Российская Академия Наук
Институт проблем управления
им. В.А.Трапезникова РАН

Д.А.НОВИКОВ, С.Н.ПЕТРАКОВ

КУРС ТЕОРИИ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

СИНТЕГ
Москва – 1999

УДК 007
ББК 32.81
Н73

Н73 **Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем**. М.: СИНТЕГ, 1999. – 104 с.

ISBN

Теория активных систем - раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий свойства механизмов их функционирования, обусловленные проявлениями активности участников системы.

Настоящая работа является введением в теорию активных систем и отражает содержание годового курса лекций, читаемого авторами и их коллегами в течение многих лет студентам Московского физико-технического института и других ВУЗов.

Теоретический акцент данного курса обусловлен стремлением дать читателю общие представления о методах исследования, используемых при изучении математических моделей социально-экономических систем.

Рецензент: д.т.н., проф. В.Н.Бурков

Ответственный редактор: д.т.н. А.В.Щепкин

УДК 007
ББК 32.81
Н73

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

Основные обозначения и сокращения 5

Введение 9

Глава 1. Проблемы управления активными системами...........................10
1.1. Модель активной системы..10
1.2. Предпочтения участников активной системы 13
1.3. Модели поведения: элементы теории игр 20
1.4. Общая постановка задачи управления активными системами 22
1.5. Классификация задач управления активными системами..25

Глава 2. Механизмы стимулирования в детерминированных активных системах 28
2.1. Постановка задачи стимулирования в активных системах 28
2.2. Задача синтеза оптимального механизма стимулирования в базовой модели активной системы 33
2.3. Согласованные системы стимулирования...........................44
2.4. Задачи стимулирования, сформулированные в терминах сравнительных предпочтений 48

Глава 3. Механизмы стимулирования в активных системах с вероятностной неопределенностью 51
3.1. Элементы теории контрактов...51
3.2. Задача синтеза оптимального механизма стимулирования в активной системе с внешней вероятностной неопределенностью 54
3.3. Модель простого активного элемента 60

Глава 4. Механизмы стимулирования в активных системах с нечеткой неопределенностью 63
4.1. Нечеткие множества и отношения.......................................63
4.2. Модели принятия решений при нечеткой исходной информации 69
4.3. Задача синтеза оптимального механизма стимулирования в активной системе с внешней нечеткой неопределенностью 74

Глава 5. Механизмы функционирования активных систем с сообщением информации 80
5.1. Постановка задачи планирования в активных системах 80
5.2. Механизмы открытого управления..84
5.3. Механизмы распределения ресурса..86
5.4. Механизмы активной экспертизы..91
5.5. Механизмы внутренних цен..93
5.6. Элементы теории реализуемости..97
Литература..103

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

АС – активная система;
АЭ – активный элемент;
B-типа – степенная система стимулирования;
C – типа – скачкообразная система стимулирования;
ГБ – гипотеза благожелательности;
ГНП – гипотеза независимого поведения;
ГСВ – гипотеза слабого влияния;
K – типа – компенсаторная система стимулирования;
L – типа – линейная (пропорциональная) система стимулирования;
МГР – максимальный гарантированный результат;
НОП - нечеткое отношение предпочтения;
ОУ – принцип открытого управления;
ППР – правило принятия решений;
QC – типа – квазискачкообразная система стимулирования;
QK – типа – квазикомпенсаторная система стимулирования;
РДС – равновесие в доминантных стратегиях;
ТАС – теория активных систем;
ТК – теория контрактов;
ТР – теория реализуемости;

A_i - множество допустимых действий i -го АЭ[1];

A_{0_i} - множество допустимых результатов деятельности i -го АЭ;

$A^{НД}(\tilde{R})$ - множество максимально недоминируемых действий;

$A_a^{НД}(\tilde{R})$ - множество a - недоминируемых действий;

$\tilde{c}(\cdot,\cdot): A_0 \times \Omega \to R^1$ - функция затрат АЭ, зависящая от результата его деятельности;

$c(\cdot,\cdot): A \times \Omega \to R^1$ - функция затрат АЭ, зависящая от его действия;

C - ограничение механизма стимулирования;

$f_i(\cdot): A_i \to R^1$ - целевая функция i -го АЭ;

[1] *В одноэлементной активной системе индекс, обозначающий номер активного элемента, будет опускаться.*

$F(z, y)$ - интегральная функция распределения результата деятельности АЭ $z \in A_0$ при его действии $y \in A$;

$\hat{F}(z, y)$ - интегральная функция распределения, зависящая от разности $(z - y)$;

$\tilde{\Phi}(\cdot, \cdot) : A_0 \times U \to R^1$ - функция полезности центра;

$j_i : X_i \times \Omega_i \to R^1$ - функция предпочтения i-го АЭ;

$G : U \to A$ - модель управляемой системы;

$h(\cdot, \cdot) : A \times \Omega \to R^1$ - функция дохода АЭ, зависящая от его действия;

$\tilde{h}(\cdot, \cdot) : A_0 \times \Omega \to R^1$ - функция дохода АЭ, зависящая от результата его деятельности;

$\tilde{H}(\cdot) : A_0 \to R^1$ - функция дохода центра, зависящая от результатов деятельности АЭ;

$H(\cdot) : A \to R^1$ - функция дохода центра, зависящая от действий АЭ;

$I = \{1, \ldots, n\}$ - множество АЭ;

$K(\cdot) : U \to R^1$ - эффективность управления;

M - множество допустимых функций стимулирования (штрафов);

$m_{\tilde{A}}(x)$ - нечеткое множество (функция принадлежности);

$m_{\tilde{R}}(x, y)$ - нечеткое отношение;

$m_{\tilde{P}}(x, y)$ - нечеткое отношение строгого предпочтения;

$m_{\tilde{R}}^{НД}(x)$ - множество недоминируемых действий;

n - число АЭ в АС;

$h \in U$ - управляющее воздействие;

Ω_i - множество возможных типов i-го АЭ;

$p(z, y)$ - соответствующая $F(z, y)$ плотность распределения вероятности;

$\hat{p}(z, y)$ - соответствующая $\hat{F}(z, y)$ плотность распределения вероятности;

P - максимальное множество реализуемых действий;

$P_{\aleph}$ - множество действий, реализуемых системами стимулирования из класса $À \; Í \; M$;

$\tilde{P}(z, y)$ - нечеткая информационная функция;

$P^w(R, A)$ - правило индивидуального рационального выбора АЭ;

$p : S \to X$ - механизм (процедура) планирования;

$\Psi(\cdot, \cdot) : A \times U \to R^1$ - целевая функция центра;

$Q(\aleph)$ - множество согласованных планов;

$r_i \in \Omega_i$ - тип i -го АЭ, отражающий его индивидуальные особенности;

$r = (r_1, ..., r_n) \in \Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$ - вектор типов всех АЭ;

R_0 - количество ресурса;

R - предпочтения АЭ;

$\Re$ - множество возможных предпочтений АЭ;

$R = (R_1, ..., R_n)$ - профиль предпочтений АЭ;

$s_i \in S_i$ - сообщение i -го АЭ;

$s = (s_1, ..., s_n) \in S = \prod_{i \in I} S_i$ - вектор сообщений АЭ;

$s(\cdot,\cdot) : A \times X \to R^1$ - функция стимулирования, зависящая от планов и действий АЭ;

$\tilde{s}(\cdot,\cdot) : A_0 \times X \to R^1$ - функция стимулирования, зависящая от планов и результатов деятельности АЭ;

$q \in \tilde{\Omega}$ - состояние природы;

$u_i(\cdot) : A_{0_i} \to R^1$ - функция полезности i -го АЭ;

U - множество допустимых управляющих воздействий;

$x_i \in X_i$ - план i -го АЭ;

X_i - множество допустимых планов i -го АЭ;

$x = (x_1, ..., x_n) \in X = \prod_{i \in I} X_i$ - вектор планов АЭ;

$x_0 = \min\{y_3, y_4\}$;

$c(\cdot,\cdot) : A \times X \to R^1$ - функция штрафов, зависящая от планов и действий АЭ;

$\tilde{c}(\cdot,\cdot) : A_0 \times X \to R^1$ - функция штрафов, зависящая от планов и результатов деятельности АЭ;

$y_i \in A_i$ - действие i -го АЭ;

$y = (y_1, ..., y_n) \in A = \prod_{i \in I} A_i$ - вектор действий всех АЭ;

$y_{-i} = (y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n) \in A_{-i} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$ - обстановка для i-го АЭ;

$y^{\Gamma} \in A$ - максиминное равновесие;

$y^d \in A$ - равновесие в доминантных стратегиях;

$y^N \in A$ - равновесие Нэша;

$y^P \in A$ - Парето-оптимальная стратегия;

$y_1 = \arg\max_{y \in A} H(y)$;

$y_2 = \arg\max_{y \in A} h(y)$, $h_{\max} = h(y_2)$;

$y_3 = \max\{y \in A \mid h(y) \geq h_{\max} - C\}$;

$$y_4 = \max\left\{ y \in A \,\middle|\, \left| \frac{\partial h(y)}{\partial y} \right| \leq C\hat{p}(0) \right\};$$

$$y_5(x) = \min\left\{ y \in \operatorname*{Argmax}_{y \in [y_2, x]} f(x, y) \right\};$$

$$y^*(x) = \max\left\{ y \in A \,\middle|\, \operatorname*{Argmax}_{y \geq x} f(x, y) \right\};$$

$$\hat{y}(x) = \max\left\{ y \in A \,\middle|\, \frac{h(y_5) + h(y^*)}{2} \leq h(y) \right\};$$

y^+ - правая граница множества реализуемых действий;

y^- - левая граница множества реализуемых действий;

$z_i \in A_i^0$ - результат деятельности i-го АЭ;

$z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in A^0 = \prod_{i \in I} A_i^0$ - вектор результатов деятельности АЭ;

z^+ - минимальный реализуемый результат деятельности;

z^- - максимальный реализуемый результат деятельности.

ВВЕДЕНИЕ

Теория активных систем (ТАС) - раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий свойства механизмов их функционирования, обусловленные проявлениями активности участников системы. Основным методом исследования в ТАС является математическое (теоретико-игровое) и имитационное моделирование. За тридцать лет ее развития в ТАС были разработаны, исследованы и внедрены множество эффективных организационных механизмов, соответствующие модели и методы находят применение при решении широкого круга задач управления в экономике и обществе - от управления технологическими процессами до принятия решений на уровне регионов и стран.

По основным своим подходам и используемым методам исследований теория активных систем чрезвычайно тесно связана с такими разделами теории управления социально-экономическими системами как: теория иерархических игр (или информационная теория иерархических систем) [10,14], теория контрактов (theory of contracts (ТК)) – см. обзоры [5,15], теория реализуемости (implementation theory (ТР) как раздел mechanism design) – см. обзор [6] и др.

Настоящая работа является введением в теорию активных систем и отражает содержание годового курса лекций, читаемого авторами и их коллегами в течение многих лет студентам Московского физико-технического института и других ВУЗов.

Теоретический акцент данного курса обусловлен необходимостью дать читателю общие представления о моделях, механизмах и методах исследования, используемых в теории управления социально-экономическими системами, на основании которых в других учебных курсах излагаются результаты изучения прикладных моделей.

Приступающим к изучению теории управления социально-экономическими системами, помимо данного курса лекций, следует также порекомендовать учебные пособия [11,13], содержащие значительное число примеров и упражнений. Общее представление о проблематике ТАС можно получить из обзора [22], содержащего подробную библиографию. Полное и подробное изложение теоретических результатов приведено в монографиях [2-4,7-9,17-20,23], прикладные модели описаны в [4,12].

Глава 1. ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ АКТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ

1.1. Модель активной системы

Рассмотрим общую формулировку задачи управления некоторой (пассивной или активной) системой. Пусть *состояние системы*[1] описывается переменной $y \in A$, принадлежащей допустимому множеству A. Состояние системы в рассматриваемый момент времени зависит от *управляющих воздействий* $h \in U$: $y = G(h)$. Предположим, что на множестве $U \times A$ задан функционал $\Phi(h, y)$, определяющий *эффективность функционирования системы* (с точки зрения управляющего органа). Величина $K(h) = \Phi(h, G(h))$ называется *эффективностью управления* $h \in U$. Задача *управляющего органа* заключается в выборе такого допустимого управления, которое максимизировало бы значение его эффективности при условии, что известна реакция $G(h)$ системы на управляющие воздействия:

$$K(h) \rightarrow \max_{h \in U} .$$

Рассмотрим различия в управлении пассивными и активными системами. Для *пассивной* (например, технической) *системы* зависимость $y = G(h)$ является, фактически, моделью системы - управляемого объекта, отражающей законы ее функционирования. Например, для динамической системы эта зависимость может являться решением системы дифференциальных уравнений, для некоторого черного ящика - быть результатом экспериментов и т.д. Общим для всех пассивных систем является их "детерминизм" с точки зрения управления в смысле отсутствия у управляемого объекта свободы выбора своего состояния, собственных целей, средств их достижения и возможности прогнозировать поведение управляющего органа.

Иначе обстоит дело в *активных системах* (АС), то есть системах, в которых управляемые субъекты (точнее говоря, хотя бы один субъект) обладают свойством активности, в том числе - свободой выбора своего состояния. Помимо возможности выбора состояния, элементы АС обладают собственными интересами и предпочтениями, то есть

[1] *Понятия, вводимые впервые, выделены в тексте курсивом.*

осуществляют выбор состояния целенаправленно (в противном случае их поведение можно было бы рассматривать как пассивное). Соответственно конкретизируется и модель системы $G(\cdot)$, которая должна учитывать проявления активности управляемых субъектов. Проявления эти описываются следующим образом - считается, что управляемые субъекты стремятся к выбору таких своих состояний (стратегий), которые являются наилучшими с точки зрения их предпочтений при заданных или прогнозируемых значениях управляющих воздействиях, а управляющие воздействия, в свою очередь, зависят от состояний управляемых субъектов. Если управляющий орган имеет модель реальной активной системы, которая адекватно описывает ее поведение[1], то задача управления сводится к сформулированной выше - выбрать оптимальное управление $h^* = \tilde{h}(y) \in U$, $\tilde{h} : A \to U$, то есть допустимое управление, максимизирующее эффективность. Другими словами, необходимо найти $h^* \in Arg\max_{h \in U} K(h) = \{h \in U \mid \forall n \in U \; K(h) \geq K(n)\}$ [2].

Закончив краткое качественное обсуждение общей постановки задачи управления в пассивных и активных системах, перейдем к более детальному описанию собственно модели активной системы.

Модель АС задается перечислением следующих параметров.

1. Состав АС - совокупность субъектов и объектов, являющихся элементами системы (в дальнейшем для их обозначения будет использоваться термин *участники АС*).

2. Структура АС - совокупность информационных, управляющих и других связей между участниками АС, включая отношения подчиненности и распределение прав принятия решений. В большинстве моделей теории активных систем исследуются двухуровневые АС веерного типа, состоящие из одного управляющего органа - *центра* на верхнем уровне иерархии и одного или нескольких подчиненных ему управляемых субъектов - *активных элементов* (АЭ) на нижнем уровне.

---

[1] *В дальнейшем мы для упрощения изложения будем идентифицировать реальную активную систему и ее модель - проблемы адекватности теоретико-игровых моделей обсуждались в [10,18].*

[2] *На протяжении всего изложения, если не оговорено особо, считается, что все максимумы (минимумы) достигаются.*

3. Порядок функционирования - последовательность получения информации и выбора стратегий участниками АС.

4. Число периодов функционирования отражает наличие или отсутствие динамики (однократности или многократности выбора стратегий (состояний) участниками АС в течение рассматриваемого периода времени).

5. Предпочтения участников системы, которые совместно с принципами рационального поведения определяют зависимость состояния системы от управляющих воздействий и критерий эффективности управления.

6. Допустимые множества состояний (стратегий) участников АС отражают индивидуальные и общие для всех участников ограничения на выбор состояний, накладываемые окружающей средой, используемой технологией и т.д.

7. Информированность участников - та информация, которой обладают участники АС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях.

Состав, структура, целевые функции, допустимые множества, число периодов функционирования, порядок функционирования и информированность участников определяют *механизм функционирования* (управления) АС в широком смысле - совокупность законов, правил и процедур взаимодействия участников системы. В узком смысле *механизм управления* представляет собой совокупность правил принятия решений (ППР) участниками АС при заданных ее составе, структуре и т.д. (например, ППР центра – зависимость $\tilde{u}(y)$, ставящая соответствие состояниям АЭ конкретное значение управляющего воздействия). Умея решать задачу синтеза механизма управления в узком смысле, можно решать задачи синтеза оптимального состава участников АС, ее структуры и т.д., то есть задачи синтеза механизма управления в широком смысле.

Рассмотрим *базовую модель* активной системы, состоящей из центра и n активных элементов, функционирующих в условиях полной информированности о всех существенных внешних и внутренних по отношению к системе параметрах (*детерминированная АС*). Структура этой АС приведена на рисунке 1.1[1].

[1] *В настоящей работе принята двойная нумерация рисунков, таблиц, формул, утверждений и т.д., включающая номер главы.*

Термин "базовая" по отношению к описываемой модели несет следующую нагрузку: рассматриваемая модель является с одной стороны простейшей (как с точки зрения структуры, описания и т.д., так и с точки зрения ее исследования), так как в ее рамках не учитываются многие факторы (динамика, неопределенность и т.д., которые учитываются в *расширениях базовой модели*), а с другой стороны на ее примере можно проследить многие закономерности управления АС с тем, чтобы использовать их обобщения при переходе к более сложным моделям.

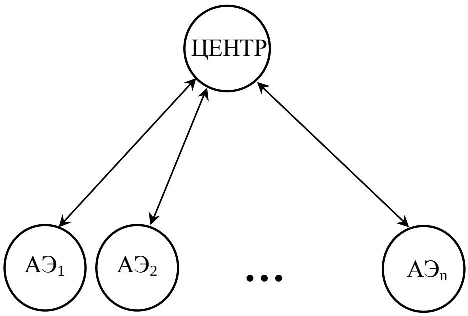

Рис.1.1. Двухуровневая АС веерного типа

Для того, чтобы конкретизировать постановку задачи управления в АС, необходимо описать предпочтения и модели поведения ее участников - активных элементов и центра.

1.2. Предпочтения участников активной системы

Для того чтобы определить, как задаются предпочтения АЭ и центра, рассмотрим следующую модель взаимодействия активного элемента с его *обстановкой*, в которую могут входить другие АЭ, управляющие органы и прочие объекты и субъекты.

Пусть АЭ способен выбирать некоторые *действия* (стратегии, состояния и т.д.) из множества A - допустимого множества действий данного АЭ. Действие будем обозначать y, $y \in A$. В результате выбора действия $y \in A$ под влиянием обстановки реализуется результат деятельности АЭ, который мы будем обозначать через $z \in A_0$, где A_0 -

множество возможных результатов деятельности. Возможное несовпадение действия АЭ и результата его деятельности может быть обусловлено влиянием обстановки – внешней среды, действий других участников АС и т.д.

Связь между действием АЭ $y \in A$ и результатом его деятельности $z \in A_0$ может иметь сложную природу и описываться распределениями вероятности, нечеткими информационными функциями и др. (см. ниже).

В ТАС предполагается, что АЭ обладает *предпочтениями* над множеством результатов $z \in A_0$, то есть имеет возможность сравнивать различные результаты деятельности. Предпочтения АЭ обозначим R, множество возможных предпочтений - $\Re$.

Часто предпочтения АЭ из множества $\Re$ можно параметризовать переменной r, принимающей значения из подмножества W действительной оси, $\Omega \subseteq R^1$. То есть каждому возможному предпочтению АЭ $R \in \Re$ ставится во взаимно однозначное соответствие значение параметра $r \in \Omega$. Такой параметр r называется *типом* АЭ.

При выборе действия $y \in A$ АЭ руководствуется своими предпочтениями и тем, как выбираемое действие влияет на результат деятельности $z \in A_0$, то есть - некоторым законом w изменения результата деятельности. Выбор действия АЭ определяется *правилом индивидуального рационального выбора* $P^w(R, A)$, которое определяет множество наиболее предпочтительных с точки зрения АЭ действий: $P^w : \Re \times 2^A \to 2^A$.

Далее в этом параграфе рассматриваются способы задания предпочтений АЭ и правил индивидуального рационального выбора. При этом для простоты сначала будем предполагать, что закон изменения результата деятельности носит детерминированный характер, то есть каждому действию $y \in A$ соответствует единственный результат деятельности $z = w(y) \in A_0$. Со способами задания правил рационального выбора при других видах зависимости результата деятельности от действия мы познакомимся в главах 2-4.

Предпочтения элементов можно задавать функциями полезности, целевыми функциями, бинарными и нечеткими отношениями предпочтения. Определим эти понятия для одноэлементных систем.

Исторически, первым способом представления предпочтений элементов были функции полезности и целевые функции. *Функция полезности* $u : A_0 \to R^1$ приписывает каждому результату деятельности АЭ некоторую ценность или полезность, выраженную действительным числом. Функция полезности центра $\tilde{\Phi} : A_0 \times U \to \Re^1$ также позволяет сравнивать предпочтительность различных действий и управлений.

Целевые функции также задают предпочтения элементов, но на множестве их действий. Пусть заданы функция полезности элемента u и детерминированный закон $w : A \to A_0$, связывающий действие АЭ $y \in A$ и результат его деятельности $z \in A_0$. Тогда результат деятельности однозначно определяется действием элемента $z = w(y)$. Это дает возможность определить *целевую функцию АЭ* $f : A \to R^1$ следующим образом: $f(y) = u(w(y))$. Такая функция будет отражать "полезность" действия АЭ (выбор которого им и определяется), а не результата деятельности.

Соответствие индивидуального рационального выбора, которое соответствует предпочтениям, заданным целевой функцией, и отражает принимаемую в теории управления социально-экономическими системами концепцию *рационального поведения*, определяется следующим выражением: $P(f, A) = \operatorname*{Argmax}_{y \in A} f(y)$.

Содержательно, рациональным считается выбор АЭ действий, максимизирующих его целевую функцию и (в детерминированном случае) приводящих к результатам деятельности, имеющим максимальную полезность.

<u>Пример 1.1.</u> Рассмотрим активный элемент, который производит некоторую продукцию. Объем производимой продукции будем считать действием элемента и обозначать его через y, множество возможных действий $A = [0, +\infty)$. Элемент реализует продукцию по цене $p \in R^1$ и несет затраты на ее производство $c_r(y) = \frac{1}{2r} y^2$, где r - параметр (тип) элемента, характеризующий его индивидуальные особенности, $r \in \Omega = [1, 2]$. Результатом деятельности можно считать выручку за проданную продукцию z.

Целевую функцию элемента можно определить, зная, что выручка от реализации связана с действием следующим соотношением:

$z = p \cdot y$. Таким образом, целевая функция (в данном случае прибыль) запишется в виде: $f_r(y) = p \cdot y - c_r(y)$. Объем производства, максимизирующий целевую функцию, равен $y^* = p \cdot r$.•[1]

Другим способом представления предпочтений являются бинарные (двуместные) отношения. *Бинарным отношением* R над множеством A_0 называется множество упорядоченных пар (z_1, z_2), $z_1, z_2 \in A_0$, то есть $R \subseteq \{(z_1, z_2) | \, z_1, z_2 \in A_0\}$. Говорят, что $z_1 \in A_0$ находится в отношении R с $z_2 \in A_0$, если выполнено $(z_1, z_2) \in R$ и записывают $z_1 R z_2$.

Пример 1.2. Примером бинарного отношения может служить отношение “$\leq$”, тогда множество, соответствующее этому отношению, будет задаваться $\{(z_1, z_2) \in R^2 | \, z_1 \leq z_2\}$.•

Приведем некоторые свойства бинарных отношений [1,21].

1. Бинарное отношение R_{A_0} называется *рефлексивным*, если $\forall a \in A_0$ выполнено $aR_{A_0}a$;

2. Бинарное отношение R_{A_0} называется *антирефлексивным*, если $\forall a \in A_0$ $aR_{A_0}a$ не выполнено;

3. Бинарное отношение называется R_{A_0} *симметричным*, если $\forall a, b \in A_0$ из $aR_{A_0}b$ следует, что $bR_{A_0}a$.

4. Бинарное отношение называется R_{A_0} *асимметричным*, если $\forall a, b \in A_0$ из $aR_{A_0}b$ следует, что $bR_{A_0}a$ не выполнено.

5. Бинарное отношение называется R_{A_0} *антисимметричным*, если $\forall a, b \in A_0$ из $aR_{A_0}b$ и $bR_{A_0}a$ следует, что $a = b$.

6. Бинарное отношение R_{A_0} называется *полным*, если $\forall a, b \in A_0$ выполнено либо $aR_{A_0}b$, либо $bR_{A_0}a$.

7. Бинарное отношение R_{A_0} называется *транзитивным*, если $\forall a, b, c \in A_0$ таких, что $aR_{A_0}b$ и $bR_{A_0}c$ выполнено $aR_{A_0}c$.

---

[1] *Символом «·» будем в дальнейшем обозначать окончание доказательства, примера и т.д.*

Композицией $R_1 \circ R_2$ двух бинарных отношений R_1 и R_2, определенных над множеством A_0, называется следующее бинарное отношение $R_1 \circ R_2 = \{(a,b) \mid a,b \in A_0, \exists c \in A_0 : aR_1c, cR_2b\}$. Свойство транзитивности можно также определить как: $R_{A_0} \circ R_{A_0} \subseteq R_{A_0}$.

Бинарным *отношением предпочтения* назовем полное рефлексивное транзитивное бинарное отношение.

Соответствие индивидуального рационального выбора, соответствующее бинарным отношениям предпочтения, определяется следующим образом:

$$P(R_{A_0}, A_0) = \left\{ z \in A_0 \middle| \; \forall t \in A_0 \;\; zR_{A_0}t \right\}.$$

<u>Пример 1.3.</u> Пусть активному элементу необходимо произвести выбор из трех альтернатив $\{a, b, c\}$. Предпочтения элемента задаются бинарным отношением предпочтения R. Примером таких отношений могут быть следующие антирефлексивные транзитивные бинарные отношения.

