опыт внедрения результатов моделирования механизмов управления накоплен, наверное, в области *управления промышленными предприятиями* [3, 11, 22, 65, 67]. Совершенствование хозяйственного механизма, реформирование и реструктуризация предприятий и корпоративных структур требуют использования механизмов распределения корпоративных заказов и финансов, в том числе методов «затраты – эффект», механизмов определения внутренних цен, стимулирования и оперативного управления.

Обширной областью применения теоретических результатов решения задач управления ОС стали *механизмы управления проектами* (УП), охватывающие большинство задач УП и используемые на протяжении всего жизненного цикла проекта [3, 11, 14, 18, 22, 29, 30, 35, 64].

Другой областью являются организационные и экономические *механизмы управления безопасностью* сложных систем [3], в том числе создаваемые в рамках Федеральной программы «Безопасность».

Богатый опыт был накоплен по реализации *механизмов управления развитием* приоритетных направлений науки и техники [14, 33], в том числе – разрабатываемых совместно с Миннауки РФ.

Интересную, как с содержательной, так и с методической точки зрения, область представляют *механизмы управления образовательными системами* [41, 44], в том числе *качеством подготовки специалистов* [15], которые использовались, совместно с имитационными играми [67], в качестве содержания и форм учебного процесса.

Механизмы обмена [31] применяются при оптимизации *взаимозачетных схем* на межгосударственном уровне, а также при оптимизации *давальческих схем* [6].

Наконец, отметим широкое применение многоканальных механизмов в *автоматизированных системах управления производством* [9].

Полученные результаты свидетельствуют, что использование моделей теории управления является средством повышения эффективности управления социально-экономическими и организационными системами самого разного масштаба – от бригады и цеха до отрасли и региона. В то же время, практика все время ставит перед специалистами по управлению все новые и новые задачи.

С точки зрения актуальности дальнейшего развития теории можно выделить следующие классы задач: адекватного учета и дальнейшего развития в формальных моделях современных представлений психологии, экономики и социологии; разработки моделей и методов синтеза состава и структуры ОС, в том числе многоуровневых, динамических и сетевых структур управления; разработки моделей и методов информационного управления; разработки методов оценки эффективности и синтеза комплексных механизмов на основе системы базовых механизмов, рассмотренных в настоящей книге.

С практической точки зрения следует выделить необходимость обобщения опыта практического использования различных механизмов управления с целью создания прикладных методик и автоматизированных информационных систем, которые позволили бы использовать в каждом конкретном случае адекватные и эффективные процедуры управления. Кроме того, важными организационными задачами представляются, во-первых, подготовка специалистов по управлению, оснащенных полным арсеналом современных знаний и навыков в области управления, и, во-вторых, популяризация теоретических результатов и установление более тесных содержательных и информационных связей с близкими разделами науки и практики управления, ведь дальнейшее успешное решение теоретических и практических задач управления организационными системами возможно только совместными усилиями математиков, психологов, экономистов, социологов и представителей других отраслей науки.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Настоящее приложение содержит описание основных понятий и моделей теории игр. В том числе кратко рассматриваются: некооперативные игры, кооперативные игры, иерархические игры и рефлексивные игры. Для более полного ознакомления с проблематикой и результатами использования теоретико-игровых моделей в задачах управления организационными системами можно рекомендовать учебники и монографии [20, 23, 25, 34, 38, 39, 60, 68, 69].

П.1.1. Некооперативные игры

В первой главе описаны модели индивидуального принятия решений. Рассмотрим теперь *игровую неопределенность*, отражающую совместное принятие решений несколькими агентами (при заданных управлениях со стороны центра), в рамках которой существенными являются предположения агента о множестве возможных значений *обстановки игры* (действий других агентов, выбираемых ими в рамках тех или иных неточно известных рассматриваемому агенту принципов их поведения).

Для описания коллективного поведения агентов недостаточно определить их предпочтения и правила индивидуального рационального выбора по отдельности. Как отмечалось выше, в случае, когда в системе имеется единственный агент, гипотеза его рационального (индивидуального) поведения предполагает, что агент ведет себя таким образом, чтобы выбором действия максимизировать значение своей целевой функции. Если агентов несколько, необходимо учитывать их взаимное влияние: в этом случае возникает *игра* – взаимодействие, в котором выигрыш каждого агента зависит как от его собственного действия, так и от действий других агентов. Если в силу гипотезы рационального поведения каждый из агентов стремится выбором действия максимизировать свою целевую функцию, то понятно, что в случае нескольких агентов индивидуально рациональное действие каждого из них зависит от действий других агентов.

Рассмотрим теоретико-игровую модель *некооперативного взаимодействия* между n агентами, предполагая, что они принимают решения одновременно и независимо, не имея возможности договариваться о выбираемых действиях, перераспределять получаемую полезность (выигрыш) и т. д.

Каждый агент осуществляет выбор *действия* x_i, принадлежащего *допустимому множеству* X_i, $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$ – *множеству агентов*. Выбор действий агентами осуществляется однократно, одновременно и независимо.

Выигрыш i-го агента зависит от его собственного действия $x_i \in X_i$, от вектора действий

$$x_{-i} = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$$

оппонентов $N \setminus \{i\}$ и от состояния природы[73] $\theta \in \Omega$ и описывается действительнозначной функцией выигрыша $f_i = f_i(\theta, x)$, где $x = (x_i, x_{-i}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X' = \prod_{j \in N} X_j$ – вектор действий всех агентов, который называется ситуацией игры. При фиксированном значении состояния природы совокупность $\Gamma_0 = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N})$ множества агентов, множеств их допустимых действий и целевых

[73] Состояние природы может быть, в том числе, вектором, компоненты которого отражают индивидуальные характеристики (типы) агентов.

функций называется игрой в нормальной форме. Решением игры (равновесием) называется множество устойчивых в том или ином (и оговариваемом в каждом конкретном случае) смысле векторов действий агентов [25].

В силу гипотезы рационального поведения каждый агент будет стремиться выбрать наилучшие для него (с точки зрения значения его целевой функции) действия при заданной обстановке. *Обстановкой* для него будет совокупность состояния природы $\theta \in \Omega$ и *обстановки игры*

$$x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j .$$

Следовательно, принцип принятия i-м агентом решения о выбираемом действии (при фиксированных обстановке и состоянии природы) можно записать следующим образом (*BR* обозначает *наилучший ответ – best response*)[74]:

$$BR_i(\theta, x_{-i}) = Arg \max_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}), \ i \in N.$$

Рассмотрим возможные принципы принятия решений агентами, каждый из которых порождает соответствующую концепцию равновесия, то есть определяет, в каком смысле устойчивым должен быть прогнозируемый исход игры.

Равновесие в доминантных стратегиях. Если для некоторого агента множество его наилучших ответов не зависит от обстановки, то оно составляет множество его доминантных стратегий (совокупность доминантных стратегий всех агентов называется *равновесием в доминантных стратегиях* – РДС) [25]. Если у каждого из агентов существует доминантная стратегия, то они могут принимать решения независимо, то есть выбирать действия, не имея никакой информации и не делая никаких предположений

[74] При использовании максимумов и минимумов предполагается, что они достигаются.

об обстановке. К сожалению, РДС существует далеко не во всех играх.

Для реализации агентами РДС, если последнее существует, достаточно знания каждым из них только своей целевой функции и допустимых множеств X' и Ω.

Гарантирующее равновесие. Той же информированностью должны обладать агенты для реализации *гарантирующего* (*максиминного*) *равновесия*, которое существует почти во всех играх:

$$x_i^г \in Arg \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} \min_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ i \in N.$$

Содержательно в случае гарантирующего равновесия предполагается, что каждый агент рассчитывает на реализацию наихудшей для себя обстановки.

Равновесие Нэша. Определим многозначное отображение

$$BR(\theta, x) = (BR_1(\theta, x_{-1}); BR_2(\theta, x_{-2}), \dots, BR_n(\theta, x_{-n})).$$

Равновесием Нэша [25] при состоянии природы θ (точнее, *параметрическим равновесием Нэша*) называется точка $x^*(\theta) \in X'$, удовлетворяющая следующему условию:

$$x^*(\theta) \in BR(\theta, x^*(\theta)).$$

Последнее вложение можно также записать в виде:

$$\forall\ i \in N,\ \forall\ y_i \in X_i\ f_i(\theta, x^*(\theta)) \geq f_i(\theta, y_i, x_{-i}^*(\theta)).$$

Множество $E_N(\theta)$ равновесий Нэша можно описать следующим образом:

$$E_N(\theta) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X' \mid x_i \in BR_i(\theta, x_{-i}),\ i \in N\}.$$

Для реализации равновесия Нэша достаточно, чтобы рациональность агентов и все параметры игры, а также значение состояния природы были *общим знанием* [57], то есть каждый из агентов рационален, знает множество участников игры, целевые функции и допустимые множества всех агентов, а также значение состояния природы. Кроме того, он знает, что другие агенты знают это, а также то, что они знают, что он это знает, и так далее до бесконечности. Отказ от предположения об общем знании превращает игру в нормальной форме в рефлексивную игру (см. ниже раздел П.1.4 и [57]).

Субъективное равновесие. Рассмотренные виды равновесия являются частными случаями *субъективного равновесия*, которое определяется как вектор действий агентов, каждая компонента которого является наилучшим ответом соответствующего агента на ту обстановку игры, которая может реализоваться с его субъективной точки зрения. Рассмотрим возможные случаи.

Предположим, что i-й агент рассчитывает на реализацию обстановки игры $\widehat{x}_{-i}^{B}$ («B» обозначает *beliefs*; иногда используются термины «предположение», «догадка» – *conjecture*) и состояния природы $\widehat{\theta}_i$, тогда он выберет

$$x_i^B \in BR_i(\widehat{\theta}_i, \widehat{x}_{-i}^{B}), i \in N.$$

Вектор x^B является точечным субъективным равновесием.

Отметим, что при таком определении «равновесия» не требуется *обоснованности* предположений агентов о действиях оппонентов, то есть может оказаться, что $\exists\ i \in N$: $\widehat{x}_{-i}^{B} \neq x_{-i}^{B}$. Обоснованное субъективное равновесие, то есть такое, что $\widehat{x}_{-i}^{B} = x_{-i}^{B}$, $i \in N$, является равновесием Нэша (для этого, в частности, достаточно, чтобы все параметры игры были общим знанием и чтобы каждый агент при построении $\widehat{x}_{-i}^{B}$ моделировал рациональное поведение оппонентов). В частном случае, если наилучший ответ каждого агента не зависит от предположений об обстановке, субъективное равновесие является равновесием в доминантных стратегиях.

В более общем случае i-й агент может рассчитывать на выбор оппонентами действий из множества $X_{-i}^B \subseteq X_{-i}$ и реализацию состояния природы из множества $\hat{\Omega}_i \subseteq \Omega$, $i \in N$. Тогда наилучшим ответом будет *гарантирующее субъективное равновесие*:

$$x_i(X_{-i}^B, \hat{\Omega}_i) \in Arg \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}^B} \min_{\theta \in \hat{\Omega}_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}), i \in N.$$

Если $X_{-i}^B = X_{-i}$, $\hat{\Omega}_i = \Omega$, $i \in N$, то $x_i(X_{-i}^B) = x_i^г$, $i \in N$, то есть гарантирующее субъективное равновесие является «классическим» гарантирующим равновесием. Разновидностью гарантирующего субъективного равновесия является П-равновесие, подробно описанное в [12].

В еще более общем случае в качестве наилучшего ответа i-го агента можно рассматривать распределение вероятностей $p_i(x_i)$, где $p_i(\cdot) \in \Delta(X_i)$ – множеству всевозможных распределений на X_i, которое максимизирует ожидаемый выигрыш агента с учетом его представлений о распределении вероятностей $\mu_i(x_{-i}) \in \Delta(X_{-i})$ действий, выбираемых другими агентами, и распределении вероятностей $q_i(\theta) \in \Delta(\Omega)$ состояния природы (получим *Байесов принцип принятия решений*) [69]:

$$p_i(\mu_i(\cdot), q_i(\cdot), \cdot) \in$$

$$\in Arg \max_{p_i \in \Delta(X_i)} \int_{X', \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i})\, p_i(x_i)\, q_i(\theta)\, \mu_i(x_{-i})\, d\theta\, dx, i \in N.$$

Таким образом, для реализации субъективного равновесия требуется минимальная информированность агентов: каждый из них должен знать свою целевую функцию $f_i(\cdot)$ и допустимые множества Ω и X'. Однако при такой информированности предположения агентов о состоянии природы и о поведении оппонентов могут быть *несогласованными*. Для достижения согласованности, то есть для того, чтобы предположения оправдывались, необходимы дополнительные предположения о взаимной информированности агентов. Наиболее сильным является предположение об общем знании, которое превращает субъективное точечное равновесие в равновесие Нэша, а совокупность Баейсовых принципов принятия решений – в равновесие Байеса-Нэша.

Равновесие Байеса-Нэша. Если в игре имеется неполная информация (см. [25, 57, 69]), то Байесова игра описывается следующим набором:

– множеством N агентов;
– множеством K' возможных *типов* агентов, где тип i-го агента $k_i \in K_i$, $i \in N$, вектор типов $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in K' = \prod_{i \in N} K_i$;
– множеством $X' = \prod_{i \in N} X_i$ допустимых векторов действий агентов;
– набором функций полезности u_i: $K' \times X' \to \Re^1$;
– представлениями $\mu_i(\cdot|k_i) \in \Delta(K_{-i})$, $i \in N$, агентов.

Равновесие Байеса-Нэша в игре с неполной информацией определяется как набор стратегий агентов вида σ_i: $K_i \to X_i$, $i \in N$, которые максимизируют соответствующие ожидаемые полезности

$$U_i(k_i, \sigma_i(\cdot), \sigma_{-i}(\cdot)) = \int\limits_{k_{-i} \in \prod_{j \neq i} K_j} u_i(k, \sigma_i(k_i), \sigma_{-i}(k_{-i}))\, \mu_i(k_{-i}|\, k_i)\, dk_{-i},\ i \in N.$$

В Байесовых играх, как правило, предполагается, что представления $\{\mu_i(\cdot|\cdot)\}_{i \in N}$ являются общим знанием. Для этого, в частности, достаточно, чтобы они были *согласованы*, то есть выводились каждым из агентов по формуле Байеса из распределения $\mu(k) \in \Delta(K')$, которое является общим знанием.

Выше рассмотрены некоторые концепции решения некооперативных игр. Приведем основные понятия кооперативных игр, моделирующих взаимодействие агентов, которые имеют возможность образовывать коалиции и в рамках этих коалиций договариваться о выбираемых действиях, перераспределять полезность и так далее (отметим, что в настоящей работе рассматриваются в основном некооперативные модели – результаты исследования кооперативного взаимодействия участников организационных систем описаны в [24, 25, 38, 68]).

П.1.2. Кооперативные игры

Кооперативная игра задается множеством игроков $N = \{1, \ldots, n\}$ и характеристической функцией v: $2^N \to R$, ставящей в соответствие каждой *коалиции* игроков $S \subseteq N$ ее выигрыш.

Дележом игры (N, v) называется вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которого $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (*свойство эффективности*), $x_i \geq v(\{i\})$, $i \in N$ (*свойство индивидуальной рациональности*).

Решением кооперативной игры обычно считается множество дележей, которые реализуемы при рациональном поведении игроков. Различные концепции решения кооперативных игр отличаются предположениями о рациональном поведении игроков.

Говорят, что дележ x доминирует дележ y по коалиции S ($x \succ_S y$), если $\forall i \in S \quad x_i > y_i$, $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$. Если существует такая коалиция S, что $x \succ_S y$, говорят, что дележ x доминирует дележ y. Множество недоминируемых дележей игры называется ее C-ядром.

Для заданного множества игроков N *сбалансированным покрытием* называется такое отображение δ_S множества собственных коалиций $2^N \backslash \{N\}$ в отрезок [0, 1], что $\sum_{S:\, i \in S} \delta_S = 1$ для всех игроков $i \in N$ (суммирование ведется по собственным коалициям, содержащим игрока i).

Необходимые и достаточные условия непустоты *С*-ядра даются *теоремой О. Н. Бондаревой*: *С*-ядро игры (N, v) не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия δ_S

$$\sum_{S\subset N}\delta_S v(S) \le v(N).$$

Игры с непустым *С*-ядром называются *сбалансированными*.

Кооперативная игра называется *несущественной*, если для произвольной коалиции $S \subseteq N$ $v(S) = \sum_{i\in S} v(\{i\})$, в противном случае игра называется *существенной*. Несущественность игры означает нулевой эффект от кооперации игроков.

Игровая ситуация является *сильным равновесием Нэша*, если никакая коалиция не может выиграть, отклоняясь от равновесной ситуации. Множество сильных равновесий Нэша может оказаться пустым, однако если в некоторой игре с трансферабельной полезностью игроков имеется единственное сильное равновесие Нэша, то соответствующая кооперативная игра будет несущественной.

Концепция *решений в угрозах и контругрозах* основана на следующей идее. Пусть, например, в процессе игры трех лиц образовалась коалиционная структура $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, содержащая коалицию $T = \{1, 2\}$, в которую входят игроки с номерами 1 и 2. При распределении дохода коалиции $v(\{1, 2\})$ игроки 1 и 2 получают суммы x_1 и x_2 соответственно. Тогда, если игрок 1 недоволен таким распределением, он может сказать своему партнеру, что если его доля дохода не будет увеличена, то он сформирует коалицию $S = \{1, 3\}$, где сможет рассчитывать на бо́льший выигрыш. Если такая коалиция S может образоваться, то есть если игроку 3 выгодно сменить конфигурацию x на новую конфигурацию y, то такое заявление называется угрозой игрока 1 игроку 2. В свою очередь игрок 2 может заявить игроку 1, что в случае подобных его действий он может предложить игроку 3 такую конфигурацию z коалиционной структуры $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, что игрок 3 получит бо́льший доход, чем в конфигурации y, а сам игрок 2 получит не меньше, чем в исходной конфигурации x. Таким образом, игрок 2 выдвигает контругрозу, «защищающую» его долю x_2.

Тогда распределение выигрыша коалиций некоторой коалиционной структуры между своими участниками является равновесием в угрозах и контругрозах, если на каждую угрозу произвольной коалиции K против любой другой коалиции L найдется контругроза коалиции L против коалиции K.

П.1.3. Иерархические игры

Если в рассматриваемых до сих пор моделях игровой неопределенности предполагалось, что игроки (агенты) выбирают свои стратегии одновременно и однократно (модели повторяющихся и дифференциальных игр в настоящей работе не рассматриваются – см. [23, 69]), то в *иерархических играх* [20, 23, 25, 34] существует фиксированный порядок ходов – первый ход делает центр, затем свои стратегии выбирают агенты. С этой точки зрения иерархические игры являются наиболее адекватным аппаратом описания задач управления организационными системами.

Для иерархических игр характерно использование максимального гарантированного результата (МГР) в качестве базовой концепции решения игры. При этом «пессимистичность» МГР (взятие минимума по множеству неопределенных параметров) компенсируется возможностью передачи информации между игроками, что, очевидно, снижает неопределенность при принятии решения.

Критерии эффективности (целевые функции) первого и второго игроков обозначим $w_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $w_2 = f_2(x_1, x_2)$ соответственно. Выигрыши игроков зависят от их действий x_1 и x_2 из множеств действий X_1^0, X_2^0.

Во всех моделях иерархических игр считается, что *первый игрок* (*центр*) имеет право первого хода. Его ход состоит в выборе *стратегии* $\tilde{x}_1$. Понятие стратегии существенно отличается от понятия действия и тесно связано с информированностью первого игрока о поведении *второго игрока – агента*. Под стратегией игрока здесь и далее понимается правило его поведения, то есть правило выбора конкретного действия в зависимости от содержания и конкретного значения той информации, которую он получит в процессе игры. Выбирать же собственно действие центр может и после выбора действия агентом.

Самая простая стратегия центра состоит в выборе непосредственно действия x_1 (если поступления дополнительной информации о действии агента в процессе игры не ожидается), более сложная – в выборе функции $\tilde{x}_1(x_2)$ (если в процессе игры ожидается информация о действии агента). Стратегия центра может также состоять в сообщении агенту некоторой информации, например, о планах своего поведения в зависимости от выбора агентом действия. При этом агент должен быть уверен, что первый игрок может реализовать эту стратегию, то есть что первый игрок будет точно знать реализацию действия x_2 на момент выбора своего действия x_1.

Например, если агент (выбирающий стратегию вторым) не ожидает информации о ***действии*** центра, то реализация права первого хода центра может состоять в сообщении центром агенту функции $\tilde{x}_1(x_2)$. Такое сообщение может рассматриваться, как обещание выбрать действие $x_1 = \tilde{x}_1(x_2)$ при выборе агентом действия x_2. Тогда стратегия агента состоит в выборе действия в зависимости от сообщения центра, $x_2 = \tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1(\cdot))$. Если при этом агент доверяет сообщению центра, он должен выбрать действие x_2^*, реализующее

$$\max_{x_2 \in X_2^0} f_2(\tilde{x}_1(x_2), x_2).$$

Игра с описанным выше порядком функционирования называется для краткости *игрой Γ_2* (примером такой игры служит как раз задача стимулирования в условиях информированности центра о действии агента – см. вторую главу) [20].

Если центр не ожидает информации о действии агента и это известно агенту, то стратегия центра состоит, как уже было сказано, просто из выбора некоторого действия x_1^*. Стратегия агента состоит в выборе $x_2 = \tilde{x}_2(x_1^*)$ (он делает ход вторым, уже зная действие центра). Такая игра называется *игрой Γ_1* (это, например, та же задача стимулирования, но уже в условиях отсутствия у центра информации о действии агента) [20].

Рассмотрим сначала игру Γ_1.

Пара действий (x_1^*, x_2^*) в игре Γ_1 называется *равновесием Штакельберга*, если

$$x_1^* \in \underset{x_1 \in X_1^0,\, x_2 \in R_2(x_1)}{Arg\,max} f_1(x_1, x_2), \qquad (1)$$

$$x_2^* \in R_2(x_1^*) = Arg \max_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^*, x_2), \qquad (2)$$

то есть $R_2(x_1)$ – функция наилучшего ответа агента на действие центра.

Равновесие в игре Γ_1 отличается от равновесия Штакельберга (1) тем, что при определении оптимальной стратегии первого игрока вычисляется минимум по множеству $R_2(x_1)$:

$$x_1^* \in Arg \max_{x_1 \in X_1^0} \min_{x_2 \in R_2(x_1)} f_1(x_1, x_2).$$

В игре $Г_1$ агент выбирает действие в условиях полной информированности, уже зная действие центра. Максимизация выигрыша выбором своего действия является здесь частным случаем применения принципа МГР. Равновесное по Штакельбергу действие центра также дает ему гарантированный результат, если центр уверен в том, что агент выбирает свое действие в соответствии с (2) и принципом благожелательности. Таким образом, равновесные стратегии как центра, так и агента, являются для них и гарантирующими.

Однако ситуация, когда первый ход дает преимущество, все же более типична. Тогда, если порядок ходов определяется самими игроками, между ними возникает борьба за лидерство. Игре двух лиц в нормальной форме можно поставить в соответствие две игры $Г_1$ (игры первого порядка), отличающиеся последовательностью ходов. Тогда борьба за лидерство (первый ход) определяется выгодностью перехода от исходной игры к какой-либо из иерархических игр первого порядка. Известно [25], что если в игре двух лиц имеются хотя бы два различных оптимальных по Парето равновесия Нэша, то в этой игре имеет место борьба за первый ход.

