Российская Академия Наук
Институт проблем управления

Д.А. Новиков

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИТЕРАТИВНОГО НАУЧЕНИЯ

Москва – 1998

УДК 15 + 519.7
Н 73

Новиков Д.А. **Закономерности итеративного научения**. М.: Институт проблем управления РАН, 1998. – 77 с.

Рецензенты:
Новиков А.М. – доктор педагогических наук, профессор, действительный член Российской Академии Образования;
Барабанов И.Н. – кандидат физико-математических наук.

Предлагаемая работа доктора технических наук Д.А. Новикова посвящена изучению общих для систем живой и неживой природы – человек, группа людей, животные, искусственные системы – количественных закономерностей итеративного научения (*понимаемого как многократное повторение обучаемой системой действий, проб, попыток и т.д. для достижения фиксированной цели при постоянных внешних условиях*). *Основным методом исследования является математическое моделирование.*

Работа ориентирована на специалистов по педагогике, психологии и физиологии человека и животных, теории управления, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Утверждено к печати Редакционным советом Института

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Итеративное научение, как обучение в строго повторяющихся условиях – одна из простейших разновидностей научения, имеет место в широком классе явлений: формирование разнообразных навыков, усвоение информации человеком, научение животных (выработка условных рефлексов) и обучение технических и кибернетических систем. Различные аспекты итеративного научения исследуются в педагогике, психологии и физиологии человека и животных, в теории управления и в других науках.

Настоящая работа посвящена описанию математических моделей итеративного научения и преследует следующие цели:

во-первых, дать достаточно полный, хотя конечно и не исчерпывающий, аналитический обзор существующих на сегодняшний день моделей итеративного научения, предложенных разными авторами в разные годы (ниже рассматриваются более тридцати таких моделей), в том числе – автором настоящей работы.

во-вторых, на основании анализа описываемых моделей попытаться выявить и объяснить важнейшие общие закономерности и механизмы итеративного научения, а также определить возможности математического моделирования как метода исследования итеративного научения.

1. Моделирование итеративного научения: задачи и проблемы

Настоящая работа посвящена описанию и исследованию математических моделей итеративного научения, поэтому прежде всего необходимо определить, что понимается под "моделью" и "итеративным научением".

Термин "модель" мы будем использовать в самом широком его понимании как "аналог определенного фрагмента природной или социальной реальности, ... заместитель оригинала в познании и практике", математическая (абстрактная) модель – "интерпретация систем логико-математических положений" (ФЭС, М.: Советская энциклопедия, 1983. с. 382).

Научение в общем случае – "процесс и результат приобретения индивидуального опыта" (Краткий психологический словарь, М.: ИПЛ, 1985. с. 201).

Мы будем подробно рассматривать лишь один из видов научения, а именно итеративное научение (iterative от лат. iterativus – повторяемый) – многократное повторение обучаемой системой (живой или неживой – технической или кибернетической) действий, проб, попыток и т.д. для достижения фиксированной цели при постоянных внешних условиях. Итеративное научение (ИН) лежит в основе формирования навыков у человека, условных рефлексов у животных, обучения многих технических (материализованных) и кибернетических (абстрактно-логических) систем и является предметом исследования педагогической и инженерной психологии, психофизиологии, педагогики, теории управления и т.д. ИН относится к сравнительно несложным видам научения и его исследование расширяет представления о механизмах учения в целом.

Постоянство внешних условий позволяет проводить количественное описание ИН в виде графиков – кривых научения (КН), представляющих собой зависимость критерия уровня научения от времени или от числа повторений (итераций).

Многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют, что важнейшей общей закономерностью итеративного научения в живых системах (человек, группы людей, животные) и неживых системах (системы распознавания образов, вероятностные автоматы с переменной структурой, нейронные сети и др.) является замедленно-асимптотический характер кривых научения: они монотонны, скорость изменения критерия уровня научения со временем уменьшается, а сама кривая асимптотически стремится к некоторому пределу. В большинстве случаев кривые итеративного научения аппроксимируются экспоненциальными кривыми (см. более подробно раздел 2 настоящей работы).

Нас будет интересовать, в основном, следующий вопрос – чем обусловлена общая для итеративно научаемых систем самой различной природы закономерность, заключающаяся в замедленно-асимптотическом характере КН?

Существуют различные подходы к получению ответа на этот вопрос: изучение экспериментальных данных (феноменологическое описание); анализ психофизиологических или технических характеристик обучаемых систем, их структуры, принципов взаимодействия составляющих их элементов; создание и исследование математических, имитационных и др. моделей ИН и т.д. Мы попытаемся рассмотреть общие закономерности ИН посредством исследования его моделей.

Таким образом, объектом исследования в настоящей работе выступает итеративное научение, а предметом исследования - его общие для систем живой и неживой природы количественные закономерности, причем основным методом исследования является математическое моделирование. Целью работы является теоретическое обоснование и объяснение общих закономерностей ИН и, соответственно, задачами – анализ известных и построение ряда новых математических моделей итеративного научения; установление адекватности моделей реальным системам; рассмотрение возможности объяснения известных и предсказания новых свойств итеративно научаемых систем и процесса ИН посредством моделирования.

Различают два метода построения моделей вообще и, соответственно, они могут использоваться для построения моделей итеративного научения – прямой и обратный.

При использовании прямого метода делаются те или иные предположения о функциях, составе и структуре обучаемой системы и механизмах взаимодействия составляющих ее элементов. Далее, на основании введенных предположений и "заложенных" в модель закономерностей, исследуется поведение модели и проводится анализ соответствия поведения модели и моделируемой системы. Объяснительные и прогностические свойства модели определяются общностью использованных при ее создании гипотез. Понятно, что, несмотря на одинаковость поведения модели и моделируемой системы, законы взаимодействия их элементов, да и их структуры, могут не иметь ничего общего. Тем не менее, если оправдывается гипотеза о том, что модель "устроена" так же, как и обучаемая система, то анализ модели позволяет переносить ряд результатов и рекомендаций по организации ее более целесообразного функционирования на саму моделируемую систему. Например, иногда рекомендации по возможностям повышения эффективности научения в рамках той или иной модели могут быть использованы для выбора оптимальной организации реального учебного процесса (сокращение времени, затрачиваемого на обучение, сокращение затрат, увеличение продуктивности действий обучаемой системы и т.д.).

Второй, обратный метод построения моделей заключается в поиске тех исходных предположений и допущений, которые приводят к требуемым свойствам модели [2, 3]. Например, если известна траектория движения некоторой системы и ее структура, то иногда, в соответствии с обратным методом, можно найти класс законов взаимодействия элементов системы между собой и с окружающей средой, приводящих к наблюдаемому поведению. При этом "внутреннее устройство" модели может сильно отличаться от "устройства" моделируемой системы. Например, если различные предположения о законах взаимодействия приводят к одному и тому же результату, то, не имея дополнительной информации, невозможно однозначно сказать, какие из эквивалентных моделей соответствуют реальной системе.

Разделение на прямой и обратный методы построения моделей достаточно условно – большинство известных на сегодняшний день моделей ИН используют в той или иной мере оба этих подхода. Процесс построения модели (математической, имитационной и т.д.) носит, как правило, итеративный характер. Сначала исследователь делает предположения о структуре модели и законах взаимодействия элементов, согласованные с имеющейся информацией о моделируемой системе (использование прямого метода). Затем поведение модели сравнивается с поведением оригинала и на основании этого сравнения вносятся изменения в принятые гипотезы и предположения, "минимизируются" допущения (использование обратного метода), после чего опять исследуется поведение модели и т.д. Условно можно считать, что успешное применение прямого метода приводит к нахождению достаточных условий (той или иной степени общности) адекватности. Целью же обратного метода является поиск необходимых условий адекватности. Поэтому следует признать, что обратный метод является более конструктивным, так как построенная с его использованием модель позволяет сделать более обоснованные выводы о внутреннем устройстве, механизмах и процессах в реальных моделируемых системах. В то же время, понятно, что при этом исследователь, несомненно, сталкивается с большими трудностями.

Из вышесказанного следует, что можно построить множество прямых моделей одной и той же реальной системы или процесса. Однако очень редко удается создать модель, адекватную оригиналу не только по поведению, но и по структуре, механизмам функционирования и т.д. Те редкие случаи, в которых структура и свойства модели могут быть однозначно (с необходимостью) выведены и идентифицированы по информации о моделируемой системе, следует признать удачными исключениями из общей закономерности. При моделировании большинства сложных (особенно биологических и социально-экономических) систем, в том числе – при моделировании итеративного научения, речь следует вести о гармоническом сочетании прямого и обратного методов.

Приведем одно из существующих на сегодняшний день мнений о возможности создания общей модели итеративного научения (E. Guthrie): "В течение многих лет исследователи вдохновлялись надеждой открытия кривой научения. Существует общее соглашение, что кривая изменяется более быстро после начала упражнения, по мере продолжения упражнения эта скорость постепенно уменьшается, пока не достигается физиологический предел, поставленный природой обучаемого... . Конечно, не существует идеальной стандартной кривой научения или кривой забывания. Все зависит от предыдущего опыта отработки компонент действий и уже сформированных навыков... . Другими словами, не существует общей кривой научения." [102, с. 179].

Приведенное выше мнение E. Guthrie является, пожалуй, слишком пессимистичным. Все зависит от того, что понимать под "общностью" модели. Если "общая" – это универсальная модель, объясняющая и обобщающая все известные модели и априори способная объяснить все возможные, еще неизвестные сегодня, эффекты, наблюдаемые при итеративном научении, и адекватная при любом уровне детализации рассмотрения произвольной системы, то, пожалуй, возможность создания такой модели сегодня кажется проблематичной.

В настоящее время известно большое число исследований, объясняющих при тех или иных предположениях и допущениях закономерности ИН для конкретных систем (интересно отметить, что в течение нескольких последних десятилетий наблюдается спад интенсивности исследований общих моделей итеративного научения; поэтому неудивительно, что большинство работ, приведенных ниже в списке литературы, относятся к 60-70-мгодам – периоду бурного развития кибернетики). Однако, с нашей точки зрения, большинство из существующих моделей не обладает достаточной общностью. Поэтому имеет смысл вести речь о создании максимально более общей модели ИН (или комплекса таких моделей), с использованием минимальных предположений и допущений о структуре обучаемой системы, свойствах составляющих ее элементов и характере их взаимодействия, а также о выделении тех общих предположений, гипотез и т.д., которые используются в известных и должны быть использованы в любых математических моделях ИН.

Интересующие нас системы живой природы являются большими и сложными, как с точки зрения числа составляющих их элементов, так и с точки зрения многообразия связей между ними [19, 28, 29, 45]. В технических системах и моделях живых систем исследователь может искусственно ограничивать сложность, делая систему поддающейся анализу. Например, на настоящий момент могут быть приближенно описаны свойства лишь отдельных элементов этих живых систем – нейронов, синергий и т.д., с той или иной степенью детализации измерены их характеристики и описаны связи между ними. Однако, как это ни печально, до сих пор не получен достаточно полный ответ на вопрос: как функционирует мозг, и как свойства отдельных нейронов приводят к тем свойствам их групп, отдельных подсистем и мозга в целом, которые мы наблюдаем.

Ограниченность современного научного знания в понимании механизмов функционирования биологических и социальных систем еще более усложняет задачу моделирования итеративного научения – если мы не имеем четкого представления о свойствах реальной системы, то неясно, что понимать под адекватностью модели и системы на уровне "внутреннего устройства". Наверное поэтому большинство моделей ИН носит феноменологический характер, описывая агрегированную динамику результативных характеристик научения, но не "заглядывая внутрь" моделируемой системы.

Попытаемся сформулировать, в общем виде, какого рода вывод мы хотели бы получить в настоящей работе. Вряд ли можно надеяться, что для итеративно научаемых систем удастся (когда-нибудь) получить универсальный закон на уровне основных законов природы или доказать соответствующий общий формальный результат, так как для этого необходимо ввести систему аксиом – постулатов, очевидность которых может оказаться (и оказывается в существующих моделях) далеко небесспорной. Следовательно, желательно сформулировать и обосновать закономерность, которая, во-первых, объясняла бы экспериментально наблюдаемое поведение итеративно научаемых систем, и, во-вторых, обладала бы по возможности максимальной общностью (т.е. была бы применима для максимально широкого класса научаемых систем и требовала бы введения минимальных предположений и допущений).

Отметим, что большинство известных и используемых принципов и законов функционирования биосистем носит именно характер закономерностей или гипотез. Для иллюстрации этого утверждения, не претендуя на полноту описания, перечислим кратко некоторые известные принципы функционирования биологических систем.

1. **Принцип наименьшего действия**. Когда в природе происходит некоторое изменение, количество действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным [9, 30].

2. **Закон устойчивого неравновесия** (Э.С. Бауэр). Все живые и только живые системы никогда не бывают в равновесии и исполняют за счет свободной энергии постоянную работу против равно-

весия, требуемого законами физики и химии при соответствующих внешних условиях [9].

3. **Принцип наипростейшей конструкции** (Н. Рашевский). Та конкретная структура или конструкция живой системы, которую мы действительно находим в природе, является простейшей из возможных структур или конструкций, способных выполнять данную функцию или структуру функций [9].

4. **Принцип обратной связи** [28 и др.] (см. также принцип функциональной системы П.К. Анохина [8]). Здесь же уместно упомянуть принцип опережающего отражения действительности – сложная адаптивная система реагирует не на внешнее воздействие в целом, а по "первому звену много раз повторявшегося последовательного ряда внешних воздействий". Необходимым условием такого опережающего отражения является последовательность и повторяемость внешних явлений (в случае итеративного научения – постоянство внешних условий и целей научения) [6, 8, 55].

5. **Принцип наименьшего взаимодействия** (И.М. Гельфанд, М.Л. Цетлин). Нервные центры стремятся достичь такой ситуации, при которой афферентация (от латинского afferentis – приносящий, то есть информационные и управляющие потоки и сигналы, передаваемые в центральной нервной системе) будет наименьшей. Или, другими словами, система целесообразно работает в некоторой внешней среде, если она стремится минимизировать взаимодействие со средой [32, 84].

6. **Принцип вероятностного функционирования мозга** (А.Б. Коган). Каждый из нейронов не имеет самостоятельной функции, то есть априори не является ответственным за решение конкретной задачи, распределение которых происходит достаточно случайным образом [9] (см. также [38]).

7. **Принцип иерархической организации**, в частности - обработки информации мозгом (Н.М. Амосов, Н.А.Бернштейн, Г. Уолтер, У.Р. Эшби). Достижение полной цели равноценно достижению совокупности подцелей [37, 47, 55]. "... в каждой сложной системе можно выделить управляющие и рабочие этажи" [5, с. 81].

8. **Принцип адекватности** (У.Р. Эшби, Ю.Г. Антомонов и др.). Сложность управляющей системы (динамика ее изменений) должна быть адекватна сложности (скорости изменения) управляемых процессов [10]. Иными словами, "пропускная способность"

регулятора устанавливает абсолютный предел управления, как бы не были велики возможности управляемой системы [93].

9. **Принцип вероятностного прогнозирования** при построении действий (Н.А. Бернштейн). Мир отражается в форме двух моделей – модель потребного будущего (вероятностное прогнозирование на основе предшествующего накопленного опыта) и модель свершившегося (однозначно отражает наблюдаемую действительность) [17, 18, 55]. Такому подходу вполне соответствует следующее определение обучения: "Обучение системы заключается в том, что она в соответствии с прежними успехами и неудачами (опыт) улучшает внутреннюю модель внешнего мира" [91, с. 228].

10. **Принцип отбора нужных степеней свободы** (Н.А. Бернштейн). В начале обучения задействуется большее число степеней свободы обучаемой системы, чем это необходимо для достижения целей обучения [7, 15, 16, 57]. В процессе обучения число "участвующих" переменных уменьшается – "отключаются" несущественные переменные (ср. с явлениями генерализации и концентрации нервных процессов – И.П. Павлов, А.А. Ухтомский, П.В. Симонов и др.) [16-18, 57, 93].

11. **Принцип необходимости разрушения детерминизма** (Ю.Г. Антомонов и др.). Для достижения качественно нового состояния и повышения уровня организации системы необходимо разрушить (перестроить) существующую, сформированную в предшествующем опыте, детерминированную структуру связей элементов системы [10].