1. R_1 таково, что элемент предпочитает альтернативу a альтернативе b, а альтернативу b альтернативе c, при этом АЭ предпочитает альтернативу a альтернативе c.

2. R_2 таково, что элемент предпочитает альтернативу b альтернативе a, альтернативу b альтернативе c и альтернативу a альтернативе c.

Допустим, что других возможных предпочтений у данного элемента нет. Таким образом, множеством возможных предпочтений активного элемента будет множество $\Re = \{R_1, R_2\}$.

Существует несколько способов наглядно представить бинарное отношение над конечным множеством. Самым простым является перечисление пар элементов, входящих в это отношение; так отношение R_1 задается множеством $\{(a,b),(a,c),(b,c)\}$, отношение $R_2 = \{(b,a),(a,c),(b,c)\}$. При этом $P(R_1,\{a,b,c\}) = a$, $P(R_2,\{a,b,c\}) = b$.

Бинарное отношение можно также задать в виде графа следующим образом: альтернативы отображаются на графе в виде вершин; если выполнено отношение $z_1 R_{A_0} z_2$, то рисуется дуга от вершины z_1 к вершине z_2. Отношение R_1 представляется графом, изображенным на рис. 1.2, отношение R_2 - на рис. 1.3.

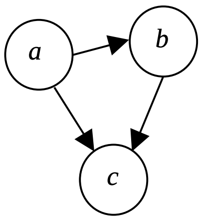

Рис. 1.2

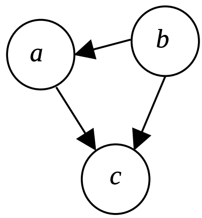

Рис. 1.3

Третьим способом задания полного бинарного отношения является матричный способ: если альтернативы a и b состоят в отношении R, то есть aRb, то на пересечении строки, соответствующей альтернативе a, и столбца, соответствующего альтернативе b, ставится “1”, в противном случае – ставится “0”. Матрицы отношений R_1 и R_2 приведены, соответственно, в таблице 1.1 и таблице 1.2.

Если бинарному отношению R_1 соответствует матрица $\| r_{ij}^1 \|$, а бинарному отношению R_2 соответствует матрица $\| r_{ij}^2 \|$, то их *композиция* определяется следующим образом: $r_{ij}^{1 \circ 2} = \max\limits_k \min(r_{ik}^1, r_{kj}^2)$.

Тип активного элемента r в этом случае может определяться номером отношения предпочтения, которое реализуется у АЭ, то есть $r \in \Omega = \{1, 2\}$ и можно положить, что при типе $r = 1$ активный элемент имеет бинарное отношение предпочтения R_1, а при типе $r = 2$ - отношение R_2. •

	a	*b*	*c*
a	0	1	1
b	0	0	1
c	0	0	0

Таблица 1.1.

	a	*b*	*C*
a	0	0	1
b	1	0	1
c	0	0	0

Таблица 1.2.

Другим способом задания предпочтений элементов являются нечеткие отношения. *Нечеткое отношение* $\tilde{R}$ над множеством A_0 определяется функцией принадлежности $m_{\tilde{R}} : A_0 \times A_0 \to [0, 1]$. Содержательно, функция $m_{\tilde{R}}(a, b)$ означает степень, с которой a и b находятся в отношении $\tilde{R}$. Способы определения индивидуального рационального выбора АЭ при его предпочтениях, заданных в виде нечетких отношений, подробно рассматриваются в разделе 4.2.

Пример 1.4. Сохранив структуру примера 1.3, изменим лишь отношения предпочтения. Задать нечеткое отношение только лишь перечислением пар уже нельзя, необходимо каждой паре поставить в соответствие значение функции принадлежности. Проще всего это сделать в матричной форме. Примеры нечетких отношений предпочтения R_1 и R_2 приведены в таблицах 1.3 и 1.4. •

	A	B	C
A	0	0,9	1
B	0,1	0	0,8
C	0	0,1	0

Таблица 1.3.

	A	B	C
A	0	0,3	0,8
B	0,9	0	1
C	0,4	0	0

Таблица 1.4.

Близкими к нечетким отношениям, являются метризованные отношения, в которых сравнительная предпочтительность двух альтернатив задается некоторым числом, не обязательно принадлежащим единичному отрезку. Способы определения индивидуального рационального выбора АЭ при его предпочтениях, заданных в виде метризованных отношений (сравнительных предпочтений), описаны в разделе 1.5.

Таким образом, мы рассмотрели возможные способы описания предпочтений одного активного элемента или центра в условиях, когда имеется детерминированный закон, связывающий действия и результаты деятельности. Если результат деятельности некоторого АЭ зависит от обстановки, то определение индивидуального рационального выбора производится несколько более сложным образом. В частности, модели индивидуального рационального поведения в условиях, когда результат деятельности АЭ зависит, помимо его действия, от внешней среды, рассматриваются в главах 3 и 4. Кроме этого, результат деятельности АЭ может зависеть от действий других АЭ, модели взаимодействия которых исследуются в теории игр.

1.3. Модели поведения: элементы теории игр

Для описания поведения активных элементов, входящих в некоторую многоэлементную АС, недостаточно определить их предпочтения и соответствия рационального индивидуального выбора по отдельности, так как следует описать модель поведения нескольких активных элементов системы в предположении их взаимодействия. Далее в настоящем разделе будем полагать, что предпочтения элементов заданы целевыми функциями.

В случае, когда в системе имеется единственный активный элемент, его целевую функцию обозначим через $f(y)$, $y \in A$. Гипотеза рационального (индивидуального) поведения предполагает, что АЭ ведет себя таким образом, чтобы выбором действия максимизировать значение своей целевой функции, то есть $y \in \operatorname{Argmax}_{t \in A} f(t)$. В случае, когда активных элементов несколько, необходимо учитывать их взаимное влияние - в этом случае возникает игра.

Игрой называется любое взаимодействие игроков (участников некоторой системы), в котором полезность (выигрыш, значение целевой функции и т.д.) каждого игрока зависит как от его собственного действия (стратегии), так и от действий других игроков. В силу *гипотезы рационального поведения* каждый из игроков стремится выбором стратегии максимизировать свою целевую функцию. Понятно, что в случае нескольких игроков индивидуально рациональная стратегия зависит от стратегий других игроков. Набор таких рациональных стратегий называется *решением игры* (*равновесием*).

Каждому из n игроков (активных элементов) поставим в соответствие функцию выигрыша $f_i(y)$, где $y = (y_1, ..., y_n) \in A = \prod_{i \in I} A_i$ - вектор действий всех игроков, $I = \{1, 2, ..., n\}$ - *множество игроков*. Следуя сложившейся терминологии теории игр, будем называть действия y_i стратегиями, а вектор y - *ситуацией игры*. Совокупность стратегий $y_{-i} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$ называется *обстановкой* (точнее – обстановкой игры) для i -го игрока.

Рассмотрим наиболее распространенные *концепции равновесия*:

а) Максиминное равновесие. В соответствии с принципом *максимального гарантированного результата* (МГР) гарантированное значение целевой функции i -го активного элемента определяется следующим образом:

$$f_i^{\Gamma}(y_i) = \min_{y_{-i} \in A_{-i}} f_i(y_i, y_{-i}), \text{ где } A_{-i} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} A_j, \; i \in I .$$

Это предположение означает, что активный элемент считает, что в результате игры реализуется наихудшая для него обстановка, и выбором своей стратегии $y_i \in A_i$ максимизирует гарантированное значение целевой функции $f_i^{\Gamma}(y_i)$, то есть

$$y_i^{\Gamma} = \arg\max_{y_i \in A_i} \min_{y_{-i} \in A_{-i}} f_i(y_i, y_{-i}), i \in I .$$

Набор $\{y_i^{\Gamma}\}_{i=1}^n$ называется *гарантирующими стратегиями* и соответствует *максиминному равновесию*.

Следует отметить, что использование принципа МГР дает активному элементу пессимистическую оценку результата игры, что не всегда целесообразно.

б) Равновесие Нэша. Одним из наиболее часто используемых концепций равновесия является равновесие Нэша. Вектор $y^N = \{y_1^N, ..., y_n^N\}$ называется *равновесием Нэша* (точкой Нэша), если

$$\forall i \in I, \forall y_i \in A_i \qquad f_i(y_i^N, y_{-i}^N) \geq f_i(y_i, y_{-i}^N),$$

то есть никому из активных элементов не выгодно изменять свою стратегию, при условии, что остальные АЭ не меняют своих стратегий.

Следует отметить, что использование концепции равновесия Нэша требует введения следующей гипотезы: игроки не могут договориться и уйти из этой точки сообща, то есть равновесие Нэша предполагает отсутствие коалиций игроков (*то есть рассматриваются бесколиционные игры*)[1].

---

[1] *Предположение о бескоалиционности (некооперативности) поведения участников АС мы будем считать выполненным в ходе всего последующего изложения. Коалиционные эффекты рассматриваются в [4,10,17 и др.]*

в) Равновесие в доминантных стратегиях. Ситуация игры $y^d = (y_1^d, ..., y_n^d)$ называется *равновесием в доминантных стратегиях* (РДС), если

$$\forall i \in I, \forall y_{-i} \in A_{-i}, \forall y_i \in A_i \quad f_i(y_i^d, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i}) .$$

Доминантная стратегия каждого элемента абсолютно оптимальна, то есть не зависит от поведения (выбираемых стратегий) остальных игроков. Следует отметить, что далеко не во всех играх существуют равновесия в доминантных стратегиях.

Легко показать, что любое равновесие в доминантных стратегиях является равновесием Нэша, но не наоборот.

г) Парето-оптимальные ситуации. Вектор стратегий y^P называется *Парето-оптимальным* (или *эффективным*), если не существует другой ситуации, в которой все игроки выигрывают не меньше и хотя бы один игрок выигрывает строго больше, то есть

$$\forall y \in A \ \exists i \in I : f_i(y) < f_i(y^P) .$$

Помимо игр, Парето-оптимальные ситуации возникают при оценивании одного и того же объекта по различным критериям. *Множество Парето* состоит из таких точек (векторов оценок альтернатив), для которых нельзя улучшить оценку альтернативы хотя бы по одному критерию, не ухудшив ее по другому критерию.

Помимо перечисленных выше, в теории игр существует множество других концепций равновесия: Байеса (см. раздел 5.6), Штакельберга и другие, с которыми можно познакомиться в [6,8,10].

Таким образом, будем считать, что рациональному коллективному поведению соответствует выбор игроками равновесных стратегий (тип равновесия будет оговариваться в каждом конкретном случае). Отметим, что все перечисленные выше типы равновесия согласованы (при $n = 1$) с введенными выше принципами индивидуального рационального выбора.

1.4. Общая постановка задачи управления активными системами

Определив принципы рационального (индивидуального и коллективного) поведения активных элементов и центра, мы имеем возможность сформулировать в общем виде задачу управления активной системой.

Пусть $y = (y_1, ..., y_n) \in A$ - вектор стратегий активных элементов, компоненты которого они могут выбирать независимо (*гипотеза независимого поведения* (ГНП)). Предположим, что целевая функция i-го АЭ $f_i(y,\ h)$, отражает его предпочтения на множестве $A \times U$. Определим $P(h)$ - *множество решений игры* АЭ (*множество реализуемых стратегий - действий*) как множество равновесных при заданном управлении $h \in U$ стратегий АЭ. В одноэлементной АС $P(h)$ является множеством точек максимума целевой функции АЭ, в многоэлементных системах - множеством равновесий (в максиминных стратегиях, или доминантных стратегиях, или равновесий Нэша - в зависимости от конкретной задачи и используемых гипотез о поведении участников АС).

Множество решений игры отражает предположения центра (исследователя операций) о поведении управляемых субъектов (активных элементов) при заданном управлении. Далее центр, интересы которого идентифицируются с интересами АС в целом и на позициях которого находится исследователь операций, должен конкретизировать свои предположения о стратегиях, выбираемых элементами из множества решений игры. Наиболее часто применяются два "предельных" подхода - метод максимального гарантированного результата (МГР), при использовании которого центр рассчитывает на наихудший для него выбор АЭ, и *гипотеза благожелательности* (ГБ), в рамках которой центр считает, что АЭ выбирают из множества решений игры наиболее предпочтительные с точки зрения центра действия. Далее по умолчанию будем считать выполненной гипотезу благожелательности. При этом *задача управления АС* заключается в поиске допустимого управления, максимизирующего целевую функцию центра: $h^* \in \operatorname{Argmax}_{h \in U} \max_{y \in P(h)} \Phi(h,\ y)$, то есть имеющего максимальную *эффективность* $K(h) = \max_{y \in P(h)} \Phi(h,\ y)$ (или управления h_g^*, имеющего максимальную *гарантированную эффективность* $K_g(h) = \min_{y \in P(h)} \Phi(h,\ y)$).

Отметим, что приведенная теоретико-игровая формулировка задачи управления в АС, в которой центр является метаигроком, обладающим правилом первого хода и имеющим возможность назначать свою стратегию, которая зависит от стратегий АЭ: $h = \tilde{h}(y)$, является иерархической игрой – *игрой типа $Г_2$* в терминологии теории иерархических игр [10,14]. Зависимость $\tilde{h}(\cdot)$ называется *механизмом управления* в узком смысле (см. определение выше). Два важных частных случая общей постановки задачи управления составляют задачи стимулирования и задачи планирования (см. таблицу 1.5, а также разделы 2.1 и 5.1).

Содержательно, в *задаче стимулирования* стратегией центра является выбор системы (механизма) стимулирования (набора функций стимулирования) $s(y) = \{s_i(y)\}$, ставящей в соответствие действиям АЭ величины вознаграждений, получаемых от центра, то есть $h = s(y)$. *Задачей синтеза оптимальной функции стимулирования* называется задача поиска допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность. При ее изучении основной акцент делается на исследовании влияния параметров АС и ограничений механизма стимулирования на множество решений игры, которое в задачах стимулирования называется *множеством реализуемых действий*.

В *задаче планирования* стратегией центра является выбор множества S возможных сообщений АЭ: $s \in S$, и механизма (процедуры) планирования $p : S \to X$, ставящей в соответствие сообщениям элементов центру о неизвестных ему существенных параметрах системы назначаемый АЭ вектор планов. При их изучении основной акцент, помимо анализа эффективности, делается на исследовании выгодности для АЭ (с точки зрения максимизации его

	Общая постановка задачи управления АС	Задача стимулирования	Задача планирования
Управление (стратегия центра)	$h \in U$	$s\,(y)$	$p\,(s)$
Стратегия АЭ	$y \in A$	$y \in A$ действие АЭ	$s \in S$ сообщение АЭ центру
Предпочтения АЭ	«Модель системы»: $G(y)$	$f(s,y)$	$j\,(p,s)$

Таблица 1.5. Задачи стимулирования и планирования как частные случаи общей задачи управления АС.

функции предпочтения $j : X \times S \to \Re^1$) сообщения центру достоверной информации - так называемая *проблема манипулируемости*. В более узком значении термин "задача планирования" используется в задачах стимулирования, когда на втором шаге ее решения (см. ниже) при известных множествах реализуемых действий решается *задача оптимального согласованного планирования* (ОСП), то есть задача выбора конкретного действия АЭ, реализация которого наиболее выгодна центру.

Закончив краткое описание базовой модели активной системы и общей постановки задачи управления, перейдем к классификации задач управления АС.

1.5. Классификация задач управления активными системами

Перечисленные выше в разделе 1.1 параметры, определяющие конкретную модель активной системы, можно рассматривать в качестве оснований системы классификации задач управления активными системами. Значения признаков классификации по различным основаниям перечисляются ниже, корректные определения вводимых понятий приводятся в последующих разделах. В рамках каждого из значений признаков возможна более детальная иерархическая классификация.

Основания и значения признаков системы классификаций.

1. <u>Состав АС:</u> число АЭ - *одноэлементные и многоэлементные АС* [2,6,8,15].

2. <u>Структура АС:</u> число уровней иерархии - *двухуровневые, трехуровневые* [17] и др. *АС*; подчиненность АЭ - *АС с унитарным контролем* (веерного типа, в которых структура подчиненности имеет вид дерева, то есть каждый АЭ подчинен одному и только одному управляющему органу) и *АС с распределенным контролем* (в которых АЭ может быть подчинен одновременно нескольким управляющим органам, в том числе - *многоканальные АС*); взаимозависимость показателей деятельности, затрат и индивидуальных управлений АЭ - *независимые АЭ, слабо связанные АЭ, сильно связанные АЭ* [7,11,17,19].

3. <u>Порядок функционирования:</u> в первом приближении достаточно выделить *стандартный и нестандартный порядок функционирования*.

Стандартный порядок функционирования соответствует, например, базовой модели, описанной выше [8,10,14,19].

4. Число периодов функционирования: *статические* (участники АС производят выбор стратегий однократно) и *динамические АС*. Динамические АС, в зависимости от взаимосвязи периодов функционирования и учета участниками АС влияния последствий принимаемых решений на будущие периоды функционирования, могут в свою очередь подразделяться на АС с *дальновидными и недальновидными АЭ, адаптивные и неадаптивные АС* и т.д. [3,5,10,14,15,23].

5. Целевые функции (предпочтения участников АС) определяют конкретный тип задачи управления - задача стимулирования, задача планирования или какие-либо другие случаи.

6. Допустимые множества - независимые или взаимозависимые множества возможных выборов (состояний) участников АС; размерность пространства индивидуальных состояний АЭ и планов - *АЭ со скалярными и векторными предпочтениями*.

7. Информированность участников - основание классификации, для которого существует наибольшее число значений признаков и, соответственно, наибольшее число подклассификаций. Наиболее грубым является разделение АС на АС с *симметричной* (одинаковой) и *асимметричной информированностью* участников (в первую очередь важно определить различие в информированностях АЭ и центра), а также на *детерминированные АС* и *АС с неопределенностью* [14,19]. В свою очередь, АС с неопределенностью могут классифицироваться по следующим **основаниям** [19].

7.1. Тип неопределенности: *внутренняя неопределенность* (относительно параметров самой АС), для внутренней неопределенности - относительно целевых функций, допустимых множеств или и того и другого; *внешняя неопределенность* (относительно параметров окружающей среды, то есть внешних по отношению к АС) и *смешанная неопределенность* (для части участников АС - внутренняя, для других - внешняя; или обоих типов).

7.2. Вид неопределенности: *интервальная* (когда участнику АС известно множество возможных значений неопределенного параметра), *вероятностная* (известно распределение вероятностей - *вероятностные АС*) и *нечеткая* (известна функция принадлежности - *нечеткие АС*) *неопределенность*, а также *смешанная неопределенность* (все возможные комбинации перечисленных видов неопределенности для различных участников).

7.3. Принципы поведения участников АС (методы устранения неопределенности и принципы рационального поведения - напомним, что выше мы ввели предположение о бескоалиционности поведения АЭ): использование МГР, ожидаемых полезностей, максимально недоминируемых альтернатив, сообщения информации, выбор структуры системы и т.д. (см. ниже).

По различным основаниям возможно значительное число различных признаков классификации и их комбинаций. Следует также отметить, что не все комбинации значений признаков являются допустимыми. Так, например, использование ожидаемых полезностей возможно только в вероятностных АС, сообщение информации имеет смысл только при асимметричной информированности и должно предусматриваться порядком функционирования АС и т.д.

В соответствии с приведенной системой классификаций рассмотренная выше базовая модель АС является: многоэлементной с несвязанными АЭ, двухуровневой с унитарным контролем, статической, со стандартным порядком функционирования, скалярными предпочтениями АЭ, детерминированной с симметричной информированностью участников активной системой. Аналогичным образом в рамках введенной системы классификаций можно описать любую модель АС.

Имея систему классификаций задач управления в АС, перечислим изучаемые в рамках настоящего курса классы задач. Вторая глава содержит описание методов решения задач стимулирования в детерминированных одноэлементных статических АС. Расширения этой базовой модели – задачи стимулирования в одноэлементных статических АС, функционирующих в условиях вероятностной и нечеткой внешней неопределенности рассматриваются, соответственно, в главах 3 и 4. Модель АС с внутренней неопределенностью и асимметричной информированностью участников, основное внимание при исследовании которой уделяется анализу проблемы манипулируемости, описывается в пятой главе. Таким образом, практически вне рассмотрения остаются динамические, многоэлементные, многоуровневые АС, многие классы АС с неопределенностью и другие сложные классы задач, которые исследовались в ТАС с той или иной степенью детализации. Ссылки на основные работы, содержащие результаты их изучения, приведены выше при перечислении оснований системы классификаций. Для более глубокой ориентации в современной проблематике ТАС следует порекомендовать аналитический обзор и библиографию [22].

Глава 2. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

2.1. Постановка задачи стимулирования в активных системах

Рассмотрим активную систему, состоящую из управляющего органа – центра и одного управляемого субъекта – активного элемента (АЭ). В качестве центра и АЭ могут выступать как отдельные люди, так и их группы, коллективы и т.д.

Одним из способов влияния на поведение АЭ является его стимулирование. С точки зрения психологии можно рассматривать следующие процессуальные компоненты деятельности АЭ [12,19]: *потребность – мотив – цель – задача – технология – действие – результат* (см. рисунок 2.1).

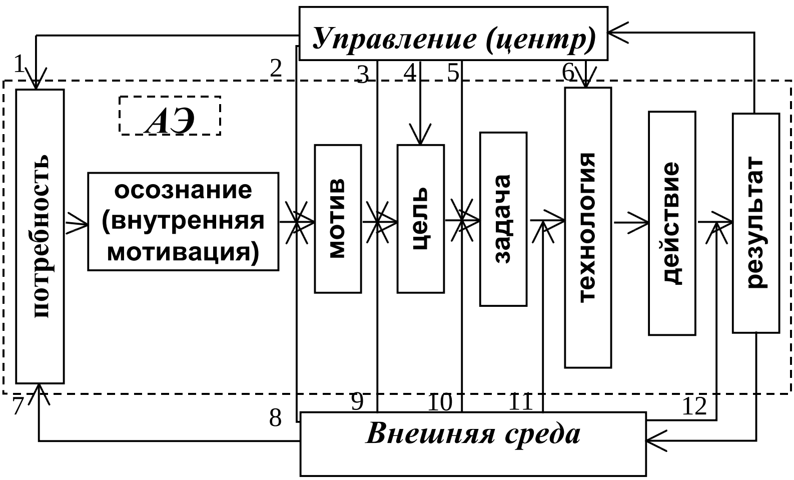

Рис. 2.1. Управление деятельностью АЭ

Управление со стороны центра в общем случае может воздействовать на потребности АЭ (1), формирование мотивов (внешняя мотивация (2)), процесс выбора цели (3) и сам выбор (4), выбор задач (5) и используемых АЭ технологий (6): содержания и форм, методов и средств деятельности. Внешняя среда может оказывать влияние на потребности (7), процесс формирования мотивов (8), целей (9), задач (10) и технологий (11). Кроме того, воздействие внешней среды (12) может оказаться причиной несовпадения действия АЭ и результата его деятельности (см. выше обсуждение различий между функциями полезности и целевыми функциями АЭ). Результатом деятельности АЭ может быть удовлетворение потребности (частичное или полное) или ее неудовлетворение. Поэтому *стимулирование* может быть определено как комплексное целенаправленное внешнее воздействие на компоненты деятельности управляемой системы и процессы их формирования.

Итак, центр обладает широким спектром возможностей по управлению активным элементом (воздействия (1)-(6) могут интерпретироваться как стимулы). Рассматриваемое в ТАС стимулирование в основном соответствует (5), то есть влиянию на процесс выбора задач (или, что при фиксированных технологиях то же самое – действий) при фиксированных потребностях, мотивах, целях, и влиянии окружающей среды.

Таким образом, при фиксированных целях и технологии предпочтительность различных действий АЭ зависит от условий (5) и (10), из которых (5) является одним из управлений со стороны центра. Возможность изменения предпочтений АЭ на множестве его стратегий (действий) обуславливает его управляемость центром – используя различные стимулы, центр может побуждать (в определенных пределах) АЭ выбирать те или иные действия. Перейдем к описанию теоретико-игровой модели стимулирования.

Рассмотрим одноэлементную детерминированную статическую АС. В иерархических играх метаигрок – центр – обладает правом первого хода, причем его стратегия – функция от стратегии второго игрока – активного элемента, то есть в качестве стратегии $h \in U$ центр выбирает функцию $s(y) \in M$, где y - стратегия активного элемента, M – множество допустимых функций (систем, механизмов) стимулирования.

Активный элемент выбирает свою стратегию $y \in A$ при известной стратегии первого игрока (центра). Следовательно, центр имеет возможность, зная о стремлении АЭ максимизировать собственную целевую функцию, предугадать, какую стратегию выберет АЭ. Поэтому, задача центра заключается в нахождении такой своей допустимой стратегии, которая побудила бы АЭ выбрать наиболее благоприятное для центра действие.

При рассмотрении задач стимулирования стратегия первого игрока интерпретируется как функция стимулирования, определяющая поощрение или наказание активного элемента в зависимости от выбираемой им стратегии (действия) и входящая аддитивно в функцию полезности АЭ.