Тем не менее во многих случаях соответствующее игре $Г_1$ поведение центра нельзя назвать эффективным (см. раздел 2.1 – если в задаче стимулирования центр будет первым выбирать действие (стимулирование агента, уровень зарплаты), а затем уже агент будет выбирать свое действие при заданном стимулировании, единственное равновесие Штакельберга будет состоять в том, что центр ничего не будет платить агенту, а агент, соответственно, не будет работать). Поэтому, когда центр наблюдает действие агента, он заинтересован сообщить агенту о своих планах по выбору действия в зависимости от действия агента, реализуя тем самым игру Γ_2.

Приведем формулировку теоремы о максимальном гарантированном результате центра в игре типа Γ_2. К этой игре сводятся многие модели управления, например, задача стимулирования в условиях полной информированности (см. вторую и третью главы). Определим необходимые для формулировки теоремы понятия.

Целевые функции игроков: $w_1 = f_1(x_1, x_2)$, $w_2 = f_2(x_1, x_2)$ непрерывны на компактных множествах $x_1 \in X_1^0$ $x_2 \in X_2^0$ допустимых действий.

Стратегия центра – $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(x_2)$, то есть предполагается следующий порядок функционирования: игрок 1 (центр), обладая правом первого хода, сообщает игроку 2 (агенту) план выбора своей стратегии в зависимости от выбранной игроком 2 стратегии x_2. После этого второй игрок выбирает действие x_2, максимизируя свою целевую функцию с подставленной туда стратегией первого игрока, а затем первый игрок – действие $\tilde{x}_1(x_2)$.

Стратегия наказания $x_1^н = x_1^н(x_2)$ определяется из условия:

$$f_2(x_1^н(x_2), x_2) = \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Если стратегий наказания несколько, то будем называть *оптимальной стратегией наказания* ту из них, на которой достигается максимум выигрыша первого игрока.

Гарантированный результат второго игрока (при использовании первым игроком стратегии наказания) равен

$$L_2 = \max_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^н(x_2), x_2) = \max_{x_2 \in X_2^0} \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Множество действий второго игрока, обеспечивающих ему максимальный выигрыш при использовании первым игроком стратегии наказания есть $E_2 = \{x_2 \mid f_2(x_1^{н}(x_2), x_2) = L_2\}$.

Множество достижимости $D = \{(x_1, x_2) : f_2(x_1, x_2) > L_2\}$ – это договорное множество рассматриваемой игры, то есть множество сочетаний стратегий первого и второго игроков, которые гарантировали бы второму результат, строго больший того, что тот может получить даже при наихудших для него действиях первого игрока (то есть при использовании первым игроком стратегии наказания).

Наилучший результат первого игрока на множестве достижимости есть $K = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2) \in D} f_1(x_1, x_2), & D \neq \varnothing \\ -\infty, & D = \varnothing \end{cases}$. Принадлежность ситуации множеству достижимости гарантирует реализуемость этого результата путем использования стратегии наказания.

Определим действие первого игрока, реализующее $K - \varepsilon$ при выборе вторым игроком рекомендуемого действия из D:

$$f_1(x_1^{\varepsilon}, x_2^{\varepsilon}) \geq K - \varepsilon, \ (x_1^{\varepsilon}, x_2^{\varepsilon}) \in D \neq \varnothing .$$

Вычислим $M = \inf\limits_{x_2 \in E_2} \sup\limits_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1, x_2)$ – гарантированный результат центра при применении им стратегии наказания (так как стратегии второго игрока ограничены множеством E_2).

Определим стратегию $x_1^{a\varepsilon}(x_2)$, которая реализует (с точностью ε) наилучший ответ центра на действие x_2 агента (ε-доминантная стратегия), то есть

$$f_1(x_1^{\alpha\varepsilon}(x_2)) \geq \sup_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1, x_2) - \varepsilon .$$

Теорема Ю. Б. Гермейера [20]. В игре $Г_2$ наибольший гарантированный результат центра равен $max\,[K, M]$. При $K > M$ ε-оптимальная стратегия центра $\tilde{x}_1^{\varepsilon}(x_2) = \begin{cases} x_1^{\varepsilon}, & \text{при}\, x_2 = x_2^{\varepsilon} \\ x_1^{н}(x_2), & \text{при}\, x_2 \neq x_2^{\varepsilon} \end{cases}$. При $K \leq M$ оптимальная стратегия центра заключается в применении оптимальной стратегии наказания.

Каким же образом соотносятся выигрыши центра в играх $Г_1$ и $Г_2$ с одинаковыми функциями выигрыша? Существуют ли более рациональные для центра методы обмена информацией, дающие ему больший выигрыш? Ответ на эти вопросы дает рассмотрение *информационных расширений* игры, или *метаигр*.

Если центр не планирует самостоятельно получить информацию о действии агента, он может первым выбрать действие, реализуя игру $Г_1$. Однако ему можно порекомендовать и более сложное поведение. Центр может попросить агента сообщить ему свою стратегию $x_2 = \tilde{x}_2(x_1)$, которая основана на ожидаемой агентом информации о действии центра. Реализация права первого хода центром состоит в этом случае в сообщении агенту стратегии $\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2(x_1))$. Эту стратегию можно интерпретировать, как обещание центра выбрать действие $\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2(x_1))$ при условии, что агент обещает выбирать свое действие в соответствии с $\tilde{x}_2(x_1)$. Так образуется игра $Г_3$.

Если центр определяет порядок обмена информацией, он может выбирать, играть ему $Г_1$ или $Г_3$. В обеих играх центр вынужден выбирать действие, не зная действия, выбранного агентом. Можно считать $Г_3$ в некотором роде усложнением игры $Г_1$.

Аналогично тому, как с помощью образования дополнительной «петли обратной связи» из $Г_1$ была образована $Г_3$, можно усложнить и игру $Г_2$. Так образуется игра $Г_4$. В ней агент, ожидая от центра, как и в $Г_2$, информацию вида $\tilde{x}_1(x_2)$, формирует и сообщает центру свою стратегию $\tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1)$. Центр, обладающий правом первого хода, пользуется стратегиями $\tilde{\tilde{\tilde{x}}}_1(\tilde{\tilde{x}}_2)$, которые определяют, какую функцию $\tilde{x}_1(x_2)$ выберет центр в зависимости от сообщения агента $\tilde{\tilde{x}}_2$.

Таким же способом можно на основе $Г_3$ построить игру $Г_5$ и так далее. В каждой из построенных четных игр $Г_{2m}$, $m = 1, 2, \ldots$, центр использует в качестве стратегий отображения множества стратегий агента в этой игре на множество стратегий центра в игре $Г_{2m-2}$. Аналогично стратегиями агента являются отображения множества стратегий центра в $Г_{2m}$ на множество стратегий агента в игре $Г_{2m-2}$.

Такую рефлексию можно было бы наращивать бесконечно, переходя к все более сложным схемам обмена информацией, если бы рассмотрение этих игр увеличивало выигрыш центра (в интересах которого и проводится исследование всех метаигр). Однако имеет место следующий результат.

Теорема Н. С. Кукушкина [20, 34]. Максимальный гарантированный результат центра в игре $Г_{2m}$ при $m > 1$ равен максимальному гарантированному результату центра в игре $Г_2$. В играх же $Г_{2m+1}$ при $m > 1$ максимальный гарантированный результат центра равен его максимальному гарантированному результату в игре $Г_3$.

Таким образом, при исследовании гарантированного результата центра можно ограничиться только играми $Г_1$, $Г_2$ и $Г_3$. Кроме того, известно [20, 34], что максимальный гарантированный результат центра в игре $Г_2$ не меньше его гарантированного результата в игре $Г_3$, а тот, в свою очередь, не меньше гарантированного выигрыша в игре $Г_1$. Этот факт показывает, что $Г_2$ является «идеальной» игрой для центра. Соответственно, если центр имеет возможность определять порядок и содержание обмена информацией и, кроме того, при выборе своего действия знает действие, выбранное агентом, он должен играть $Г_2$. Если центр на момент выбора своего действия не знает действия агента – ему наиболее выгодна игра $Г_3$.

Игры и структуры. Выше мы рассмотрели основные понятия теории игр, перейдя от игр, в которых агенты выбирают свои действия одновременно (игра $Г_0$ в нормальной форме или в форме характеристической функции) к иерархическим играм, в которых последовательность ходов фиксирована – первым делает ход центр, а затем – агент. Можно усложнять модель и дальше, переходя к все более сложным играм. Опишем общую картину (рис. П.1.1), которая позволяет увидеть логику перехода от более простых к более сложным задачам, чтобы более сложная задача могла быть декомпозирована на более простые.

Если имеется один субъект, принимающий решения (рис. П.1.1а), то он описывается с точки зрения гипотезы рационального поведения (см. раздел 1.1) как стремящийся максимизировать свою целевую функцию. Далее можно усложнить модель и рассмотреть несколько субъектов на одном уровне (рис. П.1.1б), описав их взаимодействие игрой $Г_0$ в нормальной форме. Если ввести иерархию, то для двух субъектов (рис. П.1.1в) их взаимодействие описывается игрой $Г_i$, где $i = 1, 2$ или 3.

Представим себе, что имеется структура «один начальник – несколько подчиненных» (рис. П.1.1г). Взаимодействие агентов, находящихся на одном уровне, можно описывать игрой $Г_0$. Взаимодействие «начальник – подчиненный» описывается игрой $Г_i$. Тогда условно такую структуру можно представить игрой Γ_i, определенной на игре Γ_0, условно обозначив ее $\Gamma_i(\Gamma_0)$.

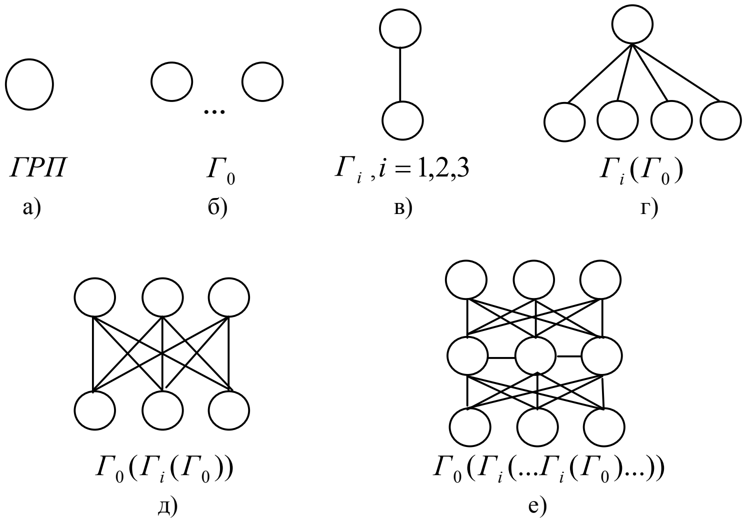


Рис. П.1.1. *Игры и структуры*

Далее пусть есть несколько начальников (центров) и несколько подчиненных – агентов (рис. П.1.1д). На нижнем уровне агенты играют игру Γ_0. Над ними центры играют иерархическую игру Γ_i, но центры в свою очередь разыгрывают на своем уровне игру Γ_0. Итого, получили игру $\Gamma_0(\Gamma_i(\Gamma_0))$.

Можно взять более сложную структуру с более сложным взаимодействием (например, рис. П.1.1е). Это будет иерархическая игра между уровнями, и «обычная» игра на каждом из уровней: $\Gamma_0(\Gamma_i(...\Gamma_i(\Gamma_0)...))$.

Основная идея заключается в том, чтобы декомпозировать сложную структуру (игру) на набор более простых и воспользоваться результатами исследования последних.

Оказывается, что между играми и структурами существует глубокая связь – момент принятия субъектом решений определяет его «место» в организационной иерархии (см. подробности в [50]).

П.1.4. Рефлексивные игры[75]

Рассмотрим игру, в которой участвуют агенты из множества $N = \{1, 2, ..., n\}$. Если в ситуации присутствует неопределенный параметр $\theta \in \Omega$, то *структура информированности* I_i (как синоним будем употреблять термины «*информационная структура*» и «*иерархия представлений*») i-го агента включает в себя следующие элементы. Во-первых, представление i-го агента о параметре θ – обозначим его θ_i, $\theta_i \in \Omega$. Во-вторых, представления i-го агента о представлениях других агентов о параметре θ – обозначим их θ_{ij}, $\theta_{ij} \in \Omega$, $j \in N$. В третьих, представления i-го агента о представлении j-го агента о представлении k-го агента – обозначим их θ_{ijk}, $\theta_{ijk} \in \Omega$, $j, k \in N$. И так далее.

Таким образом, структура информированности I_i i-го агента задается набором всевозможных значений вида $\theta_{ij_1 ... j_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, …, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 ... j_l} \in \Omega$.

Аналогично задается *структура информированности I игры* в целом – набором значений $\theta_{i_1 ... i_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, …, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 ... j_l} \in \Omega$. Подчеркнем, что структура информированности I «недоступна» наблюдению агентов, каждому из которых известна лишь некоторая ее часть (а именно – I_i). Таким образом, структура информированности – бесконечное n-дерево (то есть тип структуры по-

[75] Раздел написан совместно с А. Г. Чхартишвили.

стоянен и является n-деревом), вершинам которого соответствует конкретная информированность реальных и фантомных агентов.

Рефлексивной игрой Γ_I называется игра, описываемая следующим кортежем [57]:

$$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, I\},$$

где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i-го агента, $f_i(\cdot)\colon \Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, Ω – множество возможных значений неопределенного параметра, I – структура информированности.

Подчеркнем, что все элементы рефлексивной игры кроме структуры информированности являются *общим знанием* среди агентов, то есть

1) эти элементы известны всем агентам;

2) всем агентам известно 1);

3) всем агентом известно 2)

и так далее до бесконечности.

Далее для формулировки некоторых определений и свойств нам понадобятся следующие обозначения:

Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N;

Σ – объединение Σ_+ с пустой последовательностью;

$|\sigma|$ – количество индексов в последовательности σ (для пустой последовательности принимается равным нулю), которое выше было названо длиной последовательности индексов.

Если θ_i – представления i-го агента о неопределенном параметре, а θ_{ii} – представления i-го агента о собственном представлении, то естественно считать, что $\theta_{ii} = \theta_i$. Иными словами, i-й агент правильно информирован о собственных представлениях, а также считает, что таковы и другие агенты и т. д. Формально это означает, что выполнена *аксиома автоинформированности*, которую далее будем предполагать выполненной:

$$\forall\ i \in N\ \forall\ \tau, \sigma \in \Sigma\ \theta_{\tau i i \sigma} = \theta_{\tau i \sigma}.$$

Эта аксиома означает, в частности, что, зная θ_τ для всех $\tau \in \Sigma_+$, таких что $|\tau| = \gamma$, можно однозначно найти θ_τ для всех $\tau \in \Sigma_+$, таких что $|\tau| < \gamma$.

Наряду со структурами информированности I_i, $i \in N$, можно рассматривать структуры информированности I_{ij} (структура информированности j-го агента в представлении i-го агента), I_{ijk} и т. д. Отождествляя структуру информированности с характеризуемым ею агентом, можно сказать, что, наряду с *n реальными* агентами (*i-агентами*, где $i \in N$) со структурами информированности I_i, в игре участвуют *фантомные агенты* (*τ-агенты*, где $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \geq 2$) со структурами информированности $I_\tau = \{\theta_{\tau\sigma}\}$, $\sigma \in \Sigma$, существующие в сознании реальных агентов.

Определим фундаментальное для дальнейших рассмотрений понятие тождественности структур информированности. Структуры информированности I_λ и I_μ (λ, $\mu \in \Sigma_+$) называются *тождественными*, если выполнены два условия:

1) $\theta_{\lambda\sigma} = \theta_{\mu\sigma}$ для любого $\sigma \in \Sigma$;

2) последние индексы в последовательностях λ и μ совпадают.

Будем обозначать тождественность структур информированности следующим образом: $I_\lambda = I_\mu$.

Понятие тождественности структур информированности позволяет определить их важное свойство – сложность. Заметим, что наряду со структурой I имеется счетное множество структур I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, среди которых можно при помощи отношения тождественности выделить классы попарно нетождественных структур. Количество этих классов естественно считать *сложностью структуры информированности*.

Будем говорить, что структура информированности I имеет *конечную сложность* $\nu = \nu(I)$, если существует такой конечный набор попарно нетождественных структур $\{I_{\tau_1}, I_{\tau_2}, \ldots, I_{\tau_\nu}\}$, $\tau_l \in \Sigma_+$, $l \in \{1, \ldots, \nu\}$, что для любой структуры I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_{τ_l} из этого набора. Если такого конечного набора не существует, будем говорить, что структура I имеет бесконечную сложность: $\nu(I) = \infty$.

Структуру информированности, имеющею конечную сложность, будем называть *конечной* (еще раз отметим, что при этом дерево структуры информированности все равно остается бесконечным). В противном случае структуру информированности будем называть *бесконечной*.

Ясно, что минимально возможная сложность структуры информированности в точности равна числу участвующих в игре реальных агентов (напомним, что по определению тождественности структур информированности они попарно различаются у реальных агентов).

Любой набор (конечный или счетный) попарно нетождественных структур I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, такой что любая структура I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, тождественна одной из них, назовем *базисом* структуры информированности I.

Если структура информированности I имеет конечную сложность, то можно определить максимальную длину последовательности индексов γ, такую что, зная все структуры I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \gamma$, можно найти и все остальные структуры. Эта длина в определенном смысле характеризует ранг рефлексии, необходимый для описания структуры информированности.

Будем говорить, что структура информированности I, $\nu(I) < \infty$, имеет *конечную глубину* $\gamma = \gamma(I)$, если

1) для любой структуры I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \leq \gamma$;

2) для любого целого положительного числа ξ, $\xi < \gamma$, существует структура I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, не тождественная никакой из структур I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \xi$.

Если $\nu(I) = \infty$, то и глубину будем считать бесконечной: $\gamma(I) = \infty$.

Понятия сложности и глубины структуры информированности игры можно рассматривать τ-субъективно. В частности, глубина структуры информированности игры с точки зрения τ-агента, $\tau \in \Sigma_+$, называется *рангом рефлексии* τ-агента.

Если задана структура I информированности игры, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и фантомных). Выбор τ-агентом своего действия x_τ в рамках гипотезы рационального поведения определяется его структурой информированности I_τ, поэтому, имея перед собой эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить это его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет рефлексию). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Набор действий x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, назовем *информационным равновесием* [57], если выполнены следующие условия:

1) структура информированности I имеет конечную сложность ν;

2) $\forall \lambda, \mu \in \Sigma \quad I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$;

3) $\forall\ i \in N$, $\forall\ \sigma \in \Sigma$

$$x_{\sigma i}^* \in Arg \max_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \ldots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i\ , x_{\sigma i, i+1}^*, \ldots, x_{\sigma i, n}^*).$$

Первое условие в определении информационного равновесия означает, что в рефлексивной игре участвует конечное число реальных и фантомных агентов.

Второе условие отражает требование того, что одинаково информированные агенты выбирают одинаковые действия.

И наконец, третье условие отражает рациональное поведение агентов – каждый из них стремится выбором собственного действия максимизировать свою целевую функцию, подставляя в нее действия других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента в рамках имеющихся у него представлений о других агентах.

Удобным инструментом исследования информационного равновесия является *граф рефлексивной игры*, в котором вершины соответствуют реальным и фантомным агентам, и в каждую вершину-агента входят дуги (их число на единицу меньше числа реальных агентов), идущие из вершин-агентов, от действий которых в субъективном равновесии зависит выигрыш данного агента.

Одной из особенностей «классического» равновесия Нэша является его самоподдерживающийся характер – если игра повторяется несколько раз и все игроки кроме i-го выбирают одни и те же равновесные действия, то и i-му нет резона отклоняться от своего равновесного действия. Это обстоятельство очевидным образом связано с тем, что представления всех игроков о реальности адекватны – значение состояния природы является общим знанием.

В случае информационного равновесия ситуация, вообще говоря, может быть иной. Действительно, в результате однократного разыгрывания игры может оказаться, что какие-то из игроков (или даже все) наблюдают не тот результат, на который они рассчитывали. Это может быть связано как с неверным представлением о состоянии природы, так и с неадекватной информированностью о представлениях оппонентов. В любом случае самоподдерживающийся характер равновесия нарушается – если игра повторяется, то действия игроков могут измениться.

Однако в некоторых случаях самоподдерживающийся характер равновесия может иметь место и при различных (и, вообще говоря, неверных) представлениях агентов. Говоря неформально, это происходит тогда, когда каждый агент (как реальный, так и фантомный) наблюдает тот результат игры, которого ожидает.

Для формального изложения дополним кортеж, задающий рефлексивную игру, набором функций $w_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to W_i$, $i \in N$, каждая из которых отображает вектор (θ, x) в элемент w_i некоторого множества W_i. Этот элемент w_i и есть то, что i-й агент наблюдает в результате разыгрывания игры.

Функцию $w_i(\cdot)$ будем называть *функцией наблюдения* i-го агента [56]. Будем считать, что функции наблюдения являются общим знанием среди агентов.

Если $w_i(\theta, x) = (\theta, x)$, то есть $W_i = \Omega \times X'$, то i-й агент наблюдает как состояние природы, так и действия всех агентов. Если, напротив, множество W_i состоит из одного элемента, то i-й агент ничего не наблюдает.

Пусть в рефлексивной игре существует информационное равновесие x_τ, $\tau \in \Sigma_+$ (напомним, что τ – произвольная непустая конечная последовательность индексов из N). Зафиксируем $i \in N$ и рассмотрим i-го агента. Он ожидает в результате игры пронаблюдать величину

$$w_i\,(\theta_i, x_{i1}, \ldots, x_{i,\, i-1}, \mathrm{x}_i, x_{i,\, i+1}, \ldots, x_{in}).$$

На самом же деле он наблюдает величину

$$w_i\,(\theta, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Поэтому требование стабильности для i-агента означает совпадение этих величин.

В общем случае, то есть для τi-агента, $\tau i \in \Sigma_+$, условие стабильности определим следующим образом. Информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, будем называть *стабильным* при заданной структуре информированности I, если для любого $\tau i \in \Sigma_+$ выполняется

$$w_i\,(\theta_{\tau i}, x_{\tau i 1}, \ldots, x_{\tau i,\, i-1}, x_{\tau i}, x_{\tau i,\, i+1}, \ldots, x_{\tau i n}) =$$
$$= w_i\,(\theta_{\tau}, x_{\tau 1}, \ldots, x_{\tau,\, i-1}, x_{\tau i}, x_{\tau,\, i+1}, \ldots, x_{\tau n}).$$

Информационное равновесие, не являющееся стабильным, будем называть *нестабильным*.

Пусть набор действий $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Будем называть его *истинным* равновесием, если набор $(x_1, \ldots, x_n)$ является равновесием в условиях общего знания о состоянии природы θ (или о наборе $(r_1, \ldots, r_n)$ типов агентов). Из приведенного определения, в частности, следует, что в условиях общего знания любое информационное равновесие является истинным.

Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, назовем *ложным*. Таким образом, ложное равновесие – это такое стабильное информационное равновесие, которое не является равновесием в случае одинаковой информированности агентов (в условиях общего знания).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Теория графов в качестве теоретической дисциплины[76] может рассматриваться как раздел дискретной математики, исследующий свойства конечных множеств (бесконечные графы мы рассматривать не будем) с заданными отношениями между их элементами. Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, биологические и социальные системы.

Задача настоящего приложения заключается в том, чтобы, следуя в основном [11], изложить основные понятия и результаты теории графов, необходимые для постановки и решения задач управления организационными системами.

Изложение материала имеет следующую структуру. В первом разделе вводятся основные понятия, во втором рассматриваются задачи о максимальных путях и контурах на графах, в третьем – свойства псевдопотенциальных графов, в четвертом – задачи о максимальном потоке, в пятом – задачи сетевого планирования и управления.

П.2.1. Основные понятия теории графов

Граф – система, которая интуитивно может быть рассмотрена как множество кружков и множество соединяющих их линий (*геометрический способ задания графа* – рис. П.2.1). Кружки называются *вершинами* графа, линии со стрелками – *дугами*, без стрелок – *ребрами*. Граф, в котором направление линий не выделяется (все линии

[76] Начало теории графов датируют 1736 годом, когда Л. Эйлер решил популярную в то время «задачу о кенигсбергских мостах». Термин «граф» впервые был введен спустя 200 лет (в 1936 г.) Д. Кенигом.

являются ребрами), называется *неориентированным*; граф, в котором направление линий принципиально (линии являются дугами), называется *ориентированным*.

Теория графов может рассматриваться как раздел дискретной математики (точнее, теории множеств), и формальное определение графа таково: задано конечное множество X, состоящее из n элементов ($X = \{1, 2, ..., n\}$), называемых вершинами графа, и подмножество V декартова произведения $X \times X$, то есть $V \subseteq X^2$, называемое множеством дуг, тогда ориентированным *графом* G называется совокупность (X, V) (неориентированным графом называется совокупность множества X и множества неупорядоченных пар элементов, каждый из которых принадлежит множеству X). Дугу между вершинами i и j, $i, j \in X$, будем обозначать (i, j). Число дуг графа будем обозначать m ($V = (v_1, v_2, ..., v_m)$).

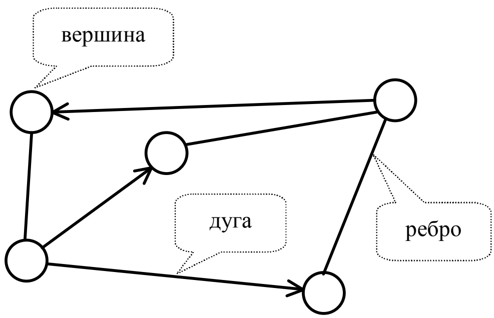


Рис. П.2.1. *Пример графа*

Язык графов оказывается удобным для описания многих физических, технических, экономических, биологических, социальных и других систем.

Приведем ряд **примеров приложений теории графов**.

1. *«Транспортные» задачи*, в которых вершинами графа являются пункты, а ребрами – дороги (автомобиль-

ные, железные и др.) и/или другие транспортные (например, авиационные) маршруты. Другой пример – сети снабжения (энергоснабжения, газоснабжения, снабжения товарами и др.), в которых вершинами являются пункты производства и потребления, а ребрами – возможные маршруты перемещения (линии электропередач, газопроводы, дороги и т. д.). Соответствующий класс задач оптимизации потоков грузов, размещения пунктов производства и потребления и так далее, иногда называется *задачами обеспечения* или *задачами о размещении*. Их подклассом являются *задачи о грузоперевозках* [7, 17].

2. *«Технологические задачи»*, в которых вершины отражают производственные элементы (заводы, цеха, станки и т. д.), а дуги – потоки сырья, материалов и продукции между ними, заключаются в определении оптимальной загрузки производственных элементов и обеспечивающих эту загрузку потоков [7, 17].

3. *Обменные схемы*, являющиеся моделями таких явлений как бартер, взаимозачеты и т. д. Вершины графа при этом описывают участников обменной схемы (цепочки), а дуги – потоки материальных и финансовых ресурсов между ними. Задача заключается в определении цепочки обменов, оптимальной с точки зрения, например, организатора обмена, и согласованной с интересами участников цепочки и существующими ограничениями [6, 11, 31].

4. *Управление проектами*[77]. С точки зрения теории графов проект – совокупность операций и зависимостей между ними (*сетевой график* – см. ниже). Хрестоматий-

[77] ***Управление проектами*** – раздел теории управления, изучающий методы и механизмы управления изменениями (***проектом*** называется целенаправленное изменение некоторой системы, осуществляемое в рамках ограничений на время и используемые ресурсы; характерной чертой любого проекта является его уникальность, то есть нерегулярность соответствующих изменений).

ным примером является проект строительства некоторого объекта. Совокупность моделей и методов, использующих язык и результаты теории графов и ориентированных на решение задач управления проектами, получила название *календарно-сетевого планирования и управления* (КСПУ) [7, 29]. В рамках КСПУ решаются задачи определения последовательности выполнения операций и распределения ресурсов между ними, оптимальных с точки зрения тех или иных критериев (времени выполнения проекта, затрат, риска и др.).

5. *Модели коллективов и групп*, используемые в социологии, основываются на представлении людей или их групп в виде вершин, а отношений между ними (например, отношений знакомства, доверия, симпатии и др.) – в виде ребер или дуг. В рамках подобного описания решаются задачи исследования структуры социальных групп, их сравнения, определения агрегированных показателей, отражающих степень напряженности, согласованности взаимодействия и др.

6. *Модели организационных структур*, в которых вершинами являются элементы организационной системы, а ребрами или дугами – связи (информационные, управляющие, технологические и др.) между ними [19, 50].

Завершив краткое описание прикладных областей, вернемся к введению **основных понятий теории графов**.

Подграфом называется часть графа, образованная подмножеством вершин вместе со всеми ребрами (дугами), соединяющими вершины из этого множества. Если из графа удалить часть ребер (дуг), то получим *частичный граф*.

Две вершины называются *смежными*, если они соединены ребром (дугой). Смежные вершины называются граничными вершинами соответствующего ребра (дуги), а это ребро (дуга) – *инцидентным* соответствующим вершинам.

Путем называется последовательность дуг (в ориентированном графе), такая что конец одной дуги является началом другой. *Простой путь* – путь, в котором ни одна дуга не встречается дважды. *Элементарный путь* – путь, в котором ни одна вершина не встречается дважды. *Контур* – путь, у которого конечная вершина совпадает с начальной вершиной. *Длиной пути* (контура) называется число дуг пути (или сумма длин его дуг, если последние заданы).

Граф, для которого из $(i, j) \in V$ следует $(j, i) \in V$ называется *симметрическим*. Если из $(i, j) \in V$ следует, что $(j, i) \overline{\in} V$, то соответствующий граф называется *антисимметрическим*.

Цепью называется множество ребер (в неориентированном графе), которые можно расположить так, что конец (в этом расположении) одного ребра является началом другого. Другое определение: цепь – последовательность смежных вершин. Замкнутая цепь называется *циклом*. По аналогии с простым и элементарным путем, можно определить соответственно *простые и элементарные цепь и цикл*. Любой элементарный цикл является простым, обратное утверждение в общем случае неверно. Элементарная цепь (цикл, путь, контур), проходящая через все вершины графа, называется *гамильтоновой цепью* (соответственно – циклом, путем, контуром). Простая цепь (цикл, путь, контур), содержащая все ребра (дуги) графа, называется *эйлеровой цепью* (соответственно – циклом, путем, контуром).

Если любые две вершины графа можно соединить цепью, то граф называется *связным*. Если граф не является связным, то его можно разбить на связные подграфы, называемые *компонентами*. *Связностью* графа называется минимальное число ребер, после удаления которых граф становится несвязным. Если любые две вершины ориентированного графа можно соединить путем, то граф называется *сильно связным*. Известно, что связность графа не может быть больше, чем $[2m/n]$, где $[x]$ – целая часть числа x; существуют графы с n вершинами и m ребрами, имеющие связность $[2m/n]$; в сильно связном графе через любые две вершины проходит контур [7, 26].

Связный граф, в котором существует эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

В неориентированном графе *степенью вершины i* называется число d_i инцидентных ей ребер. Очевидно, $d_i \le n - 1$, $i \in X$. Граф, степени всех вершин которого равны $n - 1$, называется *полным*. Граф, все степени вершин которого равны, называется *однородным*.

Вершина, для которой не существует инцидентных ей ребер ($d_i = 0$), называется *изолированной*. Вершина, для которой существует только одно инцидентное ей ребро ($d_i = 1$), называется *висячей*.

Известно, что: $\sum_{i \in X} d_i = 2\,m$ (данное выражение называется «леммой о рукопожатиях» – поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки, то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук четно (при условии, что каждая рука учитывается столько раз, в скольких рукопожатиях она участвовала)); в любом графе число вершин нечетной степени четно.

Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны (*теорема Эйлера*). Обозначим n_k – число вершин, имеющих степень k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Известно, что $\sum_{k:\, n_k > 0} k\, n_k = 2\,m$ [7, 26].

Для ориентированных графов для каждой вершины можно ввести два числа – *полустепень исхода* d_i^+ (число выходящих из нее вершин) и *полустепень захода* d_i^- (число входящих в нее вершин). В дальнейшем, если не оговорено особо, будем рассматривать графы без *петель*, то есть без дуг, у которых начальная и конечная вершины совпадают. Известно, что $\sum_{i \in X} d_i^- = \sum_{i \in X} d_i^+ = m$; для эйлерова графа имеет место: $d_i^+ = d_i^-$, $i = \overline{1, n}$; эйлеров граф является объединением контуров, попарно не имеющих общих ребер [7, 26].

Определим *матрицу смежности* графа как квадратную матрицу $n \times n$, элемент a_{ij} которой равен единице, если $(i, j) \in V$, и нулю, если $(i, j) \overline{\in} V$, $i, j \in X$. Для неориентированного графа матрица смежности всегда симметрическая.

Определим *матрицу инциденций для ребер* графа как прямоугольную матрицу $n \times m$, элемент r_{ij} которой равен единице, если вершина i инцидентна ребру j, и нулю в противном случае, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Аналогично определяется *матрица инциденций для дуг* графа – как прямоугольная матрицу $m \times n$, элемент r_{ij} которой равен плюс единице, если дуга U_j исходит из вершины i, минус единице, если дуга U_j заходит в вершину i, и нулю в остальных случаях, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$

Деревом называется связный граф без простых циклов, имеющий не менее двух вершин. Для дерева $m = n - 1$, а число висячих вершин равно $n_1 = 2 + \sum_{i \geq 2} (i - 2)\, n_i$. Легко показать, что в дереве любые две вершины связаны единственной цепью.

Прадеревом называется ориентированное дерево, у которого одна из вершин, называемая *корнем*, не имеет заходящих дуг, а степени захода остальных вершин равны единице.

Плоским (*планарным*) называется граф, который можно изобразить на плоскости так, что различным вершинам соответствуют различные кружки и никакие два ребра не имеют общих точек, отличных от их границ (не пересекаются). Для плоского графа существует понятие *грани* – части плоскости, ограниченной ребрами и не содержащей внутри себя ни вершин, ни ребер. Для простоты определения грани в дальнейшем в основном будем рассматривать графы без висячих вершин. Например, дерево имеет всего одну внешнюю грань – всю плоскость. *Степенью грани* называется число ее граничных ребер (висячие ребра считаются дважды). Обозначим p – число граней плоского графа, p_k – число его граней, имеющих степень k, q_i – степень i-й грани. Можно показать, что имеет место $\sum_{i=1}^{p} q_i = 2m$, $\sum_{k:\, p_k>0} k\, p_k = 2m$, $n + p = m + 2$ – *формула Эйлера* [7, 26]. Данные выражения являются необходимыми условиями существования плоских графов с заданными наборами чисел $\{n_i\}$ и $\{p_i\}$.

Любому связному плоскому графу G можно поставить в соответствие *двойственный* ему связный плоский граф G^*, определяемый следующим образом: каждой грани графа G соответствует вершина графа G^*, каждому ребру V графа G, являющемуся граничным для граней z_1 и z_2, соответствует ребро V^* графа G^*, соединяющее соответствующие граням z_1 и z_2 вершины. Понятие двойственного графа тесно связано с понятием двойственности в линейном программировании [7].

П.2.2. Экстремальные пути и контуры на графах

Задачи поиска кратчайших и длиннейших путей на графах возникают в различных областях управления. Сначала мы рассмотрим задачи о кратчайшем пути, затем задачи об экстремальных контурах.

Задача о кратчайшем пути. Пусть задана *сеть* из $n + 1$ вершины, то есть ориентированный граф, в котором выделены две вершины – вход (нулевая вершина) и выход (вершина с номером n). Для каждой дуги заданы числа, называемые длинами дуг. *Длиной пути* (*контура*) называется сумма длин входящих в него дуг (если длины дуг не заданы, то длина пути (контура) определяется как число входящих в него дуг). Задача заключается в поиске кратчайшего пути (пути минимальной длины) от входа до выхода сети[78].

Известно, что для существования кратчайшего пути необходимо и достаточно отсутствия в сети контуров отрицательной длины [7, 26].

Предположим, что в сети нет контуров. Тогда всегда можно пронумеровать вершины таким образом, что для любой дуги (i, j) имеет место $j > i$. Такая нумерация называется *правильной*. Легко показать, что в сети без контуров всегда существует правильная нумерация.

Обозначим l_{ij} – длину дуги $(i; j)$. Кратчайший путь в сети, имеющей правильную нумерацию, определяется следующим алгоритмом.

Алгоритм 1

Шаг 0. Помечаем нулевую вершину индексом $\lambda_0 = 0$.

Шаг k: Помечаем вершину k индексом $\lambda_k = \min\limits_{i<k} (\lambda_i + l_{ik})$.

Индекс выхода λ_n будет равен длине кратчайшего пути[79]. На рисунке П.2.2 приведен пример применения алгоритма 1 для определения кратчайшего пути (числа у дуг равны длинам дуг, индексы вершин помещены в квадратные скобки, кратчайший путь выделен двойными линиями).

---

[78] В дальнейшем будем предполагать, что в любую вершину сети можно попасть из входа и из любой вершины можно попасть в выход (вершины, не удовлетворяющие этому требованию, можно удалить).

[79] Алгоритм 1 для задач динамического программирования отражает принцип оптимальности Беллмана: если ищется кратчайший путь между двумя точками, то длина пути между любыми двумя точками кратчайшего пути также должна быть минимальной.

Когда индексы (называемые в некоторых задачах *потенциалами вершин*) установятся, кратчайший путь определяется методом обратного хода от выхода к входу, то есть кратчайшим является путь $\mu = (0; i_1; i_2; ...; i_{n-1}; n)$, такой что $l_{i_{n-1}n} = \lambda_n - \lambda_{n-1}$ и т. д.

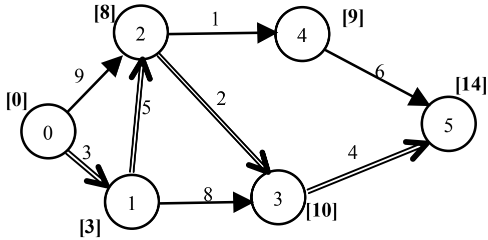


Рис. П.2.2. *Поиск кратчайшего пути*

Следующий алгоритм дает возможность определять кратчайший путь в общем случае (то есть при произвольной нумерации вершин).

Алгоритм 2 (алгоритм Форда)

Шаг 0. Помечаем нулевую вершину индексом $\lambda_0 = 0$, все остальные вершины индексами $\lambda_i = +\infty$, $i = \overline{1, n}$.

Шаг k. Рассматриваем все дуги. Для дуги $(i; j)$, если $\lambda_j - \lambda_i > l_{ij}$, вычисляем новое значение $\lambda_j := \lambda_i + l_{ij}$.

Индексы устанавливаются за конечное число шагов. Обозначим $\{\lambda_i^*\}$ – установившиеся значения индексов, которые обладают следующим свойством: величина λ_i^* равна длине кратчайшего пути из нулевой вершины в вершину i. Кратчайший путь из вершины 0 в вершину i определяется методом обратного хода.

Если длины всех дуг неотрицательны, то для поиска кратчайшего пути применúм следующий алгоритм.

Алгоритм 3

Шаг 0. Помечаем нулевую вершину индексом $\lambda_0 = 0$.

Шаг k. Пусть уже помечено некоторое множество вершин. Обозначим Q – множество непомеченных вершин, смежных с помеченными. Для каждой вершины $k \in Q$ вычисляем величину $\xi_k = min\ (\lambda_i + l_{ik})$, где минимум берется по всем помеченным вершинам i, смежным с вершиной k. Помечаем вершину k, для которой величина ξ_k минимальна, индексом $\lambda_k = \xi_k$.

Подобную процедуру повторяем до тех пор, пока не будет помечена вершина n. Длина кратчайшего пути равна λ_n, а сам кратчайший путь определяется так, как это было описано выше.

Запишем задачу о кратчайшем пути как *задачу линейного программирования* (ЛП). Пусть $x_{ij} = 1$, если дуга $(i; j)$ входит в путь[80] μ, $x_{ij} = 0$, если дуга $(i; j)$ не входит в путь μ, $i, j = \overline{0, n}$.

Задачу о минимальном пути можно записать в виде[81]:

$$L(x) = \sum_{i,j=0}^{n} l_{ij} x_{ij} \to \min_{x} \tag{1}$$

$$\sum_{j} x_{0j} = 1, \ \sum_{j} x_{jn} = 1, \tag{2}$$

$$\sum_{i} x_{ki} = \sum_{j} x_{jk}, \ k = \overline{1, n-1}. \tag{3}$$

Любое решение системы неравенств (2)–(3) определяет путь в сети без контуров (но не в сети с контурами).

Пусть все контуры имеют строго положительную длину, то есть нет контуров отрицательной и нулевой дли-

---

[80] Будем считать, что имеются две дуги между каждой парой вершин, так как если их нет в исходном графе, то, положив их длину равной бесконечности, мы заведомо исключим их из решения.

[81] Ограничение (2) отражает требование того, что в искомом пути из входа выходит одна дуга и в выход заходит одна дуга. Ограничение (3) обеспечивает равенство числа заходящих и выходящих в любую промежуточную вершину дуг.

ны. Тогда решение задачи (1)–(3) определяет путь кратчайшей длины.

Сформулируем задачу ЛП, двойственную задаче (1)–(3), поставив в соответствие ограничениям (2) двойственные переменные λ_0 и λ_n, а ограничениям (3) – двойственные переменные $\{\lambda_i\}$, $i = \overline{1, n-1}$:

$$\lambda_n - \lambda_0 \to max \qquad (4)$$

$$\lambda_j - \lambda_i \le l_{ij},\ i, j = \overline{0, n}\,. \qquad (5)$$

По теореме двойственности линейного программирования [7], для оптимальных решений задач (1)–(3) и (4)–(5) значения целевых функций совпадают.

Задача (4)–(5) называется задачей о потенциалах вершин графа. Общая ее формулировка такова: найти потенциалы вершин $\{\lambda_i\}$, удовлетворяющие системе неравенств (5) и максимизирующие некоторую функцию $\Phi(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$. Примером является задача о ближайших потенциалах, в которой $\Phi(\lambda) = \sum_j |\lambda_j - \lambda_j^0|$, где $\{\lambda_j^0\}$ могут интерпретироваться как желательные потенциалы.

Аналогично задаче о кратчайшем пути формулируется и решается задача о максимальном (длиннейшем) пути: достаточно изменить знаки дуг на противоположные и решить задачу о кратчайшем пути. Для существования решения задачи о максимальном пути необходимо и достаточно отсутствия контуров положительной длины.

В задаче поиска пути максимальной надежности длины дуг интерпретируются, например, как вероятности того, что существует связь между соответствующими двумя пунктами. Заменяя длины дуг их логарифмами, взятыми с обратными знаками, получаем, что путь максимальной надежности в исходном графе будет соответствовать кратчайшему пути в новом графе.

Гораздо более сложными (*NP*-полными[82]) являются задачи поиска элементарных путей кратчайшей (максимальной) длины в случае, когда в сети имеются контуры отрицательной (соответственно, положительной) длины[83]. Эффективных (не сводящихся к полному перебору) точных алгоритмов для них не существует.

К таким же сложным задачам относятся и задачи поиска кратчайших или длиннейших путей или контуров, проходящих через все вершины графа (элементарный путь (контур), проходящий через все вершины графа, называется гамильтоновым путем (контуром)).

Классическим примером задачи поиска гамильтонова контура является задача коммивояжера, заключающаяся в следующем. Коммивояжер (бродячий торговец) должен посетить n городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться в исходный пункт своего путешествия. Заданы неотрицательные длины дуг, интерпретируемые как расстояние между городами или стоимости проезда. Требуется найти гамильтонов контур минимальной длины (в графе из n вершин существует $n!$ гамильтоновых контуров).

Алгоритмы решения задачи о кратчайшем пути позволяют решать широкий класс задач дискретной оптимизации. В качестве примера приведем задачу целочисленного линейного программирования – задачу о ранце (о

[82] Качественно, если n – число вершин графа, то при сложности (количестве вычислений, операций, шагов и т. д.) алгоритма поиска точного решения, пропорциональной n^{α}, где α – некоторое положительное число, говорят, что алгоритм имеет полиномиальную сложность. Если сложность пропорциональна α^n, то имеет место экспоненциальная сложность (*NP*-полнота).

[83] Существуют несколько алгоритмов проверки отсутствия контуров отрицательной (или положительной) длины: изменять индексы, пока число шагов алгоритма не превысит максимально необходимое (равное m·n) число; ограничить потенциалы вершин заданными числами d_i и при $\lambda_i \le d_i$ ($\lambda_i \ge d_i$) проверять действительно ли полученное значение потенциала соответствует длине некоторого пути или имеется контур отрицательной (положительной) длины; и др.

рюкзаке), к которой сводятся многие практически важные задачи определения оптимальной комбинации факторов при ограничениях на общий вес, площадь, объем, финансирование и т. д.

Задача о ранце. Пусть имеется n предметов, которые могут быть полезны в походе. Полезность i-го предмета оценивается числом a_i, вес предмета (или его объем) – b_i. Суммарный вес, который может нести турист (объем рюкзака), ограничен величиной R. Требуется найти набор предметов, обладающий максимальной суммарной полезностью и удовлетворяющий ограничению.

Обозначим x_i – переменную, принимающую значение «ноль» (если i-й предмет не кладется в ранец) или «единица» (если i-й предмет кладется в ранец). Тогда задача о ранце имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \max_x \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \le R. \qquad (7)$$

Верхняя оценка числа возможных комбинаций – 2^n. Однако для решения задачи о ранце существует эффективный алгоритм – метод динамического программирования. При его использовании строится сеть (см. примеры в [7, 11, 17]) по следующим правилам. По оси абсцисс будем последовательно откладывать номера предметов, по оси ординат – их вес. Из каждой точки (начиная с точки (0; 0)) выходят две дуги – горизонтальная (соответствующая альтернативе «не брать предмет») и наклонная (соответствующая альтернативе «взять предмет»), вертикальная проекция которой равна весу предмета. Длины наклонных дуг положим равными ценности предметов, длины горизонтальных дуг – нулю.