12. **Принцип необходимого разнообразия** (У.Р. Эшби). Этот принцип достаточно близок по смыслу к принципу адекватности: для решения стоящей перед ней задачи система должна обладать соответствующим разнообразием (состояний, функций, возможностей и т.д.), то есть система должна быть адекватна задаче в смысле разнообразия (сложности) [93].

13. **Принцип естественного отбора** (С.М. Данков). В системах, ставшими эффективными в результате естественного отбора, разнообразие механизмов и пропускная способность каналов передачи информации не будет значительно превышать минимально необходимое для этого значение [12, 81, 94, с. 202].

14. **Принцип детерминистского представления** (Ю. Козелецкий и др.). При моделировании принятия решений

индивидуумом допускается, что его представления о действительности не содержат случайных переменных и неопределенных факторов (последствия принимаемых решений зависят от строго определенных правил) [47].

15. **Принцип дополнительности (несовместимости)** (Н. Бор, Л.А. Заде). Высокая точность описания некоторой системы несовместима с ее большой сложностью. Иногда этот принцип понимается более упрощенно – реальная сложность системы и точность ее описания при анализе обратно пропорциональны в первом приближении.

16. **Принцип монотонности** ("не упускать достигнутого"). В процессах обучения, самоорганизации, адаптации и т.д. система в среднем не удаляется от уже достигнутого (текущего) положительного результата (положения равновесия, цели обучения и т.д.) [80, 93, 94].

На первый взгляд, приведенные принципы функционирования биосистем можно условно разделить по подходам на естественнонаучные подходы, например – №№ 1, 2, 5, 8, 15, эмпирические подходы, например – №№ 4, 6, 10, 11, 14, 16, и интуитивные подходы, например – №№ 3, 7, 9, 12, 13. Физические подходы ("законы") отражают общие закономерности, ограничения и возможности биосистем, накладываемые законами природы. Эмпирические принципы как правило, формулируются на основе анализа экспериментальных данных, результатов опытов и наблюдений, и носят более локальный характер, чем естественнонаучные. Наконец, интуитивные законы и принципы (которые по идее не должны противоречить естественнонаучными быть согласованными с эмпирическими) носят наименее формальный и универсальный характер, основываясь на интуитивных представлениях и здравом смысле.

На самом деле, при более детальном рассмотрении видно, что все приведенные выше "естественнонаучные" принципы являются скорее эмпирическими и/или интуитивными. Например, принцип наименьшего действия, являющийся, казалось бы, классическим физическим законом, формулируется для механических систем (существуют его аналоги в оптике и других разделах физики). Его неадаптированное использование при изучении биологических систем, вообще говоря, не совсем корректно и обоснованно. То есть утверждение, что биосистемы удовлетворяют принципу наименьшего действия – всего лишь гипотеза, вводимая исследователями и не подкрепленная на сегодняшний день корректными обоснованиями.

Таким образом, известные принципы (и законы) функционирования биосистем укладываются в одну из следующих формулировок: закономерность – "если система обладает некоторым (определенным) внутренним устройством, то она ведет себя соответствующим (определенным) образом" или: гипотеза – "если система ведет себя некоторым (определенным) образом, то она, скорее всего, обладает соответствующим (определенным) внутренним устройством". Добавление – "скорее всего" существенно: первый тип утверждений устанавливает достаточные условия для реализации наблюдаемого поведения (см. описание прямого и обратного методов выше) и может быть частично или полностью подтвержден экспериментально; утверждения второго типа носят характер гипотез – "необходимых" условий (в большинстве случаев гипотетических и недоказанных и выполняющих объяснительную функцию), накладываемых на структуру и свойства системы, исходя из наблюдаемого ее поведения.

Значит на основании анализа исследуемых в настоящей работе моделей итеративного научения желательно сформулировать закономерность вида: "если научаемая система обладает следующими свойствами ... и функционирует в следующих условиях ..., то кривые научения будут экспоненциальными", и, собственно, объяснение закономерностей ИН – гипотезу вида: "если кривые научения некоторой итеративно научаемой системы являются экспоненциальными, то, система скорее всего обладает следующими свойствами ... и функционирует в следующих условиях ...".

Итак, мы видим, что перечисленные выше принципы функционирования биосистем являются либо эмпирическими, либо интуитивными. Соответственно, можно выделить два направления исследований итеративного научения и два способа формулирования и объяснения его механизмов. Первый способ – анализ экспериментальных данных. Обзор работ по экспериментальным результатам изучения ИН (а таких работ – тысячи!) выходит за рамки настоящего исследования, хотя можно утверждать, что в большинстве случаев экспериментальные зависимости аппроксимируются замедленно-асимптотическими кривыми [57, 69, 75 и др.]. Второй подход – создание и анализ моделей – рассматривается ниже. Анализ известных моделей, а также синтез и исследование новых математических моделей ИН, как будет видно из дальнейшего изложения, позволят обобщить подходы к моделированию итеративного научения и объяснить некоторые закономерности не только ИН, но и процессов управления, самоорганизации и адаптации для весьма широкого класса сложных систем.

2. Кривые научения: количественное описание и качественный анализ

При исследовании любой системы, в том числе – биологической, проведении физического эксперимента, исследовании черного ящика и т.д., можно устанавливать причинно-следственные и количественные связи между входными и выходными переменными только если изменение выходного сигнала (отклика, реакции системы, ответного действия и т.д.) вызвано изменением одного из входных сигналов. Если одновременно изменились две или более входных переменных, то в общем случае невозможно выделить, какое влияние оказал каждый из входов на наблюдаемое изменение выходной переменной.

Различают два аспекта научения. Первый аспект – результативный – при научении система должна достичь требуемого результата – качества выполнения действий с приемлемыми затратами времени, энергии и т.д. Второй аспект – процессуальный: адаптация, приспособление научаемой системы к некоторому виду действий в процессе упражнения и т.д. Соответственно, выделяют результативные характеристики итеративного научения и характеристики адаптации [57]. В настоящей работе речь идет именно о результативных характеристиках научения (характеристики адаптации зачастую имеют совсем другую динамику).

В случае итеративного научения можно считать, что на его результативные характеристики влияют две входные переменные – информация о значении выходной переменной и параметры окружающей среды – внешние условия. Если бы на каком-то шаге изменились оба значения входных переменных, то результаты научения на этом шаге и на предыдущем были бы просто несравнимыми – нельзя было бы сказать почему реализовалось именно такое значение выходной переменной: потому, что обучаемая система повела себя соответствующим образом, или потому, что изменились условия ее функционирования. Поэтому постоянство внешних условий является существенной характеристикой ИН. Для сравнимости результатов научения в различные моменты времени (использование количественного описания), даже при постоянных внешних условиях, важно также постоянство цели научения.

В качестве основной результативной характеристики ИН обычно принимается критерий уровня научения. При обучении реальных систем в качестве критерия уровня научения могут выступать следующие характеристики [56]:

- временн*ы*е (время выполнения действия, операции, время реакции, время, затрачиваемое на исправление ошибки, и т.д.);
- скоростные (производительность труда, скорость реакции, движения и т.д. – величины, обратные времени);
- точностные (величина ошибки в мерах физических величин (миллиметрах, углах и т.п.), количество ошибок, вероятность ошибки, вероятность точной реакции, действия и т.д.);
- информационные (объем заучиваемого материала, перерабатываемой информации, объем восприятия и т.д.).

Так как ниже рассматриваются в основном модели именно итеративного научения, то будем для общности изложения называть интересующую нас результативную характеристику научения рассогласованием. Действительно, во всех перечисленных выше случаях мы имеем либо функцию ошибки (рассогласования), либо характеристику "наученности" системы, которая может быть сведена к некоторой функции ошибки. Например, время выполнения действия может интерпретироваться как рассогласование, если под последним понимать разность между текущим значением времени выполнения действия и минимально возможным.

Как отмечалось выше, итеративное научение, как правило, характеризуется замедленно-асимптотическими кривыми научения, аппроксимируемыми экспоненциальными кривыми. В общем виде экспоненциальная кривая описывается зависимостью

(2.1) $x(t) = x^{\infty} + (x^0 - x^{\infty})\, e^{-\gamma t},\ t > 0,$

или последовательностью

$$x_n = x^{\infty} + (x^0 - x^{\infty})\, e^{-\gamma n},\ n = 0, 1, 2, .., m,$$

где t – время научения, n – число итераций (проб, попыток) с момента начала научения (предполагается, что научение начинается в нулевой момент времени), $x(t)$ (x_n) – значение рассогласования в момент времени t (на n-ой итерации), x^0 – начальное значение рассогласования (соответствующее моменту начала научения), x^{∞} – "конечное" значение рассогласования (величина, к которой КН асимптотически стремится; как правило, в биологических системах эта величина рассматривается как физиологический предел научения), *g* – некоторая неотрицательная константа, определяющая скорость изменения КН и называемая скоростью научения (*g* имеет размерность обратную времени или числу итераций). Эскизы графиков кривых (2.1) приведены на рисунках 2.1.а и 2.1.б.

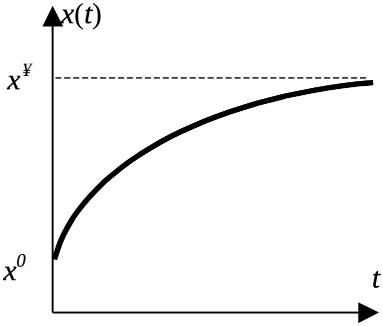

Рис 2.1а.
Возрастающая КН ($x^{¥} > x^{0}$)

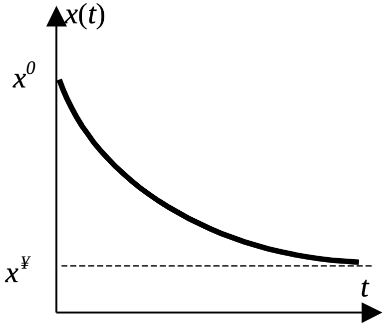

Рис 2.1а.
Убывающая КН ($x^{¥} < x^{0}$)

В зависимости от соотношения начального и конечного значения рассогласования, выражение (2.1) описывает как возрастающие, так и убывающие КН – при $x^{¥} > x^{0}$ кривая будет возрастающей, а при $x^{0} > x^{¥}$ – убывающей. Количественные характеристики научения ($x^{0}, x^{¥}, g$) зависят от множества факторов: сложности и свойств обучаемой системы, внешнего окружения, применяемой методики обучения и т.д. Нас будет интересовать в основном качественный вид КН, поэтому в большинстве случаев мы будем для простоты использовать следующие более частные зависимости:

(2.2) $x(t) = e^{-g\,t}$

(2.3) $x(t) = 1 - e^{-g\,t}$.

Если речь идет о величине ошибки, то в соответствии с(2.2), ошибка монотонно убывает. Если же x интерпретируется, например, как "уровень наученности", то он, в соответствии с (2.3), монотонно возрастает. Очевидно, что (2.2) и (2.3) могут быть получены из общей зависимости (2.1) с помощью линейного преобразования:

$$x_{(2.2)} = \frac{x_{(2.1)} - x^{\infty}}{x^{0} - x^{\infty}}, \; x_{(2.3)} = \frac{x^{0} - x_{(2.1)}}{x^{0} - x^{\infty}}.$$

Поэтому, говоря о кривой научения, мы будем подразумевать семейство кривых, эквивалентных с точностью до линейного преобразования. Характеристикой семейства – величиной, одинаковой для всех КН из рассматриваемого класса эквивалентности, в этом случае будет скорость научения. Эскизы графиков зависимостей (2.2) и (2.3) приведены на рисунках 2.2.а и 2.2.б, соответственно.

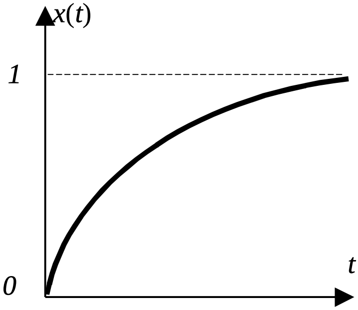

Рис 2.2а

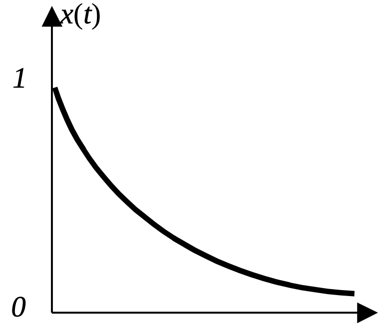

Рис 2.2а

Нормированные кривые итеративного научения.

Следует отметить, что на сегодняшний день известно значительное количество различных подходов к аппроксимации кривых научения и экспоненциальные КН вида (2.1) являются хотя и наиболее распространенными, но не единственными. Не претендуя на полноту описания, перечислим некоторые известные зависимости (см. обзоры КН в [46, 56, 59, 69, 75]).

Впервые идея использования в педагогике и психологии индуктивных рассуждений была выдвинута в 1860 г. Г. Фехнером, который предлагал, набрав достаточно большое число экспериментальных данных, аппроксимировать их наиболее подходящей аналитической функцией. С тех пор и психология, и педагогика при количественном описании явлений и процессов в большинстве случаев следуют этому пути [31, 42, 56, 59].

Аппроксимация "кривых забывания", предложенная Г. Эббингаузом (1885 г. – по-видимому – первые количественные описания ИН) основывалась на показательной функции, правда, достаточно сильно отличающейся от (2.1) [75]. Объяснение этого отличия достаточно просто – у человека существует "кратковременная" и "долговременная" память, характеризуемые различными временами запоминания и хранения информации [14].

Использование предположения о наличии аналогии между процессом обучения и мономолекулярной химической реакцией (см. модель 5.2 ниже) приводит к экспоненциальной зависимости: $x(t) = a + b\,e^{-g\,t}$, где a, b – некоторые константы. По аналогии с мономолекулярной автокаталитической реакцией или с использованием аналогий с химическим законом действующих масс [99]: $x(t) = a\,e^{g\,t} / (b + e^{g\,t})$.

Thurstone L. на основании обобщения экспериментального материала Lashley K. (обучение крыс нахождению пути в лабиринте) предложил аппроксимировать накопленную ошибку (то есть суммарную ошибку, начиная с нулевого момента времени или первой итерации) следующей формулой:

(2.4) $x(n) = a\,n / (b + n)$,

где n – число упражнений, a, b – некоторые положительные константы [114].

Предложенное H. Gulliksen в [101] эмпирическое уравнение КН для накопленных ошибок при предельном переходе (достаточно малой скорости научения и силе подкрепления) переходит в (2.1), то есть КН приближается экспонентой.

Усредненная КН, полученная Р. Аткинсоном и коллегами [13 и др.] в соответствии с теорией отбора стимулов, близка к показательной функции.

Следует отметить, что во многих работах указывалось на необходимость исследования усредненных (по испытуемым – их группе, или по времени) кривых научения, так как индивидуальные КН имеют, как правило, значительный разброс ("... гладкие КН – результат процесса усреднения ..." [99, с. 392]) [102, 106].

В работе [73] для описания количественной взаимосвязи факторов подкрепления, неподкрепления и условной реакции в экспериментах по формированию условных рефлексов была предложена формула вида (2.4) (для зависимости уровня сформированности условного рефлекса от количества подкреплений условного раздражителя).

Для аппроксимации экспериментальных кривых научения различными исследователями использовались экспоненциальные функции, гиперболы, параболы и др. [69]. Различались КН с возрастающим, убывающим и постоянным приростом [75]. Откладывая обсуждение разнообразия подходов, отметим, что при сравнении тех или иных описаний ИН необходимо, в первую очередь, обращать внимание на то, является ли это научение итеративным, какие показатели анализируются в качестве характеристик эффективности научения и в какой шкале эти показатели измеряются.

Так как итеративное научение является одним из частных случаев научения, то, помимо экспоненциальных кривых, соответствующих итеративному научению, встречаются КН других типов, в том числе – логистические КН.

Логистические кривые научения аппроксимируются зависимостью

(2.5) $x(t) = x^0\, x^{¥} / (x^0 + (x^{¥} - x^0)\, e^{-g\, t})$,

и в зависимости от соотношения начального и конечного значений рассогласования могут быть как возрастающими, так и убывающими [113]. Эскиз графика нормированной возрастающей логистической кривой приведен на рисунке 2.3.