Рассмотрим общую (для детерминированных АС и АС с неопределенностью) постановку задачи стимулирования в активных системах в терминах целевых функций. Введем следующие обозначения:

$\tilde{\Phi}(x, z, s(\cdot))$ - функция полезности[1] центра, $\tilde{\Phi} : X \times A_0 \times M \to R^1$;

$\tilde{s}(x, z) \in M$ - функция стимулирования АЭ центром, $\tilde{s} : X \times A_0 \to R^1|M$ и $\tilde{c}(x, z)$ - функция штрафов, налагаемых на АЭ центром, $\tilde{c} : X \times A_0 \to R^1|M$, принадлежащие допустимому множеству M;

$R^1|M$ - множество возможных значений функции стимулирования – подмножество R^1, определяемое ограничениями механизма стимулирования M;

$y \in A$ - действие АЭ;

A - множество допустимых действий активного элемента;

$z \in A_0$ - результат деятельности АЭ;

A_0 - множество возможных результатов деятельности;

$x \in X$ - *план* АЭ (желаемое с точки зрения центра действие или результат деятельности АЭ);

X - множество допустимых планов АЭ;

$\tilde{h}(z, r)$ - *функция дохода* АЭ, $\tilde{h} : A_0 \times \Omega \to R^1$;

$\tilde{c}(z, r)$ - *функция затрат* АЭ, $\tilde{c} : A_0 \times \Omega \to R^1$;

$r \in \Omega$ - параметр функции дохода (затрат) – тип АЭ;

Ω - допустимое множество типов АЭ.

---

[1] *Тильда («~») соответствует величинам, зависящим от результата деятельности. Поэтому в детерминированных одноэлементных АС, в которых результат деятельности АЭ совпадает с его действием, мы будем опускать символ «~», обозначая функцию дохода $h(y, r)$ и т.д.*

Функция полезности активного элемента представляется в одном из двух следующих видов

$$u(x,\, z,\, r,\, s\,(\cdot)) = \begin{cases} \tilde{s}\,(x,z) - \tilde{c}\,(z,r) & \text{- "стимулирование минус затраты";} \\ \tilde{h}\,(z,r) - \tilde{c}\,(x,z) & \text{- "доход минус штрафы".} \end{cases}$$

В данной постановке стимулирование (изменение предпочтений АЭ центром) осуществляется путем поощрения или наказания АЭ за выбор тех или иных действий, то есть путем изменения его функции полезности. Таким образом, стимулирование заключается либо в прибавлении к функции полезности АЭ функции стимулирования *(задача I рода)*, либо в прибавлении к функции полезности АЭ функции стимулирования и одновременном вычитании этой функции из целевой функции центра *(задача стимулирования II рода)*. В задаче стимулирования второго рода целевая функция центра имеет вид “доход минус затраты на стимулирование”: $\tilde{\Phi}(x, z, \tilde{s}\,(\cdot)) = \tilde{H}(x,z) - \tilde{s}\,(x,z)$, или “доход плюс штрафы”: $\tilde{\Phi}(x, z, \tilde{c}\,(\cdot)) = \tilde{H}(x,z) + \tilde{c}\,(x,z)$, где $\tilde{H}(x,z)$ - доход центра, зависящий от результата деятельности АЭ и быть может плана.

Механизм стимулирования (механизм управления в узком смысле) определяется заданием функции стимулирования $\tilde{s}: X \times A_0 \to R^1 \big| M$.

Для постановки задачи стимулирования необходимо ввести на множестве M допустимых механизмов стимулирования критерий их сравнения. В большинстве случаев этот критерий определяется максимальным (либо гарантированным) значением функции полезности центра на множестве выбора АЭ.

Различают прямые и обратные задачи стимулирования. *Прямой задачей стимулирования* называется задача поиска оптимального механизма стимулирования, то есть имеющего максимальную эффективность и удовлетворяющего заданным ограничениям: $\tilde{s} \in M$. *Обратной задачей стимулирования* называется задача поиска класса механизмов стимулирования (или оптимального с точки зрения того или иного критерия механизма из этого класса), побуждающих АЭ выбирать некоторое действие (фиксированное или максимально/минимально возможное).

Чтобы ввести критерий эффективности функционирования активной системы, в свою очередь необходимо определить правило рационального выбора активного элемента. В случае, когда неопределенность отсутствует (детерминированная АС), можно считать, что действие и результат деятельности, а также функции полезности и целевые функции совпадают, то есть $z \equiv y$; $f(y) \equiv u(z)$.

Если неопределенность в системе присутствует, будем предполагать, что элемент принимает решение в условиях полной информированности, то есть, по тому или иному правилу $\langle \bullet \rangle$ устраняет неопределенность[1] и определяет свою целевую функцию (переходит от предпочтений, заданных на множестве результатов деятельности к предпочтениям над множеством действий):

$$f(x, y, r, s(\cdot)) = \langle u(x, z, r, \tilde{s}(\cdot)) \rangle .$$

Например, если в одноэлементной активной системе присутствует интервальная неопределенность, то активный элемент может устранять ее применением МГР, вероятностная неопределенность может устраняться нахождением ожидаемой полезности, нечеткая неопределенность – переходом к индуцированным отношениям предпочтения (см. главы 3 и 4, а также [19]).

Устранив неопределенность, активный элемент выбирает действие, руководствуясь правилом индивидуального рационального выбора:

$$y^* \in P_r(s(\cdot), A) = \operatorname*{Argmax}_{y \in A} f(x, y, r, s(\cdot)) .$$

Центр также может устранить неопределенность относительно результата деятельности активного элемента одним из указанных выше способов и определить целевую функцию, зависящую от действия элемента:

$$\Psi(y, s(\cdot)) = \langle \tilde{\Phi}(z, \tilde{s}(\cdot)) \rangle .$$

Будем предполагать, что выполнена *гипотеза благожелательности* (ГБ), то есть элемент выбирает то действие из множества рационального выбора, которое наиболее благоприятно для центра. Тогда эффективность функционирования определится следующим выражением:

$$K(s, r) = \max_{y \in P_r(s(\cdot), A)} \Psi(y, s(\cdot)) .$$

Пользуясь этим выражением, можно ввести *эффективность механизма стимулирования* $s(\cdot)$, устранив зависимость $K(s(\cdot), r)$ от r.

---

[1] В многоэлементной АС использование АЭ тех или иных гипотез о поведении других игроков также является процедурой устранения неопределенности – см. раздел 1.3 и [8].

Если истинное значение параметра $r \in \Omega$ неизвестно центру, то можно устранить эту неопределенность взятием по r гарантированного результата:

$$K(s) = \min_{r \in \Omega} \max_{y \in P_r(s(\cdot), A)} \Psi(y, s(\cdot)).$$

В случае, когда ГБ не выполнена, центру при оценке эффективности придется ограничиться гарантированным результатом по множеству рационального выбора:

$$K(s) = \min_{r \in \Omega} \min_{y \in P_r(s(\cdot), A)} \Psi(y, s(\cdot)).$$

Таким образом, мы определили эффективность механизма стимулирования, что позволяет сформулировать *прямую задачу стимулирования* следующим образом: построить систему стимулирования $s^* \in M$ такую, что $s^* \in \operatorname{Argmax}_{s \in M} K(s)$.

2.2. Задача синтеза оптимального механизма стимулирования в базовой модели активной системы

Обозначим SP - класс действительнозначных функций $q(x)$, определенных на R^1 и удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $q(x)$ - непрерывная функция; 2) существует единственная *точка пика* (*идеальная точка*) $r \in R^1$ (возможно $r = +\infty$ либо $r = -\infty$) такая, что $q(x)$ строго монотонно возрастает при $x < r$ и строго монотонно убывает при $x > r$; 3) Функция $q(x)$ ограничена сверху, то есть $q(r) < +\infty$.

Функции, принадлежащие классу SP, называются *однопиковыми*. Примером однопиковой функции может служить $q(x) = -|x - r|$. Точкой пика при этом может являться значение типа АЭ.

Рассмотрим детерминированную двухуровневую активную систему веерного типа, состоящую из центра и одного активного элемента. Предположим, что точное значение типа $r \in \Omega$ известно и центру, и АЭ. Тогда можно считать, что функции дохода $h(y)$ и затрат $c(y)$ не зависят от этого параметра. Будем исследовать классы параметрически заданных систем стимулирования: $c(x, y) \in M$ -

функция штрафов, $s(x, y) \in M$ - функция стимулирования, где в качестве параметра[1] используется x - план, назначенный АЭ, $x \in X$ - множество допустимых планов АЭ.

Введем следующие предположения.

А.1. $A = X \subseteq R^1$.

Предположение А.1 в многоэлементных АС отражает *гипотезу независимого поведения* (ГНП), в соответствии с которой не существует глобальных ограничений на совместный выбор стратегий активными элементами.

Для большинства рассматриваемых ниже моделей можно считать, что $\exists A^-, A^+ : A = X = [A^-, A^+]$, где $-\infty < A^- << r << A^+ < +\infty$.

А.2. c - неотрицательная равномерно ограниченная сверху: $\forall y \in A, x \in X \quad 0 \le c(x, y) \le C < +\infty$, кусочно-непрерывная функция.

Величина C называется *ограничением механизма стимулирования*.

А.3. $h(\cdot) \in SP$.

А.4. $-c(\cdot) \in SP, c(0) = 0$.

Пусть целевая функция активного элемента имеет вид “доход минус штрафы”: $f(x, y) = h(y) - c(x, y)$ или “стимулирование минус затраты”: $f(x, y) = s(x, y) - c(y)$.

Будем считать предположения А.1 - А.4 выполненными в ходе всего последующего изложения.

Множество решений игры определяются следующим образом: $P(c) = Arg \max\limits_{y \in A} \{h(y) - c(x, y)\}$ и $P(s) = Arg \max\limits_{y \in A} \{s(x, y) - c(y)\}$.

Большинство рассуждений в дальнейшем будем проводить для функций штрафов, так как все рассуждения для функций стимулирования могут быть получены по аналогии [19].

Эффективность механизма стимулирования в рамках гипотезы благожелательности, которую мы будем считать выполненной в ходе последующего изложения, $K(c) = \max\limits_{y \in P(c)} \Phi(c, y)$, а гарантированная

---

[1] *Под системой стимулирования* $c(x, y)$ *понимается функция от действия АЭ. Под классом систем стимулирования понимается объединение систем стимулирования по некоторому множеству значений параметра.*

эффективность $K^{\Gamma}(c) = \min_{y \in P(c)} \Phi(c, y)$, где $\Phi(c, y)$ - целевая функция центра. Задача стимулирования заключается в выборе механизма стимулирования $c \in M$, имеющего максимальную эффективность: $c \in \operatorname{Argmax}_{c \in M} K(c)$.

Обозначим $P_M = \bigcup_{c \in M} P(c)$ - максимальное множество реализуемых действий. Класс $\aleph \subseteq M$ систем стимулирования назовем *оптимальным в* M, если выполнено $P_{\aleph} = \bigcup_{c \in \aleph} P(c) = P_M$.

Система штрафов (стимулирования) следующего вида:

$$c_C(x, y) = \begin{cases} 0, \; y \begin{pmatrix} \le \\ \ge \end{pmatrix} x; \\ C, \; y \begin{pmatrix} > \\ < \end{pmatrix} x \end{cases}$$

называется *скачкообразной системой* (*C-типа*) *стимулирования* (см. рисунок 2.2). Множество систем стимулирования С-типа при всех возможных $x \in X$ обозначим $M_C \subseteq M$.

Систему стимулирования:

$$c_{QC}(x, y) = \begin{cases} 0, \; y = x; \\ C, \; y \ne x \end{cases}$$

назовем *квазискачкообразной* (*QC -типа*) (см. рисунок 2.3).

Введем также компенсаторные (K - типа) системы стимулирования, имеющие вид:

$$c_K(y) = \begin{cases} h(y) - [h_{\max} - C], \; y \in [y^-, y^+]; \\ C, \; y \in [y^-, y^+]. \end{cases}$$

где $h_{\max} = h(r)$, $y^- = \min\{y \in A \mid h(y) \ge h(r) - C\}$, $y^+ = \max\{y \in A \mid h(y) \ge h(r) - C\}$ - соответственно левая и правая границы множества действий, реализуемых при заданных ограничениях механизма стимулирования, и *квазикомпенсаторные* (QK -типа) *системы стимулирования*, определяемые следующим образом:

$$c_{QK}(x, y) = \begin{cases} h(y) - [h_{\max} - C], \; y = x; \\ C, \; y \neq x. \end{cases}$$

Множество систем стимулирования K - типа обозначим M_K ($M_K = M_K(h(\cdot))$. Графики компенсаторных функций стимулирования при представлении целевой функции АЭ в виде «стимулирование минус затраты» и параболических затратах приведены на рисунках 2.4 и 2.5.

Вид целевой функции АЭ (представленной в виде “стимулирование минус затраты”) при использовании центром скачкообразной системы стимулирования приведен на рисунке 2.6.

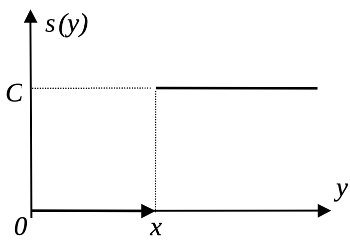

Рис. 2.2. Скачкообразная система стимулирования

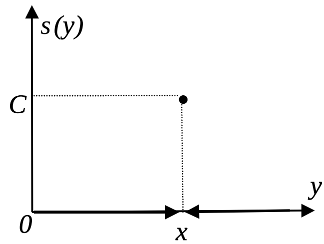

Рис.2.3. Квазискачкообразная система стимулирования

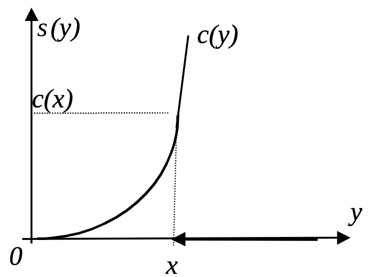

Рис.2.4. Компенсаторная система стимулирования

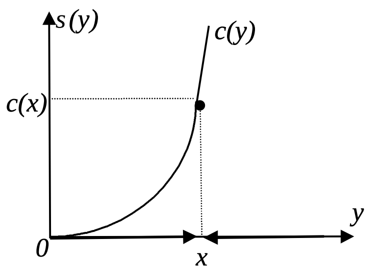

Рис.2.5. Квазикомпенсаторная система стимулирования

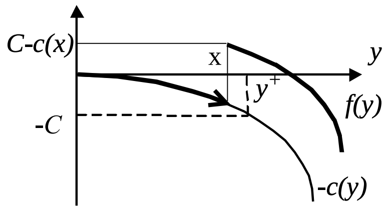

Рис. 2.6. Целевая функция АЭ при использовании центром системы стимулирования С-типа

Максимальное множество действий АЭ, реализуемых при заданных ограничениях механизма стимулирования, определяется следующим утверждением.

Теорема 2.1. Класс систем стимулирования С-типа имеет при данных ограничениях C механизма стимулирования максимальное множество реализуемых действий $P_C = P_M = [y^-, y^+]$.

Доказательство. Любое действие $y^* \in [y^-, y^+]$ реализуемо системой стимулирования $c_C(y^*, y)$, то есть $P_C = [y^-, y^+]$. Докажем, что $P_M = P_C$. Предположим, что существует система стимулирования $\tilde{c}(y)$, удовлетворяющая А.2 и реализующая действие $\tilde{y}$, не принадлежащее множеству P_C. Для определенности положим $\tilde{y} > y^+$. Тогда по определению множества реализуемых действий:

$$h(\tilde{y}) - \tilde{c}(\tilde{y}) \geq h(y) - \tilde{c}(y), \forall y \in A.$$

Рассмотрим $y = r$. Тогда $h(\tilde{y}) - \tilde{c}(\tilde{y}) \geq h(r) - \tilde{c}(r)$.

Так как $y^+ \geq r$ и мы предположили, что $\tilde{y} > y^+$, то по определению y^+ и А.3: $h(r) - h(\tilde{y}) > C$.

Следовательно, имеет место $\tilde{c}(r) - \tilde{c}(\tilde{y}) > C$, что противоречит А.2. Случай $\tilde{y} < y^-$ рассматривается полностью аналогично. •

Из вида задачи стимулирования первого рода следует, что чем шире множество действий, реализуемых тем или иным классом систем стимулирования, тем выше эффективность стимулирования. Следовательно имеет место следующее утверждение.

Следствие. Классы систем стимулирования: C, QC, K и QK - типа оптимальны в M .

Детерминированная задача стимулирования второго рода. Пусть в системе имеется единственный АЭ, целевая функция которого имеет вид “доход минус штрафы”, а целевая функция центра представлена в виде:

$$\Phi(x, y) = H(y) + c(x, y).$$

Очевидно, действия, лежащие вне множества $[y^-, y^+]$ не реализуемы при заданных ограничениях механизма стимулирования. Максимальные штрафы, допустимые при реализации действия $y \in [y^-, y^+]$, определяются функцией $c_{\max}(y) = h(y) - h_{\max} + C$.

Тогда необходимо найти действие $y \in [y^-, y^+]$ такое, что оно доставит максимум функции $H(y) + c_{\max}(y)$. То есть, оптимальным реализуемым действием будет

$$y^* \in \operatorname*{Argmax}_{y \in [y^-, y^+]} \{H(y) + h(y)\}.$$

При этом оптимальной будет квазикомпенсаторная или компенсаторная система стимулирования.

Если ограничения на стимулирование отсутствуют, то есть $C = +$¥, то $y^* \in \operatorname*{Argmax}_{y \in A} \{H(y) + h(y)\}$. Если целевая функция АЭ представлена в виде «стимулирование минус затраты», то $y^* \in \operatorname*{Argmax}_{y \in [y^-, y^+]} \{H(y) - c(y)\}$.

Следует подчеркнуть, что и в задаче первого рода, и в задаче второго рода, мы фактически "угадали" оптимальное решение, не решая задачу в лоб (хотя существует теорема Ю.Б.Гермейера, дающая решение задачи синтеза оптимальных управлений для общего случая иерархической игры Γ_2 [10])[1]. Существенную помощь при этом оказала

[1] *Следует признать, что для теории активных систем во многих случаях характерно именно угадывание решений (исходя из интуиции, содержательных рассуждений и т.д.), а также стремление получить аналитическое решение. Объяснения этому достаточно прозрачны: исследование формальной модели социально-экономической системы не*

идея анализа множеств реализуемых действий. Альтернативным подходом является анализ минимальных затрат на стимулирование, к описанию которого мы и переходим.

Пусть целевая функция АЭ имеет вид «стимулирование минус затраты». *Минимальными затратами на стимулирование* по реализации действия $y \in P_M$ в классе допустимых систем стимулирования M называется следующая величина: $s_{\min}(y) = \min\limits_{s \in M} \{s(y) \mid y \in P(s)\}$, то есть минимальное допустимое вознаграждение, которое побудит АЭ выбрать заданное действие. Для тех действий, которые в рамках предположения А.2 не могут быть реализованы в классе M, положим минимальные затраты на стимулирование равными бесконечности: $s_{\min}(y) = +¥$, $y \in A \setminus P_M$. Очевидно, что в рамках предположения А.4 $\forall y \in P_M \ \ s_{\min}(y) = c(y)$.

Минимальные затраты на стимулирование являются чрезвычайно важным понятием. Их анализ позволяет решать задачу синтеза оптимальной функции стимулирования, изучать свойства оптимального решения и т.д. Если для задачи стимулирования первого рода критерием сравнения эффективностей систем стимулирования служат максимальные множества реализуемых ими действий, то минимальные затраты на стимулирование являются таким критерием одновременно для задач и первого, и второго рода. Обоснуем это утверждение. Для этого обозначим максимальную в классе $M_1 \subseteq M$ эффективность управления $K_{M1} = \max\limits_{s \in M_1} K(s)$.

Теорема 2.2. Пусть $M_1 \subseteq M$, $M_2 \subseteq M$ - два подкласса допустимых систем стимулирования и выполнено: $\forall\ y \in A \quad s_{\min 1}(y) \le s_{\min 2}(y)$. Тогда для задач первого и второго рода $K_{M1} \ge K_{M2}$.

Доказательство. Обозначим $P_i = \bigcup\limits_{s \in M_i} P(s)$, $i = 1,2$, - максимальные множества действий, реализуемых в соответствующих классах систем стимулирования. Пусть $y \in P_{M_2}$. Тогда, так как $\forall\ y \in A$

является самоцелью исследователя операций - его задача заключается в том, чтобы предложить максимально адекватное действительности содержательно интерпретируемое решение задачи управления.

$\sigma_{\min 1}(y) \le \sigma_{\min 2}(y)$, то по определению минимальных затрат на стимулирование $\sigma_{\min 1}(y) < +\infty$, то есть $y \in P_{M_1}$. Другими словами, если выполнено условие теоремы, то в силу определения минимальных затрат на стимулирование имеет место $P_2 \subseteq P_1$, то есть системы стимулирования, характеризуемые меньшими затратами на стимулирование, реализуют большие множества действий, что доказывает утверждение теоремы для задач первого рода.

Доказать справедливость утверждения теоремы можно и не прибегая к явному анализу множеств реализуемых действий. Для этого рассмотрим задачу стимулирования первого рода. Обозначим

$$\sigma_2 = \arg \max_{\sigma \in M_2} \{ \max_{y \in P(\sigma)} H(y)\}, \quad y_2 = \arg \max_{y \in P(\sigma_2)} H(y).$$

Тогда $K_{M2} = H(y_2)$ и существует $\sigma_1 \in M_1$ такое, что $y_2 \in P(\sigma_1)$, следовательно, $K_{M1} \ge H(y_2) = K_{M2}$.

Рассмотрим задачу стимулирования второго рода. Эффективность стимулирования может быть определена и через минимальные затраты на стимулирование, причем имеет место:

$$K_{M2} = \max_{y \in A} \{H(y) - \sigma_{\min 2}(y)\} \le \max_{y \in A} \{H(y) - \sigma_{\min 1}(y)\} = K_{M1}. \bullet$$

Обратные задачи стимулирования первого и второго рода заключаются в поиске ограничений механизма стимулирования, при которых реализуется заданное действие. В случае, если целевая функция АЭ задается в виде «доход минус штрафы», максимальные штрафы, необходимые для реализации заданного действия y^*, очевидно, определяются $c_{\max}(y)$. Зависимость множества реализуемых действий от ограничений механизма стимулирования определяется следующей теоремой.

Теорема 2.3. С увеличением ограничений механизма стимулирования C максимальное множество реализуемых действий P_M не сужается.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы следует из определения множества действий, реализуемых в рамках введенных предположений системами стимулирования из класса M. •

Перечислив общие результаты решения задачи синтеза оптимальной функции стимулирования (теоремы 2.1 – 2.3), рассмотрим в качестве частных случаев пропорциональные системы стимулирования и системы стимулирования в многоэлементных АС со слабо связанными АЭ.

Рассмотрим так называемые *пропорциональные (линейные) системы стимулирования*, в которых значение функции стимулирования пропорционально действию АЭ или результату его деятельности с коэффициентом пропорциональности a. Такие системы мы будем называть системами стимулирования L*-типа*.

Будем различать класс M_L - неограниченных пропорциональных систем стимулирования: $M_L = \bigcup_{a=0}^{\infty} M_L(a)$, где

$$M_L(a) = \{c(x,y) \mid c(x,y) = b|x-y|,\ b \in [0,a]\},$$

и класс M'_L - пропорциональных систем стимулирования, ограниченных неотрицательной константой C: $M'_L = \bigcup_{a=0}^{\infty} M'_L(a)$, где

$$M'_L(a) = \{c(x,y) \mid c(x,y) = \min(C, b|x-y|),\ b \in [0,a]\}.$$

График системы стимулирования L-типа для случая, когда целевая функция АЭ имеет вид “доход минус штрафы” приведен на рисунке 2.7.

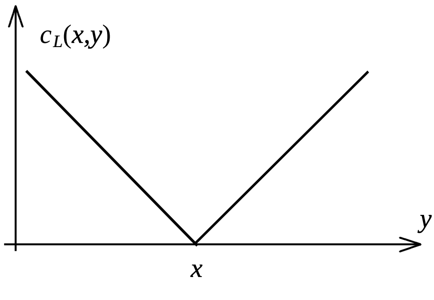

Рис. 2.7. Пропорциональная функция стимулирования

Далее будем рассматривать представление целевой функции АЭ в виде «стимулирование минус затраты». Понятно, что $M_{L'} \subseteq M_L$, следовательно: $K_L \geq K_{L'}$, поэтому исследуем системы стимулирования из класса M_L: $s_L(y) = ay, a \geq 0$.

Будем считать, что одна система стимулирования эффективнее другой, если при ее использовании затраты на стимулирование по реализации любого действия меньше чем у другой (см. теорему 2.2).

Теорема 2.4. Системы стимулирования QK-типа не менее эффективны, чем пропорциональные системы стимулирования.

Доказательство. Пусть необходимо реализовать действие $y^* \geq 0$. При использовании пропорциональной системы стимулирования целевая функция АЭ в точке $y = 0$ равна нулю. Для реализации действия y^* необходимо добиться максимума целевой функции в точке y^*. Это возможно, если целевая функция при использовании пропорциональной системы стимулирования, как минимум, удовлетворяет: $f(y) = s_L(y) - c(y) \geq f(0) = 0$, то есть $s_L(y^*) \geq c(y^*)$. В тоже время, минимальные затраты на стимулирование по реализации действия y^* при использовании системы стимулирования QK-типа равны $s_{QK}^{\min}(y^*) = c(y^*)$, то есть $s_L^{\min}(y^*) \geq s_{QK}(y^*)$.•

Очевидно, что, если затраты АЭ линейны, то эффективности K_L и K_{QK} систем стимулирования, соответственно L-типа и QK-типа, одинаковы. Если затраты АЭ строго выпуклы и дифференцируемы, то соотношение эффективностей дается следующей теоремой.

Теорема 2.5. Если функция затрат АЭ строго выпукла и дифференцируема, то $K_L < K_{QK}$.

Доказательство. Минимальные затраты на стимулирование по реализации некоторого действия $y^* \in A$ компенсаторной системой стимулирования равны $s_{QK}^{\min} = c(y^*)$.

Условие реализуемости действия $y^* \in A$ пропорциональной системой стимулирования имеет вид: $\dfrac{\partial c(y^*)}{\partial y} = a$. При этом $s_L^{\min} = a\ y^*$. Из строгой выпуклости функции затрат следует, что $s_L^{\min} > s_{QK}$. По теореме 2.2 получаем, что $K_L < K_{QK}$. •

Теорема 2.5 демонстрирует неоптимальность использования пропорциональных систем стимулирования в случае выпуклых функций затрат АЭ. В случае, когда функции затрат вогнуты, использование пропорциональных систем стимулирования дает еще более парадоксальный результат.