Полученная сеть (конечная вершина является фиктивной и вес любой дуги, соединяющей ее с другими вершинами, равен нулю) обладает следующими свойствами: любому решению задачи (6)–(7) соответствует некоторый путь в этой сети; любому пути соответствует некоторое решение задачи. Таким образом, задача свелась к нахождению пути максимальной длины.

Задача поиска контура минимальной длины решается следующим образом. Если известно, что искомый контур содержит некоторую вершину, то нужно определить кратчайшей путь от этой вершины до нее же, применяя описанные выше алгоритмы. Так как в общем случае контур минимальной длины может проходить через любую вершину графа, то находятся контуры минимальной длины, проходящие через каждую вершину, и среди них выбирается кратчайший.

Более простым является следующий ***алгоритм 4***: берется первая вершина (в произвольном упорядочении вершин) графа и рассматривается сеть, в которой эта вершина является одновременно конечной и начальной вершиной. Для этой сети (применением описанного выше алгоритма) ищется путь μ_1 минимальной длины $L(\mu_1)$. Затем первая вершина отбрасывается, и минимальный путь μ_2 ищется для сети, в которой начальной и конечной вершиной является вторая вершина. Затем отбрасывается вторая вершина и так далее для всех вершин исходного графа, для которых существует контур, проходящий через них и через вершины с большими номерами.

Контуром минимальной длины будет контур μ_{min}, длина которого равна $L(\mu_{min}) = min\ \{L(\mu_1), L(\mu_2), ,..., L(\mu_n)\}$.

Задача поиска контура минимальной средней длины заключается в поиске контура, для которого минимально отношение его длины к числу содержащихся в нем дуг. Для решения этой задачи используется ***алгоритм 5***.

1. Определяем произвольный контур. Пусть L – длина этого контура, k – число его дуг. Вычисляем $l_{\text{ср}} = L/k$ и добавляем $(-l_{\text{ср.}})$ к длинам l_{ij} всех дуг.

2. Затем определяем контур отрицательной длины, повторяем шаг 1 и так далее до тех пор, пока на очередном шаге таких контуров не найдется.

Так как на каждом шаге длины всех дуг изменялись на одно и то же число, то на последнем шаге длина дуги равна $l_{ij} - \eta$, где η – суммарное изменение длины каждой дуги на всех шагах.

Значение η равно минимальной средней длине дуг контуров графа. При этом контуром минимальной средней длины является контур, определенный на предпоследнем шаге.

Путь максимальной эффективности. Пусть задана сеть, в которой для каждой дуги $(i; j)$ определены два числа $(Э_{ij}; S_{ij})$, интерпретируемые как эффект при осуществлении соответствующей операции – $Э_{ij}$ и затраты на эту операцию – S_{ij}.

Эффективность $K(\mu)$ пути μ определяется как отношение его эффекта $Э(\mu) = \sum_{\mu} Э_{ij}$ к затратам $S(\mu) = \sum_{\mu} s_{ij}$, то есть $K(\mu) = Э(\mu) / S(\mu)$. Задача заключается в поиске пути μ^* максимальной эффективности: $K(\mu) \to max$.

Если решение $K^* = K(\mu^*)$ этой задачи известно, то по определению K^* выполнено:

$$Э(\mu) - K^* S(\mu) \le 0 \quad \forall \mu . \qquad (8)$$

Следовательно, задача свелась к поиску минимального значения K^*, для которого имеет место (8). Другими словами, необходимо найти минимальное K^*, такое что все пути (длина которых определяется как $l_{ij}(K^*) = Э_{ij} - K^* S_{ij}$) в сети имеют неположительную длину (неравенство (8) должно выполняться, в том числе и для пути максимальной длины).

Алгоритм 6

1. Положим $K^* = 0$. Находим путь μ_1 максимальной длины. Положим $K_1 = Э(\mu_1) / S(\mu_1)$ (заметим, что при $K = K_1$ длина пути $\mu(K_1)$ равна нулю).

2. Находим максимальный путь μ_2 при $K = K_1$. Если длина пути μ_2, которую мы обозначим $L(K_1)$, равна нулю, то задача решена. Если $L(K_1) > 0$, то вычисляем $K_2 = Э(\mu_2) / S(\mu_2)$ и находим максимальный путь μ_2 при $K = K_2$, и т. д.

Путь максимальной эффективности с учетом штрафов. Пусть для каждой дуги $(n + 1)$-вершинной сети заданы два числа: эффект $Э_{ij}$ и время t_{ij}. Каждый путь μ из начальной вершины в конечную вершину характеризует некоторый процесс (например, проект). Под продолжительностью пути будем понимать сумму времен его дуг. Если продолжительность процесса отличается от заданного времени T, то налагаются штрафы $\chi(\mu)$, пропорциональные отклонению, то есть: $\chi(\mu) = \begin{cases} \alpha(T - T(\mu)), T(\mu) \le T \\ \beta(T(\mu) - T), T \le T(\mu) \end{cases}$, где коэффициенты α и β могут быть как положительными, так и отрицательными.

Задача заключается в том, чтобы найти путь μ^*, максимизирующий разность между эффектом и штрафами, то есть

$$\mu^* = arg\ \max_{\mu}\ [Э(\mu) - \chi(\mu)].$$

Обозначим $l_{ij}(\lambda) = Э_{ij} - \lambda\, t_{ij}$, где λ – некоторый параметр, $T(\lambda)$ – продолжительность оптимального пути при параметре λ, то есть пути, имеющего максимальную длину, измеряемую в $l_{ij}(\lambda)$. Легко показать, что с ростом λ величина $T(\lambda)$ не возрастает.

Обозначим $T(\alpha)$, $T(\beta)$ – продолжительности оптимального пути при λ, равном α и соответственно β, $\mu(\alpha)$, $\mu(\beta)$ – эти пути (для их нахождения необходимо решить две задачи на поиск пути максимальной длины). Рассмотрим шесть случаев (исходную задачу можно разбить на две подзадачи: поиска максимума $Э(\mu) - \chi(\mu)$ при $T(\mu) \leq T$ и при $T(\mu) \geq T$).

Пусть $\alpha \geq \beta$, тогда $T(\beta) \geq T(\alpha)$ и:

1) если $T(\beta) \geq T(\alpha) \geq T$, то $\mu(\beta)$ – оптимальное решение;

2) если $T \geq T(\beta) \geq T(\alpha)$, то $\mu(\alpha)$ – оптимальное решение;

3) если $T(\beta) \geq T \geq T(\alpha)$, то, сравнивая $\mu(\alpha)$ и $\mu(\beta)$ по длинам $l = Э - \chi$, выбираем путь, имеющий максимальную длину.

Пусть $\alpha \leq \beta$, тогда $T(\beta) \leq T(\alpha)$ и:

4) если $T(\alpha) \geq T(\beta) \geq T$, то $\mu(\beta)$ – оптимальное решение;

5) если $T \geq T(\alpha) \geq T(\beta)$, то $\mu(\alpha)$ – оптимальное решение;

6) если $T(\alpha) \geq T \geq T(\beta)$, то задача не имеет эффективных методов решения (возможные подходы описаны в [7]).

П.2.3. Псевдопотенциальные графы

Полный, $(n + 1)$-вершинный, симметричный граф называется *псевдопотенциальным*, если длина его любого гамильтонова контура равна одному и тому же числу. Обозначим l_{ij}, $i, j = \overline{0, n}$ – длины дуг.

Известно [7, 11], что для того, чтобы граф был псевдопотенциальным, необходимо и достаточно существование чисел α_i, β_i, $i = \overline{0, n}$, таких что $l_{ij} = \beta_j - \alpha_i$ для всех

$i, j = \overline{0, n}$; а также что любой подграф псевдопотенциального графа является псевдопотенциальным.

Будем считать, что $\alpha_0 = 0$. Обозначим $M_j(\mu) = \sum_{k=1}^{j}\left(\beta_{i_k} - \alpha_{i_{k-1}}\right)$ – сумма длин первых j дуг гамильтонова контура μ, $\gamma_j = \alpha_j - \beta_j$. Определим $M(\mu) = \max_{1 \le j \le n} M_j(\mu)$.

Известно [7, 11], что существует оптимальное решение задачи

$$M(\mu) \to \min_{\mu}, \tag{1}$$

в котором сначала идут вершины с $\gamma_i \ge 0$ в порядке возрастания величин β_i, а затем вершины с $\gamma_i \le 0$ в порядке убывания величин α_i.

Для доказательства этого утверждения обозначим $M_{min} = \min_{\mu} M(\mu)$, а $\mu = (0, i_1, i_2, \dots , i_n, 0)$ – оптимальный гамильтонов контур (решение задачи (1)). Тогда для него имеет место следующая система неравенств:

$$\begin{cases} M_{min} \ge \beta_{i_1} \\ M_{min} + \gamma_{i_1} \ge \beta_{i_2} \\ M_{min} + \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} \ge \beta_{i_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ M_{min} + \gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_{n-1}} \ge \beta_{i_n} \end{cases}. \tag{2}$$

Если для некоторого индекса $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполнено $\gamma_{i_{s-1}} \le 0$, $\gamma_{i_s} \ge 0$, то из (2) следует справедливость соответствующей системы неравенств для следующего гамильтонова контура: $(0, i_1, \dots, i_{s-2}, i_s, i_{s-1}, i_{s+1}, \dots, i_n)$. Поэтому всегда существует оптимальное решение, в котором сначала обходятся вершины с положительными γ, а затем с отрицательными γ (вершину i с $\gamma_i = 0$ можно отнести в любую группу).

Если $\gamma_{i_{s-1}} \ge 0$, $\gamma_{i_s} \ge 0$ и $\beta_{i_{s-1}} > \beta_{i_s}$, то из (2) следует справедливость соответствующей системы неравенств для гамильтонова контура $(0, i_1, ..., i_{s-1}, i_s, i_{s+1}, ..., i_n)$.

Наконец, если $\gamma_{i_{s-1}} \le 0$, $\gamma_{i_s} \le 0$ и $\alpha_{i_{s-1}} < \alpha_{i_s}$, то из (2) следует справедливость соответствующей системы неравенств для гамильтонова контура $(0, i_1, ..., i_{s-1}, i_s, i_{s+1}, ..., i_n)$. Докажем, например, последнее утверждение. Из (2) получаем, что

$$M_{min} + \sum_{j=1}^{s-2} \gamma_{i_j} \ge \beta_{i_{s-1}} = \alpha_{i_{s-1}} - \gamma_{i_{s-1}},$$

$$M_{min} + \sum_{j=1}^{s-2} \gamma_{i_j} + \gamma_{i_{s-1}} \ge \beta_{i_s} = \alpha_{i_s} - \gamma_{i_s}.$$

Но тогда тем более имеет место:

$$M_{min} + \sum_{j=1}^{s-2} \gamma_{i_j} + \gamma_{i_{s-1}} \ge \alpha_{i_s}, \text{ так как } \gamma_{i_s} \le 0,$$

$$M_{min} + \sum_{j=1}^{s-2} \gamma_{i_j} + \gamma_{i_s} + \gamma_{i_{s-1}} \ge \alpha_{i_s} \ge \alpha_{i_{s-1}}.$$

Итак, пусть $\mu = (0, i_1, i_2, ... , i_n, 0)$ – контур, являющийся решением задачи (1), то есть

$\gamma_{i_j} \ge 0$, $j = 1, 2, ..., s$, причем $\beta_{i_1} \le \beta_{i_2} \le ... \le \beta_{i_s}$,

$\gamma_{i_j} \le 0$, $j = s + 1, ..., n$, причем $\alpha_{i_{s+1}} \ge \alpha_{i_{s+2}} \ge ... \ge \alpha_{i_n}$.

Тогда

$$M_{min} = max\left[\beta_{i_1}, \max_{1 \le k < n}\left(\beta_{i_{k+1}} - \sum_{j=1}^{k} \gamma_{i_j}\right)\right]. \qquad (3)$$

Частным случаем псевдопотенциального графа является *потенциальный граф*, у которого длина любого гамильтонова контура равна нулю[84]. В частности, потенциальный граф обладает следующими свойствами:

– у потенциального графа длина любого контура равна нулю;
– для n-вершинного потенциального графа существуют числа $\{\lambda_i\}$, такие что $l_{ij} = \lambda_j - \lambda_i,\ i, j = \overline{1, n}$.
– у потенциального графа для любой вершины сумма длин заходящих дуг по абсолютной величине равна сумме длин исходящих дуг.

П.2.4. Задачи о максимальном потоке

Рассмотрим сеть из $(n + 1)$ вершины. Пусть каждой дуге поставлено в соответствие число c_{ij}, называемое *пропускной способностью* дуги $(i; j)$.

Потоком x в сети называется совокупность чисел $\{x_{ij}\}$, где x_{ij} – поток по дуге $(i; j)$, удовлетворяющих условиям $0 \le x_{ij} \le c_{ij},\quad i, j = \overline{0, n},\quad \sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki},\quad i \ne 0, n$. *Величиной потока x* называется $\Phi(x) = \sum_i x_{0i} = \sum_i x_{in}$.

Задача о максимальном потоке заключается в определении потока максимальной величины[85].

Разрезом W в сети называется любое множество вершин, обязательно содержащее выход и не содержащее вход. Пропускной способностью $C(W)$ разреза W называется сумма пропускных способностей дуг, заходящих в разрез.

[84] Потенциальный граф может рассматриваться как модель электрической сети, а его свойства – как теоретико-графовые аналоги законов Кирхгофа.

[85] Наиболее распространенной содержательной интерпретацией является перевозка грузов из начальной вершины в конечную по дугам графа, где пропускная способность дуги характеризует максимальное количество груза, которое по ней можно перевозить в единицу времени.

Известно [4, 7, 58], что величина любого потока не превышает пропускной способности любого разреза (*теорема Форда-Фалкерсона*).

Следовательно, если удастся найти поток, величина которого равна пропускной способности некоторого разреза, то этот поток максимален, а разрез минимален.

Алгоритм 7 (алгоритм Форда-Фалкерсона). Применение алгоритма проиллюстрируем примером сети, приведенной на рисунке П.2.3, в которой пропускные способности всех дуг равны единице.

Шаг 0. Берем произвольный поток (например, поток $x_{01} = x_{12} = x_{25} = 1$). Помечаем начальную вершину индексом «0».

Обозначим Z – множество помеченных вершин.

Шаг k

1. Помечаем вершину j индексом $+i$, если, во-первых, существует дуга $(i; j)$, и, во-вторых, $i \in Z, j \notin Z, x_{ij} < C_{ij}$.

Если в результате этого типа пометок мы пометили выход, то поток можно увеличить хотя бы на единицу (если c_{ij} – целые числа). Двигаясь обратно, можно найти путь, поток по которому можно увеличить. Однако, как видно из примера, этого недостаточно для нахождения максимального потока.

2. Помечаем вершину i индексом $-j$, если, во-первых, существует дуга $(j; i)$, и, во-вторых, $j \in Z$, $i \notin Z$, $x_{ij} > 0$ (легко видеть, что пометки первого типа увеличивают поток по дуге, а пометки второго типа – уменьшают).

Если в результате этого типа пометок мы пометили выход, то поток можно увеличить. Двигаясь обратно, можно найти цепь, в которой каждая вершина помечена номером предыдущей (знак пометки не важен).

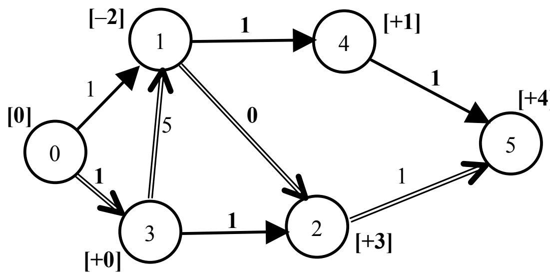


Рис. П.2.3. *Поиск максимального потока*

Рассмотрим цепь μ = (0; 3; 2; 1; 4; 5), приведенную на рисунке П.2.3. Полученные в результате второго действия потоки обозначены жирным шрифтом.

Критерий остановки алгоритма следующий [7, 11]: если, применяя пометки обоих типов, вершину n пометить не удалось, то полученный поток имеет максимальную величину.

Поток минимальной стоимости. Предположим, что задана сеть с пропускными способностями дуг c_{ij}. Пусть также для каждой дуги ($i; j$) заданы число s_{ij}, интерпретируемое как затраты (например, затраты на перевозку единицы груза из вершины i в вершину j). Задача поиска потока минимальной стоимости заключается в нахождении для заданной величины φ суммарного потока ее распределения по дугам, минимизирующего сумму затрат. Общие методы решения задачи о потоке минимальной стоимости рассматриваются в [7, 11, 17, 26, 58].

Частным случаем задачи о потоке минимальной стоимости является ***транспортная задача***, в которой имеется *двудольный граф* (двудольным называется граф, множество вершин которого может быть разбито на два непересекающихся подмножества, причем ребра (дуги) графа соединяют вершины только из разных подмножеств), представленный на рисунке П.2.4: вершины сети разбиты на две группы: m поставщиков и n потребителей.

Известно [26], что граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины или когда в нем все простые циклы имеют четную длину (*теорема Кенига*).

Для поставщиков заданы имеющиеся у них количества единиц товара (груза и т. д.) a_i, $i = \overline{1, m}$, для потребителей – требуемые им количества единиц товара b_i, $i = \overline{1, n}$. Известны также затраты s_{ij} перевозки единицы товара от i-го поставщика j-му потребителю. Пусть задача является *замкнутой*, то есть $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$ – суммарное предложение равно суммарному спросу (вводя фиктивного поставщика или фиктивного потребителя любую незамкнутую задачу можно свести к замкнутой). Требуется определить потоки товаров от потребителей к поставщикам, минимизирующие суммарные затраты.

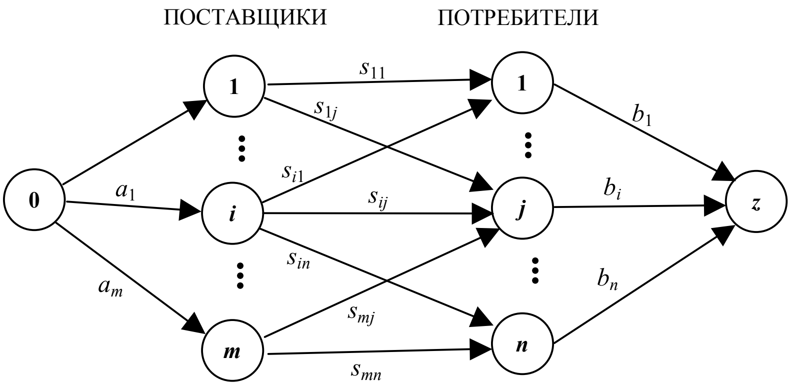


Рис. П.2.4. *Транспортная задача*

Формально транспортную задачу можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, s_{ij} \to \min_{\{x_{ij} \geq 0\}} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1, m} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1, n}\,. \qquad (3)$$

Добавляя к двудольному графу вход «0» и выход «*z*» и соединяя вход и выход с остальными вершинами дугами с потоком $x_{0i} = a_i$, , $i = \overline{1, m}$, $x_{jz} = b_j$, $j = \overline{1, n}$, получаем задачу о потоке минимальной стоимости. Алгоритмы решения транспортной и двойственной к ней задач описаны в [7, 11, 17].

Частным случаем транспортной задачи является ***задача о назначении***, заключающаяся в следующем: имеются n человек (работников), которые могут выполнять различные работы (занимать различные должности), число работ равно числу работников (введя фиктивные должности и/или фиктивные работы, всегда можно незамкнутую задачу привести к рассматриваемой замкнутой форме). Известны затраты s_{ij} на назначение i-го работника на j-ю должность (например, минимальная зарплата, за которую он согласится работать на этой должности). Требуется найти назначение работников на должности (каждого работника на одну и только одну должность), минимизирующее суммарные затраты (если s_{ij} интерпретируется как эффективность от работы i-го работника на j-й должности, то оптимальное назначение должно максимизировать суммарную эффективность).

Формально задачу о назначении можно записать в виде (ср. с (1)–(3)):

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, s_{ij} \to \min_{\{x_{ij} \in \{0;1\}\}} \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1, n} \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1, n}\,. \tag{6}$$

Известны множество методов решения задачи о назначении [7, 11, 17]. Рассмотрим один из них на следующем примере.

Пусть имеются $n = 3$ работника и столько же работ. Матрица затрат имеет вид: $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 8 \end{Vmatrix}$.

Алгоритм 8

Шаг 0. Назначаем каждого человека на самую дешевую для него работу (назначение выделено на рисунке П.2.5 тонкими дугами), то есть положим:

$$x_{ij}^{0} = \begin{cases} 1, & \text{если } s_{ij} = \min\limits_{k} s_{ik} \\ 0 \text{ в остальныхслучаях} \end{cases}.$$

Если при этом назначение является допустимым (то есть все работы выполняются), то решение получено.

Если имеется «дисбаланс», то есть не все работы выполняются ($\exists\, j_1$: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij_1}^{0} > 1$), то переходим к следующему шагу.

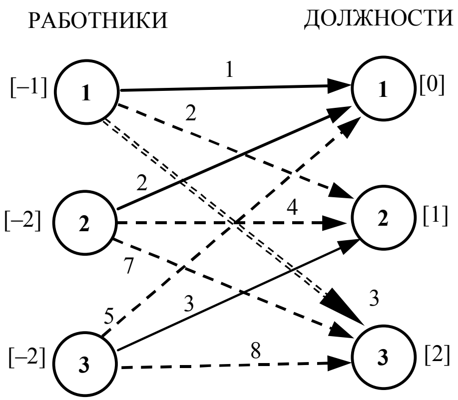


Рис. П.2.5. *Задача о назначении*

Шаг *k.* Введем два подмножества множества дуг: $P_1 = \{(i; j) \mid x_{ij} = 1\}$, $P_2 = \{(i; j) \mid x_{ij} = 0\}$. Примем множество вершин-работ, на которых назначено несколько работников за вход сети, множество вершин-работ, которые не выполняются, – за выход сети.

Изменим направления дуг из множества P_1 на обратные и примем их длины равными $(–s_{ij})$, длины дуг из множества P_2 примем равными s_{ij}. Найдем путь μ^k минимальной длины в полученной сети (потенциалы вершин, вычисляемые при нахождении кратчайшего пути в рассматриваемом примере, приведены в квадратных скобках).

Далее полагаем $x_{ij}^k = \begin{cases} x_{ij}^{k-1}, & \text{если } (i;\, j) \notin \mu^k \\ 1 - x_{ij}^{k-1}, & \text{если } (i;\, j) \in \mu^k \end{cases}.$

В результате в рассматриваемом примере за один шаг получим оптимальное назначение, отличающееся от найденного на нулевом шаге тем, что первому работнику назначается третья работа (см. дугу, обозначенную двойными линиями на рис. П.2.5).

На каждом шаге число «дисбалансов» уменьшается на единицу. Следовательно, число шагов алгоритма не превышает числа «дисбалансов», которое конечно.

Аналогичным способом можно решить любую транспортную задачу (искать кратчайший путь из множества вершин, в которые доставили товара больше, чем требуется, во множество вершин, где товара не хватает).

Решение общего случая задачи о потоке минимальной стоимости основывается на рассмотрении двойственной задачи [7, 17].