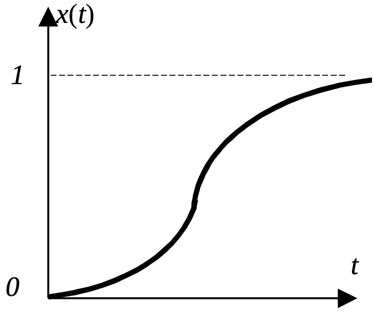

Рис. 2.3. Логистическая КН

При сравнительно сложных видах научения КН может иметь плато, наличие которого объясняется скрытыми поисками обучаемой системой новых путей совершенствования способов выполнения действий, подготовке к переходу на качественно новый способ овладения деятельностью, к новой стратегии [27, 98, 102]. На рисунке 2.4. приведен достаточно распространенный тип КН с промежуточным плато: две последовательные экспоненты соответствуют отработке двух различных стратегий действий.

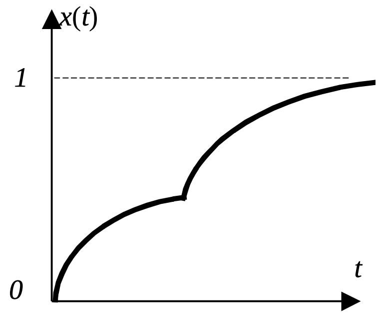

Рис. 2.4. КН с промежуточным плато

Несколько начальных проб может быть потрачено на поиск наиболее целесообразной тактики поведения, что приводит к наличию начального плато на логистической кривой [57]. В сложных процессах обучения, в соответствии с [23], можно выделить три стадии. Первая стадия характеризуется отбором из большого числа раздражителей "значимых" раздражителей. Эту стадию можно рассматривать как формирование исходного поля событий. Вторая стадия характеризуется выработкой правильного поведения, обусловливаемого отобранной системой событий (собственно итеративное научение – именно вторая стадия). Третья стадия характеризуется относительно стационарным уровнем обученности.

И, наконец, при использовании дихотомических шкал(когда произвольно устанавливается какой-то критический уровень ошибки; если в процессе выполнения действия величина ошибки меньше критического значения, то действие считается выполненным правильно) или выборе в качестве критерия уровня научения обратных для времени, точности выполнения действия и объема перерабатываемой информации величин, то есть при использовании дивизорного преобразования (скорость реакции, производительность труда и др. – как величины, обратные времени и т.д.), могут встречаться логистические кривые. В этом случае их появление несколько неестественно и может быть устранено выбором соответствующих шкалы и единиц измерения. Можно показать, что, строя для экспоненциальной кривой обратную или производя дискретизацию шкалы, можно получить логистическую КН [56, 111].

Кривые научения, соответствующие нерезультативным характеристикам научения в том числе и итеративного, то есть характеристики адаптации, могут представлять собой комбинации экспоненциальных и логистических КН, ступенеобразные, или любые другие, в том числе и немонотонные кривые. Такие КН, характеризующие внутреннюю структуру действий, в том числе, например, при формировании разнообразных навыков у человека и животных, могут наблюдаться в сложных видах научения: при последовательной глубокой перестройке структуры навыка, организации поэтапной отработки отдельных компонент действий и т.д. [57]. В дальнейшем мы будем рассматривать кривые научения, соответствующие только результативным характеристикам итеративного научения.

Закономерность итеративного научения (как наиболее простого вида научения вообще), заключающаяся в замедленно-асимптотическом виде кривых научения, соответствующих результативным характеристикам ИН, свидетельствует о наличии общих механизмов научения у объектов живой природы – человека, групп людей, животных и их искусственных аналогов – технических и кибернетических систем. Не приводя подробных экспериментальных данных – они содержатся в цитируемой литературе, ниже мы попытаемся, анализируя математические модели ИН, выяснить, что же лежит в основе этих общих закономерностей.

3. Классификация моделей итеративного научения человека, животных и искусственных систем

Большинство моделей итеративного научения строится на основе аналогий с явлениями и процессами, происходящими в тех или иных системах живой или неживой природы. Поэтому в основание классификации естественно положить тип процесса или явления, аналогия с которым используется.

На рисунке 3.1 приведена предлагаемая система классификаций моделей итеративного научения.

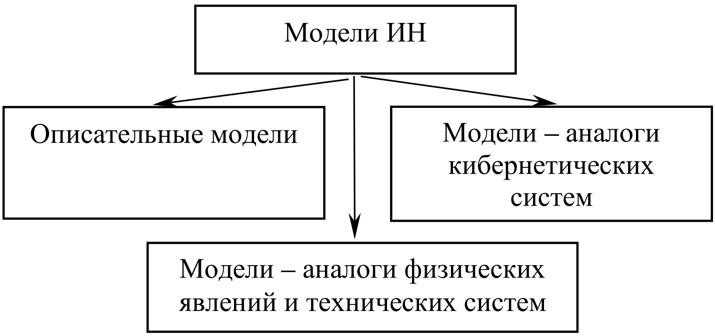

Рис. 3.1. Классификация моделей ИН

В описательных моделях (аксиоматических и интуитивных) вводятся (постулируются) те или иные предположения о связи переменных и параметров системы, причем эти предположения и модель обучаемой системы, как правило, достаточно абстрактны и не апеллируют к реальным аналогам (в интуитивных моделях они основываются на интуиции и здравом смысле). Этот класс моделей рассматривается в разделе 4 настоящей работы.

Раздел 5 посвящен описанию моделей ИН, использующих аналогии с положениями физических явлений и принципами функционирования технических систем. Их подкласс – теоретико-информационные модели – вынесен в отдельный раздел в силу своей специфики и разнообразия (раздел 6).

Модели, использующие аналогии кибернетических систем, – раздел 7 и модели коллективного поведения – раздел 8, интересны тем, что это – искусственные, достаточно абстрактные модели, причем те системы, по аналогии с которыми они строятся, зачастую, в свою очередь являются моделями некоторых реальных систем (модели – аналогии моделей).

Так как используемые аналогии достаточно разнообразны, мы попытаемся вести изложение на максимально обобщенном уровне, конкретизируя значения тех или иных терминов лишь тогда, когда это будет необходимо для предотвращения неоднозначности понимания. Приведем общую структуру описания математической модели итеративного научения.

Предположим, что обучаемая система (далее – просто "система") состоит из n, в общем случае взаимодействующих, элементов ($n > 1$), каждый из которых описывается некоторым скалярным параметром $x_i(t)$, зависящим от времени, который мы будем в дальнейшем условно называть рассогласованием i-го элемента. Рассогласование системы $x(t)$ каким-то образом зависит от рассогласований составляющих ее элементов:

$$x(t) = F(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)).$$

Такое описание является общим для большинства моделей, которые также – предположениями о взаимодействии элементов (функции $F(\cdot)$).

Все изложение приводимых ниже моделей строится по следующей схеме (некоторые из этапов могут быть опущены или различаются содержательными интерпретациями терминов "система", "элемент", "параметр", "рассогласование" и т.д., а объединены с другими):

- описание модели (О) – язык описания, предметная область, факторы и переменные;

- гипотеза (Г) – предположения о связи переменных, механизмах взаимодействия и т.д.;

- формальные (логические, алгебраические и др.) преобразования (Ф);

- вывод (В) (вывод из результатов анализа большинства приводимых ниже моделей – "рассогласование описывается зависимостью следующего вида ... ", причем зависимость эта, как правило, экспоненциальная);

- анализ модели (А) – обсуждение гипотезы, предположений, их обоснованности, исследование факторов, влияющих на скорость научения, и т.д.

Скорость научения, в общем случае, зависит от всех параметров модели: числа элементов, связей и законов их взаимодействия. Знание вида этой зависимости представляется достаточно важным, так как исследование параметров, определяющих скорость научения, существенно для поиска путей повышения эффективности научения и, в первую очередь, самой скорости научения. Действительно, зная зависимость скорости научения от параметров модели, можно предложить меры, приводящие к соответствующему изменению этих параметров, и, следовательно, требуемому изменению (чаще всего увеличению) скорости научения.

Описание моделей, не принадлежащих автору настоящей работы, сопровождается ссылками на соответствующие источники (см. список литературы). В таких моделях изложение, за исключением этапа А – анализ, следует оригиналу – работам авторов моделей.

Следует признать, что в целях унифицированности и простоты изложения автору пришлось допустить ряд "вольностей", которые могут вызвать справедливые возражения читателя-математика. Так, например, иногда идентифицируются разностные и дифференциальные уравнения и приводятся утверждения о "соответствии" между их решениями. В последнем случае в моделях с дискретным временем под экспоненциальной "кривой" мы будем понимать последовательность значений критерия уровня научения, элементы которой составляют геометрическую прогрессию.

Завершение описания каждой модели отмечено значком "•".

4. Описательные модели: аксиоматика и интуиция

Под описательными мы будем понимать модели итеративного научения, в которых явно не проводятся аналогии с принципами устройства и функционирования тех или иных систем, а экспоненциальный вид КН получается в результате введения достаточно абстрактных и не обосновываемых предположений относительно законов и правил взаимодействия элементов обучаемой системы (в аксиоматических моделях иногда постулируется непосредственно, что кривая научения описывается экспонентой – выражением (2.1)). В большинстве случаев в описательных моделях вводимые предположения опираются на интуицию и апеллируют к здравому смыслу, а выводы из анализа динамики КН зачастую лежат в основе моделей более высокого уровня [14, 31].

Модель 4.1.

О. Изменение рассогласования системы во времени.

Г(В,Ф). Скорость изменения рассогласования пропорциональна его текущему значению, причем коэффициент пропорциональности не зависит от времени. То есть

$$\frac{dx(t)}{dt} = -g\,x(t). \tag{4.1}$$

Вывод очевиден – решением этого дифференциального уравнения является экспонента – выражение (2.1).

А. Значительная часть аксиоматических моделей так или иначе предполагает пропорциональность между изменением рассогласования в единицу времени и его текущим значением. Понятно, что при постоянном коэффициенте пропорциональности такое предположение сразу приводит к экспоненциальному виду КН, причем для увеличения скорости научения необходимо увеличивать величину коэффициента g, который в дальнейшем в различных моделях будет интерпретироваться как количество информации, перерабатываемой обучаемой системой в единицу времени, пропускная способность канала связи, объективно существующее ограничение на скорость изменения параметров элементов и т.д.

Аналогичные построения (правда, при несколько более искусственных исходных гипотезах) приведены в [75]. В модели с дискретным временем, если: $x_n - x_{n-1} = -a\,x_n$, то

$$x_n = (1 - a)^n x_0,\ n = 1, 2, \dots ,$$

и скорость научения убывает с ростом a ($a\ \hat{I}\ (0; 1)$). Если же $x_n = b\, x_{n-1}$, то $x_n = b^n x_0$, $n = 1, 2, \dots$, и скорость научения возрастает с ростом b ($b\ \hat{I}\ (0; 1)$). •

<u>Модель 4.2.</u> (Р. Буш, Ф. Мостеллер, У. Эстес [23, 43, 99, 106]).

О. Рассогласование – вероятность правильной реакции (например, в известном эксперименте "крыса в лабиринте") [13, 23, 79 и др.]. Исследуется зависимость рассогласования от числа повторений. Если вероятность правильной реакции равна p (вероятность неправильной реакции равна, соответственно, $(1 - p)$), то она может увеличиться не более, чем на (1 – p), и стать равной единице, и уменьшиться не более, чем на p, и стать равной нулю.

Г. На каждом шаге прирост рассогласования пропорционален возможному приращению, а уменьшение пропорционально возможному уменьшению. Разностное уравнение для вероятности правильной реакции имеет вид:

(4.2) $x_n = x_{n-1} + a_n (1 - x_n) - b_n x_{n\text{-}}1,\ n = 1, 2, \dots ,$

где a_n, $b_n > 0$.

Ф(В). При начальной точке x_0 и постоянных коэффициентах a ($a_n = a$), и b ($b_n = b$) получаем

$$x_n = x_0 (1 - a - b)^n + a \sum_{k=0}^{n} (1 - a - b)^k .$$

Непрерывный "аналог" этого решения имеет вид

$$x(t) = x^{¥} + (x^0 - x^{¥})\, e^{-(a+b)t},$$

где $x^{¥} = a / (a + b)$.

А. По сравнению с предыдущей моделью, в рассматриваемой здесь модели введено усложнение – возможность как увеличения, так и уменьшения рассогласования (ср. (4.1) и(4.2)), хотя, по сути, рассматриваемая модель является "вероятностной" модификацией модели 4.1. Постоянство коэффициентов приводит к экспоненциальности решения, а скорость научения $g = a + b$, по-прежнему, определяется величиной коэффициентов a и b.

Статистическим моделям научения посвящено значительное число работ, особенно зарубежных авторов. В большинстве из них ИН понимается именно как "... систематическое изменение вероятности реакции" [99, с. 395]. Приведем один из наборов требований к статистическим моделям:

1. "Динамика усредненного показателя научения описывается кривой, имеющей отрицательное ускорение в своей конечной фазе и стремящейся к некоторой постоянной асимптоте" (отметим, что в этом пункте требуется замедленная асимптотичность только в конечной фазе, то есть допускается, например, наличие начального плато – Д.Н.).

2. "Гладкая кривая среднего является результатом усреднения ..., а асимптота наблюдаемой КН представляет лишь точку статистического равновесия" [99, с. 397].

Следует отметить, что полученному решению уравнения (4.2) вполне соответствуют результаты экспериментов со многими животными (в большинстве случаев – с крысами) [23, 67], людьми [4, 100 и др.] и вероятностными автоматами [24 и др.].

Экспоненциальный вид КН обусловлен линейностью зависимостей (4.1) и (4.2) и постоянством (стационарностью) коэффициентов a и b. В следующей модели эта зависимость берется уже нелинейной. •

Модель 4.3. (Р. Буш, Ф. Мостеллер и др. [23]).

О. Изменение рассогласования (например, зависимость вероятности правильной реакции от числа повторений) системы во времени.

Г. На каждом шаге изменение рассогласования пропорционально текущему значению рассогласования и разности между некоторым конечным рассогласованием a и текущим. Динамика рассогласования удовлетворяет дифференциальному уравнению Бернулли

$$(4.3)\quad \frac{dx(t)}{dt} = b\, x(t)\, (a - x(t)),$$

где a и b – некоторые константы.

Ф(В). При начальной точке x решением является логистическая кривая:

$$x(t) = a\, x^0 / (x^0 + (a - x^0)\, e^{-a\, b\, t}).$$

А. Наличие "тормозящего довеска" в (4.3) по сравнению с(4.1) и (4.2) приводит к тому, что КН получается не экспоненциальной, а логистической – появляется точка перегиба. Скорость научения, в отличие от предыдущих моделей, зависит не только от коэффициента пропорциональности между скоростью изменения рассогласования и текущим значением рассогласования, но и от величины конечного рассогласования. •

Модель 4.4. (К. Халл [36, 104, 105]).

О. Классической аксиоматической моделью итеративного научения является известная система постулатов К. Халла (C. Hull) для бихевиористской модели S-R-S (основой обучения является упрочение связей стимул-реакция).

Г(А, В). Закон формирования навыка (IV постулат) гласит, что, если подкрепления равномерно (равномерность проб – важная характеристика итеративного научения) следуют одно за другим, а все остальное (внешние условия и цели обучения) не меняется, то в результате прочность навыка $x(n)$ будет увеличиваться с ростом числа испытаний согласно равенству:

$$x_n = 1 - 10^{-g\,n}.$$

А. Отметим, что кривая забывания согласно VIII постулату также является экспоненциальной кривой [105]. •

Модель 4.5. (Ю.Г. Антомонов [9, 11]).

О. "Обобщенная модель обучения" (например, обучение человека-оператора). Переменной является x – вероятность того, что у обучаемой системы сформировалась адекватная модель внешней среды.

Г. Из аналога принципа наименьшего действия (см. также модели раздела 5 настоящей работы) следует, что изменение вероятности удовлетворяет дифференциальному уравнению [11]:

$$(4.4)\quad \frac{dx(t)}{dt} + a\,x(t) = b.$$

Отметим, что иногда уравнения типа (4.4) называются "законом подкрепления статистической теории обучения". В [92] этот закон записывается в виде

$$x_n = x_{n-1} + a\,(1 - x_{n-1}),$$

что соответствует $b = a$ (или (4.2) с $b = 0$, при этом если $x^0 = 0$, то $x^¥ = 1$ [9]).