Пример 2.1. Пусть затраты АЭ зависят от количества отработанных им часов y (действия) следующим образом $c(y) = 2g\sqrt{y}$, $0 \le y \le 16$. При использовании сдельной оплаты $s_L(y) = ay, a \ge 0$, где a - ставка оплаты, целевая функция АЭ имеет минимум в точке $y_{\min} = g^2 / a^2$. Определим $y_0 \ne 0 : \forall y \ge y_0 \;\; f(y) \ge 0$. Если $y_0 \ge 16$, то АЭ предпочтет не работать вовсе, то есть $y^* = 0$. Если $y_0 < 16$, то АЭ предпочтет отработать все 16 часов и не будет работать меньше. Таким образом, при низких ставках оплаты АЭ не будет работать, а при высоких ставках будет работать максимально возможное время. Затраты на стимулирование выбора максимального рабочего времени (16 часов) при использовании пропорциональной системы стимулирования ($a = g/2$) равны $8g$. •

Таким образом, оказывается, что пропорциональные системы стимулирования приводят к большим затратам на стимулирование и реализуют не все действия АЭ, что говорит о неоптимальности их использования.

Рассмотрим пример задачи стимулирования в многоэлементной активной системе.

Пусть $I = \{1, 2, ..., n\}$ - множество активных элементов, $h_i(y_i)$ - доход i-го активного элемента, $c_i(y_i)$ - штрафы, налагаемые на i-й активный элемент, $y = (y_1, ..., y_n)$ - вектор действий активных элементов $y \in A = \prod_{i \in I} A_i$. Если предположить, что штрафы каждого элемента по отдельности ограничены константами C_i, то задача, как и в одноэлементном случае, сводится к нахождению оптимальной системы стимулирования для каждого АЭ.

Если фонд стимулирования («штрафования») ограничен, то есть $\sum_{i \in I} C_i \le C$, то такая задача называется задачей со *слабо связанными элементами*. При этом максимальное множество реализуемых действий для i-го АЭ зависит от соответствующего ограничения механизма стимулирования: $P_i^*(C_i) = [y_i^-(C_i), y_i^+(C_i)]$.

Тогда оптимальное решение задачи стимулирования первого рода со слабо связанными элементами определяется следующим образом – максимизировать выбором индивидуальных ограничений $\{C_i\}$ механизмов стимулирования, удовлетворяющих $\sum_{i \in I} C_i \le C$, следующее выражение:

$$\Phi(C) = \max_{\{y_i \in P_i^*(C_i)\}} H(y_1, ..., y_n),$$

что является стандартной задачей условной оптимизации.

Пример 2.2. Пусть в активной системе имеется $n \ge 1$ активных элементов с функциями дохода $h_i(y_i) = y_i - y_i^2 / 2r_i$, $i \in I$; ограничения механизмов стимулирования C_i таковы, что $\sum_{i \in I} C_i \le C$, целевая функция центра $H(y) = \sum_{i \in I} a_i y_i$, где $\{a_i\}$ - положительные константы.

При заданных условиях максимальное реализуемое действие каждого элемента определяется: $y_i^+ = r_i + \sqrt{2 r_i C_i}$, $i \in I$. Задача свелась к определению оптимального набора ограничений C_i^*, удовлетворяющего бюджетному ограничению и максимизирующего целевую функцию центра.

Решение соответствующей задачи имеет вид:

$$C_i^* = \frac{r_i a_i^2}{\sum_{j \in I} r_j a_j^2} C, \ i \in I. \bullet$$

2.3. Согласованные системы стимулирования

Выше мы ввели понятия эффективности механизма функционирования АС и эффективности механизма стимулирования в АС. Была доказана теорема об оптимальности скачкообразных, квазискачкообразных, компенсаторных и квазикомпенсаторных систем стимулирования в одноэлементной детерминированной АС.

Решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования, заключающейся в определении множества точек функционального пространства, может сталкиваться со значительными трудностями как теоретического, так и вычислительного характера. Кроме того, в динамике оперативное изменение функции стимулирования возможно далеко не всегда – как с точки зрения возможностей центра по переработке информации, так и с точки зрения адаптивных свойств активных элементов. Поэтому возникает желание упростить задачу управления АС, в частности - за счет использования параметрических управлений, при применении которых центр фиксирует класс систем стимулирования, а затем изменяет только значения параметров из этого класса, конкретизируя тем самым выбираемую им стратегию. В задачах стимулирования в качестве такого оперативно измененяемого параметра выступает план. Например, в классе M_C (параметрических) скачкообразных систем стимулирования планом является точка ”скачка”. Перейдем к рассмотрению систем стимулирования, явно зависящих от плана, и исследуем их свойства, основным из которых является согласованность.

Предположим, что центр выбрал класс функций стимулирования $M_\aleph$, параметризуемый переменной $x \in X$, которую в дальнейшем будем называть *планом*, таким, что $c(x, y)\big|_{y=x} = 0$: $\aleph = \{c(x, \cdot) \in M, x \in X = A\}$. То есть, если план выполнен, то штрафы, налагаемые на АЭ, равны нулю. Будем также считать, что выполнена ГБ и, если $x \in P(c(x, \cdot))$, то АЭ выберет действие, совпадающее с планом. Таким образом, АЭ выбирает действие:

$$y \in P^{ГБ}(c(x, \cdot)) = \begin{cases} x, \text{при } x \in P(c(x, \cdot)); \\ P(c(x, \cdot)), \text{при } x \notin P(c(x, \cdot)). \end{cases}$$

Определим *множество* $Q(\aleph)$ *согласованных планов* – таких, что назначенный план АЭ всегда выгодно выполнять:

$$Q(\aleph) = \{x \in X \,|\, h(x) - c(x, x) \geq h(y) - c(x, y), \forall y \in A\}.$$

При этом $Q(\aleph) \subseteq P_\aleph$. Класс систем стимулирования $\grave{A}$, для которого выполняется $Q(\aleph) = P_\aleph$, называется *согласованным*. Содержательно, использование класса согласованных систем стимулирования позволяет добиться согласования интересов и предпочтений центра и АЭ.

Теорема 2.6. Для выполнения $Q(\aleph) = P_\aleph$ достаточно, чтобы функции штрафов $c \in \aleph$ удовлетворяли «*неравенству треугольника*»:

$$\forall x, y, z \in X = A \quad c(x, y) \le c(x, z) + c(z, y).$$

Доказательство. Так как $Q(\aleph) \subseteq P_{\aleph}$, то достаточно показать, что, если выполнено «неравенство треугольника», то $Q(\aleph) \subseteq P_{\aleph}$. Допустим, что $z \in P(c(x,\cdot))$. Тогда $h(z) - c(x, z) \ge h(y) - c(x, y), \forall y \in A$.

Предположим, что $z \notin Q(\aleph)$, тогда $\exists y \in A : h(y) - c(z, y) > h(z)$. Суммируя два последних неравенства, получаем противоречие с предположением теоремы. ·

Таким образом, для классов систем стимулирования, удовлетворяющих теореме 2.6, множество согласованных планов совпадает с множеством действий, реализуемых данным классом систем стимулирования.

Примером классов систем стимулирования, удовлетворяющих «неравенству треугольника», являются следующие [8].

1. Если штрафы зависят только от абсолютных показателей невыполнения плана $\Delta = |y - x|$, и c является вогнутой и неубывающей на полуосях функцией Δ (см. рисунок 2.8), то они удовлетворяют «неравенству треугольника».

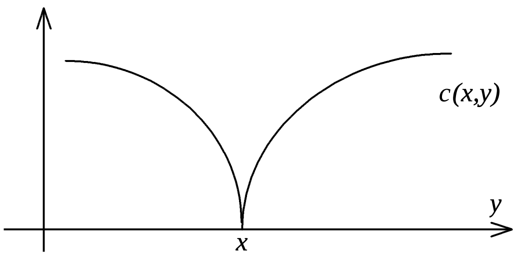

Рис. 2.8. Пример согласованной системы стимулирования

2. Функции штрафов вида:

$$c(x, y) = \begin{cases} 0, \ y = x; \\ r(y) \ge 0, \ y \ne x, \end{cases}$$

называют *независящими от плана*. Они также удовлетворяет «неравенству треугольника».

3. Если заданы несколько согласованных функций штрафов $c_i(x, y), i = \overline{1, m}$, то функция штрафов $c(x, y) = \max\limits_{i=1,m} \{c_i(x, y)\}$ также является согласованной.

При заданном классе систем стимулирования $\grave{A}$ можно сформулировать задачу *оптимального согласованного планирования* как задачу поиска плана из множества согласованных планов $Q(\aleph)$, максимизирующего целевую функцию центра:

$$x^* = \arg\max_{x \in Q(\aleph)} \Phi(x) .$$

Рассмотренный выше принцип выбора наилучшего с точки зрения центра реализуемого действия: $y^* = \arg\max\limits_{y \in P_\aleph} H(y)$ называют *принципом оптимального планирования с прогнозом состояния* АЭ.

Очевидно, что, поскольку $Q(\aleph) \subseteq P_\aleph$, то эффективность принципа оптимального согласованного планирования не выше, чем оптимального планирования с прогнозом состояния. Эти эффективности совпадают для классов согласованных систем стимулирования.

Пусть имеются две АС, в которых используются механизмы стимулирования: $c_1 \in \aleph_1$ и $c_2 \in \aleph_2$, а функции дохода АЭ одинаковы. Будем говорить, что класс систем стимулирования $\aleph_2$ имеет большую *степень централизации*, чем $\aleph_1$ (и обозначать $\aleph_2 > \aleph_1$), если $\forall x \in X$, $\forall y \in A \quad c_2(x, y) \geq c_1(x, y)$.

Теорема 2.7. Если $\aleph_1$ и $\aleph_2$ - два класса согласованных систем стимулирования и $\aleph_2 > \aleph_1$, то $Q(\aleph_1) \subseteq Q(\aleph_2)$.

Доказательство. Пусть $x \in Q(\aleph_1)$, тогда $h(x) \geq \max\limits_{y \in A} \left[h(y) - c_1(x, y)\right]$. Предположим, что $x \notin Q(\aleph_2)$, тогда $h(x) < \max\limits_{y \in A} \left[h(y) - c_2(x, y)\right]$. Значит выполнено следующее соотношение: $\max\limits_{y \in A} \left[h(y) - c_2(x, y)\right] > \max\limits_{y \in A} \left[h(y) - c_1(x, y)\right]$, что входит в противоречие с условием теоремы. ·

Как видим, множество согласованных планов не уменьшается с увеличением степени централизации. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8. Если $\aleph_1$ и $\aleph_2$ - два класса согласованных систем стимулирования и $\aleph_2 > \aleph_1$, то $K(\aleph_2) \geq K(\aleph_1)$.

Из теоремы 2.8 следует, что на множестве согласованных систем стимулирования оптимальны классы систем стимулирования, имеющих максимальную степень централизации.

2.4. Задачи стимулирования, сформулированные в терминах сравнительных предпочтений

Пусть в одноэлементной АС множество возможных действий АЭ конечно: $A=\{y_1, ..., y_n\}$ и предпочтения АЭ в отсутствии стимулирования[1] заданы следующим образом [19]. Элементы s_{ij} матрицы Σ, $i, j = \overline{1, n}$ - положительные, отрицательные или равные нулю числа, интерпретируемые как сравнительные предпочтительности различных действий АЭ. Если $s_{ij} < (>) 0$, то действие y_i в отсутствии стимулирования строго лучше (хуже) для АЭ, чем действие y_j; если $s_{ij} = 0$, то действия y_i и y_j эквивалентны. Матрица Σ задает на множестве A так называемое *метризованное* (*сравнительное*) *отношение*, являющееся в некотором смысле обобщением рассмотренных выше бинарных отношений.

Предположим, что управление со стороны центра (стимулирование) заключается в изменении сравнительной предпочтительности различных действий, то есть элементов матрицы Σ. Задача стимулирования при этом будет заключаться в таком их допустимом изменении, чтобы наилучшим для АЭ стало максимально благоприятное для центра действие.

Предположим, что предпочтения АЭ удовлетворяют следующему свойству:

$$\forall i, j, m \in \{1, ..., n\} \qquad s_{ij} = s_{im} + s_{mj} .$$

Это условие называется *условием внутренней согласованности* (*аддитивной транзитивности*) предпочтений АЭ. Из него следует, что

[1] *В непрерывном случае, рассматриваемом в предыдущих параграфах, предпочтения активного элемента в отсутствии стимулирования определялись его функцией дохода или функцией затрат.*

$s_{ii} = 0$, $s_{ij} = -s_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, причем граф, соответствующий матрице Σ, является потенциальным с потенциалами вершин $q_i = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} s_{im}$, $i = \overline{1, n}$. Матрицу Σ можно однозначно восстановить по потенциалам q_i следующим образом:

$$s_{ij} = q_j - q_i,\ i, j = \overline{1, n}.$$

Содержательно потенциалы действий можно интерпретировать как значение функции дохода АЭ, а элементы матрицы Σ - как их первые разности.

Наилучшим с точки зрения АЭ действием в рассматриваемой модели будем считать действие y_k, для которого $s_{kj} \le 0$ для всех $j = \overline{1, n}$. В случае внутренне согласованных предпочтений такое действие (может быть не единственное) всегда существует - это действие, имеющее максимальный потенциал. Таким образом, множество индивидуально-рационального выбора:

$$P(\Sigma, A) = \{y_k \in A \mid \forall j = \overline{1,n} \quad s_{kj} \le 0\}.$$

Определим для произвольных i и j, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, операцию $(j \to i)$ «уравнивания» потенциалов действий y_j и y_i: $q_j^{j\to i} \to q_j + (q_i - q_j)$. В терминах элементов матрицы Σ эту операцию можно записать в виде:

$$s_{jm}^{j\to i} \to s_{jm} + s_{ij},\ s_{mj}^{j\to i} \to -s_{jm},\ m = \overline{1, n}.$$

При этом, очевидно, действие y_j становится эквивалентным действию y_i $(s_{ij} = s_{ji} = 0)$, причем внутренняя согласованность предпочтений АЭ сохраняется. Примем, что стоимость проведения операции $(j \to i)$ равна s_{ji}.

Максимальное множество реализуемых действий в рассматриваемой модели при заданных ограничениях C механизма стимулирования: $P' = \{y_i \in A \mid s_{ik} \le C\}$, где y_k - наиболее предпочтительное с точки зрения АЭ действие.

Для решения прямой задачи стимулирования центр выбирает из множества P' действие, наиболее предпочтительное с его собственной точки зрения.

Решение обратной задачи стимулирования определяется следующим образом: если y_k - наиболее предпочтительное с точки зрения АЭ в отсутствии стимулирования действие, то минимальные затраты на стимулирование по реализации действия y_l равны s_{lk}, $l = \overline{1, n}$.

<u>Теорема 2.9.</u> Задачи стимулирования, сформулированные в терминах целевых функций и внутренне согласованных сравнительных предпочтений, эквивалентны.

Доказательство. Эквивалентность подразумевает сводимость одной задачи к другой и наоборот. Пусть задача стимулирования сформулирована в терминах целевых функций, то есть известна функция дохода АЭ. Матрицу Σ, считая значения функции дохода потенциалами, определим следующим образом: $s_{ij} = h_j - h_i$, $i, j = \overline{1, n}$, то есть получим матрицу, элементы которой удовлетворяют условию внутренней согласованности. Максимальное множество реализуемых действий P в исходной задаче – все действия $y_i \in A$, такие что $h(y_i) \geq h_{\max} - C$, что, очевидно, влечет за собой $s_{ik} \leq C$, то есть множества P и P' совпадают.

Аналогично, если выполнено условие внутренней согласованности, то по матрице Σ можно восстановить потенциалы $h_i = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} s_{im}$, $i = \overline{1, n}$, то есть выполнить переход в обратную сторону. •

Из теоремы 2.9. следует, что метризованные отношения описывают более широкий класс предпочтений участников АС, нежели чем целевые функции и функции полезности, так как последние эквивалентны внутренне согласованным метризованным отношениям.

Глава 3. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

3.1. Элементы теории контрактов

Теория контрактов – раздел теории управления в социально-экономических системах, изучающий механизмы стимулирования в активных системах, функционирующих в условиях внешней вероятностной неопределенности. *Базовой моделью теории контрактов* является одноэлементная статическая задача стимулирования второго рода в АС с внешней вероятностной неопределенностью и симметричной информированностью участников [5,19]. Будем считать, что активный элемент выбирает действие $y \in A$, которое под влиянием внешней среды приводит к реализации результата деятельности $z \in A_0$. Пусть задана плотность распределения вероятности $p(z, y)$ - вероятность реализации результата деятельности $z \in A_0$ при выборе $АЭ$ действия $y \in A$ (см. рис. 3.1).

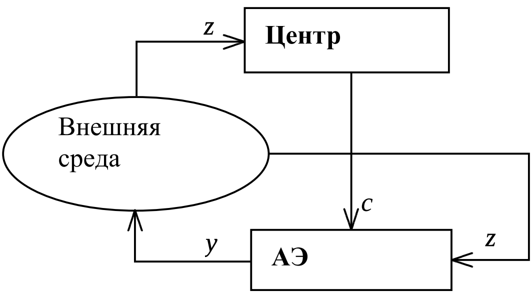

Рис. 3.1. Модель активной системы с внешней неопределенностью и симметричной информированностью

Пусть функция полезности центра задана в виде дохода $\tilde{H}(z)$, который зависит от результата деятельности $z \in A_0$, а функция полезности элемента в виде “доход минус штрафы”: $\tilde{u}(\tilde{c}(\cdot),\ z) = \tilde{h}(z) - \tilde{c}(z)$, или в виде “стимулирование минус затраты” $\tilde{u}(\tilde{s}(\cdot),\ z,\ y) = \tilde{s}(z) - c(y)$.

В дальнейшем функции полезности элемента, а также функции дохода, штрафов, стимулирования, зависящие от результата деятельности z, будем отличать от соответствующих величин, являющихся их ожидаемыми значениями, тильдой над обозначением функции. Например, $c(y) = \int_{A_0} \tilde{c}(z) p(z, y) dz$.

Примем следующий *порядок функционирования* активной системы:

1. Центр сообщает АЭ функцию стимулирования $c(z) \in M$ - зависимость выплат элементу (штрафов) от результатов деятельности.

2. Активный элемент выбирает действие $y \in A$.

3. Реализуется случайная величина – результат деятельности АЭ $z \in A_0$.

4. Центр наблюдает результат деятельности $z \in A_0$, проводятся выплаты и определяются значения функций полезности участников АС. При этом центр не имеет возможности наблюдать действия $y \in A$ АЭ.

Будем считать, что так как на момент принятия решений участники не знают результата деятельности, а имеют лишь информацию о распределении плотности вероятности $p(z, y)$, то они используют ожидаемую полезность для устранения неопределенности, то есть целевыми функциями участников являются математические ожидания соответствующих функций полезности (см. также раздел 1.2).

Задача (первого рода) синтеза оптимальной функции стимулирования имеет вид:

$$\Psi(\tilde{s}, y^*) = \int_{A_0} \tilde{H}(z) p(z, y^*) dz \to \max_{\tilde{s}(\cdot) \in M},$$

$$y^* \in \operatorname*{Argmax}_{y \in A} \left\{ \int_{A_0} \tilde{s}(z) p(z, y) dz - c(y) \right\},$$

$$\int_{A_0} \tilde{s}(z) p(z, y^*) dz - c(y) \geq \overline{U},$$

где $\overline{U}$ - некоторая константа, носящая название *ограничения пособия по безработице* (для простоты далее будем полагать $\overline{U} = 0$).

Аналогичную формулировку задачи первого рода можно привести и для представления целевой функции АЭ в виде «доход минус штрафы»:

$$\Psi(\tilde{s}, y^*) = \int_{A_0} \tilde{H}(z) p(z, y^*) dz \to \max_{\tilde{c}(\cdot) \in M},$$

$$y^* \in \operatorname{Argmax}_{y \in A} \left\{ \int_{A_0} \left[\tilde{h}(z) - \tilde{c}(z) \right] p(z, y) dz \right\}.$$

Приведенную задачу называют *задачей* (первого рода) *теории контрактов*[1], а решение $\{s^*(\cdot), y^*\}$ - *оптимальным контрактом*.

Одним из численных методов решения задачи теории контрактов является *двухшаговый метод*.

Предположим, что множество возможных действий АЭ конечно, то есть $A = \{y_1, ..., y_n\}$, $A_0 = \{z_1, ..., z_n\}$. Обозначим $s_i = s(y_i)$, $c_i = c(y_i)$ и $p_{ij} = p(z_j, y_i)$.

На первом шаге определяется множество реализуемых действий: для каждого возможного действия y_k, $k = \overline{1, n}$, ищется система стимулирования s_j^k, реализующая его и удовлетворяющая ограничениям $0 \le s_j^k \le C$, $j = \overline{1, n}$, то есть s_j^k:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} s_j^k p_{kj} - c_k \ge \sum_{j=1}^{n} s_j^k p_{ij} - c_i, \forall i = \overline{1, n}; \\ 0 \le s_j^k \le C, \ j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Если решение этой задачи существует, то действие y_k реализуемо. Минимальные затраты на стимулирование по реализации действия y_k

[1] *Более корректно, в задаче теории контрактов [5] АЭ имеет фон-Неймановскую функцию полезности, зависящую от выплат со стороны центра. Мы рассматриваем упрощенный случай – когда эта функция линейна.*

равны $s_k^{\min} = \sum_{j=1}^{n} s_j^k p_{kj}$. Если некоторое действие не реализуемо, то затраты по его реализации положим равными $+\infty$.

На втором шаге определяется $k^* \in \operatorname{Arg}\max_{i \in \overline{1,n}} \left[\sum_{j=1}^{n} \tilde{H}(z_j) p_{ij} - s_i^{\min} \right]$, то есть наиболее выгодное для центра реализуемое действие.

Двухшаговый метод решения задачи теории контрактов полностью аналогичен описанному выше методу решения детерминированной задачи стимулирования – сначала определяется множество действий АЭ, реализуемых при данных ограничениях, а затем ищется оптимальное реализуемое действие.

Несмотря на наличие численных алгоритмов, необходимость приближенной оценки влияния неопределенности заставляет искать решение задач теории контрактов в аналитическом виде.

3.2. Задача синтеза оптимального механизма стимулирования в активной системе с внешней вероятностной неопределенностью

Рассмотрим активную систему, состоящую из одного АЭ и центра. Пусть функции полезности центра и АЭ имеют следующий вид (задача стимулирования первого рода): $\Phi(z) = \tilde{H}(z)$, $f(x, z) = \tilde{h}(z) - \tilde{c}(x, z)$. Пусть результат деятельности АЭ $z \in A_0$ определяется интегральной функцией распределения $F(z, y)$, а $p(z, y)$ - соответствующая ей плотность распределения.

Введем следующие предположения:

А.5. $A_0 = A$; функции $\tilde{H}(z), \tilde{h}(z) \in SP$ положительны, непрерывно дифференцируемы, строго вогнуты и финитны.

А.6. $c(z)$ - кусочно-непрерывно дифференцируемая, неотрицательная, ограниченная сверху функция:

$$\forall\, z \in A_0 \quad 0 \le c(z) \le C < +\infty .$$

А.7. Интегральная функция распределения представима в виде $F(z, y) = \hat{F}(z - y)$, соответствующая ей плотность распределения

$\hat{p}(z-y)$ существует, почти везде дважды непрерывнодифференцируема, унимодальна с модой y и удовлетворяет

$$\int_{A_0} z\hat{p}(z,\, y)dz = y\,.$$

Предположения А.5-А.7 будем считать выполненными на протяжении настоящего раздела.

Введем следующие обозначения:

$$H(y) = \int_{A_0} \widetilde{H}(z)p(z,\, y)dz\,;\; h(y) = \int_{A_0} \widetilde{h}(z)p(z,\, y)dz\,;\; c(y) = \int_{A_0} \widetilde{c}(z)p(z,y)dz\,;$$

$$y_1 = \arg\max_{y\in A} H(y)\,;\; y_2 = \arg\max_{y\in A} h(y)\,,\; h_{\max} = h(y_2)\,;$$

$$y_3 = \max\{y\in A \mid h(y) \geq h_{\max} - C\}\,;\; y_4 = \max\left\{y\in A \,\middle|\, \left|\frac{\partial h(y)}{\partial y}\right| \leq C\hat{p}(0)\right\};$$

$$x_0 = \min\{y_3,\, y_4\}\,;\; y_5(x) = \min\left\{y\in A \,\middle|\, y\in \operatorname*{Argmax}_{y\in[y_2,\, x]} f(x,\, y)\right\};$$

$$y^*(x) = \max\left\{y\in A \,\middle|\, \operatorname*{Argmax}_{y\geq x} f(x,\, y)\right\};$$

$$\hat{y}(x) = \max\left\{y\in A \,\middle|\, \frac{h(y_5) + h(y^*)}{2} \leq h(y)\right\}.$$

Следует отметить, что в точках y^* и y_5 ($y_5 \leq x \leq y^*$) находятся максимумы целевой функции АЭ из разных интервалов: $y^* \in [x, +\infty)$, $y_5 \in [y_2, x)$, где x - план в скачкообразной функции штрафов (см. рисунок 3.2).

Существование и единственность величин $y_1, ..., y_5$ следует из свойств функций $H(y)$ и $h(y)$, устанавливаемых леммами 3.1 и 3.2, приводимыми без доказательств [19].

<u>Лемма 3.1.</u> Функции $H(y)$ и $h(y)$ удовлетворяют А.5.

<u>Лемма 3.2.</u> Функция $F(z,y)$ не возрастает по y.

