Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ им. В. А. ТРАПЕЗНИКОВА

Н.Г. Андронникова, В.Н. Бурков, С.В. Леонтьев

КОМПЛЕКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ЗАДАЧАХ РЕГИОНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Москва 2002

УДК.65.012.

***Андронникова Н.Г., Бурков В.Н., Леонтьев С.В.* Комплексное оценивание в задачах регионального управления –** М.: ИПУ РАН, 2002. – 58 с.

В работе рассматриваются методы комплексного оценивания на основе матричных сверток. Дается постановка задач оптимизации программ регионального развития и предлагаются методы их решения. Рассматриваются также методы оценки риска региональных программ на основе понятия резерва направления.

Препринт представляет интерес для специалистов в области управления социальными и экономическими системами.

Рецензент: д.т.н. А. В. Щепкин

Текст препринта воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами.

Утверждено к печати Редакционным советом Института.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА 1. ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ОЦЕНОК ДОСТИЖИМОСТИ ЦЕЛЕЙ 6

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПРОГРАММЫ РАЗВИТИЯ С УЧЕТОМ РИСКА 21

ГЛАВА 3. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 42

ЛИТЕРАТУРА 58

ВВЕДЕНИЕ

Разработка систем регионального управления требует описания объектов управления (предприятий и организаций региона, основных групп населения, политических партий и общественных движений и т.д.), определения основных (существенных) факторов, характеризующих социально-экономическую обстановку в регионе, оценки этих факторов, создания механизмов разработки и реализации региональных программ развития. Решение этих задач сталкивается с трудностями, предопределенными особенностью объекта управления. В работе [1] выделены 9 основных особенностей. Отметим первые 7 из них, важные для дальнейшего изложения:

1. Трудности описания процессов в строго формализованном виде.
2. Комплексность показателей, входящих в структуру объекта.
3. Иерархическая структура объектов.
4. Дефицит достоверной исходной информации.
5. Достаточность группировки результатов оценки по небольшому числу градаций.
6. Многовариантность управления.
7. Существование средств информационного воздействия.

Одной из основных задач при разработке систем регионального управления является оценка социально-экономического состояния региона, как существующего, так и желательного. Действительно, чтобы управлять, необходимо в первую очередь оценить, где мы находимся и куда мы хотим попасть. В последнее время большое распространение для построения обобщенных оценок объектов самого различного типа получил подход, основанный на использовании дерева целей. При этом, каждый элемент (вершина) дерева, включая итоговый, дезагрегируется ровно на два подэлемента, то есть используется так называемый метод дихотомии [1,2,3]. При этом агрегирование каждой пары элементов в элемент последующего (верхнего) уровня производится с помощью логических матриц свертки. Такой подход применен в работе [4] для разработки региональных программ развития. В этой работе описан метод оптимизации программы по стоимости на основе построения сети напряженных (Парето-оптимальных) вариантов программы. Настоящая работа является дальнейшим развитием результатов работы [4]. Дается обобщение сети напряженных вариантов на основе введенных понятий резерва направления и сети напряженных вариантов с резервами. Рассматривается общая постановка задачи разработки варианта программы, обеспечивающего требуемое значение комплексной оценки при минимальных затратах Администрации региона. Предложены методы решения этой задачи для различных случаев.

Раздел 1 в основном следует работе [4], раздел 2 написан с участием Скорика В.М.

ГЛАВА 1. Процедура построения комплексных оценок достижимости целей

Решение задачи формирования согласованной программы развития региона предполагает реализацию противоречивых целей в рамках существенных ресурсных ограничений. В этом случае для принятия решения необходимо использовать механизм оценки достижимости целей.

Будем рассматривать регион как сложную организационную систему, состояние которой можно оценить по ряду факторов или критериев. Пусть оцениваемая организационная система описывается на основе заданного набора частных критериев вектором $K = (k_1, ..., k_i, ..., k_n)$, где k_i – значение i-го частного критерия. Задача заключается в построении комплексного критерия функционирования f(K), наиболее адекватно отражающего степень достижения поставленных перед организационной системой целей. Комплексным критерием в данном случае является уровень социально-экономического состояния региона, в качестве частных критериев могут быть рассмотрены экономические (наполняемость регионального бюджета, финансовые показатели деятельности промышленных предприятий и т.д.) и социальные (уровень занятости, средняя заработная плата, уровень жизни и т.д.) показатели.

Оценка достижимости целей в общем случае - сложная иерархическая процедура, включающая такие операции, как преобразование шкалы, нормирующее преобразование шкалы, агрегирование [5].