Ф(В, А) – см. модель 4.2. •

Многие исследователи изначально постулируют замедленно-асимптотический вид КН и используют его в дальнейшем при количественном анализе, выработке различных рекомендаций и т.д. [75, 109, 115 и др.].

Практически во всех моделях настоящего раздела предполагается, что рассогласование системы удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. При этом линейность и стационарность коэффициентов являются достаточными (но не необходимыми) условиями экспоненциальности решения.

5. Модели – аналогии физических явлений и технических систем

Рассматриваемые в настоящем разделе модели итеративного научения, предложенные разными авторами, опираются на аналогии физических явлений и принципов функционирования технических систем. Многие из используемых аналогий достаточно условны и адекватность допущений действительным закономерностям, имеющим место в биосистемах, может вызывать оправданные возражения.

Модель 5.1. (С. Дейч [35]).

О. В некоторых моделях нервной системы мозг рассматривается как техническая система распознавания образов, параметры которой зависят от электрических характеристик нервных волокон.

Г. Отросток нейрона – длинная RC-цепочка (RC-линия, состоящая из конденсатора и резистора).

Ф. Если U_{in} – напряжение на входе RC-цепочки, $U_{out}(t)$ – напряжение на выходе, то связь между ними, в силу законов Кирхгофа, описывается дифференциальным уравнением:

$$C\,\frac{dU_{out}(t)}{dt} = \frac{U_{in} - U_{out}(t)}{R},$$

где C – емкость конденсатора, а R – величина сопротивления.

В. Выходное напряжение изменяется экспоненциально. Так как временные характеристики процессов передачи и распространения сигналов в нервной системе определяются экспоненциальными передаточными функциями с характерным временем $t = R\,C$ то $g = 1 / t$ будет определять скорость переходных (адаптационных) процессов в системе, то есть описываться экспоненциальной зависимостью.

А. Различение амплитуды сигнала (стимула) в рассматриваемой модели описывается законом, практически совпадающим с законом Вебера-Фехнера [31, 35]. Выходное напряжение схемы – основная характеристика модели – удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (см. четвертый раздел). •

Модель 5.2.

О(Г). По аналогии с механизмами радиоактивного распада в физике, предположим, что рассогласование обучаемой системы определяется рассогласованием элементов, каждый из которых может иметь либо некоторое начальное рассогласование, либо некоторое конечное рассогласование. Рассогласование системы-функция числа элементов, имеющих ненулевое рассогласование, причем уменьшение рассогласования, происходящее для каждого элемента скачкообразно, – вероятностный процесс, характеризуемый постоянной (не зависящей от времени и числа элементов) вероятностью g "зануления" рассогласования элемента в единицу времени.

Ф. Число элементов $N(t)$, имеющих в момент времени t ненулевое рассогласование, удовлетворяет уравнению

$$N(t + Dt) = N(t) - g\, N(t)\, Dt.$$

Переходя к пределу по Dt, получим дифференциальное уравнение

$$(5.1)\quad \frac{dN(t)}{dt} = - g\, N(t).$$

В. Решение уравнения (5.1) имеет вид

$$(5.2)\quad N(t) = N_0\, e^{-g\,t},$$

где N_0 – число элементов в системе (в нулевой момент времени все элементы имели максимальное (начальное) рассогласование).

А. Постоянная g, характеризующая период полураспада, характеризует скорость научения. Чем больше вероятность уменьшения рассогласования элемента в единицу времени, тем выше скорость научения.

Отметим, что предположение об одинаковости для всех элементов и стационарности вероятности "распада" является существенным.

Важным представляется также то, что приведенному выше уравнению для $N(t)$ удовлетворяют не только механизмы радиоактивного распада, но и процессы бактериального роста, фармакокинетические процессы, большинство кинетических схем химических реакций (в том числе – закон действующих масс) и др. Зависимость от времени макроскопических характеристик во всех этих случаях оказывается экспоненциальной просто потому, что поведение любого элемента носит вероятностный характер, причем статистические характеристики процессов (распада, роста, вступления в реакцию и т.д.) не зависят от времени и предыстории системы. Это утверждение о стационарности, лежащее в основе описания и объяснения упомянутого класса процессов, является согласованным с экспериментальными данными предположением. •

Модель 5.3.

О. Каждый элемент обучаемой системы имеет собственный регулятор, стремящийся уменьшить свое рассогласование. Рассогласование системы в целом – монотонная функция рассогласований элементов.

Г. Каждый регулятор характеризуется постоянной относительной ошибкой в (требовать постоянства абсолютной ошибки представляется нелогичным, так как регулятор должен быть универсальным [93]). На n-ом шаге регулятор случайным образом переводит элемент из состояния x_{n-1} в состояние x_n, равномерно распределенное в $d = d(x_{n-1})$-окрестности нулевого рассогласования.

Ф(В, А). При достаточно большом n кривая научения – среднее рассогласование элементов – убывающая экспоненциальная функция. Вид КН обусловлен постоянством относительной ошибки регулятора и предположением о вероятностных распределениях (ср. с изменением информации при измерении величин с погрешностью [21, 22]). •

Модель 5.4.

О(Г, Ф, В). Обучаемая система представляет собой набор регуляторов первого порядка (то есть апериодических звеньев первого порядка, осуществляющих регулирование по величине переменной и скорости ее изменения), аналогичных используемым в автоматическом регулировании. Передаточная функция (реакция на импульсное входное воздействие) каждого элемента:

$$h(t) = 1 - exp\,(- g_i\, t).$$

А. Интересно отметить, что апериодическое звено второго порядка (осуществляющее регулирование по значению переменной и первым двум ее производным), которое может рассматриваться как последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка, имеет логистическую передаточную функцию. В рамках этой модели логистические кривые научения можно рассматривать как КН иерархической системы, состоящей из двух подсистем, результаты итеративного научения каждой из которых описывается экспоненциальной кривой. •

Модель 5.5. (Ю.Г. Антомонов [10]).

О. Исследуются вероятности нахождения системы в определенных состояниях. Пусть у обучаемой системы имеются два возможных структурных состояния s_1 и s_2. Обозначим вероятности нахождения системы в этих состояниях $p = Prob\,\{s_1\}$ *и* $q = Prob\,\{s_2\}$; $q = 1 - p$; $p' = \dfrac{dp(t)}{dt}$.

Г. По аналогии с механическими системами предположим, что система описывается двумя функциями времени, одну из которых условно назовем уровнем организации ("потенциалом") системы:

(5.3) $V(t) = a\, p^2(t)$,

а вторую – "кинетической энергией" системы:

(5.4) $T(t) = \int (p')^2 dt$.

Отметим, что $V(t)$ и $T(t)$ соответствуют потенциальной и кинетической энергии механической системы, фазовой переменной которой является $p(t)$. Функция $K = T - V$ – "полная энергия системы". Далее введем следующее предположение: "Для того, чтобы динамический процесс изменения уровня организации системы, в связи с внутренними причинами или действиями среды, был оптимальным, он должен, по-видимому, подчиняться принципу, аналогичному принципу наименьшего действия" [10].

Ф. Подставляя (5.3) и (5.4) в уравнение Лагранжа и решая его, получим

(5.5) $p(t) = 1 - e^{-g\,t}$,

где

(5.6) $g = a / b$.

В. "Оптимальность живых систем заключается в экспоненциальных законах изменения вероятностей ..." [10].

А. Следует признать, что на сегодняшний день описанная выше модель является одной из наиболее изящных и красивых (если эти термины могут относиться к математическим моделям).

Нисколько не умаляя достоинств модели и ее значения, попытаемся восстановить ход рассуждений ее автора.

Во-первых, известно из экспериментов, что вероятности в процессе ИН изменяются в большинстве случаев по экспоненциальному закону. Во-вторых, должны существовать общие законы функционирования живых систем. Так как принцип наименьшего действия обладает достаточной общностью (по крайней мере, для механических систем), перенесем его и на живые системы.

А дальше все достаточно просто – записываем соответствующие уравнения и исследуем какова должна быть структура "потенциала" и "кинетической энергии", чтобы решение удовлетворяло (5.5). Оказывается, что единственная конструкция, приводящая к требуемому результату – (5.3) и (5.4). Следует, правда, при этом отметить, что выбор начальных условий и (5.3)-(5.4) не тривиален. Более того, затруднительны и содержательные интерпретации (5.6) как скорости научения.

На этой модели очень хорошо демонстрируется одновременное применение и прямого метода построения моделей ИН (когда вводятся предположения и из них делается вывод, совпадающий с экспериментальными данными), и обратного (в котором ищутся те предположения и гипотезы о механизмах функционирования исследуемой системы, приводящие к требуемому результату). •

Таким образом, рассмотренные выше модели итеративного научения, построенные по аналогии с принципами и законами функционирования физических и технических систем, используют "обобщения" ряда физических законов. Как правило, вводится предположение, что законы (в большинстве случаев – законы сохранения), сформулированные для определенного класса систем живой и неживой природы (и справедливые для описания обучаемых систем на определенном микроуровне рассмотрения), остаются справедливыми и для "макроскопического" описания этих систем. Справедливость этого предположения в большинстве случаев, к сожалению, пока не подкрепляется экспериментальным подтверждением.

6. Теоретико-информационные модели

Значительную часть описанных в литературе моделей итеративного научения составляют модели, основывающиеся на рассмотрении процессов переработки информации в обучаемых системах. Объединяет эти теоретико-информационные модели то, что, практически, во всех из них предполагается, что возможности обучаемой системы по передаче и переработке информации (количество информации, передаваемой, обрабатываемой, усваиваемой и т.д. в единицу времени) ограничены [20, 45, 50, 110 и др.]. Так, например:

"... среднее время, требующееся для четкого уяснения значения некоторого сигнала и правильной реакции на него, возрастает пропорционально средней информации, содержащейся в этом сигнале. Исходя отсюда, можно предположить, что в случае достаточно регулярно происходящих событий, характеризующихся определенной статистической устойчивостью, сообщение о возникновении такого события передается через органы чувств и центральную нервную систему в среднем за время, пропорциональное содержащейся в этом сообщении информации. ... передача сообщений в живом организме происходит так, что за одинаковое время в среднем передается одинаковое количество информации" [95, с. 115].

Частным случаем предположения об ограниченности возможностей человека при переработке информации является известный закон Хика, устанавливающий пропорциональность (в определенном диапазоне) между количеством обрабатываемой информации и неопределенностью сигнала; при превышении последней некоторого порогового значения количество перерабатываемой информации остается постоянной.

Различают два типа информации – связанная (начальная, априорная информация, заложенная в структуре системы) и свободная. Процесс научения при этом может интерпретироваться следующим образом: "... свободная информация постепенно переходит в связанную, происходит процесс "научения" – повышения первоначальной организации системы, наращивание объема связанной информации" [40, с. 15]. Обучение может также пониматься как "... развитие системы без увеличения элементного состава, повышение ценности информации установлением дополнительных связей" [37, с. 193], причем модификация структуры целей в большинстве случаев вызывает лишь количественные, а не качественные изменения [47, 55].

Информация, поступающая на вход системы или ее подсистемы может использоваться, в частности, следующим образом:

1) непосредственная реакция;

2) запоминание предыдущих ситуаций с целью отбора наиболее удачных реакций непосредственного типа;

3) запоминание внешних воздействий с целью их экстраполяции и выявления рациональной реакции на экстраполированное внешнее воздействие;

И, наконец, наиболее общий четвертый случай – создание моделей внешнего мира и получение прогноза на базе функционирования моделей [51].

Практически все рассматриваемые в настоящем разделе модели итеративного научения опираются на приведенные выше положения.

Модель 6.1. (Ю.Г. Антомонов [10]).

О. В работе [82] был предложен подход к определению понятия организации системы и ее сложности [44] через энтропию. Соответствие между сложностью и организацией системы и сложностью и организацией окружающей среды устанавливается принципом адекватности.

Известны различные формулировки принципа адекватности [7, 8, 41]. Например, возможности (сложность, пропускная способность и т.д.) управляющей системы определяют пределы "управляемости" объекта управления, как бы не были велики его собственные возможности (обратное соотношение встречается в биологии чрезвычайно редко). Другими словами, "для того, чтобы система успешно функционировала в среде, сложность и организация ее должны быть адекватны сложности и организации среды" [9].

В [9] предложен принцип динамической адекватности : "... при изменении сложности и организации среды биосистема постоянно стремится достичь нового уровня адекватности по сложности и организации со средой с минимизацией времени, затрат вещества и энергии".

Г. В частности, в [9] вводится следующее предположение (которое в том или ином виде используется, практически, во всех теоретико-информационных моделях ИН): изменение энтропии в обучаемой системе – (количество информации, перерабатываемой получаемой, передаваемой и т.д. системой) пропорционально изменению энтропии окружающей среды.

Ф(В, А). Коэффициент пропорциональности зависит от возможностей системы – пропускной способности каналов передачи информации, максимально допустимой скорости изменения параметров элементов и т.д., причем, если коэффициент пропорциональности и количество информации, поступающей в единицу времени, постоянны (не зависят от времени), то динамика системы, очевидно, описывается экспонентой (см. ниже более подробно). Если обучение рассматривается как процесс получения информации, то в обучаемой системе происходит поэтапное устранение неопределенности за счет информации, поступающей из внешней среды [30, 41, 54, 78]. •

<u>Модель 6.2.</u> (Ю.В. Рублев, Г.Н. Востров [74]).

О. Процесс переработки информации обучаемой системой.

Г. Предположим, что информационные потоки удовлетворяют уравнению

(6.1) $$\frac{dI}{dt} = a\,\frac{dJ}{dt} + b\,J,$$

где I – количество поступающей информации, J – количество усваиваемой информации, a и b – константы, характеризующие обучаемую систему и определяющие скорость научения.

Уравнение (6.1) свидетельствует, что скорость усвоения информации пропорциональна скорости поступления информации и уменьшается (также пропорционально) с ростом уже полученной информации.

Предположим, что количество информации, поступающей в единицу времени постоянно:

(6.2) $I(t) = q\,t$.

Ф(В). Решение (6.1) в рамках сделанного предположения имеет вид

(6.3) $J(t) = d\,(1 - e^{-g\,t})$
где
(6.4) $d = q / b,\ g = b / a$.

А. Предположения о постоянстве (или ограниченности) количества информации, поступающей или перерабатываемой обучаемой системой в единицу времени, используются практически во всех теоретико-информационных моделях итеративного научения, причем в большинстве из них они имеют именно вид (6.2). В рассматриваемой модели для получения выражения (6.3) потребовалось введение достаточно конкретной гипотезы о связи поступающей и усваиваемой информации. Интересно отметить, что скорость обучения, определяемая константами a и b, не зависит от темпа поступления информации q – внешнего параметра, а определяется только параметрами самой системы. •

Модель 6.3. (В.Ф. Присняков, Л.М. Приснякова [69, 70, 83]).

О. Запоминание и хранение информации в памяти человека.

Г. Информационные потоки подчиняются соотношению

(6.5) $\dfrac{dJ}{dt} = \dfrac{dI}{dt} - (J - J^{¥}) / T$,

где J – количество усваиваемой информации, $\dfrac{dJ}{dt}$ – темп усвоения информации, $\dfrac{dI}{dt}$ – темп подачи информации, Т – постоянная времени (характерное время, определяющее скорость научения) процесса переработки информации памятью человека, $J^{¥}$ – предельное значение усвоенной информации (ср. с (6.1)).

Ф(В, А). В предположении $\dfrac{dI}{dt} = q = \text{Const}$ (постоянство внешних условий), решение (6.5) имеет вид
(6.6) $I(t) = d\,(1 - e^{-gt})$,
где $d = I^{¥} + q\,T,\ g = 1 / T$ (ср. с (6.3)). •

Модель 6.4. (О.Ф. Шленский, Б.В. Бодэ [90]).

О. Процесс накопления информации и ее забывания.

Г. При постоянном количестве информации, поступающей в единицу времени, "идеальная память" запоминает всю информацию. В реальной памяти количество запоминаемой в единицу времени информации убывает с ростом уже запомненной информации (замедленная асимптотичность). После окончания процесса обучения идеальная память сохраняет информацию неограниченно долго, а в реальной памяти количество информации после окончания процесса обучения монотонно убывает (забывание), причем текущая скорость забывания пропорциональна объему имеющейся на данный момент информации $I(t)$ (замедленная асимптотичность, см. рисунок 6.1).