П.2.5. Задачи календарно-сетевого планирования и управления

Рассмотрим *проект*, состоящий из набора *операций* (работ). Технологическая зависимость между операциями задается в виде сети (*сетевого графика*). При этом дуги сети соответствуют операциям, а вершины – событиям (моментам окончания одной или нескольких операций). Для каждой операции $(i; j)$ задана ее продолжительность t_{ij}. Методы описания и исследования сетевых графиков изучаются в теории календарно-сетевого планирования и управления (КСПУ) [7, 11].

Задача определения продолжительности проекта (управление временем). Легко видеть, что продолжительность проекта определяется путем максимальной длины, называемым *критическим путем*. Методы поиска пути максимальной длины описаны выше. Критический путь в сети на рисунке П.2.6 выделен двойными дугами и равен 16.

Операции, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Остальные (некритические) операции имеют *резерв времени*, характеризуемый максимальной задержкой операции, при которой продолжительность проекта не изменяется. Критические операции имеют нулевой резерв. Приведем соответствующие формулы.

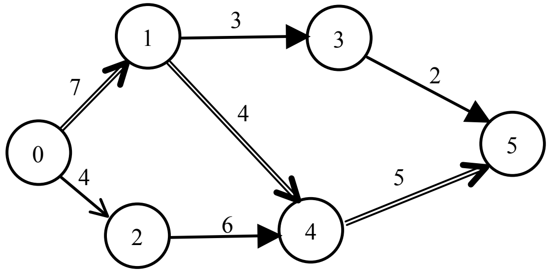


Рис. П.2.6. *Поиск критического пути*

Алгоритм 9. Предположим, что выполнение комплекса операций (проекта) начинается в нулевой момент времени. Обозначим Q_0 – множество событий, не требующих выполнения ни одной из операций, то есть входы сети с правильной нумерацией; Q_i – множество событий, непосредственно предшествующих событию i, то есть множество вершин j сети, для которых существует дуга ($j; i$).

Положим

$$t_i^- = \max_{j \in Q_0} t_{ji}, \; t_i^- = \max_{j \in Q_i} (t_j^- + t_{ji}). \qquad (1)$$

Величина t_i^- называется *ранним моментом* (*временем*) *свершения* i-го события и характеризует время, раньше которого это событие произойти не может.

Длина критического пути

$$T = \max_i \; t_i^- \qquad (2)$$

определяется ранним временем свершения конечного события, то есть события, заключающегося в завершении всех операций.

Поздним моментом t_i^+ *свершения события* называется максимальное время его наступления, не изменяющее продолжительности проекта.

Обозначим R_i – множество событий, непосредственно следующих за событием i, то есть множество вершин j сети, для которых существует дуга ($i; j$). Вычислим для каждой вершины-события i длину l_i максимального пути от этой вершины до выхода сети – события, заключающегося в завершении всего комплекса операций:

$$l_i = \max_{j \in R_i} (l_j + t_{ij}). \tag{3}$$

Положим $t_i^+ = T - l_i$, $i = \overline{1, n}$.

Для завершения проекта за время T необходимо и достаточно, чтобы событие i произошло не позднее момента t_i^+, $i = \overline{1, n}$.

Полным резервом Δt_i события i называется разность между его поздним и ранним моментами свершения, то есть

$$\Delta t_i = t_i^+ - t_i^-,\ i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Очевидно, полный резерв критических событий (событий, принадлежащих критическому пути) равен нулю.

Задачи распределения ресурса на сетях удобно рассматривать, изображая операции вершинами сети, а зависимости – дугами (представления «операции-дуги, события-вершины» и «зависимости-дуги, операции-вершины» эквивалентны [7]). Пунктиром могут быть отражены ресурсные зависимости – когда для выполнения одних и тех же операций должны быть использованы одни и те же ресурсы. Примером могут являться сети, изображенные на рисунках П.2.6 и П.2.7.

Полным резервом операции ($i; j$) называется величина $\Delta_{ij} = t_{ij}^n - t_{ij}^p$, где t_{ij}^n – поздний срок начала (окончания) операции, а t_{ij}^p – ранний срок начала (окончания) операции.

Для определения оптимального распределения ресурса необходимо найти критические пути для каждого из вариантов распределения ресурса и сравнить длины этих путей (в сети, приведенной на рис. П.2.7, существует общий для операций «0–1» и «0–2» ресурс; потенциалы вершин, соответствующие различным способам использования этого ресурса, – сначала выполняется операция «0–1», затем «0–2» и наоборот, приведены на рис. П.2.7 соответственно в квадратных скобках и без скобок).

Универсальных эффективных точных методов решения задач распределения ресурсов на сетях не существует. В качестве частного случая, для которого существует простой алгоритм, приведем следующий пример.

В сети, изображенной на рисунке П.2.8, для трех операций известны поздние времена окончания τ_i. Требуется определить очередность выполнения этих трех операций при условии, что все операции выполняются одной единицей ресурса и поэтому не могут выполняться одновременно.

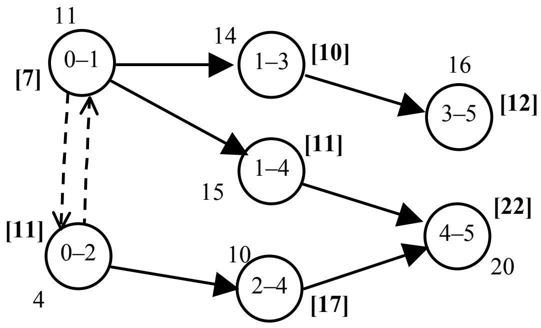


Рис. П.2.7. *Представление «операции-вершины»*

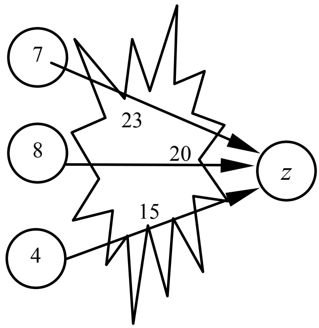


Рис. П.2.8. *Пример распределения ресурса*

Легко показать, что в рассматриваемом примере оптимально выполнять первой операцию с минимальным τ_i.

Если для выполнения проекта выделено ограниченное количество ресурса, то возникает задача наилучшего его использования. Обозначим w_i – объем i-й операции, $f_i(v_i)$ – скорость ее выполнения в зависимости от количества ресурса v_i. Предположим, что $f_i(\cdot)$ – непрерывная справа неубывающая функция, причем $f_i(0) = 0$. Если $v_i(t)$ – количество ресурса на i-й операции в момент времени t, то момент t_i ее окончания определяется как минимальное время, удовлетворяющее уравнению:

$$\int_0^{t_i} f_i(v_i(t))dt = w_i.$$

Если количество ресурса, используемое при выполнении некоторой операции, не изменяется во времени, то говорят, что она выполняется с *постоянной интенсивностью*. Тогда продолжительность операции определяется выражением:

$$t_i(v_i) = w_i / f_i(v_i).$$

В настоящее время общих алгоритмов поиска распределения ограниченных ресурсов между операциями, минимизирующего время завершения проекта, не существует. Поэтому рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть все операции независимы и выполняются ресурсом одного вида, количество которого равно R, а $f_i(v_i)$ – непрерывные строго монотонные вогнутые функции. Тогда существует оптимальное решение, в котором каждая операция выполняется с постоянной интенсивностью и все операции заканчиваются одновременно в момент времени T, определяемый как минимальное время, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{-1}\left(\frac{w_i}{T}\right) \leq R,$$

где $f_i^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная функции $f_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n}$ [7].

Эвристические алгоритмы определения оптимального распределения ресурса для ряда случаев «невогнутых» функций интенсивности рассматриваются в [7, 11, 13].

Обширный класс задач КСПУ составляют *задачи агрегирования* – представления комплекса операций (проекта) в виде одной операции и исследования свойств таких представлений, для которых оптимизация в рамках агрегированного описания дает решение, оптимальное для исходного (детального) описания. Основные подходы к постановке и решению задач агрегирования рассматриваются в [7, 11, 13].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

В настоящем приложении рассматривается аппарат описания предпочтений участников организационных систем – отношения предпочтения и функции полезности.

Отношения предпочтения. Как отмечалось в первой главе, в основе теории принятия решений лежит предположение, что человек, поставленный перед проблемой выбора, в процессе выработки решения (выбора альтернативы) руководствуется своими предпочтениями, то есть выбирает действие, которое, по его мнению, приведет к наиболее предпочтительному для него результату деятельности (исходу). Формальное описание процесса сравнения альтернатив может быть дано через отношения предпочтения и неразличимости. Введем необходимые определения [25].

Бинарное отношение $\wp$ на множестве A_0 – это подмножество $\wp \subseteq A_0 \times A_0$, где $A_0 \times A_0$ – множество всех упорядоченных пар (a, b), $a, b \in A_0$. Если $(a, b) \in \wp$, говорят, что отношение $\wp$ *выполнено* (или *имеет место*) для (a, b) и пишут $a \wp b$.

Если бинарное отношение $\wp$ не имеет места для a, b, этот факт обозначается $a \wp^c b$.

Отношение предпочтения $\succ$ – это бинарное отношение, определяемое свойством: $a \succ b$ тогда и только тогда, когда a предпочтительнее (лучше) для *лица, принимающего решение*, чем b.

Отношение неразличимости $\approx$ имеет место для пары a, b тогда и только тогда, когда $a \succ^c b$ и $b \succ^c a$.

Отношение $\wp$ называется *рефлексивным*, если для всех $a \in A_0$ выполнено $a \wp a$, *антирефлексивным*, если для всех $a \in A_0$ выполнено $a \wp^c a$.

Отношение $\wp$ называется *антисимметричым*, если из $a \wp b$ и $b \wp a$ следует $a = b$, *асимметричным*, если из $a \wp b$ следует $b \wp^c a$.

Далее рассматривается отношение *строгого* предпочтения $\succ$, для которого выполнено условие асимметричности.

Отношение $\wp$ называется *транзитивным*, если для всех $a, b, c \in A_0$ из $a \wp b$ и $b \wp c$ следует $a \wp c$.

Отношение $\wp$ называется *полным*, если для всех $a, b \in A_0$ выполнено $a \wp b$ или $b \wp a$.

Пусть на множестве исходов A_0 задано предпочтение ЛПР, то есть отношение типа $\succ$, которое для пары a, b исходов из A_0 выполняется, если a лучше b с точки зрения лица, принимающего решение. Определим также множество действий A. Это множество содержит все возможные действия ЛПР и состоит из элементов вида «Сделать то-то», «Приказать то-то», «Купить то-то» и пр.

Однако определением множеств A_0, A и отношения предпочтения на A_0 формулировка задачи принятия решения не исчерпывается. Необходимо определить еще связь между принятым решением и реализующимся результатом.

Задача принятия решения – это задача выбора ЛПР действия из множества A, которое приводит к наилучшему с точки зрения предпочтения ЛПР результату из A_0. Чтобы решить эту задачу, необходимо тем или иным образом из отношения предпочтения на множестве исходов A_0 вывести отношение предпочтения на множестве действий A, а затем выбрать наиболее предпочтительное действие.

Пусть имеется некоторая функция w: $A \to A_0$ – детерминированное (однозначное) соответствие между выбранным действием и его результатом. В этом случае выбор действия равнозначен выбору результата. Задача, таким образом, состоит лишь в нахождении *реализуемого исхода* (то есть исхода, для которого есть действие, его реализующее), предпочтительного по отношению ко всем остальным реализуемым исходам. Выбранное действие будет принадлежать множеству:

$$P(\succ, A) = \{a \in A \mid \overline{\exists}\, b \in A : w(b) \succ w(a)\}.$$

Все действия, принадлежащие решению, приводят к исходам, равнозначным с точки зрения отношения $\approx$.

Такая задача называется *детерминированной задачей принятия решения.*

Сложнее дело обстоит, если результат z действия y зависит не только от самого действия ЛПР, но и от внешних по отношению к ЛПР факторов, то есть зависимость результата от действия имеет вид $z = w\,(y, \theta, u)$, где θ и u – факторы, не зависящие от ЛПР. Множества возможных значений этих параметров обозначим Θ и U соответственно. Если эти факторы известны на момент принятия решения, задача сводится к предыдущему случаю. Если же они не известны, возникает неопределенность.

Теперь уже выбор ЛПР некоторого действия y^* не приводит к единственному возможному результату. В зависимости от реализации не зависящих от ЛПР факторов θ и u может реализоваться любой результат из множества $R(y^*) = \{w\,(y^*, \theta, u) \mid \theta \in \Theta, u \in U\}$. Чтобы сделать выбор, ЛПР необходимо сравнивать эти множества. Однако отношение предпочтения на системе множеств $R(\cdot)$ не задано условиями задачи. Его необходимо получать (возможно, используя некоторые дополнительные предположения) из отношения предпочтения на множестве результатов A_0.

Так, если известно распределение вероятностей реализации событий из Θ и U, то можно определить вероятности появления различных результатов при выборе определенного действия – получаем *задачу принятия решения в условиях вероятностной неопределенности* (см. раздел 1.1 и [25, 48, 49]).

Немногим отличается случай, когда ЛПР не имеет информации о вероятностях некоторых значимых событий, но имеет предположения о них. В этом случае объективные вероятности заменяются на субъективные и реализуется та же схема решения.

Таким образом, в данном примере каждое решение (действие) ЛПР приводит к *лотерее*, случайному процессу, в котором исходы могут реализовываться с некоторыми вероятностями. Для того чтобы от предпочтения на множестве исходов перейти к предпочтениям на множестве действий, ЛПР должен уметь сравнивать свои предпочтения на множестве подобных лотерей, то есть определять, какая из лотерей для него лучше или хуже. Тогда оптимальным решением будет действие, приводящее к наилучшей лотерее. Каким образом осуществляется этот переход, описывается ниже.

Полезность и функция полезности. При решении задач принятия решений для описания интересов ЛПР редко используется непосредственно отношение предпочтения. Это связано с тем, что бинарные отношения довольно неудобны для моделирования реальных систем и анализа этих моделей. Гораздо чаще используются *функции полезности*.

Соответствие между отношением предпочтения $\succ$ и функцией полезности $f : A_0 \to \Re^1$ определяется условием:

$$\forall a,b \in A_0 \;\; f(a) > f(b) \Leftrightarrow a \succ b. \qquad (1)$$

Рассмотрим, каким ограничениям должно удовлетворять отношение предпочтения, чтобы можно было рассматривать вместо него функцию полезности. Эта задача является предметом изучения *математической теории полезности* [39, 62].

Как отмечалось выше, отношение предпочтения – бинарное отношение на множестве исходов A_0, удовлетворяющее, как минимум, свойству *асимметрии*. Для продуктивного использования, однако, необходимы дополнительные условия на отношение предпочтения. При этом то, какие дополнительные предположения необходимо сделать, чтобы получить инструмент, с которым можно работать, не отходя в то же время от встречающихся в реальной жизни предпочтений, – это вопрос, который на протяжении многих лет служил предметом дискуссий и продолжает обсуждаться до сих пор. Дело в том, что подобные дополнительные предположения вводятся в виде аксиом, некоторых гипотез о закономерностях процесса выбора и обоснованность введения тех или иных предположений отнюдь не бесспорна.

Приведем типичный набор таких аксиом (отметим, что некоторые из перечисленных ниже аксиом зависимы). Другие примеры введения аксиоматики можно найти в [62].

Введем следующие *аксиомы полезности*.

1. Если $\succ$ – отношение предпочтения (асимметричное), $\approx$ – отношение неразличимости, то для любых исходов x и y имеет место одно из событий: либо $x \succ y$, либо $y \succ x$, либо $x \approx y$, то есть для любой пары исходов либо первый исход предпочтительнее второго, либо второй предпочтительнее первого, либо же исходы равнозначны. Если $a \approx b \Leftrightarrow a \succ^c b$ и $b \succ^c a$, то эта аксиома выполняется всегда.

2. $x \approx x$, для любого исхода x, то есть исход всегда неотличим от себя самого, что также очевидным образом следует из определения отношения безразличия.

3. Если $x \approx y$, $y \approx z$, то $x \approx z$. Это – условие *транзитивности отношения неразличимости*, оно уже не столь

очевидно. Существуют примеры достаточно логичных с точки здравого смысла предпочтений, когда эта аксиома не выполняется (см. ссылки в [38]).

4. Если $x \succ y$, $y \succ z$, то $x \succ z$ (условие *транзитивности отношения предпочтения*).

5. Если $x \succ y$, $y \approx z$, то $x \succ z$, то есть если x лучше y и y равнозначно z, то x лучше z. На самом деле эта аксиома вводит предположение о произвольно глубокой разрешающей способности агента – о том, что последний всегда может различить сколь угодно близкие ситуации.

6. Если $x \approx y$, $y \succ z$, то $x \succ z$ (аналогично аксиоме 5).

Этих предположений хватает [39], чтобы ввести функцию $f(\cdot)$ таким образом, чтобы выполнялось условие (1). Однако их недостаточно, чтобы определить эту функцию однозначно. Действительно, в случае конечного числа исходов нестрогое упорядочение позволяет лишь выстроить их в порядке от наихудшего до наилучшего. Этой последовательности событий можно сопоставить любую последовательность возрастающих чисел, назначая в качестве значения функции полезности соответствующий элемент числовой последовательности (другими словами, функция полезности определена с точностью до монотонного преобразования).

Чтобы от отношения предпочтения перейти к определенной с точностью до линейного преобразования функции полезности, требуются дополнительные аксиомы (так называемые *аксиомы комбинирования*), определяющие модель поведения в условиях неопределенности.

Пусть x и y – любые исходы из A_0 и $0 < r, s < 1$. Тогда выражение $r\,x + (1 - r)\,y$ будет обозначать исход, представляющий собой лотерею, которая реализует два исхода x и y с вероятностями r и $(1 - r)$ соответственно. Тогда от этой лотереи потребуем выполнения следующих условий.

7. $r\,x + (1 - r)\,y = (1 - r)\,y + r\,x$ для любой лотереи r на x, y. Это свойство *коммутативности лотереи*, имеющее лишь техническое значение. Оно, по сути, не ограничивает предпочтения.

8. $r\,x + (1-r)(s\,y + (1-s)z) = r\,x + (1-r)s\,y + (1-r)\,(1-s)z$ для любых лотерей s и r на исходах $x, y, z \in A_0$. Это свойство вводит предположение о том, что для ЛПР порядок лотерей не важен.

9. $r\,x + (1 - r)\,x = x$ (*рефлексивность лотереи*).

10. Если $x \approx z$, то для любых y, r имеем

$$(r\,x + (1 - r)\,y) \approx (r\,z + (1 - r)\,y).$$

11. Если $x \succ z$, то для любых $r > 0$ и y имеем

$$(r\,x + (1 - r)\,y) \succ (r\,z + (1 - r)\,y).$$

12. Пусть $x \succ z \succ y$. Тогда существует $0 \le r \le 1$, такое что $(r\,x + (1 - r)\,y) \approx z$. Эта очень важная аксиома имеет отдельное название – *аксиома непрерывности*.

В [39] доказано, что если для отношения предпочтения $\succ$ выполнены аксиомы 1–12, то существует функция f: $A_0 \to R$, такая что для любых x, y из A_0 и любого $r \in [0, 1]$

$$f(x) > f(y) \Leftrightarrow x \succ y, \tag{2}$$

$$f(rx + (1 - r)y) = r\,f(x) + (1 - r)f(y). \tag{3}$$

Эта функция единственна *с точностью до положительного линейного преобразования*, то есть если некоторая функция $F(\cdot)$ удовлетворяет условиям (2), (3), то $F(x) = \alpha\ f(x) + \beta$, где $\alpha > 0$ и β – некоторые константы (доказательство можно также найти в [39, 62]).

Итак, предположений 1–12 достаточно, чтобы построить по отношению предпочтения функцию полезности, единственную с точностью до переноса координат и изменения масштаба [39, 62, 63], то есть описать полезность в виде функции $F(x) = \alpha\ f(x) + \beta$, где $f(x)$ – некоторая известная функция, а константы $\alpha > 0$ и β не определены.

В постановках задач математической экономики и управления отношение предпочтения как таковое фигурирует крайне редко. Функция полезности в этом случае строится почти эмпирически (на самом деле при этом используются уже полученные, готовые результаты теории полезности [39, 62, 63]). Тем не менее всегда необходимо помнить, что для корректного использования функции полезности Неймана-Моргенштерна, предпочтение, которым она определяется, должно удовлетворять аксиомам 1–12.

Выше была построена функция полезности отдельного агента. Однако задачей теории принятия решений и теории игр является исследование взаимодействия многих агентов. Поэтому интересен вопрос о том, как соотносятся друг с другом полезности разных агентов, как «привести к общему знаменателю» шкалы измерения их полезностей. Особенную актуальность этот вопрос представляет при рассмотрении игровых моделей, в которых игроки могут передавать друг другу полезность (так называемые *игры с трансферабельной полезностью,* или *ТП-игры*, в отличие от *игр с нетрансферабельной полезностью*, или *НТП-игр*, в которых передача полезности запрещена правилами игры). Передача полезности между игроками может принимать вид денежных выплат или передачи иных материальных ценностей. Поскольку целью таких платежей является воздействие на полезность (или *выигрыш*) игрока, понятно, что в этом случае частью описания исходов (на множестве которых определена функция полезности) должно быть количество денег или материальных ценностей, являющихся средством обмена.

Можно показать [60], что для того, чтобы уменьшение полезности «донора» d при передаче некоторого количества денег соответствовало пропорциональному увеличению полезности «акцептора» a, их функции полезности $F_i(\cdot)$ должны иметь вид:

$$F_i(x_i, c_i) = g_i(x_i) + \lambda_i c_i,\ i \in \{d, a\}, \qquad (4)$$

где $F_i(\cdot)$ – функция полезности игрока i, c_i – сумма денег в его распоряжении, x_i – остальные компоненты описания исхода для игрока i, а $g_i(\cdot)$ – полезность компонент x ситуации.

Если функции полезности имеют вид (4) для всех рассматриваемых индивидуумов, то говорят о существовании *отделимого линейно трансферабельного товара*. При этом соответствующим выбором масштаба функций предпочтения можно сделать приращения полезности при передаче некоторого количества денег не просто пропорциональными, но и равными по абсолютной величине. Наличие линейно трансферабельного товара облегчает исследование моделей управления организационными системами.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Настоящее приложение содержит определения нечетких множеств, нечетких отношений и принципа обобщения, описание их свойств, а также модель принятия решений при нечеткой исходной информации.

Нечеткие множества. Пусть X – некоторое множество. *Нечетким подмножеством* $\widetilde{A}$ множества X называется множество пар $\widetilde{A} = \{\mu_{\widetilde{A}}(x), x\}$, где $x \in X$, $\mu_{\widetilde{A}}(x) \in [0, 1]$. Функция $\mu_{\widetilde{A}} : X \to [0, 1]$ называется *функцией принадлежности* нечеткого множества $\widetilde{A}$, а X – *базовым множеством*. Далее в этом приложении нечеткие множества обозначаются тильдой.

Носителем множества $\widetilde{A}$ называется подмножество множества X, содержащее те элементы из X, для которых значения функции принадлежности больше нуля: $supp\, \widetilde{A} = \{x \in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\}$.