Во второй главе было доказано, что в детерминированной задаче первого рода оптимальна скачкообразная система стимулирования. Поэтому исследуем свойства этого класса систем стимулирования в вероятностных АС. Рассмотрим скачкообразную систему стимулирования: $\tilde{c}_C(x, z) = \begin{cases} C, z < x; \\ 0, z \geq x, \end{cases}$ тогда $c_C(x, y) = CF(x, y)$.

В целях упрощения в дальнейшем будем исследовать случай, когда центру необходимо реализовать максимально возможное действие (в [19] доказано, что, если в классе M_C реализуемо некоторое действие y^*, то реализуемо и любое действие $y \in [y_2, y^*]$). Вид целевой функции АЭ при использовании центром скачкообразной системы стимулирования $\tilde{c}_C(x^*, z)$ приведен на рисунке 3.2.

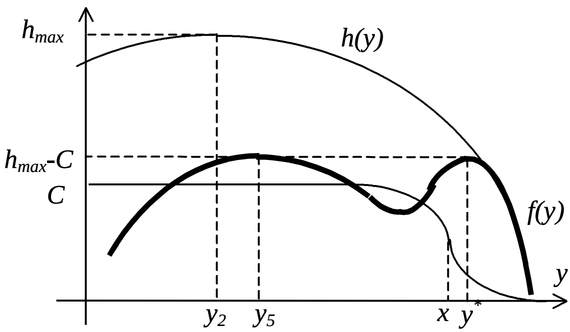

Рис. 3.2. Целевая функция АЭ

Следующая теорема дает критерий реализуемости действия $y^* \in A$ скачкообразной системой стимулирования.

<u>Теорема 3.1.</u> Для того чтобы система $\tilde{c}_C(x^*, z)$ реализовывала действие $y^* \geq y_2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось:

$$F(x^*, y_5(x^*)) - F(x^*, y^*) \geq \frac{1}{C}\left[h(y_5(x^*)) - h(y^*)\right].$$

Доказательство. Необходимость. Из того, что действие y^* реализуемо, следует, что $\forall y \in A$ $h(y^*) - c_C(x^*, y^*) \geq h(y) - c_C(x^*, y)$, тогда, подставляя $y = y_5$, получаем, что выполнено:

$$h(y^*) - c_C(x^*, y^*) \geq h(y_5) - c_C(x^*, y_5).$$

Так как $c_C(x, y) = CF(x, y)$, то

$$F(x^*, y_5(x^*)) - F(x^*, y^*) \geq \frac{1}{C}\left[h(y_5(x^*)) - h(y^*)\right].$$

Достаточность. Докажем, что при $x \geq y_2$ максимум целевой функции АЭ может достигаться только в точках $y \geq y_2$.

Предположим противное: пусть максимум целевой функции $f(y)$ достигается в точке $y^* < y_2$, тогда $h(y^*) - CF(x^*, y^*) \geq$ $\geq h(y_2) - CF(x^*, y_2)$, то есть $F(x^*, y_2) - F(x^*, y^*) \geq \frac{1}{C}\left[h(y_2) - h(y^*)\right]$.

С другой стороны, в силу леммы 3.2 $F(x^*, y_2) - F(x^*, y^*) \leq 0$. При этом в силу предположения А.5 $h(y_2) - h(y^*) > 0$, то есть $F(x^*, y_2) - F(x^*, y^*) < \frac{1}{C}\left[h(y_2) - h(y^*)\right]$. Получили противоречие, значит $y^* \geq y_2$.

Докажем, что $f(y)$ не может достигать максимума при $y > x_0$. Предположим, что это не так и существует $\tilde{y} > x_0$ такое, что $f(\tilde{y}) \geq f(y)$, $\forall y \in A$.

Пусть $x_0 = y_3$. Из детерминированной теории следует, что y_3 - максимальное реализуемое любой системой стимулирования, удовлетворяющей А.6, действие (см. доказательство теоремы 2.1). Поэтому $\tilde{y} \leq y_3$.

Если $x_0 = y_4$, воспользуемся тем, что функция $f(y)$ дифференцируема. В точке максимума необходимо выполнение условия $f'(\tilde{y}) = h'(\tilde{y}) - c'(\tilde{y}) = 0$, то есть $h'(\tilde{y}) = c'(\tilde{y})$. Воспользовавшись А.6 и А.7, выполним оценку:

$$\left|\frac{\partial c(x^*, \tilde{y})}{\partial y}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\int_{A_0} \tilde{c}(x^*, z) p(z, y) dz\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\int_{A_0} -[\frac{\partial}{\partial z}\tilde{c}(x^*, z)] F(z, y) dz\right| =$$

$$= \left|\int_{A_0} [\frac{\partial}{\partial z}\tilde{c}(x^*, z)] \hat{p}(z - y) dz\right| \leq \hat{p}(0)\left|\int_{A_0} \frac{\partial}{\partial z}\tilde{c}(x^*, z) dz\right| \leq C\hat{p}(0).$$

Следовательно, $\tilde{y} \leq y_4$.

Таким образом, $\tilde{y} \le x_0$. Значит, максимум $f(y)$ может достигаться только на отрезке $[y_2, x_0]$. Тогда, если

$$F(x^*, y_5(x^*)) - F(x^*, y^*) \ge \frac{1}{C}\left[h(y_5(x^*)) - h(y^*)\right],$$

то $f(y^*(x)) \ge f(y_5(x))$ и действие $y^*(x)$ реализуемо. •

Следствие 3.1. Для любой допустимой убывающей функции штрафов $\tilde{c}(z)$, соответствующей стремлению центра реализовать максимальное действие ($x \ge y_2$), целевая функция АЭ $f(y) = h(y) - c(y)$ достигает максимума на отрезке $[y_2, x_0]$, то есть $\operatorname*{Argmax}_{t \in A} f(t) \subseteq [y_2, x_0]$.

Следствие 3.2. Если y^* - максимальное реализуемое системами стимулирования $\tilde{c}_C(x, z)$ ($x \in A_0$ $x \ge y_2$) действие, то $f(y_5(x)) = f(y^*(x))$.

Следующие три теоремы дают достаточные условия того, что именно скачкообразная система стимулирования реализует максимальное в классе M действие АЭ.

Теорема 3.2. Если система стимулирования $\tilde{c}_C(x^*, z)$ реализует максимальное реализуемое в классе M_C действие y^*, выполнено

$$F(x^*, y_5) - F(x^*, \hat{y}) \ge 2\hat{F}\left(\frac{x_0 - \hat{y}}{2}\right) - 1,$$

а распределение $p(z, y)$ симметрично относительно точки $y \in A$, то y^* - максимальное действие, реализуемое системами стимулирования из класса M.

Доказательство. Запишем условие реализуемости действия y^* системой стимулирования $\tilde{c}(x^*, z)$:

$$h(y^*) - c_C(x^*, y^*) \ge h(y) - c_C(x^*, y) \quad \forall y \in A.$$

Положим $y = y_5(x^*)$, тогда в соответствии со следствием 3.2 получим:

$$h(y_5(x^*)) - c(x^*, y_5(x^*)) = h(y^*(x^*)) - c(x^*, y^*(x^*)).$$

При этом выполнено:

$$h(y_5(x^*)) - c(x^*, y_5(x^*)) \ge h(y) - c(x^*, y) \ \forall y \in A.$$

Пусть некоторая система стимулирования $\tilde{c}_2(z)$ реализует действие $\tilde{y} > y^*$, тогда

$$\forall y \in A \quad h(\tilde{y}) - c_2(\tilde{y}) \geq h(y) - c_2(y) .$$

В частности, два последних неравенства верны и для $y = \hat{y}$:

$$h(y_5(x^*)) - c(x^*, y_5(x^*)) \geq h(\hat{y}) - c(\hat{y}) .$$

$$h(\tilde{y}) - c_2(\tilde{y}) \geq h(\hat{y}) - c_2(\hat{y}) .$$

Складывая эти неравенства, получаем:

$$h(y_5(x^*)) - CF(x^*, y_5(x^*)) + h(\tilde{y}) - c_2(\tilde{y}) \geq 2h(\hat{y}) - CF(x^*, \hat{y}) - c_2(\hat{y}) .$$

Из того, что $\tilde{y} > y^*$ следует, что $h(\tilde{y}) < h(y^*)$, а $h(y_5(x^*)) + h(\tilde{y}) - 2h(\hat{y}) < 0$ по определению $\hat{y}$. Получаем

$$c_2(\hat{y}) - c_2(\tilde{y}) > CF(x^*, y_5(x^*)) - CF(x^*, \hat{y}) .$$

Оценим разность $c_2(\hat{y}) - c_2(\tilde{y})$, пользуясь симметричностью плотности распределения вероятности:

$$c_2(\hat{y}) - c_2(\tilde{y}) = \int_{A_0} \tilde{c}_2(z)[p(z, \hat{y}) - p(z, \tilde{y})]dz =$$

$$= \tilde{c}_2(z)[F(z, \hat{y}) - F(z, \tilde{y})]\Big|_{A_0} - \int_{A_0} \frac{\partial \tilde{c}_2(z)}{\partial z}[F(z, \hat{y}) - F(z, \tilde{y})]dz \leq$$

$$\leq \int_{A_0} \left(-\frac{\partial c_2(z)}{\partial z} \right) \max_{z \in A_0} [F(z, \hat{y}) - F(z, \tilde{y})]dz =$$

$$= C\left[F\left(\frac{\hat{y} + \tilde{y}}{2}, \hat{y} \right) - F\left(\frac{\hat{y} + \tilde{y}}{2}, \tilde{y} \right) \right] = C\left[2\hat{F}\left(\frac{\tilde{y} - \hat{y}}{2} \right) - 1 \right].$$

Получаем следующее неравенство:

$$C\left[2\hat{F}\left(\frac{\tilde{y} - \hat{y}}{2} \right) - 1 \right] \geq c_2(\hat{y}) - c_2(\tilde{y}) > CF(x^*, y_5(x^*)) - CF(x^*, \hat{y}) ,$$

что входит в противоречие с условием теоремы. •

<u>Теорема 3.3.</u> Если система стимулирования $\tilde{c}_C(x^*, z)$ реализует действие $y^* = x_0$, то $\tilde{c}_C(x^*, z)$ оптимальна в *M*.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством достаточности в теореме 3.1. •

Теорема 3.4. Если $p(z, y)$ - финитное в Δ-окрестности точки y распределение, $y_3 \geq y_2 + 2\Delta$ и $\forall y \in [y_3 - 2\Delta, y_3]$ $p(x^*, y) \geq \frac{1}{C}\left|\frac{\partial h(y)}{\partial y}\right|$, где $x^* = y_3 - \Delta$, то система стимулирования $\tilde{c}_C(x^*, z)$ реализует максимально возможное в классе M действие.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $x_0 = y_3$. Так как носитель распределения имеет ширину 2Δ, то $c_C(x^*, y_2) = C$. По той же причине $c_C(x^*, y_3) = 0$. На отрезке $[y_2, y_3 - 2\Delta]$ целевая функция АЭ равна: $f(y) = h(y) - C$. Следовательно, $y_5(x^*) = y_2$ и $f(y)$ не убывает на отрезке $[y_3 - 2\Delta, y_3]$, то есть $y^* = y_3$. При этом $f(y_2) = f(y_3)$ и в силу теоремы 3.1 действие y_3 реализуемо, а в силу теоремы 3.3. система стимулирования $c_C(x^*, z)$ оптимальна. •

Итак, теоремы 3.2 - 3.4 дают достаточные условия оптимальности (в рамках введенных предположений) скачкообразных систем стимулирования в классе M. В работе [19] доказано, что компенсаторные системы стимулирования в рамках введенных предположений в задаче первого рода не оптимальны. Общих аналитических методов решения вероятностных задач стимулирования второго рода на сегодняшний день, к сожалению, не существует.

3.3. Модель простого активного элемента

Хрестоматийной моделью вероятностной АС, в которой удается получить простое аналитическое решение задачи стимулирования, является модель простого АЭ.

Пусть интегральная функция распределения может быть представлена в виде:

$$F(z, y) = \begin{cases} F(z), \ z \leq y; \\ 1, \ z > y. \end{cases},$$

где $F(z)$ - некоторая интегральная функция распределения, зависящая от результата деятельности. Тогда, очевидно, вероятность того, что результат деятельности окажется больше действия, равна нулю. Активная система, в которой интегральная функция распределения представима в таком виде, называется системой с *простым активным элементом*.

В настоящем разделе будем считать выполненными предположения А.5, А.6 и

А.8. $A = A_0 = [0, A^+]$, $A^+ < +\infty$.

А.9. $F(0) = 0$, $\forall z < A^+ \quad F(z) < 1$.

Теорема 3.5. В классе M оптимальна следующая функция штрафов K - типа:

$$\tilde{c}_K(z) = \begin{cases} C, z \le z_2; \\ \tilde{h}(z) - \tilde{h}(z_3), \ z \in [z_2, z_3]; \\ 0, z \ge z_3, \end{cases}$$

где $z_2 = \arg\max\limits_{z \in A_0} \tilde{h}(z)$, $z_3 = \max\{z \ge z_2 \mid \tilde{h}(z) \ge \tilde{h}(z_2) - C\}$.

Доказательство. Целевая функция АЭ равна математическому ожиданию функции полезности:

$$f(y) = \int\limits_0^{A^+} \tilde{f}(z) p(z, y) dz = \tilde{f}(y)[1 - F(y)] + \int\limits_0^{y} \tilde{f}(z) p(z) dz,$$

где $p(z)$ - соответствующая интегральной функции $F(z)$ плотность распределения. Производная целевой функции имеет вид:

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}(y)}{\partial y}[1 - F(y)].$$

Из приведенного выражения следует, что для простого АЭ отрезки монотонности функции полезности и целевой функции совпадают.

При использовании функции штрафов $\tilde{c}_K(z)$, $\tilde{f}(z)$ возрастает на интервале $[0, z_2)$, постоянна на интервале $[z_2, z_3]$, убывает на интервале $[z_3, +\infty)$. Аналогично ведет себя $f(y)$, значит z_3 - реализуемое действие.

Покажем, что для любой допустимой функции штрафов глобальный максимум функции $f(y)$ достигается при $y \le z_3$. Предположим противное, то есть, что существует глобальный максимум функции $f(y)$ в точке $\tilde{y} > z_3$, $\tilde{y} < A^+$, то есть $\forall y \in A \quad f(\tilde{y}) \ge f(y)$. При этом из детерминированной теории (см. теорему 2.1) следует, что глобальный максимум функции $\tilde{f}(z)$ не может достигаться при $z > z_3$. То есть, найдется точка $y' \le z_3 < \tilde{y} < A^+$ такая, что $\tilde{f}(z' = y') > \tilde{f}(\tilde{z} = \tilde{y})$ и при этом $f(y') \le f(\tilde{y})$.

Из связи функций f и $\tilde{f}$ следует неравенство:

$$\tilde{f}(\tilde{y})[1 - F(\tilde{y})] + \int_0^{\tilde{y}} \tilde{f}(z)p(z)dz - \tilde{f}(y')[1 - F(y')] - \int_0^{y'} \tilde{f}(z)p(z)dz \ge 0,$$

откуда: $\tilde{f}(\tilde{y})[1 - F(\tilde{y})] + \tilde{f}(y')[1 - F(y')] + \int_{y'}^{\tilde{y}} \tilde{f}(z)p(z)dz \ge 0$.

Из того, что $y' < \tilde{y}$ и $\tilde{f}(z' = y') > \tilde{f}(\tilde{z} = \tilde{y})$, получим следующую оценку:

$$\tilde{f}(\tilde{y})[1 - F(\tilde{y})] - \tilde{f}(y')[1 - F(y')] + \int_{y'}^{\tilde{y}} \tilde{f}(z)p(z)dz \le$$

$$\le \tilde{f}(\tilde{y})[1 - F(\tilde{y})] - \tilde{f}(y')[1 - F(y')] + \tilde{f}(y')[F(\tilde{y}) - F(y')] =$$

$$= \tilde{f}(\tilde{y})[1 - F(\tilde{y})] - \tilde{f}(y') + \tilde{f}(y')F(\tilde{y}) = \left[\tilde{f}(\tilde{y}) - \tilde{f}(y')\right][1 - F(\tilde{y})] < 0,$$

так как $f(\tilde{y}) < f(y')$, а в силу предположения А.9 при $z < A^+$ $F(z) < 1$.

Таким образом:

$$0 > \tilde{f}(\tilde{y})[1 - F(\tilde{y})] + \int_0^{\tilde{y}} \tilde{f}(z)p(z)dz - \tilde{f}(y')[1 - F(y')] - \int_0^{y'} \tilde{f}(z)p(z)dz \ge 0.$$

Получили противоречие, значит, не существует глобального максимума функции $f(y)$ при $y > z_3$. •

Итак, в модели простого активного элемента оптимальны компенсаторные системы стимулирования. В то же время, в работе [19] доказано, что в этом классе активных систем скачкообразные системы стимулирования не оптимальны. Задача поиска общих условий (достаточных и, тем более, необходимых) оптимальности различных систем стимулирования в вероятностных активных системах на сегодняшний день остается открытой.

Глава 4. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С НЕЧЕТКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

4.1. Нечеткие множества и отношения[1]

Нечеткие множества. Пусть X - некоторое множество. *Нечетким подмножеством* $\tilde{A}$ множества X называется множество пар $\tilde{A} = \{m_{\tilde{A}}(x), x\}$, где $x \in X$, $m_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]$. Функция $m_{\tilde{A}} : X \to [0, 1]$ называется *функцией принадлежности* нечеткого множества $\tilde{A}$, а X - *базовым множеством*. Далее в этой главе нечеткие множества обозначаются тильдой.

Носителем множества $\tilde{A}$ называется подмножество множества X, содержащее те элементы из X, для которых значения функции принадлежности больше нуля: $\mathrm{supp}\, \tilde{A} = \{x \in X \mid m_{\tilde{A}}(x) > 0\}$.

Пример 4.1.[2] В качестве примера нечеткого множества рассмотрим нечеткое множество действительных чисел много больших единицы: $\tilde{A} = \{x \in R^1 \mid x >> 1\}$, которое может задаваться функцией принадлежности, эскиз которой изображен на рисунке 4.1. Для сравнения приведем эскиз функции принадлежности четкого множества чисел, строго больших единицы: $B = \{x \in R^1 \mid x > 1\}$. •

Свойства нечетких множеств.

1. Нечеткое множество $\tilde{A}$ называется *нормальным*, если

$$\sup_{x \in X} m_{\tilde{A}}(x) = 1.$$

---

[1] *Первые два параграфа данной главы не имеют непосредственного отношения к задачам управления активными системами и содержат необходимые для последующего изложения сведения из теории нечетких множеств [21].*

[2] *Приводимые в настоящем разделе примеры иллюстрируют соответствие между четкими и нечеткими множествами.*

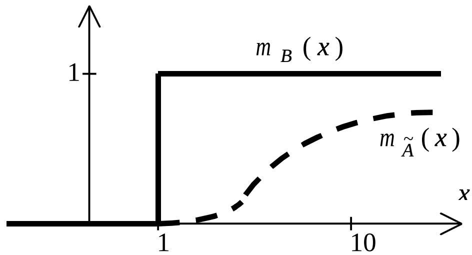

Рис. 4.1. Пример четкого и нечеткого множества

2. Два нечетких множества *равны* (записывается $\tilde{A} = \tilde{B}$), если $\forall x \in X$, $m_{\tilde{A}}(x) = m_{\tilde{B}}(x)$.

<u>Пример 4.2.</u> Задавая четкие множества в виде функций принадлежности, можно сказать, что множества равны, если равны их функции принадлежности. •

3. Нечеткое множество $\tilde{B}$ *содержится* в нечетком множестве $\tilde{A}$ или является подмножеством $\tilde{A}$ (т.е. $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$), если $\forall x \in X$ $m_{\tilde{B}}(x) \le m_{\tilde{A}}(x)$.

<u>Пример 4.3.</u> Функции принадлежности четких подмножеств $A = [1, 5]$ и $B = [3, 4]$ множества действительных чисел (см. рисунок 4.2) имеют вид: $m_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 5]; \\ 0, & x \notin [1, 5], \end{cases}$ и $m_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in [3, 4]; \\ 0, & x \notin [3, 4]. \end{cases}$

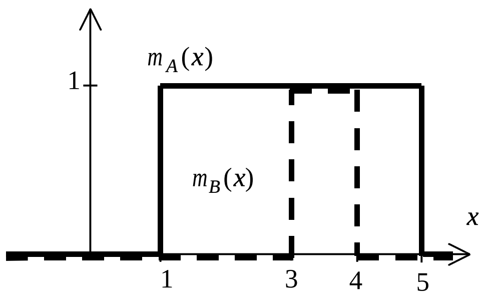

Рис. 4.2. Включение нечетких множеств

Пользуясь приведенным выше определением принадлежности множеств, получаем $B \subseteq A$. Таким образом, для четких множеств определение принадлежности приобретает стандартный вид. •

4. *Пересечением* нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ ($\tilde{A} \cap \tilde{B}$) называется наибольшее нечеткое множество, содержащееся как в $\tilde{A}$, так и в $\tilde{B}$, с функцией принадлежности

$$m_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{B}}(x)\},\ x \in X .$$

Пример 4.4. Рассмотрим четкие множества $A = [1, 4]$ и $B = [3, 5]$. Пользуясь приведенным выше определением пересечения, получаем, что для четких множеств определение операции пересечения приобретает стандартный вид (см. рисунок 4.3). •

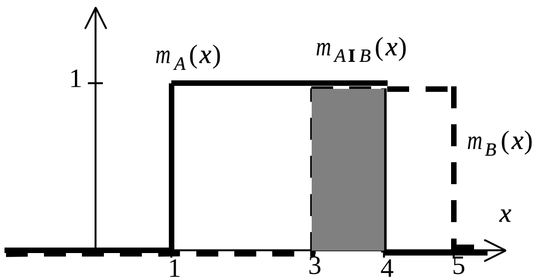

Рис. 4.3. Пересечение множеств

5. *Объединением* нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется наименьшее нечеткое множество, содержащее как $\tilde{A}$, так и $\tilde{B}$, с функцией принадлежности

$$m_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{B}}(x)\},\ x \in X .$$

Пример 4.5. Рассмотрим четкие подмножества $A = [1, 4]$ и $B = [3, 5]$ множества действительных чисел. Пользуясь приведенным выше определением объединения, получаем, что для четких множеств определение операции объединения приобретает стандартный вид (см. рисунок 4.4). •

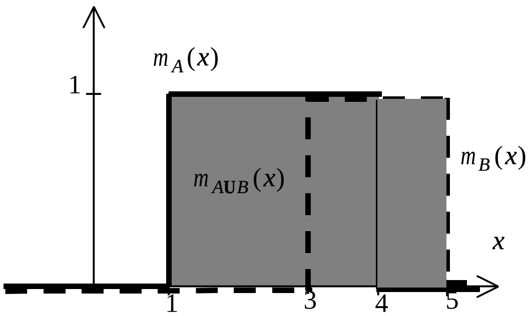

Рис. 4.4. Объединение множеств

5. *Дополнением* нечеткого множества $\tilde{A}$ в X называется нечеткое множество $\neg\tilde{A}$ со следующей функцией принадлежности:

$$m_{\neg\tilde{A}}(x) = 1 - m_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X .$$

<u>Пример 4.6.</u> Рассмотрим четкое подмножество $A = [1, 4]$ множества действительных чисел. Пользуясь приведенным выше определением, получаем, что для четких множеств определение операции дополнения множества приобретает стандартный вид (см. рисунок 4.5). •

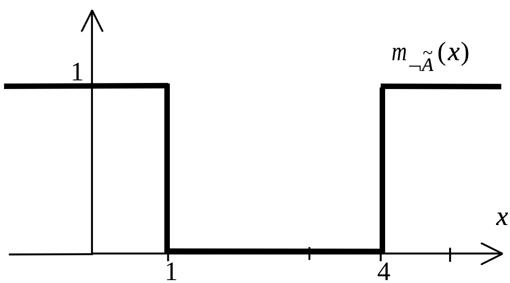

Рис. 4.5. Дополнение множества

Нечеткие отношения. Под четким бинарным отношением, определенным над множеством X, понимается подмножество множества $X \times X$ (см. раздел 1.2). Перенося определение нечетких множеств на отношения, определим нечеткое отношение как нечеткое подмножество X^2. Таким образом, под *нечетким отношением* $\tilde{R}$ будем понимать функцию принадлежности $m_{\tilde{R}}(x, y)$ такую, что $m_{\tilde{R}} : X \times X \to [0, 1]$. Значение функции принадлежности понимается как степень выполнения отношения $x\tilde{R}y$.

Пример 4.7. Рассмотрим четкое отношение R - «больше, либо равно», тогда $R = \{(x, y) | \; x \geq y\}$. Функция принадлежности этого четкого бинарного отношения

$$m_R(x, y) = \begin{cases} 1, \; x \geq y; \\ 0, \; x < y. \end{cases}$$

Множество R изображено на рис. 4.6. •

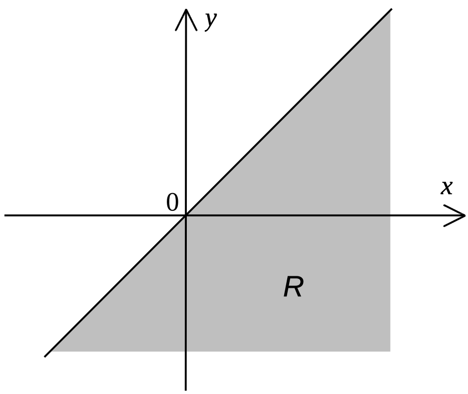

Рис. 4.6. Множество пар (x, y) *четкого отношения* "$\geq$"

Свойства нечетких отношений.

1. *Рефлексивность*: если $\forall x \in X \quad m_{\tilde{R}}(x, x) = 1$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ рефлексивно в смысле Р1; если $\forall x \in X \quad m_{\tilde{R}}(x, x) = \frac{1}{2}$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ рефлексивно в смысле Р2.