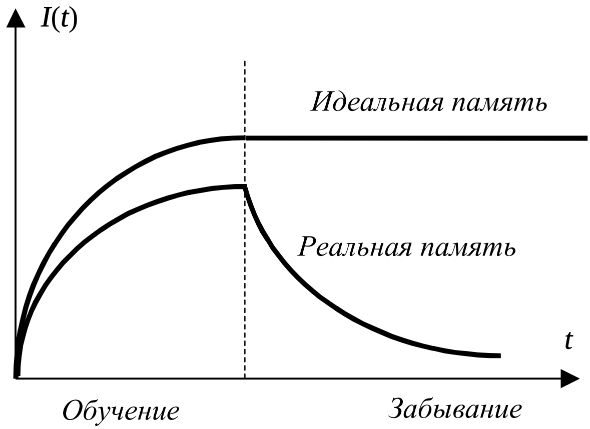

Рис. 6.1. Количество запомненной информации

Ф(В, А). Если "уравнение памяти" представить линейным интегральным уравнением, то качественный вывод будет таким же, как и при использовании уравнений (6.1) и (6.5) в моделях 6.2 и 6.3 [90]. •

Модель 6.5. (В.А. Трапезников [76, 77]).

О. Переработка информации человеком-оператором.

Г(Ф, В, А). Экспоненциальная зависимость качества работы оператора в зависимости от времени обучения постулируется. •

Модель 6.6. (Г.П. Шибанов [89]).

О. Переработка информации оператором (в человеко-машинной системе) при обучении и в процессе профессиональной деятельности.

Г. Количество информации I, перерабатываемой оператором в процессе его деятельности, соответствует изменению его энтропии: $I = DH$. Следовательно, неупорядоченность деятельности оператора W (число возможных состояний научаемой системы, логарифм которого определяет энтропию) зависит от времени следующим образом:

(6.7) $W(t) = W_0\, e^{-b\,t}$.

Предположим, что $I(t) = a\ t$, где t – время обучения оператора, a – константа, характеризующая систему подготовки. Определим качество работы оператора следующим образом

$$Q(t) = Q_{max}\,(1 - W(t)).$$

Ф(В). Тогда

(6.8) $Q(t) = Q_{max}\,(1 - W_0\, e^{-g\,t})$,

где $g = a\ b$.

А. Экспоненциальный характер КН обусловлен выбором энтропии и информации как характеристик неупорядоченности, конкретными (в частности, линейными) зависимостями характеристик деятельности оператора от неупорядоченности и предположением линейного увеличения количества накопленной информации. В рассматриваемой модели скорость научения зависит как от темпа поступления информации в процессе обучения, так и от характерного времени изменения неупорядоченности.

Следует отметить, что в [89] выделялись три этапа обучения:

1. Первоначальная "приработка" человека-оператора к данному режиму работы.

2. "Отработка" результативных характеристик в рамках фиксированного режима (собственно этап итеративного научения).

3. Деятельность, характеризуемая статистически стабильными характеристиками.

Зависимость ошибки от времени можно в этом случае схематично представить кривой, приведенной на рисунке 6.2. •

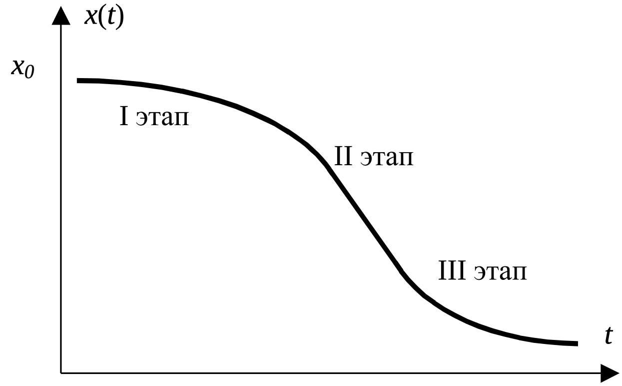

Рис. 6.2. Зависимость ошибки оператора от времени

Модель 6.7. (В.М. Глушков [33]).

О. Переработка информации в процессе обучения перцептрона (системы распознавания образов, которая может рассматриваться как модель запоминания и научения в живых системах).

Г. Для правильного распознавания i-го изображения необходимо и достаточно, чтобы оно было хоть раз показано перцептрону в процессе обучения.

Ф. При n случайных (равновероятных) показах изображений вероятность появления одного из N образцов составляет

$$(1 - 1 / N)^n \cong exp\,(- n / N).$$

В. Тогда полная эффективность обучения (вероятность правильного распознавания в зависимости от длительности этапа научения)

$$p_n = 1 - e^{-g\,n}.$$

где $g = 1 / N$.

А. Сравним с моделью 5.2. В данной модели, как и в 5.2, вероятность уменьшения рассогласования элементов (каждый элемент "отвечает" за запоминание одного образа) характеризуется постоянной вероятностью g "зануления" его рассогласования в единицу времени (вероятностью того, что соответствующий образ был показан и запомнен). Обучаемая система предполагается достаточно пассивной, поэтому скорость научения обратно пропорциональна числу возможных вариантов N. •

Модель 6.8.

О. Обучаемая система имеет канал связи, через который в процессе научения из внешней среды поступает информация, причем чем большая часть информации получена системой, тем меньше рассогласование.

Г. В канале связи, пропускная способность которого ограничена, присутствуют помехи [88]. На каждом шаге посылается вся информация, которая еще не получена системой, причем каждый раз система получает неискаженной лишь некоторую фиксированную ее часть.

Ф. Предположим, что для успешного научения система должна получить полную информацию I. На первом шаге посылается вся информация, неискаженной "доходит" $g\,I$ ($g < 1$).

На втором шаге посылается информация в объеме $(1 - g)\,I$, из которой система получает $g\,(1 - g)\,I$ и т.д. Количество информации, полученной системой через $n > 2$ шагов, определяется выражением

(6.8) $J_n = (1 + (1 - g) + (1 - g)^2 + \ldots + (1 - g)^{n-1})\,g\,I,$

то есть $J_n = g\,I\,(1 - (1 - g)^n)$.

Возможны и другие интерпретации. Пусть, например, на каждом шаге посылается вся информация I. Тогда количество полученной информации изменяется со временем следующим образом:

(6.9) $J(t+Dt) = J(t) + g\,(I - J(t))\,Dt.$

В. Решение (6.9) имеет вид

(6.10) $J(t) = I\,(1 - e^{-g\,t})$.

А. Такой вид решения обусловлен пропорциональностью количества новой информации, получаемой системой, тому количеству информации, которое осталось передать. Другими словами это свойство (предположение) можно интерпретировать следующим образом: способность системы усваивать (запоминать) информацию уменьшается пропорционально количеству запомненной и переработанной информации.

Критическим при этом (для того, чтобы решение имело вид, совпадающий с (6.10)) является то, что пропорция между получаемой частью информации и уже накопленной остается постоянной во времени. Следует отметить, что в рамках данной модели просто предположение об ограниченности пропускной способности канала связи привело бы к совершенно другим выводам (количество накопленной информации росло бы линейно и т.д.). Скорость научения в рассматриваемой модели определяется пропускной способностью канала g – чем большая часть информации доходит без искажений, тем выше скорость научения. •

<u>Модель 6.9.</u>

О. Представим сложную обучаемую систему в виде множества элементов (их число обозначим N), совместные действия которых ведут к достижению некоторой фиксированной цели.

Предположим, что каждый элемент характеризуется конечным множеством его допустимых состояний $S_i(t)$ (число элементов множества S_i равно $n_i(t)$), в одном из которых он может находиться в момент времени t, $i = \overline{1, n}$. Число независимых состояний системы в целом (описываемой перечислением состояний ее невзаимодействующих элементов) равно произведению числа допустимых состояний всех элементов.

Г. Предположим, что научение заключается в сведении числа допустимых состояний каждого элемента к некоторому минимуму, то есть в оставлении одного или нескольких фиксированных состояний, соответствующих решаемой задаче. Цель обучения для системы – минимизация числа ее допустимых состояний. Уменьшение числа допустимых состояний каждого элемента происходит по мере получения им информации.

Энтропия i-го элемента (его неупорядоченность):
(6.11) $H_i(t) = ln\ n_i(t)$.

Количество управляющей информации $x_i(t)$, поступившей i-му элементу в момент времени t, идет на снижение неопределенности:
(6.12) $\dfrac{dH_i(t)}{dt} = -\, x_i(t),\ t > 0.$

Предположим, что существует абсолютный предел количества регулирующей информации, поступающей в каждый момент: $x_i(t)$£ g_i, " t ³ 0. В общем случае, в момент времени t, $x_i(t)$ принадлежит отрезку $[0; g_i]$ ($x_i(t) \equiv 0$ соответствует тому, что i-ый элемент в момент t не обучается).

Ф. Исследуем, как будет изменяться со временем число допустимых состояний элементов. Подставляя (6.11) в (6.12) и решая соответствующее дифференциальное уравнение, получим

(6.13) $n_i(t) = n_i^0 \ exp\left(-\int_0^t x_i(t)dt\right), i = \overline{1,n}, t > 0,$

где n_i^0 – число допустимых состояний i-го элемента до начала научения. Интеграл в показателе экспоненты соответствует накопленной элементом информации $I_i(t) = \int_0^t x_i(t)dt$.

В. Рассмотрим как будет вести себя во времени число допустимых состояний системы в целом, отражающее, в силу введенного выше предположения, эффективность научения:

(6.14) $n(t) = \prod_{i=1}^{n} n_i(t) = n^0 \ exp\left(-I(t)\right),$

где $n^0 = \prod_{i=1}^{n} n_i^0$,

(6.15) $I(t) = \sum_{i=1}^{n} I_i(t)$.

Если предположить, что характеристики элементов и темп поступления информации постоянны, то есть постоянно количество информации, перерабатываемое каждым элементом в единицу времени: $I_i(t) = q_i\, t$, то (6.14) переходит в классическую экспоненту с показателем $I(t) = t \sum_{i=1}^{n} q_i$.

А. Гипотеза о монотонном уменьшении числа допустимых состояний не снижает общности приведенных рассуждений, так как в случае их роста получится выражение вида

$$n(t) = n^{¥} \left(1 - e^{-I(t)}\right),$$

примерно с теми же промежуточными выкладками.

Результаты моделей 6.2, 6.3, 6.5, 6.6, и 6.8 могут рассматриваться как частные случаи модели 6.9.

Во всех моделях настоящего раздела скорость научения определяется количеством накопленной информации, поэтому для увеличения скорости научения, в рамках рассматриваемой модели, целесообразно выбирать как можно больший темп передачи информации. Следует, однако, учитывать, что в реальных системах превышение некоторого порогового (для обучаемой системы) объема поступающей информации может оказать отрицательное влияние и снизить эффективность научения (аналог эффекта интерференции навыков). •

Таким образом, в теоретико-информационных моделях итеративного научения экспоненциальный характер кривых научения обусловлен постоянством количества информации, обрабатываемой, передаваемой, усваиваемой и т.д. элементами системы в единицу времени.

7. Модели – аналогии кибернетических систем

Отличие моделей итеративного научения, рассматриваемых в настоящем разделе, от описанных выше заключается в том, что объектами исследования являются не живые системы, изучение которых основывается на гипотетических аналогиях и предположениях о зависимости между параметрами элементов и обучаемой системы, а кибернетические системы – автоматы, алгоритмы, нейронные сети и др. Другими словами, при построении математических моделей итеративного научения биологических систем выше использовались аналогии с физическими явлениями, те или иные интуитивные предположения и т.д. В моделях – аналогиях кибернетических (абстрактно-логических моделях, не реализованных материально, в отличие от технических) систем принципы функционирования последних с одной стороны переносятся (на уровне гипотез) на моделируемые системы, а с другой стороны многие кибернетические системы используют аналогии с системами живой природы.

Проведенное разделение не случайно. Например, конечные автоматы и нейронные сети нашли широкое распространение в теории управления, прикладной математике и других областях науки не только как модели живых систем, но и как объекты, заслуживающие самостоятельного изучения и используемые при синтезе управляющих систем, распознавании образов и т.д. [68? 72]. К этому же классу моделей мы относим и модели, использующие аналогии с методами оптимизации – существует целый ряд моделей ИН, в которых предполагается, что природа "использует" тот или иной алгоритм для снижения, например, значения рассогласования. С другой стороны, если мы хотим на основании анализа поведения, например, нейронной сети при ее научении [34] сделать какие-то выводы о поведении человека и животных при итеративном научении, то необходимо понять какое отношение исследуемая кибернетическая система имеет к сети нейронов в мозге человека.

При этом, однако, надо четко понимать, что искусственные системы ведут себя тем или иным образом не сами по себе, а в строгом соответствии с теми правилами и алгоритмами, которые были в них заложены человеком – создателем системы.

Первым использованием методов поиска экстремума при анализе и моделировании поведения биологических систем является, по-видимому, метод оврагов [32], в котором все переменные (параметры системы) разбиваются на два качественно различных класса – существенные и несущественные. Одни из них характеризуются тем, что при их изменении значение минимизируемой функции изменяется достаточно быстро (спуск по склону "оврага" – поверхности функции), а другие – достаточно медленным изменением минимизируемой функции (спуск по наклонному дну оврага). Соответственно, для максимально быстрого достижения минимума нужно насколько возможно быстро двигаться именно по дну оврага (отметим, что здесь и в ходе дальнейшего изложения мы не будем обсуждать локальность алгоритмов, их сходимость и т.д. [39], ограничиваясь лишь качественным анализом).

<u>Модель 7.1.</u>

О(Г, Ф, В). Предположим, что алгоритм минимизации рассогласования использует метод поиска корня (некоторой функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$) делением отрезка пополам. Оценка сверху рассогласования (в зависимости от числа итераций) дается выражением $x_n \le (b - a) / 2^n$, то есть $x_n \le \alpha e^{-\gamma n}$, где

$$\alpha = \exp(\log_2 (b - a) \ln 2),\ \gamma = \ln 2.$$

А. Примерно экспоненциальную сходимость (для достаточно "хороших" функций – см. более подробно, например [39]) имеют не только дихотомические методы поиска корня, но и многие другие. •

<u>Модель 7.2.</u>

О(Г). Предположим, что рассогласование системы в момент времени n определяется как среднее арифметическое текущих значений рассогласований всех N элементов.

Пусть рассогласования всех элементов в начальный момент времени равны единице, неотрицательны в любой момент времени, и в n-й момент времени рассогласование i-го элемента $x_i(n)$ может принимать с равной вероятностью любое значение, меньшее $x_i(n - 1)$.

Ф(В). Тогда, если определить рассогласование всей системы как $X_N(n) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(n)$, то, если число элементов достаточно велико, то рассогласование системы $X_n = X_{n-1} / 2\,n$, $n = 1, 2, \ldots$, $X_0 = 1$.

А. Предположение о невозрастании рассогласований элементов вполне соответствует известному принципу "не упускать достигнутого" [93, 94]. В то же время, использование среднего арифметического в качестве значения рассогласования системы и предположение о равновероятности допустимых значений рассогласований элементов представляются не очень обоснованными. Стоит отметить некоторую близость рассматриваемой модели к моделям 5.1 и 8.4. •

<u>Модель 7.3.</u> (О.М. Аттли [15]).

О. Техническая система, изменяемыми характеристиками которой являются вероятности (определенных действий, состояний, реакций и т.д.).

Г. В зависимости от "успеха" или "неуспеха" на шаге n, на шаге $n + 1$ вероятность p определяется следующим образом:

$$p_{n+1} = \begin{cases} p_n + a\ (1 - p_n) \\ p_n - b\ \ p_n \end{cases}.$$

Ф(В). Предположим, что, если на n-ом шаге выбирается правильное действие (с вероятностью p_n), то вероятность "успеха" равна p (соответственно, "неуспеха" – $(1 - p)$). Если выбирается неправильное действие (с вероятностью $(1 - p_n)$), то вероятность "успеха" равна q. Тогда ожидание "успеха" на $(n + 1)$-ом шаге равно: $V_{n+1} = V_n\,(p_{n+1}\,p + (1 - p_{n+1})\,q)$.

Подставляя закон изменения вероятности, получим, что V_n экспоненциально изменяется со временем (см. модель 4.2.).