Пример П.4.1[86]**.** В качестве примера нечеткого множества рассмотрим нечеткое множество действительных чисел, много больших единицы: $\widetilde{A} = \{x \in R^1 \mid x >> 1\}$, которое может задаваться функцией принадлежности, эскиз которой изображен на рисунке П.4.1.

Для сравнения приведем эскиз функции принадлежности четкого множества чисел, строго больших единицы: $B = \{x \in R^1 \mid x > 1\}$.

[86] Приводимые примеры иллюстрируют соответствие между четкими и нечеткими множествами.

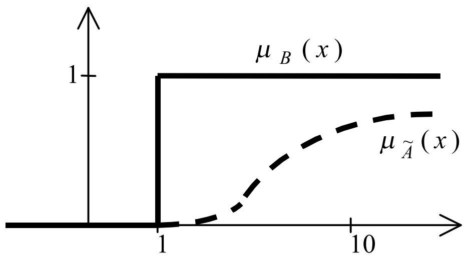


Рис. П.4.1. *Пример четкого и нечеткого множеств*

Свойства нечетких множеств

1. Нечеткое множество $\tilde{A}$ называется *нормальным*, если

$$\sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1.$$

2. Два нечетких множества *равны* (записывается $\tilde{A} = \tilde{B}$), если

$$\forall x \in X,\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x).$$

3. Нечеткое множество $\tilde{B}$ *содержится* в нечетком множестве $\tilde{A}$ или является подмножеством $\tilde{A}$ (то есть $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$), если

$$\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{B}}(x) \le \mu_{\tilde{A}}(x).$$

Пример П.4.2. Функции принадлежности четких подмножеств A = [1, 5] и B = [3, 4] множества действительных чисел (рис. П.4.2) имеют вид: $\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x \in [1, 5]; \\ 0, x \notin [1, 5], \end{cases}$ и $\mu_B(x) = \begin{cases} 1, x \in [3, 4]; \\ 0, x \notin [3, 4]. \end{cases}$

Пользуясь приведенным выше определением принадлежности множеств, получаем $B \subseteq A$. Таким образом, для четких множеств определение принадлежности приобретает стандартный вид.

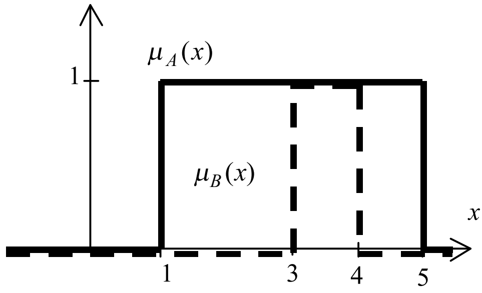


Рис. П.4.2. *Включение нечетких множеств*

4. *Пересечением* нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ ($\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$) называется наибольшее нечеткое множество, содержащееся как в $\widetilde{A}$, так и в $\widetilde{B}$, с функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}}(x) = min\,\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\}\,,\ x \in X\,.$$

Пример П.4.3. Рассмотрим четкие множества $A = [1, 4]$ и $B = [3, 5]$. Пользуясь приведенным выше определением пересечения, получаем, что для четких множеств определение операции пересечения приобретает стандартный вид (рис. П.4.3).

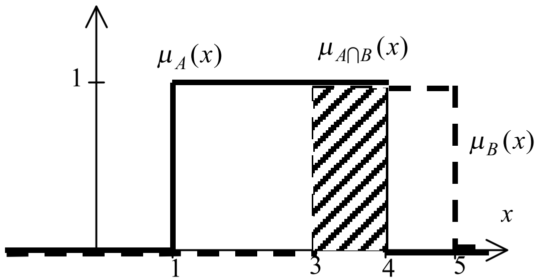


Рис. П.4.3. *Пересечение нечетких множеств*

5. *Объединением* нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называется наименьшее нечеткое множество, содержащее как $\widetilde{A}$, так и $\widetilde{B}$, с функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x) = max\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\}, x \in X .$$

Пример П.4.4. Рассмотрим четкие подмножества $A = [1, 4]$ и B = [3, 5] множества действительных чисел. Пользуясь приведенным выше определением объединения, получаем, что для четких множеств определение операции объединения приобретает стандартный вид (рис. П.4.4).

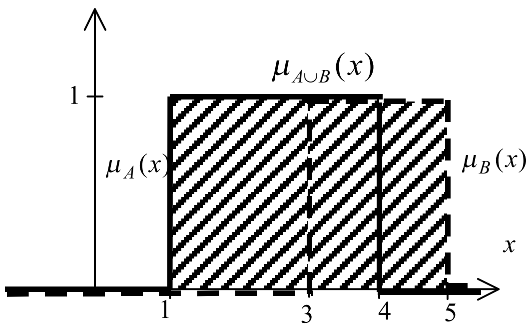


Рис. П.4.4. *Объединение нечетких множеств*

6. *Дополнением* нечеткого множества $\widetilde{A}$ в X называется нечеткое множество $\neg\widetilde{A}$ со следующей функцией принадлежности:

$$\mu_{\neg\widetilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x), \forall x \in X .$$

Пример П.4.5. Рассмотрим четкое подмножество $A = [1, 4]$ множества действительных чисел. Пользуясь приведенным выше определением, получаем, что для четких множеств определение операции дополнения множества приобретает стандартный вид (рис. П.4.5).

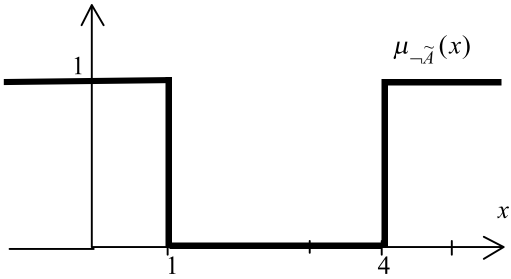


Рис. П.4.5. *Дополнение множества*

Нечеткие отношения. Под четким бинарным отношением, определенным над множеством X, понимается подмножество множества $X \times X$ (см. Приложение 3). Перенося определение нечетких множеств на отношения, определим нечеткое отношение как нечеткое подмножество X^2. Таким образом, под *нечетким отношением* $\widetilde{R}$ будем понимать функцию принадлежности $\mu_{\widetilde{R}}(x, y)$ такую, что $\mu_{\widetilde{R}} : X \times X \to [0, 1]$. Значение функции принадлежности понимается как степень выполнения отношения $x \widetilde{R} y$.

Пример П.4.6. Рассмотрим четкое отношение R – «больше, либо равно», тогда $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$.

Функция принадлежности этого четкого бинарного отношения $\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, x \geq y; \\ 0, x < y. \end{cases}$

Множество R изображено на рисунке П.4.6.

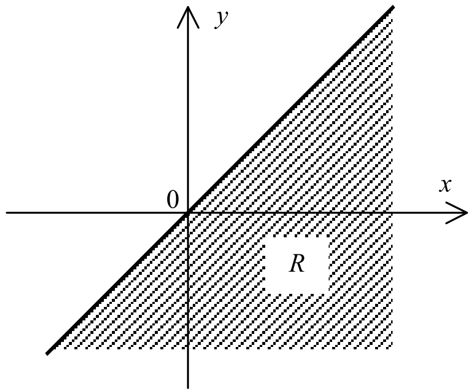


Рис. П.4.6. *Множество пар (x, y) четкого отношения «≥»*

Свойства нечетких отношений

1. *Рефлексивность*:

– если $\forall x \in X \quad \mu_{\widetilde{R}}(x, x) = 1$, то нечеткое отношение $\widetilde{R}$ рефлексивно в смысле Р1;

– если $\forall x \in X \quad \mu_{\widetilde{R}}(x, x) = \dfrac{1}{2}$, то нечеткое отношение $\widetilde{R}$ рефлексивно в смысле Р2.

2. *Антирефлексивность* (для Р1): если $\forall x \in X$ $\mu_{\widetilde{R}}(x, x) = 0$, то нечеткое отношение $\widetilde{R}$ антирефлексивно в смысле Р1.

3. *Симметричность:* если $\forall x, y \in X$ выполняется $\mu_{\widetilde{R}}(x, y) = \mu_{\widetilde{R}}(y, x)$, то нечеткое отношение $\widetilde{R}$ называется симметричным.

4. *Асимметричность*: если $\forall x, y \in X$ из $\mu_{\widetilde{R}}(x, y) > 0$ следует $\mu_{\widetilde{R}}(y, x) = 0$, то нечеткое отношение $\widetilde{R}$ называется асимметричным.

5. *Линейность* (*полнота*): нечеткое отношение $\widetilde{R}$ называется λ-линейным в смысле определения Л1, если $\forall\, x, y \in X$ выполняется $max\left\{\mu_{\widetilde{R}}(x, y), \mu_{\widetilde{R}}(y, x)\right\} > \lambda$, где $\lambda \in [0, 1)$; при $\lambda = 0$ $\widetilde{R}$ называется слабо линейным.

Если $\forall x, y \in X$ выполняется $max\left\{\mu_{\widetilde{R}}(x, y), \mu_{\widetilde{R}}(y, x)\right\} = 1$, то отношение $\widetilde{R}$ называется *сильно линейным*.

Нечеткое отношение $\widetilde{R}$ называется линейным в смысле определения Л2, если $\forall x, y \in X$, $\mu_{\widetilde{R}}(x, y) = 1 - \mu_{\widetilde{R}}(y, x)$.

6. *Отрицание* $\widetilde{R}'$ отношения $\widetilde{R}$ определяется как отношение, функция принадлежности которого $\forall x, y \in X$ определяется

$$\mu_{\widetilde{R}'}(x, y) = 1 - \mu_{\widetilde{R}}(x, y).$$

7. *Обратное* к отношению $\widetilde{R}$ отношение $\widetilde{R}^{-1}$ определяется $\forall x, y \in X$ выражением $\mu_{\widetilde{R}^{-1}}(x, y) = \mu_{\widetilde{R}}(y, x)$.

8. *Композицией отношений* (произведением) называется отношение:

К1 – максиминная композиция:

$$\mu_{\widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_2}(x, y) = \sup_{z \in X} min\{\mu_{\widetilde{R}_1}(x, z), \mu_{\widetilde{R}_2}(z, y)\};$$

К2 – минимаксная композиция:

$$\mu_{\widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_2}(x, y) = \inf_{z \in X} max\,\{\mu_{\widetilde{R}_1}(x, z), \mu_{\widetilde{R}_2}(z, y)\};$$

К3 – максмультипликативная композиция:

$$\mu_{\widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_2}(x, y) = \sup_{z \in X}\,\{\mu_{\widetilde{R}_1}(x, z)\mu_{\widetilde{R}_2}(z, y)\}.$$

9. *Транзитивность*. В соответствии с тремя определениями композиции можно построить три определения транзитивности – (Т1), (Т2) и (Т3) по следующей схеме: $\widetilde{R} \cdot \widetilde{R} \subseteq \widetilde{R}$. Определение максиминной транзитивности в случае четких бинарных отношений совпадет с определением их транзитивности, приведенном в Приложении 3.

Нечетким отношением предпочтения (НОП) называется нечеткое отношение, удовлетворяющее (Р1), (Л1) и (Т1).

Принцип обобщения определяет образ нечеткого множества при четком или нечетком отображении. Напомним, что образом отображения $f: X \to Y$ четкого множества X во множество Y является множество таких элементов множества Y, для которых существует прообраз в множестве X: $f(X) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X: f(x) = y\}$.

В соответствии с *принципом обобщения* образом нечеткого множества $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $x \in X$, при четком отображении $f: X \to Y$ является нечеткое множество $\mu_{\tilde{B}}(y)$, $y \in Y$, с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_{\{x \in X \mid f(x) = y\}} \mu_{\tilde{A}}(x),\ y \in Y.$$

Принцип обобщения является удобным инструментом «перевода» четких моделей и задач в нечеткие и широко используется как в моделях принятия решений [59], так и в задачах управления организационными системами [2, 13, 48, 49, 53].

Модели принятия решений при нечеткой исходной информации. Сформулируем описанное в разделе 1.1 и в Приложении 3 для четких бинарных отношений предпочтения правило индивидуального рационального выбора

$$P(R_{A_0}, A_0) = \{z \in A_0 \mid \forall t \in A_0 \quad zR_{A_0}t\}$$

в терминах функций принадлежности. Функция принадлежности четкого бинарного отношения предпочтения R задается в виде: $\mu_R(x, y) = 1$, если $x\,R\,y$. Строгая (асимметричная, антирефлексивная, транзитивная) его компонента (*отношение строгого предпочтения*) определяется функцией принадлежности:

$$\mu_P(x, y) = max\{\mu_R(x, y) - \mu_R(y, x), 0\}.$$

Множество альтернатив $x \in A_0$, доминируемых хотя бы одной альтернативой $y \in A_0$, имеет функцию принадлежности $\mu_P(y,x)$. Дополнение этого множества, то есть множество альтернатив $x \in A_0$, не доминируемых данной альтернативой $y \in A_0$, имеет функцию принадлежности $1-\mu_P(y,x)$. Вычисляя пересечение по всем $y \in A_0$, находим множество альтернатив, недоминируемых по четкому бинарному отношению R_{A_0}:

$$P(R_{A_0}, A_0) = \inf_{y \in A_0} \{1-\mu_P(y,x)\} = 1-\sup_{y \in A_0} \mu_P(y,x).$$

Пример П.4.7. Рассмотрим следующее четкое рефлексивное, полное, транзитивное бинарное отношение (отношение предпочтения) над множеством из трех действий y_1, y_2, y_3, такое, что y_1 не менее предпочтительно, чем y_2, а y_2 не менее предпочтительно чем y_3, y_1 не менее предпочтительно, чем y_3. Это четкое отношение предпочтения приведено в таблице П.4.1.

Таблица П.4.1

	y_1	y_2	y_3
y_1	1	1	1
y_2	0	1	1
y_3	0	0	1

Матрица соответствующего ему строгого отношения предпочтения приведена в таблице П.4.2.

Таблица П.4.2

	y_1	y_2	y_3
y_1	0	1	1
y_2	0	0	1
y_3	0	0	0

Функция $\mu_{\tilde{R}}^{НД}(x)$ для этого отношения предпочтения будет задаваться таблицей П.4.3.

Таблица П.4.3

	y_1	y_2	y_3
$\mu_{\tilde{R}}^{НД}$	1	0	0

Множество недоминируемых действий будет состоять из одного элемента – действия y_1.

Завершив рассмотрение примера, повторим приведенные рассуждения для нечетких множеств. В случае когда неопределенность в связи действия АЭ и результата деятельности отсутствует, можно считать, что нечеткое отношение предпочтения задано на множестве возможных действий A: $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$, $x, y \in A$.

Определим *нечеткое отношение строгого предпочтения* (НОСП) $\tilde{P}$, соответствующее НОП $\tilde{R}$, следующим образом:

$$\mu_{\tilde{P}}(x, y) = max\,\{\mu_{\tilde{R}}(x, y) - \mu_{\tilde{R}}(y, x), 0\},\ x, y \in A.$$

Определим нечеткое множество недоминируемых альтернатив (действий):

$$\mu_{\tilde{R}}^{НД}(x) = 1 - \sup_{y \in A} \mu_{\tilde{P}}(y,\ x),\ x \in A.$$

Величину $\mu_{\tilde{R}}^{НД}(x)$ можно интерпретировать как степень недоминируемости действия $x \in A$, поэтому рациональным будем считать выбор активным элементом действий, имеющих по возможности большую степень принадлежности четкому множеству недоминируемых альтернатив. Множество

$$A^{НД}(\tilde{R}) = \left\{x \in A \,\middle|\, \mu_{\tilde{R}}^{НД}(x) = \sup_{z \in A} \mu_{\tilde{R}}^{НД}(z)\right\}$$

называется *множеством максимально недоминируемых действий* (*множеством С. А. Орловского* [59]).

Будем считать, что индивидуально рациональный выбор АЭ при НОП $\tilde{R}$ на множестве допустимых действий определяется следующим правилом рационального выбора:

$$P(\tilde{R}, A) = A^{НД}(\tilde{R}).$$

Четкое множество

$$A_{\alpha}^{НД}(\tilde{R}) = \{x \in A \mid \mu_{\tilde{R}}^{НД}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1],$$

будем называть *множеством* α*-недоминируемых действий.*

Более полное представление о свойствах нечетких множеств и моделях принятия решений при нечеткой исходной информации можно получить в [59]. Модели стимулирования и планирования в условиях нечеткой неопределенности рассмотрены в [48, 49, 53].

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ГЛОССАРИЙ

Абстрагирование – *процесс*[87] формирования образов реальности (представлений, *понятий*, суждений) посредством отвлечения и пополнения, то есть *путем* использования (или усвоения) лишь части из множества соответствующих данных и прибавления к этой части новой *информации*, не вытекающей из этих данных.

Агент (*agent*) – 1) *управляемый субъект* (например, человек, или коллектив, или организация); 2) в *теоретико-игровых моделях* – игрок, делающий ход вторым при известном ходе *центра*.

Агрегирование (*aggregation*) – *процесс* объединения каких-либо однородных показателей (величин) с целью получения более общих, обобщенных показателей (величин).

Адекватный (*adequate*) – равный, тождественный, вполне соответствующий.

Активный прогноз (*active forecast*) – целенаправленное сообщение *информации* о будущих значениях параметров, зависящих от *состояния природы* и/или *действий агентов* (*прогноз* – как *средство управления*).

Активный элемент (*agent*) – *субъект* (индивидуальный или коллективный), обладающий *свойством активности*.

[87] Термины, выделенные курсивом, также определены в настоящем Глоссарии, гипертекстовую версию которого можно найти на сайте www.mtas.ru.

Активная система (*active system*) – *система*, хотя бы один *элемент* которой обладает *свойством активности*.

Активность (*activity*) – всеобщая характеристика живых существ, их собственная динамика как источник преобразования или поддержания ими жизненно важных связей с окружающим миром, в узком смысле – способность к самостоятельному *выбору* определенных *действий* (включая выбор состояний, сообщение информации и т. д.).

Актуальность – важность, существенность для настоящего времени.

Альтернатива (*alternative*) – вариант, одна из двух или более возможностей; то, что можно иметь, использовать вместо чего-то еще. На множестве альтернатив осуществляется *выбор*.

Анализ (*analysis*) – процедура мысленного или реального расчленения *предмета*, *явления*, *процесса* или *отношения* между *предметами* на части и установление отношений между этими частями.

Аналогия – сходство *предметов* (*явлений*, *процессов* и т. д.) в каких-либо свойствах.

Анонимный механизм (*anonytous mechanism*) – процедура *принятия решений* (*механизм*), симметричная относительно перестановок *агентов*.

Бинарное отношение (*binary relation*) над некоторым множеством – совокупность упорядоченных пар *элементов* этого множества.

Веерная структура – двухуровневая *линейная структура*.

Вид – *класс предметов*, который входит в объем более широкого класса предметов, называющегося *родом*.

Вид неопределенности – *интервальная неопределенность*, *вероятностная неопределенность*, *нечеткая неопределенность*.

Внешняя среда (*environment*) – совокупность *предметов* и *субъектов*, *явлений* и *процессов*, не входящих в рассматриваемую *систему*, но взаимодействующих с ней. Синоним – «*окружающая среда*».

Выбор (*choice*) – операция, входящая во всякую *целенаправленную деятельность* и состоящая в целевом сужении *множества допустимых альтернатив* (обычно, если позволяют условия, до одной альтернативы).

Вырожденная структура – *структура*, в которой отсутствуют связи между участниками *организационной системы*.

Гарантирующая стратегия (*guaranteeing strategy*) – *выбор* игроком *действия*, обеспечивающего ему *максимальный гарантированный результат*.

Гипотеза (*hypothesis*) – предположение, допущение, истинное значение которого неопределенно; предположение, истинность которого не очевидна.

Гипотеза благожелательности (*hypothesis of benevolence*) – предположение, что из множества одинаково *предпочтительных* со своей точки зрения *альтернатив* *субъект* (*агент*) выбирает альтернативу, наиболее предпочтительную для *центра*.

Гипотеза детерминизма (*hypothesis of deterministic behavior*) – предположение, что *субъект* стремится устранить с учетом всей имеющейся у него *информации* существующую *неопределенность* и принимать *решения* в условиях полной *информированности*.

Гипотеза индикаторного поведения (*hypothesis of indicative behavior*) – предположение о поведении участника *динамической организационной системы*, в соответствии с которым в каждом периоде он делает в пространстве действий «шаг» в направлении своего *действия*, которое было бы оптимальным при *обстановке*, сложившейся в предыдущем периоде.

Гипотеза независимого поведения (*hypothesis of independent behavior*) – предположение, что каждый *субъект* производит *выбор* своего *действия* независимо от выбора других субъектов.

Гипотеза рационального поведения (*hypothesis of rational behavior*) – предположение, что *субъект* (*агент* или *центр*) с учетом всей имеющейся у него *информации* выбирает *действия*, которые приводят к наиболее *предпочтительным результатам деятельности*.

Гипотеза слабого влияния (*hypothesis of slight influence*) – предположение, что *действия* отдельного *субъекта* практически не влияют на определенные параметры *организационной системы*.

Глубина рефлексии (*reflexivity depth*) – см. «*ранг рефлексии*».

Горизонт планирования (*planning horizon*) – число будущих периодов времени, для которых определяются *планы* при управлении *динамической организационной системой*.

Граф рефлексивной игры (*reflexive game graph*) – граф, вершины которого соответствуют реальным и *фантомным агентам*, и в каждую вершину входят дуги (их число на единицу меньше числа реальных *агентов*), идущие из вершин-агентов, от действий которых в *информационном равновесии* зависит выигрыш данного агента.

Группа (*group*) – совокупность людей, объединенных общностью *интересов*, профессии, *деятельности* и т. п.

Дальновидность (*far-seeing*) – свойство *субъекта* учитывать будущие последствия принимаемых сегодня *решений*.

Двухшаговый метод (*two-step method*) – метод решения *задачи управления*, при использовании которого на первом шаге для каждого вектора *действий агентов* ищется *минимальное управление* (*стимулирование*), его *реализующее* (то есть должны выполняться условия *согласования* и *индивидуальной рациональности*), а на втором шаге решается задача *оптимального согласованного планирования*.

Действие (*action*) – 1) произвольный акт, акция, *процесс*, подчиненный представлению о *результате*, то есть *процесс*, подчиненный осознаваемой *цели*; акт *деятельности*, направленный на достижение конкретной цели; 2) в *теоретико-игровых моделях* – результат *выбора агента*.

Декомпозиция (*decomposition*) – операция разделения целого на части с сохранением признака подчиненности, принадлежности.

Дележ (*allocation*) – распределение между игроками (в *кооперативной игре*) выигрыша максимальной *коалиции*, дающее каждому игроку больше его индивидуального выигрыша.

Децентрализующие множества (*decentralization sets*) – набор множеств, зависящих от *действий оппонентов*.

Деятельность (*activity*) – специфическая человеческая *форма отношения* к окружающему миру, *содержание* которой составляет его *целесообразное* изменение и преобразование в интересах людей.

Динамическая организационная система (*dynamic organization*) – *организационная система*, в которой участники принимают решения многократно (последовательность *выбора стратегий*, характерная для статических систем, повторяется, как минимум, несколько раз – см. «*игра повторяющаяся*»).

Доминантная стратегия (*dominant strategy*) – *выбор* игроком *действия*, которое при любой *обстановке игры* обеспечивает ему максимум *целевой функции*.