2. *Антирефлексивность* (для Р1): если $\forall x \in X \quad m_{\tilde{R}}(x, x) = 0$ то нечеткое отношение $\tilde{R}$ антирефлексивно в смысле Р1.

3. *Симметричность:* если $\forall x, y \in X$ выполняется $m_{\tilde{R}}(x, y) = m_{\tilde{R}}(y, x)$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется симметричным.

4. *Асимметричность*: если $\forall x, y \in X$ из $m_{\tilde{R}}(x, y) > 0$ следует $m_{\tilde{R}}(y, x) = 0$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется асимметричным.

5. *Линейность (полнота)*: нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется l - линейным в смысле определения Л1, если $\forall x, y \in X$ выполняется $\max\left\{m_{\tilde{R}}(x, y), m_{\tilde{R}}(y, x)\right\} > l$, где $l \in [0, 1)$; при $l = 0$, $\tilde{R}$ называется слабо линейным. Если $\forall x, y \in X$ выполняется $\max\left\{m_{\tilde{R}}(x, y), m_{\tilde{R}}(y, x)\right\} = 1$, то отношение $\tilde{R}$ называется *сильно линейным*.

Нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется линейным в смысле определения Л2, если $\forall x, y \in X$ выполняется $m_{\tilde{R}}(x, y) = 1 - m_{\tilde{R}}(y, x)$.

6. *Отрицание* $\tilde{R}'$ отношения $\tilde{R}$ определяется как отношение, функция принадлежности которого $\forall x, y \in X$ определяется $m_{\tilde{R}'}(x, y) = 1 - m_{\tilde{R}}(x, y)$.

7. *Обратное* к отношению $\tilde{R}$ отношение $\tilde{R}^{-1}$ определяется $\forall x, y \in X$ выражением $m_{\tilde{R}^{-1}}(x, y) = m_{\tilde{R}}(y, x)$.

8. *Композицией отношений* (произведением) называется отношение:

К1 - максиминная композиция:

$$m_{\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2}(x, y) = \sup_{z \in X} \min\{m_{\tilde{R}_1}(x, z), m_{\tilde{R}_2}(z, y)\};$$

К2 - минимаксная композиция:

$$m_{\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2}(x, y) = \inf_{z \in X} \max\{m_{\tilde{R}_1}(x, z), m_{\tilde{R}_2}(z, y)\};$$

К3 - максмультипликативная композиция:

$$m_{\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2}(x, y) = \sup_{z \in X}\{m_{\tilde{R}_1}(x, z) m_{\tilde{R}_2}(z, y)\}.$$

9. *Транзитивность*. В соответствии с тремя определениями композиции можно построить три определения транзитивности - (Т1), (Т2) и (Т3) по следующей схеме: $\tilde{R} \cdot \tilde{R} \subseteq \tilde{R}$. Определение максиминной транзитивности в случае четких бинарных отношений совпадет с определением их транзитивности, приведенном в разделе 1.2 (см. также пример 1.3).

Нечетким отношением предпочтения (НОП) назовем нечеткое отношение, удовлетворяющее (Р1), (Л1) и (Т1).

Введем следующее предположение, которое будем считать выполненным на протяжении настоящей главы.

А.10. Предпочтения участников АС являются НОП.

4.2. Модели принятия решений при нечеткой исходной информации

Сформулируем описанное в разделе 1.2 для четких бинарных отношений предпочтения правило индивидуального рационального выбора $P(R_{A_0}, A_0) = \{z \in A_0 \mid \forall t \in A_0 \ zR_{A_0}t\}$ в терминах функций принадлежности. Функция принадлежности четкого бинарного отношения предпочтения R задается в виде: $m_R(x, y) = 1$, если xRy. Строгая (асимметричная, антирефлексивная, транзитивная) его компонента (*отношение строгого предпочтения*) определяется функцией принадлежности: $m_P(x, y) = \max\{m_R(x, y) - m_R(y, x), 0\}$.

Множество альтернатив $x \in A_0$, доминируемых хотя бы одной альтернативой $y \in A_0$, имеет функцию принадлежности $m_P(y, x)$. Дополнение этого множества, то есть множество альтернатив $x \in A_0$, не доминируемых данной альтернативой $y \in A_0$, имеет функцию принадлежности $1 - m_P(y, x)$. Вычисляя пересечение по всем $y \in A_0$, находим множество альтернатив, недоминируемых по четкому бинарному отношению R_{A_0}:

$$P(R_{A_0}, A_0) = \inf_{y \in A_0} \{1 - m_P(y, x)\} = 1 - \sup_{y \in A_0} m_P(y, x).$$

Пример 4.8. Рассмотрим следующее четкое рефлексивное, полное, транзитивное бинарное отношение (отношение предпочтения) над множеством из трех действий y_1, y_2, y_3, такое, что y_1 не менее предпочтительно, чем y_2, а y_2 не менее предпочтительно чем y_3, y_1 не менее предпочтительно, чем y_3. Это четкое отношение предпочтения удовлетворяет А.10 и приведено в таблице 4.1.

	y_1	y_2	y_3
y_1	1	1	1
y_2	0	1	1
y_3	0	0	1

Таблица 4.1

Матрица соответствующего ему строгого отношения предпочтения приведена в таблице 4.2.

	y_1	y_2	y_3
y_1	0	1	1
y_2	0	0	1
y_3	0	0	0

Таблица 4.2

Функция $m_{\tilde{R}}^{НД}(x)$ для этого отношения предпочтения будет задаваться таблицей 4.3.

	y_1	y_2	y_3
$m_{\tilde{R}}^{НД}$	1	0	0

Таблица 4.3

Множество недоминируемых действий будет состоять из одного элемента – действия y_1. •

Повторим приведенные рассуждения для нечетких множеств. В случае, когда неопределенность в связи действия АЭ и результата деятельности отсутствует, можно считать, что нечеткое отношение предпочтения задано на множестве возможных действий A: $m_{\tilde{R}}(x, y)$, $x, y \in A$.

Определим *нечеткое отношение строгого предпочтения* (НОСП) $\tilde{P}$, соответствующее НОП $\tilde{R}$, следующим образом:

$$m_{\tilde{P}}(x, y) = \max\left\{m_{\tilde{R}}(x, y) - m_{\tilde{R}}(y, x), 0\right\},\ x, y \in A.$$

Определим нечеткое множество недоминируемых альтернатив (действий):

$$m_{\tilde{R}}^{НД}(x) = 1 - \sup_{y \in A} m_{\tilde{P}}(y,\ x),\ x \in A.$$

Величину $m_{\tilde{R}}^{НД}(x)$ можно интерпретировать как степень недоминируемости действия $x \in A$, поэтому рациональным будем считать выбор активным элементом действий, имеющих по возможности большую степень принадлежности четкому множеству недоминируемых альтернатив. Множество

$$A^{НД}(\tilde{R}) = \{x \in A \mid m_{\tilde{R}}^{НД}(x) = \sup_{z \in A} m_{\tilde{R}}^{НД}(z)\}$$

называется *множеством максимально недоминируемых действий*.

Будем считать, что индивидуально рациональный выбор АЭ при НОП $\tilde{R}$ на множестве допустимых действий определяется следующим правилом рационального выбора:

$$P(\tilde{R}, A) = A^{НД}(\tilde{R}).$$

Четкое множество

$$A_a^{НД}(\tilde{R}) = \{x \in A \mid m_{\tilde{R}}^{НД}(x) \geq a\},\ a \in (0, 1],$$

будем называть *множеством a - недоминируемых действий*.

Перейдем к рассмотрению активной системы с неопределенностью, в которой результат деятельности АЭ может отличаться от его действия.

Рассмотрим АС, состоящую из центра и одного АЭ. Стратегией АЭ является выбор действия $y \in A$. Действие $y \in A$ под влиянием внешних факторов приводит к результату деятельности $z \in A_0$.

В общем случае предпочтения АЭ над множеством A_0 задаются НОП $\tilde{R}$. В частности будем считать, что функция полезности АЭ задается четкой функцией $u : A_0 \to R^1$ и представляется в виде “доход минус штрафы”, причем доход и штрафы зависят от результата деятельности.

Предположим, что центру и АЭ известно нечеткое множество (*нечеткая информационная функция*) $\tilde{P}: A_0 \times A \to [0,1]$, где $\tilde{P}(z, y)$ определяет функцию принадлежности результата деятельности $z \in A_0$ в зависимости от действия $y \in A$. Правило рационального выбора $P(\tilde{R}, A)$ можно задать следующим образом.

Определим нечеткое подмножество множества результатов деятельности A_0:

$$g\ (\tilde{P}, z) = \sup_{z_1 \in A_0} \min \{ \tilde{P}(z_1, y), m_{\tilde{R}}(z_1, z) \}.$$

Пример 4.9. Нечеткое множество $g\,(\tilde{P}, z)$ можно интерпретировать как нечеткое множество наилучших результатов деятельности, то есть результатов, реализуемых в силу нечеткой информации и наиболее предпочтительных с точки зрения НОП $\tilde{R}$. Если перейти к четкой исходной информации, то нечеткое множество $\tilde{P}: A_0 \times A \to [0,1]$ можно интерпретировать как множество действий АЭ, R - как четкое отношение предпочтения, порожденное, например, функцией полезности $u(z)$. Получаем, что в случае четких множеств g является множеством реализуемых и наиболее предпочтительных действий, то есть $g_R(\tilde{P}) = \tilde{P} \cap \{y \in A |\ u(y) \geq u(t), \forall t \in A\}$. •

Пример 4.10. Эскиз функций принадлежности нечетких множеств $\tilde{P}: A_0 \times A \to [0,1]$ и предпочтения $\tilde{R}$ для некоторых фиксированных $z \in A_0$ и $y \in A$ приведен на рис. 4.7 тонкими линиями, эскиз значения величины $g\ (\tilde{P}(\cdot, y), z) = \sup_{z_1 \in A_0} \min \{ \tilde{P}(z_1, y), m_{\tilde{R}}(z_1, z) \}$ для заданных z и y изображен на рис. 4.7 жирной линией. Поскольку нам необходимо сравнить два действия y_1 и $y_2 \in A$, а НОП $\tilde{R}$ задано на множестве результатов деятельности, то следует взять пересечение множеств $m_{\tilde{R}}(z_1, z_2)$, $g\ (\tilde{P}\ (\cdot, y_1), z)$ и $\tilde{P}\ (z, y_2)$, что позволит устранить неопределенность относительно результата деятельности, то есть - получить НОП над множеством возможных действий A: $\forall y_1, y_2 \in A$

$$b\ (y_1, y_2) = \sup_{z_1, z_2 \in A_0} \min \{\tilde{P}(z_1, y_1), m_{\tilde{R}}(z_1, z_2), \tilde{P}(z_2, y_2)\}.$$

Множество $\tilde{P}$ называется a -*нормальным*, если:

$$\forall y \in A \sup_{z \in A_0} \tilde{P}(z, y) = a \text{ и } \forall z \in A_0 \; \exists \, y \in A : \tilde{P}(z, y) = a \; .$$

Далее в настоящей главе будем предполагать, что выполнено следующее предположение.

А.11. Множество $\tilde{P}$ 1-нормально.

Частным случаем рассматриваемой модели АС является четкое отношение предпочтения, порожденное функцией полезности $\tilde{f}(z) = \tilde{h}(z) - \tilde{c}(z)$ над множеством A_0, тогда НОП над множеством возможных действий определяется следующим образом:

$$m_{\tilde{R}_A}(y_1, y_2) = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in A_0 \\ \tilde{f}(z_1) \geq \tilde{f}(z_2)}} \min\{\tilde{P}(z_1, y_1), \tilde{P}(z_2, y_2)\} \, .$$

Определим, как и ранее, нечеткое множество недоминируемых действий:

$$m_{\tilde{R}_A}^{НД}(y) = 1 - \sup_{y_1 \in A} [m_{\tilde{R}_A}(y_1, y) - m_{\tilde{R}_A}(y, y_1)] \, ,$$

или

$$m_{\tilde{R}_A}^{НД}(y) = 1 - \sup_{y_1 \in A} [\sup_{z_1, z_2 \in A_0} \min\{\tilde{P}(z_1, y_1), \tilde{P}(z_2, y), m_{\tilde{R}}(z_1, z_2)\} -$$

$$- \sup_{z_1, z_2 \in A_0} \min\{\tilde{P}(z_1, y_1), \tilde{P}(z_2, y), m_{\tilde{R}}(z_2, z_1)\} \, .$$

Множеством рационального выбора будем считать либо $P(\tilde{R}_{A_0}, A) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} m_{\tilde{R}_A}^{НД}(y)$, либо $P(\tilde{R}_{A_0}, A) = \{y \in A \mid m_{R_A}^{НД}(y) \geq a\}$, то есть либо максимально недоминируемые действия, либо a - недоминируемые действия. Множество действий, степень недоминируемости которых равна единице, называется множеством четко недоминируемых действий или *множеством Орловского* [21].

Таким образом, мы построили на множестве возможных действий АЭ нечеткое отношение предпочтения, индуцированное функцией полезности АЭ и нечеткой информационной функцией. Имея определение рационального выбора, можно приступать к решению задач стимулирования в АС с нечеткой внешней неопределенностью.

4.3. Задача синтеза оптимального механизма стимулирования в активной системе с внешней нечеткой неопределенностью

Пусть функция полезности центра $\tilde{\Phi}(z)$ задана на множестве возможных результатов деятельности A_0. Тогда она индуцирует четкое отношение предпочтения над A_0. Над множеством возможных действий можно определить НОП центра и нечеткое множество максимально недоминируемых альтернатив $\Phi(y) = m_{\tilde{\Phi}}^{НД}(y)$, которое можно считать целевой функцией центра над множеством возможных действий АЭ.

Если функция полезности АЭ задана в виде “доход минус штрафы”, то есть $\tilde{f}(z) = \tilde{h}(z) - \tilde{c}(z)$, то НОП над множеством возможных действий определяется как (см. раздел 4.2):

$$m_{\tilde{R}_A}(y_1, y_2) = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in A_0 \\ \tilde{f}(z_1) \geq \tilde{f}(z_2)}} \min\{\tilde{P}(z_1, y_1), \tilde{P}(z_2, y_2)\}.$$

Множество недоминируемых альтернатив принимает вид:

$$m_{\tilde{R}_A}^{НД}(y) = 1 - \sup_{y_1 \in A} \left[\sup_{\substack{z_1, z_2 \in A \\ \tilde{f}(z_1) \geq \tilde{f}(z_2)}} \min\{\tilde{P}(z_1, y_1), \tilde{P}(z_2, y)\} - \right.$$

$$\left. - \sup_{\substack{z_1, z_2 \in A \\ \tilde{f}(z_1) \geq \tilde{f}(z_2)}} \min\{\tilde{P}(z_1, y_1), \tilde{P}(z_2, y)\} \right].$$

При наличии управления (стимулирования) предпочтения АЭ над множеством A_0 зависят от этого управления: $\tilde{R} = \tilde{R}_{A_0}(c)$. В предположении благожелательного отношения АЭ к центру, определим эффективность механизма стимулирования как:

$$K(c) = \max_{y \in P(\tilde{R}_{A_0}(c), A)} \Phi(y).$$

Итак, мы ввели НОП, индуцированное на множестве A функцией полезности АЭ и нечеткой информационной функцией. Это НОП зависит от системы стимулирования, используемой центром.

Непосредственный анализ зависимости множества максимально недоминируемых действий от стимулирования чрезвычайно трудоемок. Для упрощения этого анализа используется следующий прием [21] – решение задачи принятия решений (в нашем случае - задачи синтеза оптимальной функции стимулирования [16,19]) связывается с решением задачи четкого математического программирования, рассматриваемой ниже.

Введем задачу четкого математического программирования:

$$\begin{cases} \tilde{f}(z) \to \max; \\ \tilde{P}(z, y) \geq a; \\ y \in A, z \in A_0; \end{cases} \tag{4.1}$$

Приведем без доказательства два следующих технических результата [16,19,21].

Лемма 4.1. Пусть выполнено

$$\forall y \in A \sup_{z \in A_0} \tilde{P}(z, y) \geq a \tag{4.2}$$

и НОП $m_{\tilde{R}}(y)$ индуцировано функцией полезности $u(z) = \tilde{h}(z) - \tilde{c}(z)$ и нечеткой информационной функцией $\tilde{P}(z, y)$. Если (z_0, y_0) - решение задачи (4.1), то

$$m^{НД}_{\tilde{R}_A}(y_0) \geq a .$$

Лемма 4.2. Если выполнено одно из следующих условий:

- (4.2), множества A и A_0 конечны;

- (4.2), множества A, A_0 - компактны, а функции $\tilde{f}$ и $\tilde{P}$ непрерывны;

- множества A и A_0 - компактны, функция $\tilde{f}$ - непрерывна сверху, а $\tilde{P}$ - a -нормально;

то задача (4.1) имеет решение.

Следствие 4.1. а) Если выполнены условия леммы 4.2, то множество a - недоминируемых действий не пусто: $\{y \in A \mid m^{НД}_{\tilde{R}_A}(y) \geq a\} \neq \varnothing$;

б) Если выполнено условие (4.2) с $a = 1$, множества A и A_0 компактны, а $\tilde{f}$ и $\tilde{P}$ полунепрерывны сверху, то множество

Орловского $\{y \in A \mid m_{\tilde{R}_A}^{НД}(y) = 1\}$ не пусто, и любое решение задачи (4.1) принадлежит этому множеству.

Лемма 4.3. Любое четко недоминируемое действие принадлежит множеству решений задачи (4.1) с $a = 1$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть y^* - 1 - недоминируемое действие, не принадлежащее множеству решений задачи (4.1).

Обозначим $Q(y^*) = \{z \in A_0 \mid \tilde{P}(z, y^*) \geq 1\}$. Пусть не существует результата деятельности $z^* \in A_0$ такого, что пара (z^*, y^*) - решение задачи (4.1), то есть $Q(y^*) \cap \operatorname*{Argmax}_{z \in A_0} f(z) = \varnothing$.

Пусть $z_0 \in \operatorname*{Argmax}_{z \in A_0} f(z)$. При этом $\tilde{P}(z_0, y^*) < 1$ и в силу нормальности $\tilde{P}(z, y)$ найдется действие $y_0 \in A$ такое, что (z_0, y_0) - решение задачи (4.1) и y_0 - 1 – недоминируемое действие, которое доминирует y^* со степенью строго большей нуля. Значит y^* не 1 – недоминируемое действие. Противоречие. •

Пусть функция полезности активного элемента представлена в виде “доход минус штрафы”: $\tilde{f}(z) = \tilde{h}(z) - \tilde{c}(z)$. Из детерминированной теории (см. теорему 2.1) следует, что, если множества A, A_0 и функции дохода $\tilde{h}(z)$ и штрафов $\tilde{c}(z)$ удовлетворяют условиям А.1-А.3, то множество точек максимума функции полезности $\tilde{f}(z)$ при $\tilde{c}(z) \in M$ представляет собой отрезок $P = [z^-, z^+]$, где

$$z^- = \min \{z \in A_0 \mid \tilde{h}(z) \geq \tilde{h}(r) - C\}, \quad z^+ = \max \{z \in A_0 \mid \tilde{h}(z) \geq \tilde{h}(r) - C\}.$$

При этом любое действие из множества P в детерминированной АС реализуемо скачкообразными функциями стимулирования. В АС с нечеткой неопределенностью, если $\tilde{z} \in P$, то найдется скачкообразная функция стимулирования $c_c(x, z) \in M$, где $x = \tilde{z}$, такая, что

$$\tilde{z} \in \operatorname*{Argmax}_{z \in A_0} \{h(z) - c_c(x, z)\}.$$

Обозначим $Q(z,a)=\{y\in A \mid \tilde{P}(z,y)\geq a\}$, $z\in A_0$.

Лемма 4.4. Для любых $x\in P$ и для любых $y\in Q(x,a)$ найдется система стимулирования $\tilde{c}\in M$, а именно - $\tilde{c}_c(x,z)$, такая, что действие y будет принадлежать множеству a-недоминируемых действий.

Доказательство. Рассмотрим произвольные $x\in P$ и $y\in Q(x,a)$. В силу того, что $x\in P$, выполнено: $x\in \operatorname{Argmax}_{z\in A_0}\{\tilde{h}(z)-\tilde{c}_c(x,z)\}$. Тогда пара (x,y) является решением задачи (4.1), откуда следует, что y принадлежит множеству a - недоминируемых действий. •

Множеством реализуемых системой стимулирования $c\in M$ действий в АС с нечеткой неопределенностью будем считать множество $P(c,a)=\{y\in A \mid m_{\tilde{f}}^{НД}(y)\geq a\}$, где $m_{\tilde{f}}^{НД}(y)$ - функция принадлежности множеству альтернатив, недоминируемых по НОП, индуцированному функцией полезности $\tilde{f}(z)=\tilde{h}(z)-\tilde{c}(z)$ и нечеткой информационной функцией $\tilde{P}(z,y)$. Максимальное множество реализуемых действий в случае, когда элемент производит свой выбор из множества a - недоминируемых действий, обозначим через $S(a)=\bigcup_{c\in M}P(c,a)$ (см. рисунок 4.8).

Напомним, что в предположении А.11 мы потребовали, чтобы нечеткая информационная функция $\tilde{P}(z,y)$ была 1-нормальна.

Лемма 4.5. Максимальное множество реализуемых действий определяется следующим выражением:

$$S(1)=\bigcup_{x\in P}Q(x,1).$$

Доказательство. В силу леммы 4.3 и А.11 любое четко недоминируемое действие $\tilde{y}$ принадлежит одному из множеств $Q(x,1)$ для некоторого $x\in A_0$, то есть $S(1)\subseteq \bigcup_{x\in A_0}Q(x,1)$.

В силу А.11 и того, что y - четко недоминируемое действие, найдется $\tilde{z}\in A_0$ такое, что пара $(\tilde{y},\tilde{z})$ является решением задачи (4.1), то есть $\tilde{z} \in \operatorname*{Argmax}_{z \in A} \{\tilde{h}(z) - \tilde{c}(z)\}$, откуда $\tilde{z} \in P$. При этом из того, что $(\tilde{y}, \tilde{z})$ - решение задачи (4.1), следует, что $\tilde{y} \in Q(\tilde{z}, 1)$. Для любого $x \in A_0$ найдется $\tilde{z} \in P$ такое, что $\tilde{y} \in Q(\tilde{z}, 1)$, откуда $\bigcup_{x \in A_0} Q(x, 1) = \bigcup_{x \in P} Q(x, 1)$. Таким образом, $S(1) \subseteq \bigcup_{x \in P} Q(x, 1)$.

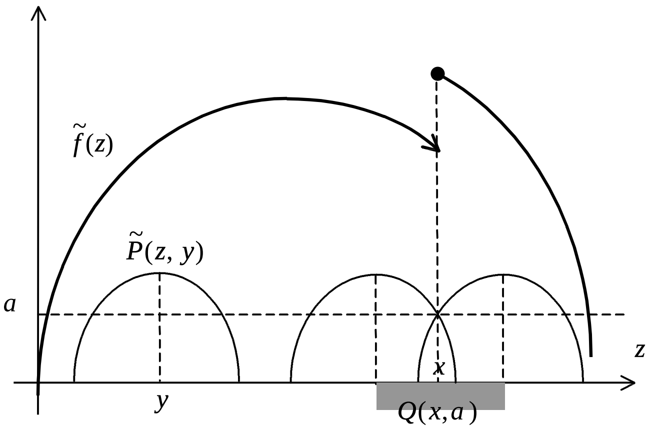

Рис. 4.8. Функция полезности АЭ в задаче стимулирования с нечеткой неопределенностью.

С другой стороны, из леммы 4.4 следует, что для любого $x \in P$ и $y \in Q(x, 1)$ найдется система стимулирования $\tilde{c} \in M$ такая, что $y \in P(\tilde{c}, 1)$, то есть $\bigcup_{x \in P} Q(x, 1) \subseteq \bigcup_{c \in M} P(\tilde{c}, 1) = S(1)$. •

<u>Теорема 4.1.</u> В активной системе с нечеткой внешней неопределенностью для любой системы стимулирования $\tilde{c} \in M$ существует система стимулирования С–типа не меньшей эффективности.

Доказательство. Из леммы 4.5 следует, что $\bigcup_{x \in P} Q(x, 1) \subseteq \bigcup_{c \in M_C} P(c, 1)$.

В то же время $\bigcup_{c \in M} P(c, 1) = S(1) \subseteq \bigcup_{x \in P} Q(x, 1)$, значит $S(1) = \bigcup_{c \in M_C} P(c, 1)$. •

Исследуем влияние неопределенности на эффективность стимулирования. Рассмотрим две нечеткие активные системы, отличающиеся лишь тем, что центр и активный элемент обладают нечеткой информацией $\tilde{P}_1(z, y)$ - в первой АС и $\tilde{P}_2(z, y)$ - во второй.

В первой АС участники обладают *большей информацией* (*неопределенность меньше*), если $\forall y \in A, z \in A_0$ $\tilde{P}_1(z, y) \le \tilde{P}_2(z, y)$ (см. рисунок 4.9). Обозначим K_1 и K_2 - эффективности стимулирования в первой и второй АС, соответственно.

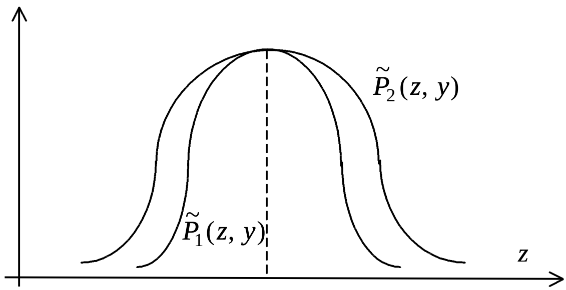

Рис. 4.9. Различие в информированности участников АС

<u>Теорема 4.2.</u> $K_1 \le K_2$.