А. Экспоненциальный вид кривой, отражающей изменение ожидаемого "успеха" обусловлен линейным изменением вероятности. В 50-60-х годах, в период бурного развития кибернетики, было построено значительное число самых разнообразных обучающихся машин: машины условной вероятности [15], обучающиеся матрицы [91], "мышь" К. Шеннона (лабиринтная модель), "черепаха"

Г. Земанека, "машина-спекулятрикс" (аналог безусловного рефлекса) и "CORA" (аналог условного рефлекса) Г. Уолтера [80] и др. В большинстве из них использовались линейные законы изменения переменных (в отличие, например, от нелинейных законов, используемых в гомеостате У.Р. Эшби [93]). Более того, при исследовании общих закономерностей процессов адаптации и обучения в автоматических системах, многие законы обучения (например, линейные алгоритмы оптимального обучения) выбирались также линейными [86, 87]. •

Большой класс обучающихся автоматов составляют так называемые конечные вероятностные автоматы с переменной структурой. Под конечным автоматом понимается объект, имеющий некоторые внутренние состояния, на вход которого могут поступать внешние воздействия и выходной параметр которого может принимать одно из конечного числа значений [24-26]. Внутренние состояния автомата изменяются с изменением входных параметров, а выходные – с изменением внутренних состояний. Для нашего анализа важна способность автомата "самостоятельно" изменять свою структуру – преобразование "вход" – "внутреннее состояние", "вход, внутреннее состояние" – "выход" (естественно, автомат меняет эти законы не по своему усмотрению, а в соответствии с заложенным в него алгоритмом), функционируя в нестационарной среде. Эта способность позволяет говорить об адаптивности поведения, эффектах коллективного поведения (игры автоматов, иерархические обучаемые автоматы [48, 49]) и наличии некоторого рода научения (понимаемого в данном случае как накопление и переработка информации о внешней среде и выработка целесообразных законов поведения в данных конкретных условиях [85]).

<u>Модель 7.4.</u> (В.И. Варшавский, В.Ю. Крылов и др. [24, 49]).

О. Вероятностный автомат в момент времени t совершает i-е действие (выбирает i-е выходное состояние) с вероятностью $p_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, где k – конечное число выходных состояний. Цель автомата – максимизировать выигрыш, зависящий от его действий и состояния окружающей среды. "Переменность" его структуры означает возможность изменения вероятностей. Понятно, что если в данных условиях (при данном состоянии окружающей среды) было выбрано "правильное" действие, приведшее к положительному выигрышу, то вероятность выбора этого действия следует увеличить, а вероятности выбора остальных действий, соответственно, уменьшить, так как должно выполняться условие нормировки (ср. с "лабиринтной" моделью 4.2).

Г. Предположим, что вероятности выбора действий i и j изменяются по закону $D_{\pm}p_i(t)$, такому, что выполнено:

$$p_i(t + 1) = p_i(t) \pm D_{\pm}p_i(t),$$
$$p_j(t + 1) = p_j(t) \pm D_{\pm}p_j(t),\ j \neq i,$$

причем

$$D_{\pm}p_i(t) + \sum_{j \neq i} D_{\pm}p_j(t) = 0.$$

Ф(В, А). Если закон изменения $D_{\pm}p_i(t)$ линеен по $p_i(t)$, получаем экспоненциальную последовательность. В общем случае, конечно, чисто экспоненциальной кривой наблюдаться не будет, однако, в большинстве случаев при имитационном моделировании наблюдались примерно экспоненциальные замедленно-асимптотические кривые зависимости, например, среднего выигрыша от числа сыгранных партий [24, 25]. •

Другим обширным классом кибернетических систем, претендующих на моделирование явлений и процессов, происходящих в биологических системах, являются так называемые нейронные сети.

Алгоритмы научения нейронных сетей условно можно разделить на детерминированные алгоритмы и алгоритмы случайного поиска. Фактически обучение нейронной сети – не что иное как задача минимизации многоэкстремальной функции многих переменных [103]. Число известных на сегодняшний день различных методов обучения (алгоритмов минимизации) и разнообразных конструкции сетей (их архитектур) составляет, как минимум, несколько десятков. Мы рассмотрим некоторые общие подходы к обучению нейронных сетей, не вдаваясь в детали.

Модель 7.5.

О. Нейронная сеть представляет собой несколько слоев нейронов, имеющих логистические или какие-либо другие сигмообразные передаточные функции [103, 108]. Выходы нейронов каждого слоя подаются на входы нейронов других слоев с определенными весами. Вес "связи" (i, j) – число, на которое перед суммированием на входе j-го нейрона умножается выходной сигнал i-го нейрона. Обучение нейронной сети заключается в подборе (последовательном изменении) весов нейронов, соответствующих решаемой задаче (распознавание сигнала, минимизация функции и т.д.). Обучение происходит следующим образом: нейронной сети подаются на вход определенные сигналы, выходные сигналы сети сравниваются с нормативными значениями и на основании этого сравнения корректируются веса.

Г(Ф). Достаточно распространенными алгоритмами изменения весов являются алгоритм обратного хода (BP – backpropagation neural network) – сначала изменяются веса нейронов последнего (выходного) слоя, затем предпоследнего и т.д. [112], и так называемый случайный мультистарт (точнее, его модификации – выбирается начальная точка, следующая точка определяется путем добавления к начальной, например, гауссовского случайного вектора и "инерционной добавки", сравниваются значения функции ошибки в этих точках и т.д. [97]).

В(А). Справедливости ради, следует констатировать, что в общем случае, веса отдельных нейронов и их ошибки не всегда изменяются замедленно-асимптотическим образом. Однако общая ошибка, которая чаще всего вычисляется как средняя ошибка нейронов, в большинстве случаев изменяется примерно экспоненциально (в частности – при использовании метода градиентного спуска [97]). Понятно, что динамика ошибки зависит как от используемого метода научения, так и от специфики минимизируемой функции [97]. Например, в работе [107] для аппроксимации времени обучения BP-сети предлагается полиномиальная функция. Скорость сходимости к точке минимума функции ошибки (скорость научения нейронной сети) зависит от алгоритма изменения весов нейронов, который, в свою очередь, закладывается конструктором. •

Таким образом, при научении кибернетических систем экспоненциальный характер соответствующих КН обусловлен линейным законом изменения внутренних параметров системы и/или большим числом составляющих ее элементов.

8. Модели коллективного поведения

В настоящем разделе рассматриваются модели итеративного научения, основывающиеся либо на результатах экспериментальных наблюдений взаимодействия членов коллектива, либо на аналогиях с принципами, используемыми в формальных моделях коллективного поведения.

Модель 8.1. (У.Р. Эшби [94]).

Одной из первых моделей адаптационного взаимодействия элементов является гомеостат Эшби, служащий хорошей иллюстрацией возможностей использования ультрастабильных динамических систем при моделировании свойств нервной системы. Следует признать, что так как при изучении гомеостата основной акцент делается на адаптивность поведения, его "кривые научения" в ряде случаев не являются замедленно-асимптотическими. Эта модель настолько известна и детально исследована, что мы ограничимся ссылкой на первоисточник [94]. •

Модель 8.2. (М.А. Новиков [58]).

О. Модель гомеостата может быть использована для анализа групповой деятельности операторов. Фактически, отличие от предыдущей модели заключается в том, что компенсация воздействий (внешних по отношению к конкретному оператору) осуществляется не за счет физической обратной связи (устройства прибора), а за счет целенаправленной деятельности каждого оператора, учитывающего действия остальных.

Г(Ф,В,А). Матричное уравнение "Гомеостата" имеет вид [58]: $c = A\,U$, U – матрица положений ручек управления, c – матрица положений стрелок приборов, A – матрица, характеризующая структуру "гомеостата" и величины коэффициентов взаимной связи (показания каждого прибора являются линейной комбинацией положений ручек управления). В зависимости от способа соединения операторов (использовались кольцо, звезда, цепь и др.) и числа операторов определяется трудность решаемых задач.

А. При различных структурах трудность решаемой задачи существенно зависит от числа операторов. Предположение о линейности взаимосвязи существенно упрощает модель. При этом, опять же в силу адаптивности, динамика системы не всегда описывается замедленно-асимптотической кривой. •

Модель 8.3. (А. Раппопорт [71]).

О. Параметры самоорганизации в группе из трех испытуемых.

Г. Обозначим H_{max} – максимальное значение энтропии системы, $H(t) £ H_{max}$ – текущее значение энтропии, $h = H_{max} – H$ – количество накопленной информации. Предположим, что скорость накопления информации (приращение информации за одну итерацию или за одну ошибку) постоянна (см. раздел 6) и, что остаточная энтропия равномерно распределена между опознаваемыми объектами.

Ф(В). В соответствии с принятыми предположениями, если обозначить $x(t)$ – полное число ошибок за время t, то $\frac{dx}{dt}$ – вероятность ошибки в момент t, $\frac{dH}{dt} = g$, $H(t) = – M\, ln(1 – \frac{dx}{dt})$ (откуда берутся эти выражения, как справедливо заметил переводчик работы [71], не очень понятно). Если $x(0) = 0$, то $H = g\, x$. В результате получается следующее уравнение теоретической кривой суммарной ошибок:

$$x = H_{max} / g – M / g\, [exp(H_{max} / M – 1)\, exp\, (– g\, t / M) + 1].$$

А. Справедливость ряда предположений, принятых автором этой модели не очевидна, некоторые утверждения (особенно формальные) нуждаются в объяснении. Тем не менее [71] считается одной из классических работ по экспериментальному и формальному исследованию процессов самоорганизации в коллективах. Отметим, что полученное выражение определяет зависимость накопленной ошибки от времени. Кривая текущего значения рассогласования будет логистической. •

Достаточной общностью, с нашей точки зрения, обладают теоретико-игровые модели итеративного научения, точнее – модели, использующие результаты теории коллективного поведения.

Прежде чем рассматривать конкретные модели, проведем описание общих принципов. Пусть система состоит из n элементов, каждый из которых может в момент времени t находиться в состоянии $s_i(t)\ \hat{I}\ W = [s_i^-;\ s_i^+]$. Предположим, что состояние всей системы однозначно описывается вектором состояний элементов:

$$s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t)),\ s(t)\ \hat{I}\ W = \prod_{i=1}^{n}\Omega_i\ ,\ ''\ t\ ^3\ 0.$$

Величину $h(t) = \{s(t)\ \hat{I}\ W \mid t < t\}$, то есть информацию о стратегиях всех элементов, выбранных до момента t, назовем историей игры.

Рассмотрим как будут вести себя элементы. Предположим, что существуют некоторые функции $j(\times) = \{j_i(s)\}$, которые мы будем называть целевыми функциями элементов, отражающие интересы элементов (каждый элемент стремится максимизировать значение свей целевой функции). Отметим, что целевая функция каждого элемента в общем случае зависит не только от его собственного состояния (выбираемой им или назначаемой ему "управляющим устройством" стратегии), но и от состояний других элементов, то есть имеет место игра элементов (например, каждый элемент может стремиться минимизировать функцию-индикатор [52, 53]). Мы будем считать, что эта игра некооперативная, то есть каждый элемент выбирает стратегию самостоятельно, не имея возможности договориться с остальными элементами.

Последовательно изменяя свои стратегии, элементы стремятся достичь некоторой точки равновесия. В теории игр существует несколько концепций равновесия. Если мы считаем игру элементов некооперативной, то, целесообразно рассматривать равновесие Нэша (как такую совокупность стратегий, одиночное отклонение от которой невыгодно ни одному из элементов). Для нашего анализа первичным является не концепция равновесия, а принципы поведения элементов. Под принципом поведения i-го АЭ мы будем понимать правило, по которому он выбирает свою стратегию в момент времени t, зная свою целевую функцию и допустимое множество, зная (а иногда и не зная или зная только частично) целевые функции и допустимые множества остальных элементов и зная (а иногда и не зная или зная только частично) историю игры $h(t)$. То есть

(8.1) $s_i(t) = F_i(W,\ j,\ h(t),\ t),\ i = \overline{1,n},\ t > 0.$

Предвосхищая возможные возражения против наделения элементов обучаемой системы некоторыми "интересами", отметим, что, действительно, в активных системах (например, группа взаимодействующих операторов) функции $\{j_i, F_i\}$ отражают интересы элементов системы, а в пассивных системах $F_i(\cdot)$ – не что иное, как закон (иногда неизвестный исследователю) изменения состояний элементов, удовлетворяющий физическим, биологическим и другим ограничениям.

Понятно, что, приняв ту или иную гипотезу о поведении элементов и их взаимодействии, можно рассчитать траектории каждого из них. С ростом размерности системы целесообразность использования такого метода становится проблематичной и возникает желание описать поведение системы в целом (может быть несколько усредненно и не совсем точно), не вдаваясь в подробное описание каждого из элементов.

Интуитивно, такое агрегированное описание в ряде случаев будет оказываться с ростом размерности системы все более точным.

В частном случае (8.1) превращается в динамическую систему

(8.2) $\dot{s}_i = f_i(s(t)),\ i = \overline{1, n},\ t > 0,$

или, если время дискретно, систему разностных уравнений:

(8.3) $s_i(k + 1) = f_i(s(k)),\ i = \overline{1, n},\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

В последних двух случаях задача исследования динамики коллективного поведения сводится к изучению свойств динамической системы [65, 66]. В частности, необходимо определить – существует ли точка равновесия (иногда это эквивалентно исследованию существования положения равновесия динамической системы) и устойчиво ли оно, сходятся ли траектории системы к этому положению равновесия (каковы области притяжения различных равновесных точек), какова скорость сходимости и т.д. На сегодняшний день ответов на эти вопросы в общем случае не существует, и большинство исследований сконцентрировалось на изучении тех или иных частных моделей.

Модель 8.4.

О(Г). Состояния элементов системы удовлетворяют нормальной системе дифференциальных уравнений:

(8.4) $\dot{s}_i = f_i(s(t), t), i = \overline{1, n}, t > 0.$

Пусть функции $\{f_i\}$ непрерывны и липшицевы (удовлетворяют определенному ограничению на скорость роста) во всей допустимой области.

Ф(В). Для любой допустимой начальной точки решение системы (8.4) существует и единственно. Более того, если решение (8.4) асимптотически устойчиво, то положение равновесия достижимо за бесконечное время (групповое свойство).

Если $\{f_i\}$ – линейные функции и все собственные значения соответствующей матрицы имеют отрицательные действительные части, то существуют две экспоненциальные функции, ограничивающие траекторию системы (8.4) сверху и снизу. Введение дополнительного предположения о монотонности правой части системы (8.4) приводит к замедленно-асимптотическому виду траекторий ее решения.

А. Липшицевость правой части системы дифференциальных уравнений может интерпретироваться как ограниченность скорости возможных изменений состояний элементов (и, следовательно, рассогласования), приводящая к недостижимости положения равновесия (нулевой ошибки) за конечное время. Для того, чтобы исключить возможность появления точек перегиба, следует ввести достаточно сильное предположение о монотонности правой части. •

Одним из наиболее распространенных и хорошо изученных предположений о рациональном поведении элементов активной системы является гипотеза индикаторного поведения. В соответствии с этой гипотезой на каждой итерации каждый элемент делает шаг в направлении той стратегии, которая была бы оптимальной, если все остальные элементы выбрали бы те же стратегии, что и на предыдущем шаге. В этом случае определим положение цели i-го элемента:

$$w_i(s_{-i}) = \arg \max_{s_i \in \Omega_i} j_i(s_i, s_{-i}),$$

где $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ – обстановка для i-го элемента.

Тогда гипотезу индикаторного поведения можно записать в виде

$$s_i(k+1) = s_i(k) + \gamma_i^k\ (w_i(s_{-i}(k)) - s_i(k)),\ i = \overline{1,n},\ k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

где параметры $0 \le \gamma_i^k \le 1$ определяют "величины шагов". Детальное исследование систем, в которых элементы ведут себя в соответствии с гипотезой индикаторного поведения проведено в [61-63, 65].

С ростом числа элементов при "примерно одинаковом" их влиянии на систему в целом, оказывается, что поведение системы определяется некоторым "усредненным" элементом. При этом нет необходимости исследования всех элементов – значения показателей, характеризующих всю систему оказываются стабильными на достаточно широкой области значений параметров элементов [1, 60]. Возможность такого "усреднения" (без существенной потери точности описания) представляется достаточно привлекательной, так как число элементов в реальных итеративно научаемых системах, как правило, чрезвычайно велико (при этом не принципиально, что понимать под "элементом" – нейрон мозга, степень свободы руки и т.д.) [64]. Примером использования методов асимптотического агрегирования при исследовании коллективного поведения (в рамках гипотезы индикаторного поведения) является приводимая ниже модель (читатель, не знакомый с используемым аппаратом, может пропустить приводимые ниже формальные результаты, границы которых отмечены " ").