Допустимое множество (*feasible set*) – множество *действий* или *управлений*, удовлетворяющее всем ограничениям.

Единый (*unified*) – общий, объединенный.

Задача (*problem*) – то, что требует исполнения, решения; данная в определенных конкретных условиях *цель деятельности*.

Задача планирования (*planning problem*) – 1) *задача* определения *оптимальных планов*; 2) *задача* определения *оптимальной процедуры планирования*.

Задача рефлексивного управления (*reflexive management problem*) – *задача* определения *оптимального рефлексивного управления*.

Задача стимулирования (*incentive problem*) – *задача* определения *оптимальной функции стимулирования* (*игра* $Г_2$ с *побочными платежами*).

Задача управления (*management problem*) – *задача* определения *оптимального управления*.

Заказ (*order*) – осознанная общественная или персонифицированная необходимость изменений и формулировка требований к этим изменениям.

Знак (*sign*) – 1) сигнал, имеющий конкретное значение, воспринимаемое человеком; 2) реальная *модель абстрактного понятия*.

Знание (*knowledge*) – *результат процесса* познания действительности, *адекватное* ее *отражение* в сознании.

Игра (*game*) – 1) взаимодействие сторон, *интересы* которых не совпадают; 2) вид непродуктивной *деятельности*, *мотив* которой заключается не в ее *результате*, а в самом *процессе*.

Игра антагонистическая (*antagonistic game*) – *игра*, в которой сумма выигрышей игроков постоянна при любой *ситуации игры*.

Игра $\boldsymbol{\Gamma_1}$ (*Stackelberg game*) – *иерархическая игра*, в которой *центр* не рассчитывает наблюдать *выбор агента* (игра Штакельберга).

Игра $\boldsymbol{\Gamma_2}$ – *иерархическая игра*, в которой *стратегией центра* является отображение *множества допустимых действий агентов* во множество своих допустимых действий.

Игра кооперативная (*cooperative game*) – *игра*, в которой игроки могут действовать совместно (согласовывать свои *действия*, обмениваться *информацией*, *полезностью* и т. д.).

Игра некооперативная (*noncooperative game*) – *игра*, в которой игроки не могут действовать совместно.

Игра в нормальной форме (*normal form game*) – представление *игры* в виде множества игроков, выбирающих *действия однократно, одновременно и независимо*, их *целевых функций* и *допустимых множеств* в условиях *общего знания*.

Игра в развернутой форме (*extensive form game*) – представление *игры* в виде дерева, вершины которого соответствуют *ситуациям игры*.

Игра повторяющаяся – *игра*, в которой характерная для однопериодной игры (см. «*игра в нормальной форме*») последовательность *выбора стратегий* повторяется как минимум несколько раз.

Игра с непротивоположными интересами (*nonantagonistic game*) – неантагонистическая игра.

Иерархическая игра (*hierarchical game*) – *игра* с фиксированной последовательностью ходов – между *центрами* и *агентами*, в которой центры обладают правом первого хода.

Иерархия (*hierarchy*) – принцип *структурной организации* сложных многоуровневых *систем*, состоящий в упорядочении взаимодействия между уровнями в порядке от высшего к низшему.

Индивид (*individual*) – отдельный человек; особь, каждый отдельно существующий организм (индивидуум).

Индивидуальная рациональность (*individual rationality*) – свойство *субъекта* принимать *решения*, которые обеспечивают ему *полезность*, не меньшую той, которую он может получить, отказавшись принимать какие-либо решения.

Индивидуальное стимулирование (*individual incentives*) – *стимулирование агента* за показатели, зависящие только от него самого.

Институт (*institution*) – 1) в социологии – определенная *организация* общественной *деятельности* и социальных *отношений*, воплощающая в себе *нормы* экономической, политической, правовой, нравственной жизни общества, а также социальные правила жизнедеятельности и *поведения* людей; 2) в праве – совокупность норм права, регулирующих какие-либо однородные обособленные общественные отношения.

Институциональное управление (*institutional management*) – целенаправленное воздействие на ограничения и *нормы деятельности* участников *организационных систем*.

Интерес (*interest*) – реальная причина *действий*, событий, свершений; в психологии – *мотив* или мотивационное состояние, побуждающее к *деятельности*.

Информационное равновесие (*informational equilibrium*) – *равновесие рефлексивной игры* (обобщение *равновесия Нэша*), в рамках которого предполагается, что каждый *агент* (реальный и *фантомный*) при вычислении своего субъективного равновесия (равновесия в той *игре*, в которую он со своей субъективной точки зрения играет) использует имеющуюся у него *иерархию представлений* об объективной и рефлексивной реальности.

Информационная структура (*informational structure, hierarchy of beliefs*) – дерево (иерархия представлений), вершинам которого соответствует *информация агентов* о существенных параметрах, представлениях других агентов, представлениях о представлениях и т. д.

Информационное управление (*informational management*) – *управление*, предметом которого является *информированность субъектов*.

Информация (*information*) – 1) сообщение, осведомление о положении дел, сведения о чем-либо; 2) уменьшаемая, снимаемая неопределенность в результате получения сообщений; 3) сообщение, неразрывно связанное с управлением, сигналы в единстве синтаксических, семантических и прагматических характеристик; 4) передача, отражение разнообразия в любых *объектах* и *процессах* (живой и неживой природы).

Информированность – существенная *информация*, которой обладает *субъект* на момент *принятия решений*.

Исследование (*research*) – *процесс* получения новых научных *знаний*, один из видов познавательной *деятельности*, характеризуется объективностью, воспроизводимостью, доказательностью, точностью.

Исследование операций (*operations research*) – научный подход к решению задач организационного управления (см. также «*операция*»).

История игры (*game history*) – совокупность наблюдаемых рассматриваемым *субъектом выборов* игроков, их выигрышей (значений *функции полезности*) и *состояний природы*.

Итеративное научение (*iterative learning*) – многократное повторение обучаемой *системой действий*, проб, попыток и так далее для достижения фиксированной *цели* при постоянных внешних *условиях*.

Квазиоднопиковая функция – *функция*, имеющая единственную *точку пика*, невозрастающая по мере удаления от этой точки.

Класс (*class*) – совокупность, группа *предметов* или *явлений*, обладающих общими признаками.

Классификация (*classification*) – распределение *предметов* какого-либо рода на взаимосвязанные *классы* согласно наиболее существенным признакам, присущим предметам данного *рода* и отличающим их от предметов других родов.

Коалиционное взаимодействие – переговоры, соглашения и сотрудничество между игроками в процессе образования и деятельности *коалиций*.

Коалиция (*coalition*) – подмножество множества игроков.

Коллектив (*collective*) – совокупность людей, объединенных общими интересами, общей работой; *группа* высокого уровня *развития*, где межличностные *отношения* опосредованы общественно ценным и личностно значимым содержанием совместной *деятельности*.

Коллективное стимулирование (*collective incentives*) – *стимулирование агента*, основывающееся на *действиях* или *результатах деятельности* всего *коллектива*.

Команда – временная или постоянная организационная единица (быть может, неформальная), предназначенная для выполнения определенных *задач*, служебных обязанностей или каких-либо работ; *коллектив*, способный достигать *цели* автономно и согласованно, при минимальных *управляющих* воздействиях

Комиссионная система стимулирования (*commission incentives*) – *система стимулирования*, в которой размер вознаграждения *агента* пропорционален доходу или прибыли *центра*.

Комплекс механизмов управления (*management mechanisms complex*) – совокупность согласованных процедур *принятия решений* (*механизмов*) относительно изменения параметров *организационной системы*.

Компенсаторная система стимулирования (*compensative incentives*) – *система стимулирования*, в которой размер вознаграждения *агента* равен его затратам.

Конкурсный механизм (*rank-order tournament*, *tender*) – *механизм планирования*, в котором *агенты* упорядочиваются *центром* в зависимости от сообщаемых показателей и назначаемые им *планы* определяются этим упорядочением.

Контракт (*contract*) – совокупность *равновесных* и *эффективных стратегий центра* и *агентов* в *задаче стимулирования*.

Критерий (*criterion*) – 1) *средство* для вынесения суждения; стандарт для сравнения; правило для оценки; мерило; 2) мера степени близости к *цели*.

Линейная система стимулирования (*linear incentives*) – *система стимулирования*, в которой размер вознаграждения *агента* прямо пропорционален его *действию* или *результату деятельности*.

Линейная структура (*linear structure*) – *структура организационной системы*, в которой каждый *агент* подчинен одному и только одному *центру*.

Максимальный гарантированный результат (*maximum guaranteed result*) – максимальное значение *функции полезности субъекта* (*центра* или *агента*) при наихудшей для него *обстановке*.

Максимальный целесообразный ранг рефлексии – минимальный *ранг рефлексии*, который следует иметь *агенту* для того, чтобы охватить все многообразие исходов *рефлексивной игры*.

Манипулирование информацией – процесс целенаправленного (сознательного) искажения *агентами* информации, сообщаемой *центру*.

Максимальная коалиция – *коалиция*, состоящая из всех игроков.

Матричная структура (*matrix structure*) – *линейная структура*, на которую наложена горизонтальная ответственность за *проекты*, реализуемые в *организационной системе*.

Межуровневое взаимодействие (*over-level interaction*) – подчиненность *агента центру*, находящемуся через один или более уровень *иерархии*.

Метод (*method*) – 1) (= подход) способ познания, исследования *явлений* природы и общественной жизни; 2) прием, способ *действия*.

Методика (*technique*) – совокупность *методов*, приемов целесообразного проведения какой-либо работы.

Методический – относящийся к *методике*.

Методология (*methodology*) – 1) учение об организации деятельности; 2) учение о научном *методе* познания; 3) совокупность *методов*, применяемых в какой-либо *науке*. *Система* принципов и способов *организации* и построения теоретической и практической *деятельности*, а также учение об этой системе.

Методологический (*methodological*) – относящийся к *методологии*.

Методы теоретического исследования – теоретический *анализ* и *синтез*, *абстрагирование* и конкретизация, *аналогия*, *моделирование*.

Методы эмпирического исследования – изучение литературы, документов, наблюдение, анкетирование, опрос, опытная работа, эксперимент.

Механизм (*mechanism*) – 1) *система*, устройство, определяющее порядок какого-либо вида *деятельности*; 2) совокупность правил, законов и процедур, регламентирующих взаимодействие участников *организационной системы*; 3) совокупность процедур принятия *управленческих решений центром*.

Механизм внутренних цен (*internal prices' mechanism*) – *процедура планирования*, ставящая в соответствие сообщениям *агентов* планы, назначаемые каждому из них *центром*, и общую для всех них цену.

Механизм комплексного оценивания – процедура *агрегирования* комплекса частных показателей с целью получения более общих показателей.

Механизм обмена – 1) процедура перераспределения ресурсов между участниками *организационной системы*; 2) *процедура планирования*, ставящая в соответствие сообщениям *агентов* о своих *типах* количества ресурсов, предлагаемых каждому из них *центром* для *обмена*.

Механизм планирования (*planning mechanism*) – см. *процедура планирования*.

Механизм распределения ресурса (*resource allocation mechanism*) – *процедура планирования*, ставящая в соответствие сообщениям *агентов* количество ресурса, выделяемого каждому из них *центром*.

Механизм смешанного финансирования (*mechanism of multiple sources financing*) – *механизм планирования*, в котором *центр* определяет условия финансирования *проекта* из нескольких источников.

Механизм согласия (*agreement mechanism*) – *неманипулируемый механизм планирования*, в котором *планы* назначаются на основании относительных предпочтений, сообщаемых *агентами*.

Механизм стимулирования (*incentive mechanism*) – см. *функция стимулирования*.

Механизм экспертизы (*expertise mechanism*) – *процедура планирования*, ставящая сообщениям экспертов (*агентов*) в соответствие результат экспертизы.

Минимальные затраты центра на управление по *реализации заданного действия* – минимальное значение функционала затрат *центра* на множестве управлений, побуждающих *агента* выбрать заданное действие.

Многоканальный механизм (*multi-channel mechanism*) – *механизм*, в котором *решения* принимаются *центром* на основании результатов параллельной обработки информации несколькими каналами (экспертами, ЭВМ и т. д.).

Многоуровневая организационная система (*multi-level organization*) – *организационная система*, имеющая трех- и более уровневую *иерархическую структуру*.

Многоэлементная организационная система (*multi-agent organization*) – *организационная система*, в которой имеется несколько *агентов*.

Множества диктаторства (*dictatorship sets*) – разбиение множества допустимых *типов* агентов и выделение для каждого элемента этого разбиения множеств агентов, получающих абсолютно оптимальные для себя планы (такие агенты называются диктаторами).

Множество вариантов обмена – множество *индивидуально рациональных* распределений ресурсов, переход к которым в рамках данной *активной системы* возможен путем *обмена*.

Множество реализуемых действий (*implementable actions set*) – множество *действий агентов*, являющихся *решением их игры* при заданном *управлении* со стороны *центра*.

Моделирование (*simulation*) – *метод* исследования *объектов* познания на их *моделях*, построение моделей реально существующих *предметов* и *явлений*.

Модель (*model*) – образ некоторой системы; аналог (схема, *структура*, знаковая *система*) определенного фрагмента природной или социальной реальности, «заместитель» оригинала в познании и практике.

Модель организационной системы (*model of organization*) – совокупность участников *организационной системы* (ее *состав*), *структуры*, *целевых функций* участников, *множеств допустимых действий* участников, их *информированности* и *порядка функционирования*.

Мотив (*motive*) – побуждение к *деятельности*, связанное с удовлетворением *потребностей субъекта*; совокупность внешних или внутренних *условий*, вызывающих *активность* субъекта и определяющих ее направленность.

Мотивационное управление (*motivational management*) – *управление* предпочтениями *агентов* (*целевыми функциями* или *функциями полезности*).

Мотивация (*motivation*) – *процесс* побуждения к *деятельности*, вызывающий *активность субъекта* и определяющий ее направленность.

Мультипроект (*multi-project*) – *проект*, состоящий из нескольких технологически независимых проектов, объединенных общими ресурсами (финансовыми и материальными).

Наука (*science*) – сфера человеческой *деятельности*, *функцией* которой является выработка и теоретическая систематизация объективных *знаний* о действительности.

Неманипулируемое управление (*straightforward management*) – *управление*, делающее выгодным для *агентов* (*равновесием* их игры) сообщение *центру* достоверной *информации* о своих *типах* (см. также «*манипулирование информацией*»).

Неопределенность (*uncertainty*) – (неопределенный – точно не установленный, не вполне отчетливый, уклончивый) – неоднозначность любого происхождения, неполная *информированность*.

Неопределенность вероятностная (*probabilistic uncertainty*) – *информированность* заключается в знании распределения вероятности возможных значений неопределенного параметра (*состояния природы*, *типов* других *агентов* и т. д.).

Неопределенность игровая (*game uncertainty*) – неполная *информированность субъекта* о *действиях* или принципах *принятия решений* других участников *организационной системы*.

Неопределенность интервальная (*interval uncertainty*) – *информированность* заключается в знании множества возможных значений неопределенного параметра (*состояния природы*, *типов* других *агентов* и т. д.).

Неопределенность нечеткая (*fuzzy uncertainty*) – *информированность* заключается в знании функции принадлежности возможных значений неопределенного параметра (*состояния природы*, *типов* других *агентов* и т. д.).

Неопределенность объективная (*objective uncertainty*) – неполная *информированность* о *состоянии природы*.

Неопределенность субъективная (*subjective uncertainty*) – неполная *информированность субъекта* о *типах* других участников *организационной системы*.

Непрямой механизм (*indirect mechanism*) – *механизм планирования*, в котором *агенты* сообщают *центру* косвенную информацию о своих *типах* (см. также *прямой механизм*).

Несущественная кооперативная игра – *кооперативная игра* с аддитивной *характеристической функцией*.

Норма (*norm*) – 1) узаконенное установление, признанный обязательным порядок; 2) в теории игр – отображение множества обстановок во множество действий лица, принимающего решения.

Область компромисса (*compromise set*) – множество эффективных по *Парето* и равновесных по *Нэшу действий центров* и *агентов*.

Обмен – процесс перераспределения ресурсов между участниками *активной системы*.

Обменная схема – совокупность вариантов *обмена*.

Обобщенное решение (*generalized solution*) задачи управления – параметрическое семейство *управлений*, обладающих заданной *гарантированной эффективностью* в заданном множестве *моделей организационных систем*.

Обратная задача управления (*reverse management problem*) – поиск *множества допустимых управлений*, переводящих управляемую систему в заданное состояние.

Обстановка игры (для некоторого игрока) – вектор *действий* всех игроков, кроме данного.

Общее знание (*common knowledge*) – факт, о котором: 1) известно всем *агентам*, 2) всем агентам известно (1); 3) всем агентам известно (2) и так далее до бесконечности.

Общность – единство, наличие неразрывных *связей*.

Объект (*object*) – то, что противостоит *субъекту* в его предметно-практической и познавательной *деятельности*, такая часть объективной реальности, которая находится во взаимодействии с субъектом.

Ограничение совместной деятельности – ограничения на совместный *выбор* субъектами своих *действий* (ситуация, когда *гипотеза независимого поведения* не выполнена).

Ограниченная рациональность (*bounded rationality*) – принцип *принятия решений*, в соответствии с которым *субъект* выбирает рациональные, то есть удовлетворительные с его точки зрения *действия* (ср. с «*гипотезой рационального поведения*»).

Однопиковая функция – *функция*, имеющая единственную *точку пика* и строго убывающая по мере удаления от этой точки.

Окружающая среда (*environment*) – см. *внешняя среда*.

Операция (*operation*) – совокупность *действий*, мероприятий, направленных на достижение некоторой цели.

Описание (*description*) – перечисление признаков *предмета*, которые более или менее исчерпывающе раскрывают его.

Оппоненты (*opponents*) – все участники *организационной системы*, кроме данного.

Оптимальное управление (*optimal management*) – *допустимое управление*, обладающее максимальной *эффективностью*.

Оптимальное согласованное планирование (*optimal coordinated planning*) – решение *задачи планирования* на множестве *согласованных планов*.

Организационная система (*organization*) – объединение людей (например, предприятие, учреждение, фирма), совместно реализующих некоторую программу или *цель* и действующих на основе определенных процедур и правил (*механизмов*) (иногда употребляется как синоним термина «*активная система*»).

Организация (*organization*) – 1) внутренняя упорядоченность, согласованность взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных частей целого, обусловленная его строением; 2) совокупность *процессов* или *действий*, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого; 3) объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или *цель* и действующих на основе определенных процедур и правил (*механизмов*).

Основы – исходные, главные положения.

Открытого управления принцип (*fair play principle, revelation principle*) – принцип *планирования*, в соответствии с которым *центр* назначает *планы*, максимизирующие его *целевую функцию* при выполнении *условий совершенного согласования*.

Отношение (*relation*) – философская категория, характеризующая взаимозависимость *элементов* определенной *системы*.

Отражение – всеобщее свойство материи, заключающееся в воспроизведении признаков, *свойств* и *отношений отражаемого объекта*.

Персонифицированное управление – *управление агентом*, в общем случае для каждого агента – свое (см. также «*унифицированное управление*»).

План (*plan*) – 1) намеченная на определенный период работа с указанием ее *целей*, *содержания*, объема, *методов*, последовательности и сроков выполнения; замысел, *проект*, основные черты; 2) в *теоретико-игровых моделях* – желательное с точки зрения *центра действие* или *результат деятельности агента*.

Планировать (*plan*) – составлять *план деятельности*, *развития* чего-то; определять *план*.

Побочный платеж (*additive payment*) – переменная, аддитивно входящая (с разными знаками) в *целевые функции центра* и *агента* (или двух агентов).

Поведение (*behavior*) – присущее живым существам взаимодействие с окружающей средой, опосредованное их внешней (двигательной) и внутренней (психической) *активностью*. Высший уровень поведения – человеческая *деятельность*.

Подход (*approach*) – исходный *принцип*, исходная позиция изучения *предмета* исследования, основное положение или убеждение (логический и исторический подходы, содержательный и формальный, качественный и количественный, феноменологический и сущностный, единичный и общий (обобщенный) – поиск общих связей, закономерностей, типологических черт).

Полезность (*utility*) – условная характеристика, отражающая степень удовлетворенности *субъекта результатом деятельности*, значение полезности определяется *функцией полезности*.

Понятие – мысль, отражающая в обобщенной форме *предметы* и *явления* действительности и *связи* между ними посредством фиксации общих и специфических признаков, в качестве которых выступают свойства предметов и явлений и *отношения* между ними.

Порядок – последовательный ход чего-либо; правила, по которым совершается что-либо, существующее устройство, режим чего-нибудь.

Порядок функционирования – последовательность (*порядок*) получения *информации* и *принятия решений* участниками *организационной системы*.

Потребность (*need*) – состояние *индивида*, создаваемое испытываемой им нуждой, выступающее источником *активности*.

Предельная полезность – производная *функции полезности*.

Предмет – категория, обозначающая некоторую целостность, выделенную из мира *объектов* в *процессе* человеческой *деятельности* и познания; все, что может находиться в *отношении* или обладать каким-либо *свойством*;

сторона, аспект, точка зрения, с которой исследователь познает целостный *объект*, выделяя наиболее существенные с его точки зрения признаки объекта.

Предметная область – область *объектов*, универсум рассмотрения (рассуждения), *класс* (множество) объектов, рассматриваемых в пределах данного контекста.

Предположение (*assumption*) – положение, которое временно принимается за возможно истинное, пока не будет установлена истина.

Предпочтения (*preferences*) – совокупность свойств и способностей *субъекта* по определению ценности, *полезности альтернатив* (*действий*, *результатов деятельности* и т. д.), а также их сравнения.

Принцип (*principle*) – 1) основное положение какой-либо *теории*, *науки* и т. д.; 2) убеждение, взгляд на вещи; 3) основная особенность в устройстве чего-либо.

Принцип адекватности – *система* должна быть адекватна по своей сложности, *структуре*, *функциям* и так далее тем условиям, в которых она функционирует, и тем требованиям, которые к ней предъявляются.

Принцип декомпозиции игры агентов – использование *центром управлений*, при которых существует *равновесие в доминантных стратегиях игры агентов*. Например, для задачи стимулирования *агенту* в *многоэлементной системе* фактические *затраты компенсируются* только в случае выполнения им *плана*, независимо от *действий* других агентов.

Принцип декомпозиции периодов функционирования – использование *центром управлений*, при которых выбор *агентов* в текущем периоде не зависит от *истории игры*. Например, для задачи стимулирования *агенту* в *динамической системе* в каждом периоде *затраты компенсируются* только в случае выполнения им *плана* в этом периоде, независимо от результатов предыдущих периодов.

Принцип доверия – агент доверяет информации, сообщенной ему центром. Например, в случае *информационного управления* изменением *множества допустимых стратегий центра* задача может без потери общности решаться в предположении, что *агент* полностью доверяет центру и использует при *принятии решений* в точности ту *информацию*, которую ему сообщил центр.

Принцип дополнительности – высокая точность описания *системы* несовместима с ее высокой сложностью.

Принцип достаточной рефлексии – *глубина рефлексии агента* определяется его *информированностью*.

Принцип компенсации затрат – *оптимальным* является решение *задачи стимулирования*, которое в точности компенсирует затраты *агентов*.