Доказательство. Для любого $x \in A_0$ выполнено

$$Q_1(x, a) = \{y \in A \mid \tilde{P}_1(x, y) \ge a\} \subseteq Q_2(x, a) = \{y \in A \mid \tilde{P}_2(x, y) \ge a\},$$

откуда следует, что $S_1(a) \subseteq S_2(a)$. •

Таким образом, в активных системах с нечеткой внешней неопределенностью в рамках гипотезы благожелательности с ростом неопределенности эффективность стимулирования не убывает. Этот, казалось бы, парадоксальный факт обусловлен введенными предположениями о рациональном поведении участников АС [16,19]. Если отказаться от гипотезы благожелательности и определить гарантированную эффективность стимулирования как:

$$K_g(c) = \min_{y \in P(\tilde{R}_{A_0}(c), A)} \Phi(y),$$

то, повторяя приведенные выше рассуждения, можно показать, что с ростом неопределенности гарантированная эффективность стимулирования не возрастает.

Глава 5. МЕХАНИЗМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АКТИВНЫХ СИСТЕМ С СООБЩЕНИЕМ ИНФОРМАЦИИ

5.1. Постановка задачи планирования в активных системах

Рассмотрим активную систему с асимметричной информированностью, то есть такую, что некоторые ее участники лучше информированы о каких-либо существенных внешних или внутренних параметрах, чем другие. В таких системах разумным представляется использование механизмов передачи информации от более информированных участников АС менее информированным.

Поскольку в большинстве исследуемых АС центру необходимо иметь информацию о предпочтениях АЭ (например, типах АЭ, параметризующих их функции полезности), то он выступает в роли менее информированного участника АС и целесообразна передача информации от АЭ к центру (см. рисунок 5.1).

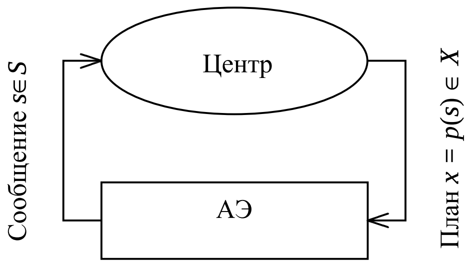

Рис. 5.1. Функционирование АС с сообщением информации

В качестве действия АЭ (одной из компонент выбираемой им стратегии) в механизмах функционирования АС с сообщением информации выступает *сообщение* $s \in S$, S - *множество возможных сообщений* АЭ. Стратегию центра x будем называть *планом* (напомним, что план – желательное с точки зрения центра состояние АЭ), X - множество допустимых для данного АЭ планов.

В многоэлементных АС план, назначаемый i-му АЭ, обозначим $x_i \in X_i$, где X_i - множество допустимых планов, сообщение i-го АЭ будем обозначать $s_i \in S_i$, $i \in I$. План x_i зависит в общем случае от сообщений всех АЭ, следовательно, возникает игра элементов.

Будем считать, что центр определяет планы (на основании предоставляемой элементами информации) по *процедуре планирования* $p : S \to X$, где $S = \prod_{i \in I} S_i$, $X = \prod_{i \in I} X_i$ и план, назначаемый i-му АЭ, будет определяться выражением: $x_i = p_i(s)$, $i \in I$, $s \in S$. В качестве моделей поведения АЭ будем использовать введенные в разделе 1.3 концепции равновесия Нэша[1] и равновесия в доминантных стратегиях.

Будем считать, что интересы центра задаются его целевой функцией $\Psi(x, r)$. Тогда задачей центра является выбор такой процедуры планирования, чтобы в точке равновесия значение его целевой функции было максимально. Обозначим множество равновесий Нэша $E_p(r)$, $r \in \Omega$. Будем считать, что конкретный выбор элементов из этого множества удовлетворяет гипотезе благожелательности, в соответствии с которой в том числе при прочих равных АЭ предпочтут сообщать достоверную информацию. Для фиксированного равновесия $s^*(r) \in E_p(r)$, вычисляя по $r \in \Omega$ гарантированный результат, можно ввести *эффективность* $K(\Sigma)$ *механизма планирования* $\Sigma = (S, p)$:

$$K(\Sigma) = \min_{r \in \Omega} \Psi(p(s^*(r)), r).$$

[1] *Вопрос о том, каким образом АЭ «оказываются» в точке Нэша требует отдельного обсуждения. Если истинные типы всех АЭ известны каждому из них, то они могут «вычислить» равновесие Нэша. Если истинные типы неизвестны, то в динамике (при многократном выборе действий) требуется введение гипотез о динамике коллективного поведения. Одной из наиболее распространенных является гипотеза индикаторного поведения, в соответствии с которой в каждом периоде каждый АЭ делает «шаг» в направлении своей стратегии, которая была бы оптимальной при условии, что все остальные АЭ выберут те же стратегии, что и в предыдущем периоде. Вопросы существования равновесия, условия сходимости к нему и др. исследовались в [20]. Поведение реальных субъектов изучалось при проведении деловых и имитационных игр [4].*

Механизм $p: S \to X$, в котором АЭ сообщают оценки из множеств $\{S_i\}$, называется *непрямым механизмом* (содержательно, в нем сообщение может нести косвенную информацию о типе АЭ). При фиксированном соответствии отбора равновесий для непрямого механизма $p(\cdot)$ можно построить *соответствующий* ему *прямой механизм*[1]: $h(\tilde{r}) = p(s^*(\tilde{r}))$, в котором АЭ сообщают непосредственно оценки своих типов (поэтому этот механизм и называется *прямым*). Если в соответствующем прямом механизме сообщение достоверной информации является доминантной стратегией, то он называется *эквивалентным прямым механизмом*.

Пример 5.1. В качестве примера АС с сообщением информации рассмотрим механизм стимулирования в многоэлементной АС с сообщением информации. В таких моделях интересы АЭ и центра выражаются их целевыми функциями $f_i(x_i, y_i, r_i)$, $i \in I$, и $\Phi(x, y, r)$, где $r_i \in \Omega_i$ - тип АЭ, параметризующий класс допустимых целевых функций i-го элемента, $x = (x_1, ..., x_n)$ - вектор планов, назначаемых элементам, а $y = (y_1, ..., y_n)$ - вектор действий, выбираемых элементами.

Будем считать, что имеет место асимметричная информированность, то есть центр, в отличие от АЭ, не знает истинных значений параметров $\{r_i\}$. Как отмечалось выше, одним из способов устранения имеющейся неопределенности является использование механизма с сообщением информации, в котором каждый АЭ сообщает центру оценку $s_i \in \Omega_i, i \in I$, своего типа (здесь множество возможных сообщений S_i для каждого АЭ совпадает с множеством Ω_i возможных типов АЭ, поскольку эти множества известны центру, и АЭ сообщает информацию непосредственно о своем типе $r_i \in \Omega_i$).

Порядок функционирования системы при этом следующий:

1. *Этап сбора информации*. Элементы сообщают центру оценки $(s_1, ..., s_n)$ своих типов - параметров $(r_1, ..., r_n)$;

---

[1] *В механизмах с сообщением информации обозначение «$\tilde{r}$» для вектора сообщений АЭ в прямом механизме вводится для того, чтобы подчеркнуть, что в общем случае сообщения о типах r могут отличаться от истинных, то есть может иметь место:* $\exists i \in I : \tilde{r}_i \neq r_i$.

2. *Этап планирования*. На основе полученных оценок центр, используя процедуру (механизм) планирования $p:\Omega \to X$, где $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$, $X = \prod_{i \in I} X_i$ - множество допустимых планов, назначает планы $x_i = p_i(s)$ элементам, $i \in I$.

3. *Этап выбора состояния*. Получив плановые задания, элементы выбирают свои действия $y_i \in A_i$.

В предположении рационального поведения элементов при фиксированных планах выбираемые ими действия y_i^* будут максимизировать соответствующие целевые функции, то есть:

$$y_i^* \in P_i(x_i, r_i) = \operatorname*{Argmax}_{y_i \in A_i} f_i(x_i, y_i, r_i).$$

Таким образом, можно говорить о функции полезности АЭ (в игре с сообщением информации функции полезности АЭ иногда называют *функциями предпочтения*):

$$j_i(x_i, r_i) = \max_{y_i \in A_i} f_i(x_i, y_i, r_i).$$

Целевая функция центра может быть определена как $\Psi(x, r) = \Phi(x, y^*(x, r))$, где $y^*(x, r) = (y_1^*(x_1, r_1), ..., y_n^*(x_n, r_n))$. Тогда можно определить эффективность Σ механизма с сообщением информации:

$$K(\Sigma) = \min_{r \in \Omega} \Psi(p(s^*(r)), r). \bullet$$

Очевидно, в механизмах с сообщением информации АЭ будут руководствоваться своей собственной полезностью и необязательно будут сообщать достоверную информацию. Явление сообщения АЭ недостоверной информации называется *манипулированием информацией*, а механизмы, в которых выгодно (является равновесием) сообщение достоверной информации называются *неманипулируемыми*. Для прямых механизмов неманипулируемым называется механизм, в котором при любых типах АЭ сообщение достоверной информации является равновесием в доминантных стратегиях[1].

В теории активных систем при исследовании механизмов функционирования АС с сообщением информации акцент делается на

[1] *Легко показать, что, если сообщение достоверной информации является равновесием Нэша* $\forall r \in \Omega$, *то эта точка Нэша является и равновесием в доминантных стратегиях.*

двух аспектах – изучении эффективности и манипулируемости тех или иных механизмов. Поэтому в следующих разделах мы рассмотрим условия неманипулируемости механизмов планирования и для ряда случаев ответим на вопрос о том, когда оптимальный механизм является неманипулируемым.

5.2. Механизмы открытого управления

Зададим для каждого активного элемента множества $X_i(s_{-i}) \subseteq X_i$ и рассмотрим следующую процедуру планирования:

$$\begin{cases} \Psi(x, s) \to \max\limits_{x \in X} & (5.1) \\ j_i(x_i, s_i) = \max\limits_{z \in X_i(s_{-i})} j_i(z, s_i). & (5.2) \end{cases}$$

Условие (5.2) обеспечивает назначение элементу плана, максимизирующего его функцию предпочтения (в которую в качестве «истинного» значения типа АЭ подставляется сообщенная им оценка) и называется *условием совершенного согласования* (*УСС*). Условие (5.1) в неявном виде задает процедуру планирования, максимизирующую целевую функцию центра. Механизм, удовлетворяющий (5.1)-(5.2), называется *механизмом открытого управления* (ОУ).

Теорема 5.1 (*Принцип открытого управления*). Необходимым и достаточным условием сообщения достоверной информации как доминантной стратегии при любых $r \in \Omega$ является существование множеств $X_i(s_{-i})$, для которых выполнено условие совершенного согласования.

Доказательство. Докажем, что сообщение достоверной информации в механизме $p(s)$, $s \in \Omega$, удовлетворяющем условиям совершенного согласования (5.2), является равновесием в доминантных стратегиях. Пусть выполнены условия совершенного согласования. Сообщение достоверной информации является равновесием в доминантных стратегиях для всех $r \in \Omega$, если:

$$\forall r \in \Omega, \forall i \in I, \forall s_i \in \Omega_i, \forall \bar{s}_{-i} \in \Omega_{-i}, \; j_i(p_i(r_i, \bar{s}_{-i}), r_i) \geq j_i(p_i(s_i, \bar{s}_{-i}), r_i).$$

Возьмем произвольные: АЭ $i \in I$ и вектор $\bar{s}_{-i} \in \Omega_{-i}$ и рассмотрим вектор типов АЭ, равный $(r_i, \bar{s}_{-i})$. При сообщении достоверной информации из УСС имеем:

$$j_i(p_i(r_i, \bar{s}_{-i}), r_i) = \max_{z \in X_i(\bar{s}_{-i})} j_i(z, r_i).$$

Поэтому $\forall z \in X_i(\bar{s}_{-i})$ $j_i(p_i(r), r_i) \geq j_i(z, r_i)$, и так как $\forall s_i \in \Omega_i$ $p_{\mathrm{i}}(s_i, \bar{s}_{-i}) \in X_i(\bar{s}_{-i})$, то

$$\forall\, s_i \in \Omega_i \quad j_i(p_i(r_i, \bar{s}_{-i}), r_i) \geq j_i(p_i(s_i, \bar{s}_{-i}), r_i)\,,$$

то есть сообщение достоверной информации - равновесие в доминантных стратегиях при любом $r \in \Omega$.

Обратно, пусть для некоторого механизма $p(s)$, для любого $r \in \Omega$, сообщение достоверной информации - равновесие в доминантных стратегиях. Докажем, что $p(s)$ удовлетворяет УСС.

Определим $X_i(s_{-i}) = \bigcup\limits_{s_i \in \Omega_i} p_i(s_i, s_{-i})$. Предположим, что УСС не выполнено, тогда

$$\exists r' \in \Omega: \; j_{\mathrm{i}}(p_i(r'), s_i') < \max_{z \in X_i(r'_{-i})} j_i(z, r_i')\,,$$

то есть $\exists s_i \in \Omega_i : j_i(p_i(r'), r_i') < j_i(p_i(s_i, r'_{-i}), r_i')$. В то же время, мы предположили, что для вектора параметров r' сообщение достоверной информации является равновесием в доминантных стратегиях, то есть

$$\forall i \in I, \forall s_i \in \Omega_i \quad j_i(p_i(r'), r_i') \geq j_i(p_i(s_i, r'_{-i}), r_i')\,.$$

Получили противоречие. •

Таким образом, принцип открытого управления является критерием неманипулируемости механизма планирования в АС с сообщением информации. Как отмечалось выше, помимо манипулируемости, основным свойством любого механизма является его эффективность. Возникает вопрос, в каких случаях существует оптимальный неманипулируемый механизм (другими словами – в каких АС при поиске оптимального механизма можно ограничиться классом неманипулируемых механизмов). Частичный ответ на этот вопрос дает теорема 5.2.

Теорема 5.2. В активной системе с одним активным элементом для любого механизма планирования существует механизм открытого управления не меньшей эффективности.

Доказательство. Пусть $p(s)$ - некоторая процедура планирования, $j(x, r)$ - функция полезности АЭ, тогда в равновесии имеет место:

$$j(p(s^*(r)), r) = \max_{s \in \Omega} j(p(s), r) \tag{5.3}$$

Обозначим $x^* = p(s^*)$, $X_1 = \bigcup_{s \in \Omega} p(s)$. Рассмотрим механизм открытого управления $h(\tilde{r}) = p(s^*(\tilde{r}))$, определяемый (5.1)-(5.2). Этот механизм в силу теоремы 5.1 обеспечивает сообщение достоверной информации как доминантной стратегии. При сообщении достоверной информации r центр может из множества допустимых планов (удовлетворяющих (5.2)) выбрать план, максимизирующий $\Psi(x, r)$. Любое решение (5.3) - план x^* - является решением (5.2), поэтому среди решений (5.2) можно отыскать план x такой, что $\Psi(x, r) = \Psi(x^*, r)$.

Предполагая, что выполнена *гипотеза благожелательности* (ГБ), то есть, если сообщение достоверной информации является равновесием, то АЭ сообщает достоверную информацию (ГБ соответствует выбору равновесия в критерии эффективности), получаем $K(h) \geq K(p)$. •

Итак, теорема 5.2 утверждает, что механизм ОУ оптимален в одноэлементной АС (другими словами, для любого механизма планирования в одноэлементной активной системе существует эквивалентный прямой механизм. Естественное желание обобщить этот результат на случай многоэлементных АС наталкивается на ряд проблем, основная из которых – зависимость равновесного сообщения $s_i^*(r)$ каждого АЭ $i \in I$ от типов других АЭ (см. более подробно раздел 5.6 и [6]). Поэтому в общем случае в многоэлементных АС механизмы открытого управления (неманипулируемые) не оптимальны. В то же время, для широкого класса практически важных частных случаев механизмов планирования в многоэлементных АС доказаны результаты об оптимальности механизмов ОУ. Некоторые из этих механизмов рассматриваются ниже в разделах 5.3 – 5.5, более подробное и полное изложение можно найти в работах [4,6,12,19]. К теоретическому анализу общих вопросов манипулируемости мы вернемся в разделе 5.6 при обсуждении задач теории реализуемости.

5.3. Механизмы распределения ресурса

Рассмотрим систему, состоящую из центра и n активных элементов. Центр владеет R_0 единицами ресурса. Ценность ресурса для i-го элемента определяется его функцией полезности $j_i(x_i, r_i)$, где x_i -

получаемое им количество ресурса, а r_i - тип АЭ, параметризующий класс допустимых функций полезности. Функция полезности может определять, например, прибыль АЭ от использования ресурса в количестве x_i.

Предположим, что о функции полезности АЭ центр не имеет информации, за исключением той, что она принадлежит некоторому классу однопиковых функций с точкой пика $r_i \in \Omega_i$ и однозначно определяется значением этого параметра, то есть получение ресурса в количестве $x_i = r_i$ доставляет максимум функции полезности *i*-го АЭ.

Задачей центра является распределение ресурса с целью, например, максимизации суммарной полезности всех элементов (см. раздел 5.5) $\sum_{i \in I} j_i(x_i, r_i) \to \max_{x \geq 0}$ *при ресурсном* (*балансовом, бюджетном*) *ограничении*: $\sum_{i \in I} x_i \leq R_0$.

Распределение ресурса осуществляется следующим образом. Каждый активный элемент сообщает центру оценку $s_i \in \Omega_i$, $i \in I$, своего типа (параметра своей функции полезности) $j_i(x_i, r_i)$ и получает ресурс в количестве $x_i = p_i(s)$, где $p(s) = (p_1(s), p_2(s), ..., p_n(s))$ называется *процедурой* (*механизмом*) *распределения ресурса*.

Будем полагать, что множество возможных значений типов *i*-го АЭ Ω_i - является отрезком действительной оси: $\Omega_i = [0, D] \subset R^1$, $i \in I$, $0 < D < +\infty$. В качестве ограничения D можно выбрать, например, имеющееся в распоряжении центра количество ресурса R_0.

На процедуру распределения ресурса наложим следующие ограничения:

1. Функция $p_i(s)$ непрерывна по всем переменным и строго монотонна по s_i для всех $s \in [0, D]^n$, $i \in I$.

2. Будем считать, что $\sum_{i \in I} r_i > R_0$ (*гипотеза дефицитности*) и весь ресурс распределяется полностью, то есть: $\sum_{i \in I} x_i = R_0$.

3. Каждая группа активных элементов может получить любое количество ресурса, меньшее того, что она уже получила:

$$\forall s \in \Omega, \forall W \subseteq I \quad \forall\, x_i \le p_i(s),\ i \in W \quad \exists s_W \in \Omega_W :\ x_W = p_W(s_W, s_{I \setminus W}),$$

где $\Omega_W = \prod_{j \in W} \Omega_j$ [1].

4. Если количество ресурса, распределяемого между АЭ из некоторого подмножества $W \subseteq I$, увеличивается, то каждый АЭ получает количество ресурса, не меньшее прежнего.

Примером механизма распределения ресурса, удовлетворяющего введенным предположениям, является *механизм пропорционального распределения* [4,7,12]:

$$x_i = p_i(s) = \frac{s_i}{\sum_{j \in I} s_j} R_0 .$$

В качестве модели поведения примем равновесие Нэша (или РДС, если оно существует). Вектор сообщений $s^*(r)$ называется равновесием Нэша при данном $r \in \Omega$, если $\forall i \in I, \forall s_i \in \Omega_i$ выполняется следующее соотношение (см. также выше):

$$j_i(p_i(s^*), r_i) > j_i(p_i(s_i, s^*_{-i}), r_i) .$$

<u>Лемма 5.1.</u> Пусть $s^*(r)$ - равновесие Нэша при данном r, тогда оно удовлетворяет следующим условиям:

1) если $x_i^* < r_i$, то $s_i^* = D$;

2) если $s_i^* \in [0, D)$, то $x_i^* = r_i$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть в положении равновесия $x_i^* < r_i$ и $s_i^* < D$. Тогда по ограничению 1, сообщая $s_i = D$, i-ый АЭ получит $p_i(s_i, s^*_{-i}) > p_i(s^*)$. Если при сообщении $s_i = D$, $p_i(s_i, s^*_{-i}) < r_i$, то $j_i(p_i(s_i, s^*_{-i}), r_i) > j_i(p_i(s^*), r_i)$ и s^* не является равновесием Нэша. Если $p_i(s_i, s^*_{-i}) > r_i$, то для s^* по ограничению 3 найдется сообщение $t_i \in S_i$ такое, что $p_i(t_i, s^*_{-i}) = r_i$ и s^* не является равновесием Нэша.

[1] *Некоторое условие, записанное для индекса $W \subseteq I$, считается выполненным для всех АЭ $i \in W$.*

Докажем второе утверждение. Пусть $s_i^* \in [0, D)$, но $x_i^* \neq r_i$, тогда либо $r_i > x_i^*$, либо $r_i < x_i^*$. Первый случай ($s_i^* \in [0, D)$, $r_i > x_i^*$) рассмотрен в первом пункте доказательства. Если реализуется второй случай и $s_i^* \in [0, D)$, $r_i < x_i^*$, то по ограничению 2 существует $t_i \in S_i$ такое, что $r_i = p_i(t_i, s_{-i}^*)$, и s^* не является равновесием Нэша. •

Распределение ресурса в равновесии определяется следующим алгоритмом.

Алгоритм 5.1. На нулевом шаге полагаем $s_i^0 = D$ для всех $i \in I$ и вычисляем распределение ресурса $x_i^0 = p_i(D, ..., D)$. Множество[1] Q на нулевом шаге полагаем пустым $Q^0 = \varnothing$.

На шаге $j \geq 1$ множество Q^j определяем следующим образом:

$$Q^j = \{i \in I \mid (x^{j-1})_i \geq r_i\}.$$

Для АЭ из множества Q^j по условию 2 определяем $s_{Q^j} \in \Omega_{Q^j}$ такие, что

$$p_{Q^j}(s_{Q^j}, s_{I \setminus Q^j}^{j-1}) = r_{Q^j}.$$

В конце j-го шага получим

$$s^j = (s_{Q^j}, s_{I \setminus Q^j}^{j-1}) \text{ и } x^j = p(s^j).$$

Если на некотором шаге k окажется, что $Q^k = Q^{k-1}$, то алгоритм останавливается, и полагаем: $s^* = s^k$, $x^* = x^k$, $Q = Q^k$. •

Результаты применения данного алгоритма, заканчивающегося не более чем за n шагов, имеют следующие свойства:

Лемма 5.2. 1) Если $i \notin Q^k$, то на любом шаге $1 \leq j \leq k$, $x^j \geq x^{j-1}$ и $x^* \geq x^0$.

2) s^* - равновесие Нэша при данном r.

[1] *Множество $Q \subseteq I$ включает активные элементы, получающие абсолютно оптимальные для себя планы ($x_i = r_i, i \in Q$). Такие АЭ называются «диктаторами» или (в механизмах распределения ресурса) приоритетными потребителями.*

Доказательство. Первое свойство следует из вида алгоритма 5.1 и ограничения 4, так как на каждом шаге j количество ресурса, распределяемого между элементами из множества $I \setminus Q^j$, не уменьшается.

Докажем выполнение второго свойства. Имеет место: $r_Q = p_Q(s^*)$, поэтому приоритетным потребителям менять сообщение невыгодно, так как они получает оптимальное для себя количество ресурса.

Если $i \notin Q$, то по лемме 5.1 $s_i^* = D$ и $x_i^* < r_i$, то есть, сообщая $s_i < D$, i-ый АЭ может лишь уменьшить количество получаемого им ресурса (в силу строгой монотонности процедуры планирования), поэтому изменять сообщение ему невыгодно. •

Определим соответствующий исходному механизму распределения ресурса прямой механизм $h(\tilde{r}) = p(s^*(\tilde{r}))$, $\tilde{r} \in \Omega$. Таким образом, в механизме $h(\tilde{r})$ i-ый элемент сообщает $\tilde{r}_i \in \Omega_i$, при этом r_i может быть не равным $\tilde{r}_i$.

<u>Теорема 5.3.</u> Прямой механизм распределения ресурса $h(\tilde{r})$, определяемый алгоритмом 5.1, является механизмом открытого управления.

Доказательство. Пусть вектор типов АЭ равен r, тогда нужно показать, что

$$\forall i \in I, \forall r_i' \in \Omega_i, j_i(h(r_i, r_{-i}), r_i) \geq j_i(h(r_i', r_{-i}), r_i),$$

то есть сообщение достоверной информации является равновесием Нэша.

Пусть $i \in Q$, тогда $h_i(r) = r_i$ и

$$\forall r_i' \in \Omega_i, j_i(h_i(r), r_i) \geq j_i(h_i(r_i', r_{-i}), r_i).$$

Если $i \notin Q$, то $h_i(r) < r_i$. Если i-ый АЭ сообщит $r_i' > x_i^*$, то по алгоритму 5.1 он получит ресурс в количестве

$$h_i(r_i', r_{-i}) = h_i(r) \text{ и } h_i(r_i', r_{-i}) = x_i^*,$$

так как на каждом шаге j количество ресурса, выделяемого i-му АЭ, не уменьшается: $r_i' > x_i^* \geq x^j$ (см. лемму 5.2). Если он сообщит $r_i' \leq x_i^*$, то не позже, чем на $k-1$ шаге, он попадет в победители и получит $h_i(r_i', r_{-i}) = r_i' < x_i^*$. Таким образом, сообщение достоверной информации является равновесием Нэша. •

Из теоремы 5.3 следует, что для любого механизма распределения ресурса, удовлетворяющего введенным предположениям, существует эквивалентный прямой механизм, то есть неманипулируемый механизм не меньшей эффективности.