Модель 8.5.

О. Рассмотрим систему, состоящую из n взаимосвязанных элементов, функционирующих в дискретном времени. Состояние системы в момент времени k: $s^k = (s_1^k, s_2^k, \ldots, s_n^k) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ определяется состояниями элементов $s_i^k \in \Omega_i$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$\infty < s_i^- < s_i^+ < +\infty,\ i = \overline{1,n}.$$

Г. Предположим, что поведение системы удовлетворяет гипотезе индикаторного поведения – в каждый момент времени каждый из элементов изменяет свое состояние в направлении текущего положения цели, т.е. описывается итерационной процедурой типа

(8.5) $s_i^{k+1} = s_i^k + \gamma_i^k\ [w_i(s_{-i}^k) - s_i^k],\ k = 1, 2, \ldots ,\ i = \overline{1,n}.$

где $w_i(s_{-i}^k)$ – текущее положение цели i-го элемента, зависящее от состояний остальных элементов, а параметры $g^k = (g_1^k,\ g_2^k, \dots,\ g_n^k)$, выбираемые элементами, определяют величины шагов (скорость научения) и имеют произвольные распределения в единичном кубе.

Предположим, что точка равновесия системы $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $c_i \in [s_i^-;\ s_i^+]$, $i = \overline{1, n}$, существует, единственна и траектории (8.5) сходятся к этой точке (соответствующие условия приведены, например, в [52, 65]).

В качестве меры текущей "удаленности" системы от положения равновесия выберем рассогласование

(8.6) $\Delta_n^k = ||c - s^k|| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|c_i - s_i^k|$,

т.е. расстояние между точками s и c в пространстве $\Re^n$.

Ф. Воспользовавшись (8.5), получим:

(8.7) $\Delta_n^{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|(c_i - s_i^k)(1 - g_i^k) + g_i^k(c_i - w_i(s^k))|$

Очевидно: $\Delta_n^{k+1} \le \tilde{\Delta}_n^{k+1}$, где

(8.8) $\tilde{\Delta}_n^{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|c_i - s_i^k|(1 - g_i^k) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g_i^k|c_i - w_i(s^k)|$.

При достаточно больших n оценка рассогласования $\tilde{\Delta}_n^{k+1}$ должна слабо отличаться от "среднего значения"

(8.9) $\overline{\Delta}_n^{k+1} = (1 - \bar{g}_n^k)\ \Delta_n^k + \bar{g}_n^k\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|c_i - w_i(s^k)|$,

где $\bar{g}_n^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g_i^k$. Приведем корректную формулировку и обоснование этого утверждения. Определим, что понимается под близостью $\tilde{\Delta}_n^{k+1}$ и $\overline{\Delta}_n^{k+1}$. В соответствии с [60, 64], последовательность функций $\tilde{\Delta}_n^{k+1}(g^k)$ стабилизируется на единичных кубах $K_n = [0;1]^n$, если существует такая числовая последовательность $\overline{\Delta}_n^{k+1}$, что

(8.10) Pr $\{|\tilde{\Delta}_n^{k+1} - \overline{\Delta}_n^{k+1}|$ ³ $e\} \to 0$, n ® $+$¥

для любого наперед заданного $e > 0$.

Для того, чтобы судить о стабилизации, оценим разность значений функции $\tilde{\Delta}_n^{k+1}(\cdot)$ в следующих точках: g^k Î K_n и $d^k = (d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k)$ Î K_n:

$$|\tilde{\Delta}_n^k(g^k) - \tilde{\Delta}_n^k(d^k)| = |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |c_i - s_i^k|(d_i^k - g_i^k) +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(g_i^k - d_i^k)|c_i - w_i(s^k)||.$$

Обозначив $a = \max_i (s_i^+ - s_i^-)$, получим

$$|\tilde{\Delta}_n^k(g^k) - \tilde{\Delta}_n^k(d^k)| \text{ £ } \frac{2a}{n}\sum_{i=1}^{n}|g_i^k - d_i^k|,$$

т.е. $\Delta_n^k(\cdot)$ является липшицевой функцией с постоянной Липшица порядка $1/n$.

В силу теоремы 2 [64], для любых распределений g^k на K_n дисперсия $D\{\Delta_n^k\}$ ® 0, n ® $+$¥, следовательно, по неравенству Чебышева выполняется (8.10).

В. Стабилизация последовательности $\tilde{\Delta}_n^k$ позволяет сформулировать следующий вывод. С ростом числа элементов системы оценка (8.8) рассогласования (8.6) сходится по вероятности к (8.9), т.е. имеет место:

(8.11) $Pr\{\Delta_n^{k+1} > (1 - \bar{g}_n^k)\,\Delta_n^k + \bar{g}_n^k \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|c_i - w_i(s^k)|\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Некоторые частные случаи приведенного утверждения рассмотрены ниже:

- если система монотонно движется к положению равновесия (если s_i^k ³ c_i, то s_i^k ³ $w_i(s^k)$ ³ c_i и, соответственно, если s_i^k £ c_i, то

$s_i^k \leq w_i(s^k) \leq c_i$, $i = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, \ldots$), то (8.7) сходится по вероятности к (8.9);

- если элементы системы не взаимодействуют или существует $d > 0$: $|c_i - w_i(s^k)| \sim o(n^d)$, $i = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, \ldots$, то (8.7) сходится по вероятности к $(1 - \bar{g}_n^k)\ \Delta_n^k$.

А. Исследование модели позволяет сделать следующий качественный вывод: если

- элементы не взаимодействуют, или
- положения цели не меняются со временем (например, $w_i = c_i$), или
- среднее изменение положений цели относительно точек равновесия для каждого элемента на каждом шаге достаточно мало:

$$|c_i - w_i(s^k)| \ll |c_i - s_i^k| \ \forall\ i = \overline{1, n}, k = 1, 2, \ldots ,$$

то среднее рассогласование достаточно точно может быть аппроксимировано экспоненциальной кривой.

Существенным в настоящей модели является допущение о справедливости гипотезы индикаторного поведения и выбор рассогласования в виде (8.6). Более того, предположение о стационарности положений цели, фактически, сводит рассматриваемую модель к модели 4.1. •

В моделях коллективного поведения замедленно-асимптотический характер КН является следствием либо большого числа элементов системы, либо/и отсутствия или ограниченности их взаимодействия, либо/и постоянства положений цели.

9. Некоторые обобщения

Как уже неоднократно отмечалось выше, итеративное научение характеризуется постоянством внешних условий и целей научения, то есть имеет место стационарность внешних (по отношению к обучаемой системе) параметров (условий функционирования). Покажем, что для объяснения замедленно-асимптотического (экспоненциального) характера кривых итеративного научения достаточно ввести предположение о стационарности некоторых параметров самой обучаемой системы (внутренних условий функционирования). Более того, этого предположения достаточно для объяснения гораздо более широкого круга явлений и процессов, чем только ИН – начиная от ряда физических и химических закономерностей и заканчивая процессами самоорганизации и адаптации в сложных биологических и кибернетических системах.

Рассмотрим следующую модель, являющуюся обобщением практически всех рассматриваемых выше моделей в следующем смысле: мы не будем вводить предположений о характере, законах и т.д. взаимодействия элементов и структуре системы, считая, что существуют некоторые характеристики элементов (их рассогласования), определяющие рассогласование системы.

О. Рассмотрим систему, состоящую из n элементов. Рассогласование i-го элемента обозначим $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Без потери общности можно считать, что если система научается, то имеет место:

$$x_i(0) = 1,\ x_i(t) > 0\ "\ t > 0,\ \lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Любая кривая такого типа может быть представлена в виде

(9.1) $x_i(t) = e^{-x_i(t)}$, $i = \overline{1,n}$.

где $x_i(0) = 0$, $\xi_i(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} +¥$, $i = \overline{1,n}$. Назовем условно скоростью научения i-го элемента логарифмическую производную его рассогласования ("относительную скорость" – $\dot{x}_i / x_i$), то есть величину $g_i(t) = \dfrac{dx_i(t)}{dt}$ (в каждом конкретном случае нужно четко представлять себе – что является элементом моделируемой системы и каковы содержательные интерпретации скорости его научения).

Как правило, траектории реальных физических и биологических систем обладают достаточной гладкостью, поэтому в большинстве случаев соответствующая производная определена. Если $x_i(\cdot)$ – абсолютно непрерывные функции (с точностью до константы допускающие представление в виде интеграла от производной), то (9.1) примет вид

$$(9.2)\ x_i(t) = exp\ \{ -\int_0^t g_i(t)dt\ \},\ i = \overline{1,n}\,.$$

Г. Рассогласование системы в целом является некоторой функцией рассогласований элементов:

$$x(t) = F(x_1(t), x_2(t) \ldots, x_n(t)).$$

Естественно предположить, что функция $F(\cdot)$ неотрицательна, монотонна по каждой переменной и обращается в нуль тогда и только тогда, когда обращаются в нуль рассогласования всех элементов. Например, $F(\cdot)$ может быть нормой в пространстве $\hat{A}^n$. Известно, что в конечномерных пространствах (в рассматриваемой модели размерность пространства определяется числом элементов научаемой системы, а оно всегда конечно) все нормы эквивалентны, то есть для любых двух норм $F_1(\cdot)$ и $F_2(\cdot)$ найдутся такие константы a и b, что для любого $x\ \hat{I}\ \hat{A}^n$ будет выполнено:

$$(9.3)\ a\ F_2(x)\ £\ F(x)\ £\ b\ F\ (x).$$

Пусть рассогласование $F(\cdot)$ – среднее геометрическое рассогласований элементов:

$$(9.4)\ x(t) = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i(t)\right]^{1/n} = exp\ \{-\int_0^t \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i(t)dt\ \}.$$

Если выбрать в качестве рассогласования системы среднее арифметическое рассогласований элементов:

$$F(x_1(t), x_2(t) \ldots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} |\,x_i(t)\,|,$$

то при достаточно больших n среднее арифметическое "совпадает" (с точностью до мультипликативной константы) со средним геометрическим (корректное обоснование приведено в [60, 64]).

Таким образом, для того, чтобы (9.4) было в определенном в [60] смысле оценкой рассогласования системы (см. (9.3)), требуется, чтобы число элементов системы было велико.

Ф(В). Теперь воспользуемся гипотезой о стационарности характеристик элементов. Более точно, будем считать, что скорости научения элементов – независимые случайные величины, имеющие произвольные стационарные распределения.

Тогда подынтегральное выражение в (9.3) асимптотически постоянно [64], то есть при больших n выполнено:

(9.5) $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i(t) \approx Const, \ \forall t \geq 0.$$

Обозначая эту константу (скорость научения) через g, из (9.4) и (9.5) получаем:

(9.6) $x(t) \approx\sim e^{-g\,t}$.

А. Таким образом, в рамках рассмотренной модели экспоненциальный вид зависимости рассогласования системы от времени является следствием стационарности внешних и внутренних параметров (условий функционирования), а также большого числа элементов системы.

Наличие большого числа элементов системы является существенным – "кривые научения" отдельных элементов могут быть далеко не экспоненциальными. Грубо говоря, чем больше число элементов системы и чем "стационарней" их характеристики, тем более точно (9.6) аппроксимирует кривую научения системы.

Следует отметить, что предлагаемая модель далеко не совершенна. Например, внимательный читатель может спросить: а почему мы использовали именно представление (9.1) для "кривой научения" отдельного элемента? (если предположить стационарность производных $\dot{x}_i(t)$, то получится линейная функция, не удовлетворяющая условию асимптотичности), что такое функция $x_i(t)$ и почему именно распределение ее производных стационарно? Аналогичные возражения может вызвать обоснованность предположений о свойствах функции $F(\cdot)$, независимости характеристик элементов и т.д.

Оправданием может служить следующее рассуждение. Пусть некоторая система характеризуется экспоненциальной КН со скоростью научения g, значение которой, фактически, определяет отличие одной КН (научаемой системы) от другой. Строя модель ИН, исследователь при рассмотрении взаимодействия элементов системы вынужден вводить те или иные предположения. Как свидетельствует проведенный выше анализ, существует целое множество предположений, приводящих к требуемому выводу о экспоненциальной динамике поведения системы. Поэтому критерием сравнения моделей ИН (какая модель "лучше") должны служить именно вводимые предположения. С этой точки зрения предлагаемая модель "лучше" рассмотренных выше (является более общей, то есть включает большинство известных моделей как частные случаи). Процесс генерации моделей можно и нужно продолжать дальше. Тем не менее, при этом нужно четко представлять себе, что скорее всего отказаться полностью от предположений о стационарности и/или ограниченности тех или иных параметров системы и/или множественности составляющих ее элементов вряд ли удастся. •

Теперь покажем, что приведенная модель обобщает модели, рассмотренные в предыдущих разделах.

Большое число элементов обучаемой системы оказывается существенным в моделях: 4.2, 5.2, 5.3, 6.1, 6.7, 6.10, 7.2, 7.5, 8.5.

Стационарность характеристик элементов систем имеет место и играет ключевую роль:

- в моделях 4.1, 4.5, 5.1, 5.4, 6.5, 8.2, 8.3 постоянна логарифмическая производная рассогласования, то есть постоянен коэффициент пропорциональности между скоростью изменения рассогласования и ее текущим значением (понятно, что даже при $n = 1$ это предположение сразу приводит к экспоненциальному виду кривой рассогласования);
- в моделях 4.2, 7.3, 7.4 постоянны коэффициенты пропорциональности в выражениях для приращения вероятностей;
- в модели 5.2 вероятность "распада" не зависит от времени и числа "распавшихся атомов";
- в модели 5.3 постоянна относительная ошибка каждого из регуляторов;
- в модели 5.5 вариация организации системы постоянна (равна нулю);
- в моделях 6.2, 6.3, 6.6 постоянно количество информации, усваиваемое, получаемое или перерабатываемое обучаемой системой в единицу времени;

- в модели 6.7 равны вероятности показа различных изображений;

- в модели 6.9 пропорция между переданной и полученной информацией не зависит от времени и количества накопленной информации;

- модель 6.10 (как и 5.2) очень близка к модели, рассмотренной в настоящем разделе;

- в модели 7.1 постоянна пропорция отрезков разбиения;

- в модели 7.2 рассогласования элементов системы распределены равномерно в каждый момент времени;

- в модели 8.4 ограниченность скорости изменения (липшицевость) правых частей нормальной системы дифференциальных уравнений оказывается достаточной для асимптотичности траектории системы;

- в модели 8.5 невзаимодействие элементов или постоянство положения цели приводят к экспоненциальному виду кривой рассогласования.

В то же время, следует отметить, что при итеративном научении в случае нестационарных внутренних характеристик системы могут наблюдаться и многократно наблюдались в экспериментах неэкспоненциальные (логистические, с промежуточным плато и др. – см. второй раздел) кривые научения.

Таким образом, в приведенных выше моделях для получения вывода об экспоненциальности кривой научения делаются либо предположения о множественности и однородности элементов системы (см. также замечание о необходимости усреднения индивидуальных КН во втором разделе) и о стационарности некоторых характеристик элементов (множественность при "слабой" стационарности дает возможность произвести "усреднение" и получить "сильную" стационарность "в среднем"; интуитивно – "небольшая нестационарность" приводит к "примерной экспоненциальности"), либо более сильное предположение о стационарности.

Значит можно сделать следующий вывод: если число элементов научаемой системы достаточно велико, а ее характеристики и условия функционирования (внутренние и внешние) стационарны, то соответствующая кривая научения будет экспоненциальной. Более того, приведенная в настоящем разделе модель оказывается адекватной не только итеративному научению, но и процессам самоорганизации и адаптации в больших системах, удовлетворяющих предположениям стационарности.

Заключение

Таким образом, анализ математических моделей итеративного научения, проведенный в настоящей работе, позволяет сделать следующие выводы.

Моделирование итеративно научаемых систем является эффективным методом их исследования, предсказания специфики поведения реальных систем в различных условиях, а также совершенствования организации учебного процесса.