Принцип монотонности – свойство сложных *систем*, в первую очередь биологических, заключающееся в том, чтобы «не упускать достигнутого».

Принцип обратной связи – для эффективного *управления* необходима *информация* о состоянии управляемой *системы*.

Принцип равномерности – состояние *системы* должно оцениваться с учетом состояний всех ее *элементов* (см. также «*максимальный гарантированный результат*»). Более частная формулировка: скорость изменений в любой системе ограничена и в основном определяется наиболее инерционными ее элементами, иначе говоря, «скорость эскадры определяется скоростью самого медленного корабля».

Принцип рациональной централизации – в *иерархической системе* существует рациональный уровень централизации управления, ресурсов и т. д.

Принцип согласования – управление *организационной системой* должно максимально согласовывать *интересы* ее участников.

Принятие *решения* (*decision making*) – *целевой выбор* на множестве *альтернатив*.

Проблема (*problem*) – теоретический или практический вопрос, который необходимо изучить и разрешить.

Прогноз (*forecast*) – конкретное предсказание, суждение о состоянии какого-либо *явления* или *процесса* в будущем.

Производственная функция – зависимость между количеством используемых факторов производства и максимально возможным при этом выпуском продукции.

Программа (*program*) – комплекс операций (мероприятий), увязанных технологически, ресурсно и организационно и обеспечивающих достижение поставленной *цели*.

Программное управление – режим управления *динамической организационной системой*, при котором решения принимаются сразу на все будущие периоды.

Проект (*project*) – 1) план, замысел, разработанный план сооружения, устройства, предварительный текст документа; 2) ограниченное во времени *целенаправленное* изменение отдельной *системы* с установленными требованиями к качеству результатов, возможными рамками расхода средств и ресурсов и специфической *организацией*.

Проектная структура – *линейная структура*, в которой декомпозиция производится по *проектам*, реализуемым *организационной системой*.

Простой активный элемент – *агент*, функционирующий в условиях такой *вероятностной неопределенности*, что *результат деятельности* не превышает *действия*.

Противозатратный механизм (*counter-expensive mechanism*) – *механизм*, побуждающий *агентов* снижать затраты (себестоимость) и цены.

Процедура планирования (*planning procedure*) – *функция*, отображающая *множество допустимых* сообщений *агентов* во множество *планов*.

Процесс (*process*) – ход какого-либо *явления*, последовательная смена состояний, стадий *развития* и т. д.

Прямая задача управления (*direct management problem*) – *задача* нахождения *оптимального управления*.

Прямой механизм (*direct mechanism*) – *механизм планирования*, в котором *агенты* сообщают *центру* информацию непосредственно о своих *типах*.

Путь – направление *деятельности*, *развития* чего-то (неопредел.).

Равновесие (*equilibrium*) – см. *решение игры*.

Равновесие в доминантных стратегиях (*dominant strategies equilibrium*) – *ситуация игры*, в которой каждый игрок выбирает свою *доминантную стратегию*.

Равновесие максиминное (*maximin equilibrium*) – *ситуация игры*, в которой каждый игрок выбирает свою гарантирующую стратегию.

Равновесие Нэша (*Nash equilibrium*) – *ситуация игры*, одностороннее отклонение от которой не выгодно ни одному из игроков.

Равновесие Парето (*Pareto equilibrium*) – такая *ситуация игры*, что не существует другой ситуации, в которой все игроки получили бы не меньший выигрыш и хотя бы один игрок – строго больший (эффективная ситуация).

Развитие (*development*) – необратимое, направленное, закономерное изменение материальных и идеальных объектов.

Ранг рефлексии – уровень дерева *информационной структуры*.

Ранговые системы стимулирования (*rank-order tournaments*) – *системы стимулирования*, в которых величина вознаграждения *агента* определяется либо принадлежностью *результата его деятельности* некоторому наперед заданному множеству (так называемые нормативные ранговые системы стимулирования), либо местом, занимаемым агентом в упорядочении результатов деятельности всех агентов (так называемые соревновательные ранговые системы стимулирования).

Распределение дальновидностей – характеристика, отражающая способ учета будущего (см. также «*дальновидность*»).

Распределенный контроль (*distributed management*) – *структура организационной системы*, в которой один и тот же *агент* подчинен одновременно нескольким *центрам*.

Реализуемость соответствия группового выбора (*social choice correspondence implementability*) – наличие такого *непрямого механизма планирования*, для которого существует *эквивалентный прямой механизм*, приводящий для любого набора *типов* агентов к тому же исходу, что и *соответствие группового выбора*.

Режим конкуренции (*competition*) – *ситуация игры* центров в системе с *распределенным контролем*, не принадлежащая *области компромисса*.

Режим сотрудничества (*cooperation*) – *ситуация игры* центров в системе с *распределенным контролем*, принадлежащая *области компромисса*.

Результат деятельности (*output*) – в *теоретико-игровых моделях* – переменная, значение которой определяется *действиями агентов* и *состоянием природы*.

Рефлексивная игра (*reflexive game*) – *игра*, в которой *информированность* игроков не является *общим знанием*, а определяется иерархией их представлений (то есть представлениями о существенных параметрах, представлениями о представлениях друг друга и т. д.).

Рефлексивное управление (*reflexive management*) – целенаправленное воздействие на *информационную структуру*.

Рефлексия (*reflexion*) – отражение, а также исследование познавательного акта.

Рефлексия информационная (*informational reflexion*) – *процесс* и результат размышлений *агента* о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его *оппоненты*.

Рефлексия стратегическая (*strategic reflexion*) – *процесс* и результат размышлений *агента* о том, какие принципы *принятия решений* используют его *оппоненты* в рамках той *информированности*, которую он им приписывает в результате *информационной рефлексии*.

Решение (*decision*) – *процесс* и *результат выбора цели* и способа *действий*.

Решение игры (*game solution*) – прогнозируемый и устойчивый исход игры (синонимом является термин «*равновесие*»).

Род – логическая характеристика класса *предметов*, в состав которого входят другие *классы* предметов, являющиеся *видами* этого рода.

Самоаннулирующийся прогноз – *прогноз*, который становится недостоверным только потому, что был сделан.

Самодвижение – изменение *объекта* под влиянием внутренне присущих ему противоречий, факторов и *условий*.

Самоорганизация – *процесс*, в ходе которого создается, воспроизводится или совершенствуется *организация* сложной *системы*.

Самоосуществляющийся прогноз – *прогноз*, который оказывается достоверным только потому, что был сделан.

Саморазвитие – *самодвижение*, связанное с переходом на более высокую ступень *организации*.

Сбалансированная игра (*balanced game*) – игра в форме *характеристической функции*, имеющая непустое *ядро*.

Свойство (*property*) – философская категория, выражающая такую сторону *предмета*, которая обусловливает его различие или общность с другими предметами и обнаруживается в его *отношении* к ним.

Связь – взаимообусловленность существования *явлений*, разделенных в пространстве и (или) во времени.

Семантика (*semantics*) – раздел *семиотики*, изучающий отношения между *знаками* и тем, что они обозначают.

Семиотика (*semiotics*) – *наука*, исследующая *знаковые системы*.

Сетевая структура (*network structure*) – 1) *структура*, в которой потенциально существуют связи между всеми *элементами*, некоторые из которых актуализируются, порождая из *вырожденной структуры линейную* или *матричную*, на время решения стоящей перед *системой задачи*, а затем разрушаются (возвращаясь к вырожденной структуре) до момента появления новых задач; 2) структура, в которой отсутствует *иерархия*.

Сильное равновесие Нэша (*strong Nash equilibrium*) – ситуация *игры*, одностороннее отклонение от которой не выгодно ни одной из *коалиций*.

Синтез (*synthesis*) – соединение различных *элементов*, сторон *предмета* в единое целое (*систему*), которое осуществляется как в практической *деятельности*, так и в *процессе* познания.

Система (*system*) – совокупность *элементов*, находящихся в *отношениях* и связях друг с другом, которая образует определенную целостность, единство.

Система стимулирования (*incentive system*) – см. *функция стимулирования*.

Ситуация игры – вектор *действий* всех игроков (*агентов*).

Скачкообразная система стимулирования – *система стимулирования*, при которой вознаграждение *агента* отлично от нуля при условии, что его *действие* или *результат деятельности* не меньше (или не больше) *плана*.

Скользящее управление – режим управления *динамической организационной системой*, при котором решения принимаются *дальновидно* – с учетом и на несколько будущих периодов.

Смешанная стратегия (*mixed strategy*) – распределение вероятностей на *множестве допустимых действий* игрока.

Совершенного согласования условия (*perfect coordination conditions*) – условия назначения *агентам планов*, максимизирующих их *функции полезности* на *децентрализующих множествах*.

Согласованное управление (*coordinated management, incentive compatible management*) – *управление*, при котором выполнение *плана* выгодно *агентам* (является *равновесием* их *игры*).

Содержание – то, что составляет *сущность* чего-нибудь.

Сознание – высший уровень *активности* человека как социального существа, заключающейся в том, что *отражение* реальности в *форме* чувствительных и умственных образов предвосхищает практические *действия* человека, придавая им *целенаправленный* характер.

Соответствие группового выбора (*social choice correspondence*) – отображение множества *типов агентов* во множество выбираемых ими *альтернатив*.

Соответствие отбора равновесий (*equilibrium selection correspondence*) – отображение, ставящее в соответствие множеству *равновесий* конкретное равновесие.

Соответствующий прямой механизм (*corresponding direct mechanism*) – *прямой механизм* планирования, который строится путем подстановки в исходный *непрямой механизм* зависимости *равновесных* сообщений *агентов* от их *типов*.

Состав (*components*) – совокупность *элементов*, образующих какое-нибудь целое.

Состояние природы (*state of nature*) – параметр, описывающий *внешнюю* (по отношению к рассматриваемой *организационной системе*) среду.

Средство – прием *действия* (иногда и орудие) для достижения чего-нибудь.

Стабильное информационное управление (*stable informational management*) – такое *информационное управление*, при котором ожидания *агентов* (например, относительно их выигрышей) оправдываются.

Стимулирование (*incentive, stimulation*) – внешнее воздействие на организм, личность или группу людей, отражаемое в виде психической реакции; побуждение к совершению некоторого *действия*; воздействие, обуславливающее динамику психических состояний *индивида* и относящееся к ней как причина к следствию.

Стратегия (*strategy*) – совокупность (для каждого момента *принятия решений*) отображений *истории игры* и *информированности* игрока во множество его *допустимых действий*.

Стратегия наказания (*penalty strategy*) – *обстановка игры* или *управление*, минимизирующее значение *целевой функции агента*.

Структура (*structure*) – совокупность устойчивых *связей* между *элементами системы*.

Субъект – носитель предметно-практической *деятельности* и познания, источник *активности*, направленной на *объект*; *индивид* или *группа* как источник познания и преобразования действительности, носитель активности.

Супераддитивная характеристическая функция – *характеристическая функция*, для которой сумма значений характеристической функции любой пары непересекающихся *коалиций* не превышает значения характеристической функции объединения этих коалиций.

Сущность – внутреннее содержание *предмета*, выражающееся в единстве всех многообразных и противоречивых *форм* его бытия.

Текущее управление – режим управления *динамической организационной системой*, при котором решения принимаются *недальновидно*, то есть только на текущий период.

Теоретический (*theoretical*) – основанный на *теории*, являющийся теорией, относящийся к вопросам теории.

Теория (*theory*) – комплекс взглядов, представлений, идей, направленных на истолкование и объяснение какого-либо *явления*; в более узком смысле – высшая, самая развитая *форма организации* научного *знания*, дающая целостное представление о закономерностях и существенных *связях* определенной области действительности – *объекта* данной *теории*.

Теория активных систем (active systems theory) – раздел теории управления социально-экономическими системами (*активными системами*, *организационными системами*), изучающий свойства *механизмов* их функционирования, обусловленные проявлениями *активности* участников системы.

Теория графов (*graph theory*) – раздел прикладной математики, исследующий свойства множеств (в основном конечных) с заданными *отношениями* между их *элементами*.

Теория игр (*game theory*) – раздел прикладной математики, исследующий *модели игр* – *принятия решений* в условиях несовпадения *интересов* сторон (игроков), когда каждая сторона стремится воздействовать на *развитие* ситуации в собственных интересах.

Теория иерархических игр (*hierarchical games theory*) – раздел *теории игр*, исследующий *иерархические игры*.

Теория контрактов (*theory of contracts*) – раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий *теоретико-игровые* взаимодействия между *центром* и *агентами*, функционирующими в условиях *внешней вероятностной неопределенности*.

Теория реализуемости (*implementation theory*) – раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий реализуемость *соответствий группового выбора*.

Теория управления организационными системами (*theory of organization management*) – раздел *теории управ-*

ления, исследующий *задачи управления организационными системами*.

Техника – совокупность навыков, приемов, умений, позволяющая реализовывать *технологию*.

Технология – совокупность *методов*, операций, приемов, этапов и так далее, последовательное осуществление которых обеспечивает решение поставленной *задачи*.

Тип (*type*) – характеристика *агента*, однозначно определяющая его *предпочтения*.

Тип неопределенности (*uncertainty type*) – *объективная неопределенность* (внешняя), *субъективная неопределенность* (внутренняя), *игровая неопределенность*.

Точка пика (*peak*) – точка максимума *целевой функции* или *функции полезности*.

Унифицированное управление (*unified management*) – *управление*, основанное на использовании *анонимных механизмов* (см. также «*персонифицированное управление*»).

Управление (*control, management*) – 1) воздействие на управляемую *систему*, *нацеленное* на обеспечение требуемого ее *поведения*; в *теоретико-игровых моделях*: 2) *действие центра*; 3) *стратегия центра* – функционал, ставящий в соответствие *действиям* или *результатам деятельности агентов* действие центра.

Управление порядком функционирования – *управление организационной системой*, заключающееся в установлении *порядка ее функционирования*.

Управление проектами (*project management*) – раздел *теории управления* социально-экономическими *системами*, изучающий эффективные *методы*, *формы* и *средства управления* изменениями (*проектами*).

Управление составом – *управление организационной системой*, заключающееся в выборе (или изменении) ее *состава*.

Управление структурой – *управление организационной системой*, заключающееся в выборе ее *структуры*.

Условие (*conditions*) – то, от чего зависит нечто другое (обусловливаемое).

Устранение неопределенности (*uncertainty removal*) – процедура перехода от *предпочтений*, зависящих от *неопределенных* параметров, к предпочтениям, определенным на множестве параметров, выбираемых *субъектом* (например, переход от *функции полезности* к *целевой функции*).

Фантомный агент (*phantom agent*) – *агент*, существующий в сознании реальных и других фантомных агентов.

Форма (*form*) – вид, тип, устройство, *структура*, *система организации* чего-либо, обусловленные определенным *содержанием*.

Функционирование (*functioning*) – выполнение своих *функций*, действовать, быть в действии, работать.

Функция (*function*) – 1) отношение двух (группы) *объектов*, в котором изменению одного из них сопутствует изменение другого; 2) обязанность, круг *деятельности*, назначение, роль.

Функция полезности (*utility function*) – действительнозначная функция, заданная на множестве допустимых *результатов деятельности* и *управлений центров* и отражающая *предпочтения* и *интересы субъекта* (*рациональ-*

ность поведения последнего заключается в стремлении к экстремизации функции полезности).

Функция стимулирования (*incentive function*) – *функция*, отображающая *множество допустимых действий агентов* в размеры вознаграждений, выплачиваемых им *центром*.

Характеристическая функция (*characteristic function*) – функция множеств, ставящая в соответствие каждой *коалиции* ее выигрыш.

Целевая функция (*goal function*) – действительнозначная функция, заданная на множестве допустимых *действий агентов* и *управлений центров* и отражающая *предпочтения* и *интересы субъекта* (*рациональность поведения* последнего заключается в стремлении к экстремизации целевой функции).

Цель (*goal*) – осознанный образ предвосхищаемого *результата деятельности*.

Центр (*principal*) – 1) управляющий орган; 2) в *теоретико-игровых моделях* – игрок, делающий ход первым (метаигрок, устанавливающий правила *игры* для других игроков).

Эквивалентный прямой механизм (*equivalent direct mechanism*) – *неманипулируемый соответствующий прямой механизм* планирования.

Элемент (*element*) – составная часть чего-либо.

Эмерджентность (*emergence*) – *свойство систем*, состоящее в том, что свойства целого не сводятся к совокупности свойств частей, из которых оно состоит, и не выводится из них.

Эффективность управления (*management efficiency*) – *гарантированное* значение *целевой функции центра* на множестве *решений игры агентов*.

Явление – то или иное обнаружение (выражение) *предмета*, внешней *формы* его существования.

Ядро (*core*) – концепция *решения кооперативной игры*: множество таких *дележей*, что любая *коалиция* не может дать своим участникам выигрыш больший, чем они в сумме получают в дележе из ядра.

ЛИТЕРАТУРА

(работы, отмеченные звездочкой, можно найти
в электронной библиотеке на сайте www.mtas.ru)

1*. Андронникова Н. Г., Баркалов С. А., Бурков В. Н., Котенко А. М. Модели и методы оптимизации региональных программ развития. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 60 с.

2*. Балашов В. Г., Заложнев А. Ю., Иващенко А. А., Новиков Д. А. Механизмы управления организационными проектами. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 84 с.

3. Баркалов С. А., Бурков В. Н., Новиков Д. А., Шульженко Н. А. Модели и механизмы в управлении организационными системами. – М.: Издательство «Тульский полиграфист», 2003. Т. 1. – 560 с., Т. 2. – 380 с., Т. 3. – 205 с.

4. Берж К. Теория графов и ее применения. – М.: Иностранная литература, 1962. – 319 с.

5. Бурков В. Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977. – 255 с.

6*. Багатурова О. С., Бурков В. Н., Иванова С. И. Оптимизация обменных производственных схем в условиях нестабильной экономики. – М.: ИПУ РАН, 1996. – 48 с.

7. Бурков В. Н., Горгидзе И. А., Ловецкий С. Е. Прикладные задачи теории графов. – Тбилиси: Мецниереба, 1974. – 234 с.

8*. Бурков В. Н., Горгидзе И. И., Новиков Д. А., Юсупов Б. С. Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике. – М.: ИПУ РАН, 1997. – 57 с.

9. Бурков В. Н., Данев Б., Еналеев А. К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. – М.: Наука, 1989. – 245 с.

10*. Бурков В. Н., Заложнев А. Ю., Кулик О. С., Новиков Д. А. Механизмы страхования в социально-экономических системах. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 109 с.

11*. Бурков В. Н., Заложнев А. Ю., Новиков Д. А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001. – 124 с.

12. Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981. – 384 с.

13. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Как управлять организациями. – М.: Синтег, 2004. – 400 с.

14. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997. – 188 с.

15. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Модели и механизмы теории активных систем в управлении качеством подготовки специалистов. – М.: ИЦ, 1998. – 158 с.

16*. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: СИНТЕГ, 1999. – 128 с.

17. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1972. Т. 1. – 335 с., Т. 2. – 488 с., Т. 3. – 501 с.

18*. Васильев Д. К., Заложнев А. Ю., Новиков Д. А., Цветков А. В. Типовые решения в управлении проектами. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 74 с.

19*. Воронин А. А., Мишин С. П. Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 210 с.

20. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.

21*. Гилев С. Е., Леонтьев С. В., Новиков Д. А. Распределенные системы принятия решений в управлении региональным развитием. – М.: ИПУ РАН, 2002. – 54 с.

22*. Гламаздин Е. С., Новиков Д. А., Цветков А. В. Механизмы управления корпоративными программами: информационные системы и математические модели. – М.: Спутник, 2003. – 159 с.

23. Горелик В. А., Горелов М. А., Кононенко А. Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.

24*. Губко М. В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 118 с.

25*. Губко М. В., Новиков Д. А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.

26. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 384 с.

27*. Заложнев А. Ю. Модели и методы внутрифирменного управления. – М.: Сторм-Медиа, 2004. – 320 с.

28*. Караваев А. П. Модели и методы управления составом активных систем. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 151 с.

29*. Колосова Е. В., Новиков Д. А., Цветков А. В. Методика освоенного объема в оперативном управлении проектами. – М.: Апостроф, 2001. – 156 с.

30*. Коновальчук Е. В., Новиков Д. А. Модели и методы оперативного управления проектами. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 63 с.

31*. Коргин Н. А. Механизмы обмена в активных системах. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 126 с.

32*. Кочиева Т. Б., Новиков Д. А. Базовые системы стимулирования. – М.: Апостроф, 2000. – 108 с.

33. Кузьмицкий А. А., Новиков Д. А. Организационные механизмы управления развитием приоритетных направлений науки и техники. – М.: ИПУ РАН, 1993. – 68 с.

34. Кукушкин Н. С., Морозов В. В. Теория неантагонистических игр. – М.: МГУ, 1984. – 104 с.

35*. Лысаков А. В., Новиков Д. А. Договорные отношения в управлении проектами. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 101 с.

36. Менар К. Экономика организаций. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 160 с.

37*. Мишин С. П. Оптимальные иерархии управления в социально-экономических системах. – М.: ПМСОФТ, 2004. – 207 с.

38. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.

39. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 708 с.

40. Новиков А. М., Новиков Д. А. Образовательный проект. – М.: Эгвес, 2004. – 120 с.

41*. Новиков Д. А., Глотова Н. П. Модели и механизмы управления образовательными сетями и комплексами. – М.: ИУО РАО, 2004. – 142 с.

42*. Новиков Д. А. Институциональное управление организационными системами. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 68 с.

43*. Новиков Д. А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.

44*. Новиков Д. А. Модели и методы управления развитием региональных образовательных систем. – М.: ИУО РАО, 2001. – 83 с.

45. Новиков Д. А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. – М.: ИПУ РАН, 1998. – 68 с.

46*. Новиков Д. А. Статистические методы в педагогических исследованиях. – М.: МЗ-Пресс. – 68 с.

47. Новиков Д. А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003. – 312 с.

48. Новиков Д. А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

49*. Новиков Д. А., Петраков С. Н. Курс теории активных систем. – М.: Синтег, 1999. – 108 с.

50*. Новиков Д. А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.

51*. Новиков Д. А., Смирнов И. М., Шохина Т. Е. Механизмы управления динамическими активными системами. – М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.

52*. Новиков Д. А. Теория управления организационными системами: вводный курс. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 81 с.

53*. Новиков Д. А., Цветков А. В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. – М.: Апостроф, 2000. – 184 с.

54*. Новиков Д. А., Цветков А. В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 118 с.

55*. Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Активный прогноз. – М.: ИПУ РАН, 2002. – 101 с.

56*. Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Прикладные модели информационного управления. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 130 с.

57. Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003. – 160 с.

58. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1968. – 352 с.

59. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 206 с.

60. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971. – 230 с.

61*. Петраков С. Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 135 с.

62. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

63. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. – М.: Наука, 1971. – 252 с.

64*. Цветков А. В. Стимулирование в управлении проектами. – М.: Апостроф, 2001. – 144 с.

65. Цыганов В. В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. – М.: Наука, 1991. – 166 с.

66*. Чхартишвили А. Г. Теоретико-игровые модели информационного управления. – М.: ПМСОФТ, 2004. – 227 с.

67*. Щепкин А. В. Механизмы внутрифирменного управления. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 80 с.

68. Mas-Collel A., Whinston M. D., Green J. R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.

69. Myerson R. B. Game theory: analysis of conflict. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