5.4. Механизмы активной экспертизы

Под *задачей активной экспертизы* понимают задачу оценки некоторой величины группой экспертов - специалистов в определенной области. Пусть r_i - собственное мнение i-го эксперта (его тип), $r_i \in [d, D] \subset R^1$, $i \in I$, $-\infty < d < D < +\infty$, и пусть $r_1 \le r_2 \le ... \le r_n$, то есть r_i упорядочены по возрастанию. Экспертам известна процедура $p : [d, D]^n \to [d, D]$ принятия итогового решения на основе сообщаемых оценок $s_i \in [d, D]$, $i \in I$: $x = p(s)$.

Будем считать, что функции полезности АЭ однопиковые[1] с точками пика r_i, $i \in I$, а процедура $p(s)$ - *механизм активной экспертизы* - удовлетворяет следующим свойствам:

1. функция $p(s)$ - строго монотонна по всем переменным при $s \in [d, D]^n$;

2. функция $p(s)$ непрерывна по всем переменным при $s \in [d, D]^n$;

3. если обозначить $s^a = (a, ..., a)$, $a \in [d, D]$, то $p(s^a) = a$ (*условие единогласия*).

Примером механизма активной экспертизы является, например, *линейный механизм экспертизы*: $x = \sum_{i \in I} a_i s_i$, где $a_i > 0$, $\sum_{i \in I} a_i = 1$.

Лемма 5.3. Для каждого $r \in [d, D]^n$ равновесие Нэша $s^*(r)$ имеет следующую структуру:

1) $s_i^* = \begin{cases} D, \text{ если } x^* < r_i; \\ d, \text{ если } x^* > r_i; \end{cases}$

2) если $d < s_i^* < D$, то $x^* = r_i$.

---

[1] *Каждый из экспертов заинтересован в том, чтобы итоговое решение x было как можно ближе к его собственному мнению* r_i.

Доказательство леммы 5.3. проводится по аналогии с доказательством леммы 5.1 и не приводится. •

Определим для каждого $k = \overline{0, n}$ векторы сообщений:

$$s(k) = \begin{cases} k \text{ первых экспертов сообщают } d; \\ (n-k) \text{ последних экспертов сообщают } D \end{cases}$$

и вычислим последовательность точек $W_k = p\,(s(k))$.

<u>Лемма 5.4.</u> Всегда найдется такой номер $k \in \overline{0, n}$, что либо $r_k \in [W_k, W_{k-1}]$, либо $r_k > W_{k-1}$.

Доказательство. Последовательность $r_1, r_2, ..., r_n$ является возрастающей, причем $r_1 \geq d,\ r_n \leq D$. Последовательность $W_0, W_1, ..., W_n$ является убывающей, причем $W_0 = D,\ W_n = d$. Поэтому может существовать единственное $k \in \overline{0, n}$, такое, что $r_k \in [W_k,\ W_{k-1}]$. Но может оказаться, что $r_{k-1} < W_k$, а $r_k \geq W_{k-1}$. •

<u>Теорема 5.4.</u> Итоговое решение в равновесии имеет вид

$$x^* = \max_k \min\,(r_k, W_{k-1}).$$

Доказательство. Пусть существует АЭ с номером q такой, что $r_q \in [W_q, W_{q-1}]$, тогда $\forall i < q$, $\min\,(r_i, W_{i-1}) = r_i$, так как $r_i \leq r_q$ и $W_{i-1} \geq W_{q-1}$, а $\forall i > q$, $\min\,(r_i, W_{i-1}) = W_{i-1}$, так как $W_{i-1} \leq W_q \leq r_q \leq r_i$ (см. доказательство леммы 5.4).

Тогда $\forall i \neq q$, $\min\,(r_k, W_{k-1}) = \begin{cases} r_i, & i \leq q \\ W_{i-1}, & i > q \end{cases}$ и $\min\,(r_k, W_{k-1}) \leq r_q$.

Таким образом: $r_q = \max\limits_k \min\,(r_k, W_{k-1})$.

Рассмотрим сообщение s^*, такое, что: $s_i^* = \begin{cases} d, & i > q; \\ D, & i < q, \end{cases}$ а вектор s_q^* таков, что $p\,(s^*) = r_q$ (так как $r_q \in [W_q, W_{q-1}]$, то из непрерывности процедуры $p\,(s)$ следует, что такое s_q^* существует). В силу монотонности механизма экспертизы сообщение s^* является равновесием.

Если найдется номер q такой, что $r_q \geq W_{q-1}$ и $q = \arg\max_k \min(r_k, W_{k-1})$, то $\forall i > q$, $r_i \geq W_{q-1}$ так как $r_i \geq r_q$ и $\forall i < q$, $r_i \notin (W_i, W_{i-1})$. Иначе $r_q = r_i$ и $r_i \leq W_i \leq W_q$, так как если бы $r_i \geq W_{i-1}$, то $r_i \geq W_{i-1} > W_{q-1}$ и $\min(r_i, W_{i-1}) = W_{i-1}$, а $\max(W_{i-1}, W_{q-1}) = W_{i-1}$, то есть $r_q \neq \max_k \min(r_k, W_{k-1})$.

Тогда $\forall i \geq q,\ r_i > x^*$ и $\forall i < q, r_i < x^*$. Из монотонности следует, что $x^* = p(s^*)$, где s^* - равновесие Нэша. •

Теорема 5.5. Для любой процедуры активной экспертизы найдется эквивалентный прямой механизм (механизм открытого управления), определяемый следующим выражением:

$$x^* = \max_k \min(r_k, W_{k-1}).$$

Напомним, что приведенные в настоящем разделе результаты получены в предположении, что точки пика функций предпочтения экспертов упорядочены (см. выше). Все результаты останутся в силе и при отказе от этого предположения (см. работы [4,6] и приводимые в них ссылки).

5.5. Механизмы внутренних цен

Классическим примером модели АС, в которой возможно доказательство существования эквивалентных механизмов ОУ, ставшей, в частности поэтому, чрезвычайно популярной в экономико-математическом моделировании, является АС, в которой АЭ имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа.

Пусть в двухуровневой АС активные элементы имеют *функции затрат типа Кобба-Дугласа*:

$$c_i(y_i, r_i) = \frac{1}{a} y_i^a r_i^{1-a},\ a\ ³\ 1,\ r_i > 0,\ i\ Î\ I.$$

Предположим, что задача центра заключается в побуждении коллектива АЭ выбрать набор действий, сумма которых равна заданной величине R_0 (содержательные интерпретации см. ниже). Пусть центр устанавливает цену l, тогда целевая функция i-го АЭ равна разности между доходом $l y_i$ и затратами:

$$f_i(y_i, r_i) = l\, y_i - c_i(y_i, r_i). \qquad (5.4)$$

Решая задачу минимизации суммарных затрат активных элементов выбором ($\{x_i\}$, l) при условии $x_i = arg \max\limits_{y_i \in A_i} f_i(y_i, r_i)$ и ограничении $\sum\limits_{i \in I} x_i = R_0$, получаем:

$$x_i(R_0, r) = \frac{r_i}{W} R_0, \quad l(R_0, r) = (R_0 / W)^{a-1}, \tag{5.5}$$

где $W = \sum\limits_{i \in I} r_i$, $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$.

Решение (5.5) минимизирует суммарные затраты АЭ при заданном ограничении на сумму действий АЭ.

Рассматриваемая формальная модель имеет множество содержательных интерпретаций. В том числе: распределение объемов работ в коллективе (λ - ставка оплаты), распределение ресурса с ценой за ресурс λ, распределение заказов в объединении (l - внутрифирменная цена), компенсационные механизмы в оперативном управлении проектами и промышленным производством (l - ставка оплаты за сокращение времени операций) и др. [4,12,19]. Общим является наличие единой для всех АЭ цены.

Решение (5.5) было получено в предположении, что центру известны типы АЭ, то есть - коэффициенты $\{r_i\}$ функций затрат АЭ. Если эти коэффициенты ему неизвестны и сообщаются элементами, то возникает задача манипулируемости используемого механизма планирования.

Уникальностью рассматриваемой модели является то, что для нее существует эквивалентный прямой механизм, то есть механизм открытого управления (неманипулируемый), в котором при определенных условиях сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого активного элемента. Обоснуем последнее утверждение. Для этого предположим, что АЭ сообщают центру оценки $\{s_i\}$ параметров функций затрат, а центр использует следующий механизм планирования (механизм открытого управления - выбора планов и цены):

$$\sum_{i \in I} x_i(s, l) = R_0, \tag{5.6}$$

$$x_i(s, l) = arg \max_{y_i \in A_i} \{ l(s)\, y_i - c_i(y_i, s_i)\}. \tag{5.7}$$

Содержательно, центр подставляет в целевые функции АЭ сообщенные ими оценки (принимая их за истинные) и назначает АЭ наиболее выгодные для них при этих оценках планы (условие (5.7) выше было названо условием совершенного согласования). Параметр l выбирается таким образом, чтобы планы $x_i(s, l)$ удовлетворяли балансовому ограничению (5.6).

Решение задачи (5.6)-(5.7) (*механизм внутренних цен*) имеет вид:

$$x_i(R,s) = \frac{s_i}{V} R_0,\ \ i\ \hat{I}\ I,\ \ l(R_0,s) = (R_0 / V)^{a-1}, \tag{5.8}$$

где $V = \sum_{i \in I} s_i$, $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$. Отметим чрезвычайно важную для дальнейшего анализа схожесть выражений (5.8) и (5.5).

Если выполнена *гипотеза слабого влияния* (ГСВ - при достаточно большом числе АЭ влияние сообщения конкретного АЭ на общее управление $l(R_0,s)$ мало), то, подставляя (5.8) в (5.4), находим, что при любых сообщениях остальных АЭ максимум целевой функции i-го АЭ по его сообщению достигается при $s_i = r_i$, то есть при ГСВ сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого активного элемента. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5.6. Для любого механизма внутренних цен существует механизм открытого управления не меньшей эффективности.

Механизм внутренних цен (5.8) достаточно уникален. Во-первых, он является неманипулируемым механизмом (механизмом открытого управления), имеющим ту же эффективность, что и механизм (5.5) в условиях полной информированности. Во-вторых, он минимизирует суммарные затраты АЭ на выполнение общего планового задания.

Полученные выше результаты могут быть усилены, то есть обобщены на случай, когда функции затрат активных элементов имеют вид $c_i(y_i,r_i)=r_i j\left(\frac{y_i}{r_i}\right)$, где $j(\cdot)$ - гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция. При этом цена за ресурс определяется следующим выражением: $l(R_0, s) = j'(R_0/V)$, а оптимальные планы - по-прежнему выражением (5.8).

Исследуем теперь эффективность рассматриваемого механизма внутренних цен.

До сих пор мы считали, что целевая функция центра определяется доходом от выполненных работ суммарным объемом R_0 (при постоянном объеме доход постоянен) и суммарными затратами АЭ по выполнению этих работ. Механизмы (5.5) и (5.8) минимизируют суммарные затраты активных элементов при условии, что центр назначает единую для всех АЭ цену. Если центр имеет собственные интересы, заключающиеся наряду с выполнением заданного объема работ в минимизации суммарных выплат активным элементам, то механизм с внутренними ценами может рассматриваться не только как механизм планирования, но и как механизм стимулирования L-типа, в котором вознаграждение АЭ пропорционально его действию. Коэффициент пропорциональности при этом является ценой, например, единой для всех АЭ ставкой зарплаты, ценой за единицу ресурса и т.д.

Известно, что при монотонных непрерывных функциях затрат пропорциональные системы стимулирования (L-типа) не эффективны (см. теоремы 2.4 и 2.5). В частности, если АЭ имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то оптимальные квазикомпенсаторные механизмы стимулирования (QK-типа) имеют строго большую эффективность, чем пропорциональные (см. выше). Проиллюстрируем это утверждение.

<u>Пример 5.2.</u> Минимальные затраты на стимулирование $s_{QK}^{\min}(x)$ по реализации вектора действий x Î A системой стимулирования QK-типа равны $s_{QK}^{\min}(x) = \sum_{i \in I} c_i(x_i)$. При использовании системы стимулирования L-типа эти затраты определяются следующим образом: $s_L^{\min}(x) = l \sum_{i \in I} x_i^*$, где x_i^* удовлетворяет (5.5).

Отношение $s_L^{\min}(x)$ / $s_{QK}^{\min}(x)$ = a ³ 1 не зависит от вектора действий x и показывает во сколько раз центр "переплачивает" АЭ, используя единую внутреннюю цену, по сравнению с минимально необходимыми для реализации заданного вектора действий затратами на стимулирование. •

Найдем механизм управления (стимулирования и планирования), для которого, как и для механизма внутренних цен, существовал бы эквивалентный механизм открытого управления (обеспечивающий неманипулируемость в случае неполной информированности центра о типах АЭ), но который имел бы большую (желательно такую же или "почти" такую же, как и у оптимального квазикомпенсаторного механизма) эффективность.

Пусть центр использует в условиях полной информированности следующий механизм управления *B-типа*:

$$s_i(y_i, r_i) = \frac{l}{g}\, y_i^g\, r_i^{1-g},\ g \text{ ³ } 1, \qquad (5.9)$$

тогда целевая функция АЭ имеет вид (ср. с (5.4)):

$$f_i(y_i,r_i) = s_i(y_i,r_i) - c_i(y_i,r_i). \qquad (5.10)$$

Теорема 5.7. Если АЭ имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа и $g = a - d$, где $d > 0$, то:

а) механизм В-типа ε-оптимален, где $e \approx d / (a-d)$;

б) в рамках ГСВ для механизма В-типа существует эквивалентный механизм открытого управления.

Доказательство. Решая задачу условной оптимизации, получаем:

$l = (\frac{R_0}{W})^d$, $x_i^* = \frac{r_i}{W} R_0$. Следовательно,

$$s_B^{\min}(x) \;/\; s_{QK}^{\min}(x) = \frac{a}{a-d} \underset{d \to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Пункт а) теоремы доказан. Докажем неманипулируемость механизма В-типа. Если центр использует механизм открытого управления, то:

$$x_i(R_0,s) = \frac{s_i}{V} R_0, \quad l(R_0,s) = (R_0 / V)^d. \qquad (5.11)$$

Подставляя (5.11) в (5.9), убеждаемся, что в рамках ГСВ сообщение достоверной информации - доминантная стратегия каждого активного элемента. •

5.6. Элементы теории реализуемости

Пусть в качестве решения центр должен выбрать некоторое множество альтернатив X из заранее определенного *множества возможных альтернатив* A. Предпочтения элементов на множестве A задаются бинарными отношениями предпочтения. Активный элемент $i \in I$ характеризуется отношением предпочтения R_i. Множество возможных предпочтений i-го элемента обозначим $\Re_i$. Набор отношений предпочтения всех элементов $R = \{R_i\}_{i=1}^n$ называется *профилем предпочтений*. Множество всех возможных профилей предпочтений обозначим через $\Re$, $\Re = \prod_{i \in I} \Re_i$. Будем считать, что все возможные отношения для i-го АЭ параметризованы переменной

$r_i \in \Omega_i$ и записывать $R_i(r_i)$. Под словами "задан профиль предпочтений АЭ" подразумевается, что известны типы $\{r_i\}$ всех элементов $i \in I$, то есть задан вектор $r \in \Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$.

Решение $X \subseteq A$, принимаемое центром, должно зависеть от предпочтений элементов $X = f(R)$. Соответствие $f(R)$, $f : \Re \to 2^A$ называется *соответствием группового выбора* (СГВ).

Поскольку профиль предпочтений неизвестен центру, он запрашивает от элементов информацию, и те посылают в центр *сообщения* $s_i \in S_i$. Получив сообщения, центр по *процедуре планирования* $p : S \to A$ выбирает единственную альтернативу $p(s) \in A$, которая считается решением. Совокупность множества возможных сообщений S и заданной на нем процедуры $p(\cdot)$ составляют *механизм планирования* $\Sigma = (S, p)$.

Допустим, что задан профиль предпочтений элементов $r \in \Omega$ и механизм (S, p). Вектор сообщений s^* называется *равновесием Нэша* при данном $r \in \Omega$, если для любого активного элемента $i \in I$ и любого его сообщения $s_i \in S_i$ выполняется

$$p(s^*) R_i(r_i) p(s_i, s_{-i}^*).$$

Сообщение элемента s_i^* называется *доминантной стратегией* для активного элемента $i \in I$ при данном $r_i \in \Omega_i$, если $\forall s_i \in S_i$ и $\forall \bar{s}_{-i} \in S_{-i}$ выполняется

$$p(s_i^*, \bar{s}_{-i}) R_i(r_i) p(s_i, \bar{s}_{-i}),$$

то есть сообщение s_i^* является для i-го элемента при данном R_i оптимальным, независимо от того, что сообщают остальные активные элементы. Вектор сообщений s^* называется *равновесием в доминантных стратегиях* (РДС) при данном $r \in \Omega$, если у каждого АЭ существует доминантная стратегия.

Пусть задан механизм $\Sigma = (S, p)$ и множество возможных профилей предпочтений Ω. Для $r \in \Omega$ множество равновесных векторов сообщений обозначим $E_\Sigma(r)$ (при использовании конкретного равновесия).

Говорят, что механизм Σ (полностью) *реализует* СГВ f (в соответствующих равновесиях – Нэша, РДС, Байеса и т.д.), если для всех $r \in \Omega$:

1) $E_{\Sigma}(r)$ не пусто;

2) $p(E_{\Sigma}(r)) \subseteq (=) f(r)$.

Другими словами, при всех $r \in \Omega$ равновесие существует и в любом из возможных при данном r равновесий $s^*(r) \in E_{\Sigma}(r)$ принимаемое решение $p(s^*(r))$ лежит в $f(r)$ (совпадает с $f(r)$).

В *теории реализуемости* задача ставится следующим образом: задано множество элементов I и множество всех возможных типов АЭ Ω, дано соответствие группового выбора $f(r)$, которое определяет оптимальное решение при каждом возможном профиле предпочтений $r \in \Omega$. Необходимо построить механизм $\Sigma = (S, p)$, реализующий СГВ $f(r)$ при выбранном определении равновесия, то есть построить такой механизм с сообщением информации, что при любом профиле предпочтений по равновесному при данном профиле $r \in \Omega$ сообщению центр может принять «оптимальное» решение, определяемое $f(r)$.

Рассмотрим некоторые свойства соответствий группового выбора, необходимые для исследования реализуемости СГВ.

Монотонность по Маскину (*ММ*). СГВ $f : \Omega \to A$ удовлетворяет свойству ММ, если $\forall \{r, r'\} \subseteq \Omega,\ \forall a \in A:\ a \in f(r)$ и $\forall i \in I,\ \forall b \in A,\ aR_i(r_i)b \Rightarrow aR_i(r_i')b$, то выполняется $a \in f(r')$.

СГВ удовлетворяет свойству *отсутствия права вето* (ОПВ), если $\forall a \in A,\ \forall i \in I,\ \exists\, r \in \Omega:\ \forall\, j \neq i\ \ \forall b \in A\ aR_j(r_j)b$, то выполнено $a \in f(r)$. То есть, если имеется альтернатива a, наилучшая с точки зрения всех активных элементов, кроме i-го АЭ, то $a \in f(r)$.

Приведем без доказательств ряд результатов (теоремы 5.8-5.10 - см. ссылки в обзоре [6]).

Теорема 5.8. Если СГВ $f : \Omega \to A$ реализуема по Нэшу, то она удовлетворяет ММ.

Для получения достаточных условий реализуемости используют следующий подход. Для исследуемого СГВ определяют в явном виде механизм и доказывают, что он реализует данную СГВ, поэтому одни и те же условия фигурируют в различных теоремах, доказывающих реализуемость различными механизмами.

Опишем механизм, реализующий СГВ, удовлетворяющее условиям ММ и ОПВ. Пусть I - множество активных элементов, типы которых принадлежат множеству Ω, и задано СГВ $f:\Omega \to A$. Каждый активный элемент сообщает в центр профиль предпочтений всех элементов из Ω, альтернативу из множества A и некоторое натуральное число. Таким образом, для каждого активного элемента имеет место: $S_i = A \times \Omega \times N$ и множество возможных сообщений $S = \prod_{i \in I} S_i$. Назовем *множеством согласованных сообщений* множество

$$S_a = \{s \in S \mid \exists j \in I, \exists r^* \in \Omega, \exists a^* \in f(r^*):\ \forall i \neq j\ \ s_i = (a^*, r^*, 0)\}.$$

Множество несогласованных сообщений S_d определим как дополнение к множеству S_a, то есть $S_d = S \setminus S_a$. Определенные таким образом множества S_a и S_d являются разбиением S.

Процедура принятия решения $p : S \to A$ определяется следующими двумя правилами.

<u>Правило 5.1.</u> Если $s \in S_a$, то по определению существуют $j \in I, r^* \in \Omega, a^* \in f(r^*)$ такие, что $\forall i \neq j, s_i = (a^*, r^*, 0)$. Пусть j-ый активный элемент сообщает альтернативу a_j. В этом случае выбирается альтернатива[1]

$$p(s) = \begin{cases} a^*, \text{ при } a_j P_j(r_j^*) a^*; \\ a_j, \text{ при } a^* R_j(r_j^*) a_j. \end{cases}$$

<u>Правило 5.2.</u> Если $s \in S_d$, то реализуется *лотерея*: $p(s) = a_{k(s)}$, где

$$k(s) = \max\{i \in I \,|\, z_i \geq z_j, \forall j \in I\}.$$

Механизм, определяемый правилами 5.1 и 5.2, называется *механизмом Э. Маскина*. Первое правило определяет действие механизма в случае, когда все активные элементы, кроме, быть может, одного, сообщают одинаковые профили предпочтения r^*, одинаковые альтернативы $a^* \in f(r^*)$ и не желают принять участие в лотерее, то

[1] *Напомним, что символ* P_i *обозначает строгую компоненту отношения предпочтения* R_i i*-го АЭ,* $i \in I$.

есть $\forall i \neq j,\ z_i = 0$. В этом случае считается, что все, кроме j-го элемента, сообщают достоверный профиль предпочтений r^*, соответствующий действительному профилю предпочтений всех элементов, и большинство «голосует» за альтернативу a^*. Второе правило определяет лотерею - если сообщения элементов несогласованны, то любой элемент выбором соответствующего натурального числа может добиться выбора наилучшей для себя альтернативы. Имеет место следующий результат.

<u>Теорема 5.9.</u> Если $|I| \geq 3$ и СГВ $f : \Omega \to A$ удовлетворяет ММ и ОПВ, то механизм Маскина реализует это СГВ по Нэшу.

В *Байесовской модели* каждый из активных элементов имеет субъективные представления о распределении $p_i(r_{-i}|r_i)$ параметров функций предпочтений остальных элементов при заданном и известном данному АЭ значении параметра r_i. Центру известен набор функций $p_i(r_{-i}|r_i)$, $i \in I$. Если точные значения типов АЭ не известны никому, кроме них самих, то выбором сообщения s_i^* каждый элемент стремится максимизировать математическое ожидание своей функции полезности $j_i(x_i, r_i)$ при заданной процедуре планирования $p(s)$:

$$\forall i \in I \quad \int\limits_{\Omega_{-i}} j_i(p_i(s_i, s_{-i}^*(r_{-i})), r_i)\, p(r_{-i}|r_i)\, dr_{-i} \to \max_{s_i \in S_i}.$$

Решением этой системы n функциональных уравнений будет набор стратегий элементов $s_i^* : \Omega_i \to S_i$, максимизирующих математическое ожидание их функции полезности в равновесии, называемом *Байесовским равновесием*.

<u>Теорема 5.10.</u> Для любого механизма $p(s)$, $s \in S$, в Байесовской модели существует механизм открытого управления не меньшей эффективности.

Содержательно, в этой теореме используется тот факт, что в Байесовском равновесии сообщение АЭ зависит только от значения его собственного типа - параметра r_i - и не зависит от типов остальных элементов. Таким образом, механизм открытого управления будет выглядеть следующим образом:

$$h(r) = p(s_1^*(r_1), s_2^*(r_2), \ldots, s_n^*(r_n)),$$

что, фактически, сводит многоэлементную задачу к одноэлементной, для которой принцип открытого управления оптимален (см. теорему 5.2). Если в качестве концепции равновесия использовать равновесие Нэша, то равновесное сообщение каждого элемента будет зависеть от параметров остальных элементов (см. качественное обсуждение в конце раздела 5.2):

$$s_i^* = s_i^*(r_1, r_2, \ldots, r_n), \; i \in I .$$

Поэтому в случае, когда используется концепция равновесия Нэша, свести задачу к одноэлементной не удается и принцип открытого управления в общем случае оказывается неоптимальным, то есть задача поиска достаточных условий оптимальности неманипулируемых механизмов остается открытой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адельсон-Вельский Г.П., Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. – 344 с.

2. Ашимов А.А., Бурков В.Н., Джапаров Б.А., Кондратьев В.В. Согласованное управление активными производственными системами. М.: Наука, 1986. – 248 с.

3. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. - 255 с.

4. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989. - 245 с.

5. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и Телемеханика. 1993. № 11. С. 3 - 30.

6. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 - 25.

7. Бурков В.Н., Ириков В.А. Модели и методы управления организационными системами. М.: Наука, 1994. - 270 с.

8. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. - 384 с.

9. Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Цыганов В.В., Черкашин А.М. Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. М.: Наука, 1984. - 272 с.

10. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. - 327 с.

11. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996. - 125 с.

12. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997. - 188 с.

13. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Модели и механизмы теории активных систем в управлении качеством подготовки специалистов. М.: ИЦ, 1998. - 158 с.

14. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 281 с.

15. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 - 26.

16. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в моделях активных систем с нечеткой неопределенностью. М.: ИПУ РАН, 1997.- 101 с.

17. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.-150 с.

18. Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998. - 68 с.

19. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. - 216 с.

20. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977. – 248 с.

21. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. - 206 с.

22. Теория активных систем: состояние и перспективы / В.Н.Бурков, Д.А.Новиков. М.: СИНТЕГ, 1999. - 128 с.

23. Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. М.: Наука, 1991. - 166 с.