Результаты исследования математических моделей итеративного научения позволили выдвинуть следующий **закон итеративного научения**:

ЕСЛИ ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТОВ НАУЧАЕМОЙ СИСТЕМЫ ДОСТАТОЧНО ВЕЛИКО И/ИЛИ ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ УСЛОВИЯ ЕЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫ, ТО КРИВАЯ НАУЧЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЕГО РЕЗУЛЬТАТИВНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ, БУДЕТ ПРИМЕРНО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ.

Одновременно можно сформулировать двойственное утверждение (выдвинуть объясняющую **гипотезу**):

ЕСЛИ КРИВАЯ НАУЧЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЕГО РЕЗУЛЬТАТИВНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ, ЯВЛЯЕТСЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ, ТО СКОРЕЕ ВСЕГО ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ УСЛОВИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ НАУЧАЕМОЙ СИСТЕМЫ СТАЦИОНАРНЫ И/ИЛИ ЧИСЛО ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ ДОСТАТОЧНО ВЕЛИКО.

Сформулированные утверждения вполне согласованы с соответствующими экспериментальными закономерностями, физическими законами и результатами наблюдений.

В качестве перспективных направлений будущих исследований механизмов и закономерностей итеративного научения следует выделить: необходимость дальнейшего анализа различного рода моделей ИН и, в первую очередь, моделей, использующих обратный метод построения; исследование соответствия между гипотезами, лежащими в основе существующих и вновь создаваемых прямых моделей ИН и экспериментальными исследованиями ИН в живых системах; а также широкое применение результатов моделирования для выработки рекомендаций по выбору оптимальных форм и методов обучения.

Необходимо отметить, что многие из рассмотренных выше моделей описывают и отражают гораздо более широкий круг явлений и процессов, нежели только итеративное научение. Можно выдвинуть гипотезу, что замедленно-асимптотический характер изменения агрегированных параметров больших и сложных систем является общей закономерностью, проявляющейся при стационарных внешних и внутренних условиях не только при итеративном научении, но и в процессах адаптации, самоорганизации и др.

Литература

1 Адилов Г.Р., Опойцев В.И. Об асимптотическом агрегировании // Автоматика и Телемеханика. 1989. N 1. С. 131 – 140.

2 Акофф Р., Эмери Ф. О целеустремленных системах. М.: Сов. радио, 1974. – 272 с.

3 Александров Е.А. Основы теории эвристических решений. М.: Сов. радио, 1975. – 256 с.

4 Алексеев М.А., Залкинд М.С., Кушнарев В.М. Решение человеком задачи выбора при вероятностном подкреплении двигательных реакций / Биологические аспекты кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 198 – 209.

5 Амосов Н.М. Моделирование сложных систем. Киев: Наукова думка, 1968. – 81 с.

6 Анохин П.К. Опережающее отражение действительности // Вопросы философии. 1962. N 7. С. 97 – 112.

7 Анохин П.К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем // Принципы системной организации функций. М.: Наука, 1973. С. 5 – 61.

8 Анохин П.К. Теория функциональной системы, как предпосылка к построению физиологической кибернетики / Биологические аспекты кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 74 – 91.

9 Антомонов Ю.Г. Моделирование биологических систем. Справочник. Киев: Наукова думка, 1977. – 259 с.

10 Антомонов Ю.Г. Организация и оптимальность / Моделирование в биологии и медицине. Киев: Наукова думка, 1968. С. 163 – 182.

11 Антомонов Ю.Г. Принципы нейродинамики. Киев: Наукова думка, 1974. – 199 с.

12 Аптер М. Кибернетика и развитие. М.: Мир, 1970. – 215 с.

13 Аткинсон Р., Бауэр Г., Кротерс Э. Введение в математическую теорию обучения. М.: Мир, 1969. – 468 с.

14 Аткинсон Р. Человеческая память и процесс обучения. М.: Прогресс, 1980. – 528 с.

15 Аттли О.М. Машины условной вероятности и условные рефлексы / Сб. "Автоматы". М.: ИЛ, 1956. С. 326 – 351.

16 Бернштейн Н.А. Очерки по физиологии движений и физиологии активности. М.: Медицина, 1966. – 347 с.

17 Бернштейн Н.А. Пути и задачи физиологии активности // Вопросы философии. 1961. N 6. С. 77 – 92.
18 Бернштейн Н.А. Пути развития физиологии и связанные с ними задачи кибернетики / Биологические аспекты кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 52 – 65.
19 Бир Ст. Кибернетика и управление производством. М.: Наука, 1965. – 391 с.
20 Братко А.А., Кочергин А.Н. Информация и психика. Новосибирск: Наука, 1977. – 198 с.
21 Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 392 с.
22 Бриллюэн Л. Научная неопределенность и информация. М.: Мир, 1966. – 271 с.
23 Буш Р., Мостеллер Ф. Стохастические модели обучаемости. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 483 с.
24 Варшавский В.И. Коллективное поведение автоматов. М.: Наука, 1973. – 408 с.
25 Варшавский В.И., Воронцова И.П. О поведении стохастических автоматов с переменной структурой // Автоматика и Телемеханика. 1963. том 24. N 3. С. 353 – 369.
26 Варшавский В.И., Воронцова И.П., Цетлин М.Л. Обучение стохастических автоматов / В сб. Биологические аспекты кибернетики, Изд-во АН СССР, 1962. С. 192 – 197.
27 Венда В.Ф. Системы гибридного интеллекта: эволюция, психология, информатика. М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
28 Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. М.: Наука, 1983. – 338 с.
29 Винер Н. Кибернетика и общество. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 200 с.
30 Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978. – 248 с.
31 Вудвортс Р. Экспериментальная психология. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. – 800 с.
32 Гельфанд И.М., Цетлин М.Л. Принцип нелокального поиска в задачах автоматической оптимизации // ДАН СССР. 1961. Том 137. N 2. С. 295 – 298.
33 Глушков В.М. Введение в кибернетику. Киев: Изд-во Академии наук УССР, 1964. – 323 с.

34 Горбань А.Н. Обучение нейронных сетей. М.: Параграф, 1990. – 157 с.
35 Дейч С. Модели нервной системы. М.: Мир, 1970. – 325 с.
36 Джордж Ф. Мозг как вычислительная машина. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 528 с.
37 Дружинин В.В., Контров Д.С. Проблемы системологии (проблемы теории сложных систем). М.: Сов. радио, 1976. – 295 с.
38 Емельянов – Ярославский Л.Б. Интеллектуальная квази-биологическая система. М.: Наука, 1990. – 112 с.
39 Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991. – 248 с.
40 Жуков Н.И. Информация. Минск: Наука и техника, 1971. – 276 с.
41 Зингерман А.М., Меницкий Д.Н., Усов В.В. Информация и функциональные системы / Принципы системной организации функций. М.: Наука, 1973. С. 86 – 91.
42 Ительсон Л.Б. Математические и кибернетические методы в педагогике. М.: Просвещение, 1964. – 248 с.
43 Кадыров Х.К., Антомонов Ю.Г. Синтез математических моделей биологических и медицинских систем. Киев: Наукова думка, 1974. – 222 с.
44 Касти Дж. Большие системы: связность, сложность, катастрофы. М.: Мир, 1982. – 216 с.
45 Клаус Г. Кибернетика и общество. М.: Прогресс, 1967. – 431 с.
46 Коган А.Б., Наумов Н.П., Режабек В.Г., Чораян О.Г. Биологическая кибернетика. М.: Высшая школа, 1972. – 384 с.
47 Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. М.: Прогресс, 1979. – 504 с.
48 Крылов В.Ю., Морозов Ю.И. Кибернетические модели и психология. М.: Наука, 1984. – 174 с.
49 Крылов В.Ю., Цетлин М.Л. Об играх автоматов // Автоматика и Телемеханика. 1963. том 24. N 7. С. 910 – 921.
50 Линдсей П., Норман Д. Переработка информации у человека (введение в психологию). М.: Мир, 1974. – 550 с.
51 Ляпунов А.А. Об управляющих системах живой природы и общем понимании жизненных процессов. М.: Энергия, 1962.

52 Малишевский А.В. Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов // Автоматика и Телемеханика. 1972. ч. I – N 11. С. 92 – 110, ч. II. – N 12. С. 108 – 128.
53 Малишевский А.В., Тенисберг Ю.Д. Один класс игр, связанный с моделями коллективного поведения // Автоматика и Телемеханика. 1969. N 11. С. 128 – 137.
54 Меницкий Д.Н. Информация и проблемы высшей нервной деятельности. Л.: Медиздат, 1974. – 230 с.
55 Миллер Д., Галантер Е., Прибрам К. Планы и структура поведения. М.: Прогресс, 1964. – 236 с.
56 Новиков А.М. Анализ количественных закономерностей процесса упражнения. Методические рекомендации. М.: Высшая школа, 1976. – 22 с.
57 Новиков А.М. Процесс и методы формирования трудовых умений: профпедагогика. М.: Высшая школа, 1986. – 288 с.
58 Новиков М.А. Коммуникационные структуры и эффективность групповой деятельности операторов // Вопросы психологии. 1970. N 4. С. 132 – 135.
59 Нурминский И.И., Гладышева Н.К. Статистические закономерности формирования знаний и умений учащихся. М.: Педагогика, 1991. – 224 с.
60 Опойцев В.И. Задачи и проблемы асимптотического агрегирования // Автоматика и Телемеханика. 1991. N 8. С. 133 – 144.
61 Опойцев В.И. Динамика коллективного поведения. ч.I – Гомогенные системы // Автоматика и Телемеханика. 1974. N 4. С. 157 – 168.
62 Опойцев В.И. Динамика коллективного поведения. ч.II – Системы с ограниченным межэлементным взаимодействием // Автоматика и Телемеханика. 1974. N 6. С. 133 – 144.
63 Опойцев В.И. Динамика коллективного поведения. ч.III // Автоматика и Телемеханика. 1975. N 1. – С. 124 – 138.
64 Опойцев В.И. Нелинейный закон больших чисел // Автоматика и Телемеханика. 1994. N 4. С. 65 – 75.
65 Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977. – 245 с.
66 Опойцев В.И. Устойчивость систем большой размерности // Автоматика и Телемеханика. 1986. N 6. С. 43 – 49.

67 Полтырева Т.Е. Условнорефлекторное поведение собаки в вероятностной среде / Некоторые проблемы биологической кибернетики. Л.: Наука, 1972. С. 83 – 89.
68 Поспелов Д.А. Вероятностные автоматы. М.: Энергия, 1970. –87 с.
69 Присняков В.Ф., Приснякова Л.М. Математическое моделирование переработки информации оператором человеко-машинных систем. М: Машиностроение, 1990. – 248 с.
70 Присняков В.Ф., Приснякова Л.М. Модель процесса удержания информации в памяти человека // Психологический журнал. 1984. том 5. N 4. С. 29 – 36.
71 Раппопорт А. Экспериментальное исследование параметров самоорганизации в группах из трех испытуемых / Принципы самоорганизации. М.: Мир, 1966. С. 21 – 47.
72 Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. Перцептроны и теория механизмов мозга. М.: Мир, 1965. – 480 с.
73 Романов Н.А. О возможностях контакта между теорией вероятностей и учением академика И.П. Павлова об условных рефлексах // ДАН СССР. Математика. 1935. том 1. N 4. С. 193 – 199.
74 Рублев Ю.В., Востров Г.Н. Математические основы логической структуры курса // Вестник высшей школы. 1970. N 9. С. 27 – 31.
75 Экспериментальная психология. Под ред С.С. Стивенса, М.: ИЛ, т. I, 1960. т. II, 1963. (в т.ч. – Спенс К.У. Теоретический анализ процесса научения. С. 224 – 273.).
76 Трапезников В.А. Автоматическое управление и экономика // Автоматика и Телемеханика. 1966. N 1. С. 5 – 22.
77 Трапезников В.А. Человек в системе управления // Автоматика и Телемеханика. 1972. N 2. С. 4 – 18.
78 Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. М.: Наука, 1981. – 258 с.
79 Умрюхин Е.А. Обучение в живых системах / Принципы системной организации функций. М.: Наука, 1973. С. 202 – 206.
80 Уолтер Г. Живой мозг. М.: Мир, 1970. – 300 с.
81 Урсул А.Д. Природа информации. М.: Политиздат, 1968. – 288 с.
82 Ферстер Г. О самоорганизующихся системах и их окружении / Самоорганизующиеся системы. М.: Мир, 1964. С. 113 – 139.

83 Ховленд К. Научение и сохранение заученного у человека / Экспериментальная психология. Под ред. С.С. Стивенса, М.: ИЛ, том II, 1963. С. 124 – 223.
84 Цетлин М.Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969. – 316 с.
85 Цетлин М.Л. О поведении конечных автоматов в случайных средах // Автоматика и Телемеханика. 1961. том 22. N 10. С. 1345 – 1354.
86 Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. – 399 с.
87 Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем. М.: Наука, 1970. – 252 с.
88 Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 829 с.
89 Шибанов Г.П. Количественная оценка деятельности человека в системах человек-техника. М.: Машиностроение, 1983. – 263 с.
90 Шленский О.Ф., Бодэ Б.В. К математическому выражению накопления информации и ее забывания // Вопросы психологии. 1967. N 4. С. 180 – 182.
91 Штейнбух К. Автомат и человек. М.: Сов. радио, 1967. – 494 с.
92 Эстес В.К. Статистические модели способности человека-наблюдателя вспоминать и опознавать возбуждающие образы / Самоорганизующиеся системы. М.: Мир, 1964. С. 50 – 64.
93 Эшби У.Р. Введение в кибернетику. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 432 с.
94 Эшби У.Р. Конструкция мозга. Происхождение адаптивного поведения. М.: Мир, 1964. – 411 с.
95 Яглом А.М., Яглом И.М. Вероятность и информация. М.: Наука, 1973. – 511 с.
96 Baba N. A new approach for finding the global minimum of error function of neural networks // Neural Networks. 1989. V.2. P. 367–373.
97 Baldi P., Hornic K. Neural network and principal component analysis: learning from examples without local minima // Neural Networks. 1989. V. 2. P. 53 – 58.
98 Bryan W.L., Harter N. Studies on the telegrafic language. The acquisition of a hierarchy of habits // Psychol. Rev. 1899. V. 6. P. 345 – 375.

99 Estes W.K. The statistical approach to learning theory / Psychology: a study of science. Ed. by Koch S. New York: McGraw Hill Book Company Inc., 1951. P. 380 – 491.
100 Grant D. Information theory and the discrimination of sequences in stimulus events / Current trends in information theory. Pittsburgh: Univ. of Pittsburgh Press, 1953. P. 18 – 46.
101 Gulliksen H. A rational equation of the learning curve based on the Thornike's law of effect // J. Gen. Psychol., 1934. V. 11. P. 395 – 434.
102 Guthrie E.R. The psychology of learning. New York and London: Harper and Broth. Pub., 1935. – 258 p.
103 Hecht-Hidsen R. Neurocomputing. Addiron-Wesley Publishing Company Inc., 1989. – 222 p.
104 Hull C.L. Behavior postulates and corollaries // Psychol. Rev. 1950. V. 57. P. 173 – 180.
105 Hull C.L. Principles of behavior and introduction to behavior theory. New York: D. Appleton century company, 1943. – 422 p.
106 Jones M.R. From probability learning to sequential processing: a critical review // Psychological Bulletin, 1971. V. 76. N 3. P. 153 – 185.
107 Klaus K. Time to fired up // Neural Networks. 1989. August. P. 217 – 224.
108 Linsker R. Self-organization in a perceptual network // Computer. 1988. March. P. 105 – 117.
109 Meehl P.E., MacCorquodale K. Some methodological comments concerning expectancy theory // Psychol. Rev. 1951. V. 58. P. 230 – 233.
110 Miller G. The magical number seven plus or minus two: some limits on capacity for processing information // Psychol. Rev. 1956. V. 63. P. 81 – 92.
111 Peterson G. Experiments in ball tossing: the significance of learning curves // J. Exp. Psychol. 1917. V. 2. P. 178 – 224.
112 Russ R. Implementing a neural network in C / MicroCorncopia. 1990. N 51. P. 16 – 25.
113 Stenberg S. Stochastic learning theory / Handbook on mathematical psychology, V. II, New York: J. Wiley and Sons Inc., 1963. P. 1 – 120.
114 Thurstone L.L. The learning curve equation // Psychol. Monogr. 1919. V. 26. N 3.
115 Tolman E.C. Theories of learning / Comparative Psychology. Ed. Moss F.A. New York: Prentice Hall, 1934.