Рассмотрим варианты комплексных критериев функционирования организационной системы, отражающих определенные качественные свойства целей, поставленных перед ней. Будем считать, что качественными целями организационной системы является увеличение частных критериев (чем больше, тем лучше).

Если качественным свойством целей организации является равномерное (в определенном соотношении) улучшение всех локальных показателей деятельности, соответствующая комплексная оценка имеет вид

$$F(K) = \min_i \left(k_i / \alpha_i \right) \tag{1.1}$$

где α_i – положительные параметры, отражающие информацию об относительной важности различных критериев. Луч αt ($t>0$) определяет траекторию предпочтительного (гармоничного) развития системы. Положительным свойством оценки (1.1) является простота выделения «узких мест», т. е. показателей, которые в данный момент являются «критическими» и на их улучшение следует обратить первоочередное внимание.

Оценка (1.1) имеет и другую важную интерпретацию. Если вектор $\overline{\alpha}$ принять за «точку идеала», т. е. точечную цель, к которой должна стремиться организационная система, то (1.1) является гарантированной оценкой степени достижения этой цели (например, $f(K)=0,6$ означает, что близость к цели составляет не менее чем 60% по каждому локальному критерию).

Если качественным свойством целей является улучшение хотя бы одного локального критерия, то соответствующий комплексный критерий достижения целей организации принимает вид

$$F(K) = \max_i \left(k_i / \alpha_i \right) \tag{1.2}$$

где α_i, как и в предыдущем случае, отражает важность частного критерия k_i.

Эта оценка ориентирует на концентрацию усилий в определенной области. Если цели, поставленные перед организационной системой, носят смешанный характер (и улучшение всех показателей, и достижение высоких результатов в каком-либо направлении), то применяется средневзвешенная степенная оценка деятельности

$$f(K)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(k_i/\alpha_i\right)^s\right)^{1/s},\quad s>0 \tag{1.3}$$

При s = 1 получаем простейший вид оценки (линейная свертка)

$$f(K)=\sum_{i=1}^{n}\left(k_i/\alpha_i\right) \tag{1.4}$$

Такая оценка отражает свойство взаимного замещения целей, т. е. недостатки в одной области можно компенсировать достижениями в любой другой. Применяя к описанным вариантам операции преобразования шкалы и агрегирования, можно получить достаточно богатый набор возможных процедур оценки деятельности.

Воспользуемся возможностью представления рассмотренных базовых оценок в дихотомическом виде. Для свертки (1.1) имеем:

$$\min k_i/\alpha_i=\min\left\{k_1/\alpha_1;\min\left[k_2/\alpha_2;\min\left\{k_3/\alpha_3;\ldots\ \min\left(k_{n-1}/\alpha_{n-1};k_n/\alpha_n\right)\right\}\right]\right\}$$

Для свертки (1.3) при n=3 имеем

$$f(K)=\left\{\left(k_1/\alpha_1\right)^s+\left(\left[\left(k_2/\alpha_2\right)^s+\left(k_3/\alpha_3\right)^s\right]^{1/s}\right)^s\right\}^{1/s}$$

В общем случае дихотомическое представление можно описать структурной схемой (см. рис. 1.1). Структурные схемы такого рода представляют собой прадерево с корневой вершиной, соответствующей комплексной оценке, и висячими вершинами, соответствующими локальным критериям. Каждой промежуточной вершине К соответствует агрегированная оценка q_k получаемая в результате свертки двух оценок соответствующих вершин нижнего уровня.

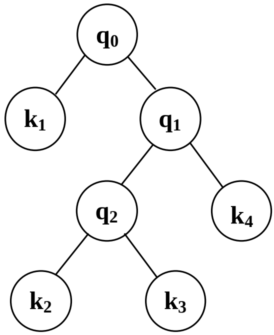

Рис. 1.1.

Структурной схеме рис. 1.1 соответствует дихотомическое представление комплексной оценки

$$q_0 = f(K) = \varphi_1[k_1 (\varphi_2 (k_4, \varphi_3(k_2, k_3))]$$

Особенностью дихотомического представления является многошаговая процедура агрегирования, причем на каждом шаге производится агрегирование только двух оценок. Эта особенность дихотомического представления позволяет решать задачу комплексной оценки деятельности по n критериям путем последовательного решения ряда задач с двумя критериями. Дихотомическое представление допускает достаточно широкий класс комплексных критериев достижения целей [2].

В работе [4] дихотомическое представление применено для оценки и оптимизации региональных программ развития. Рассмотрим основные результаты этой работы.

На рис. 1.2 приводится иерархическая структура для трех критериев оценки программы развития – экономической эффективности, уровня жизни и экологической безопасности (обозначим их соответственно буквами Э, Ж и Б).

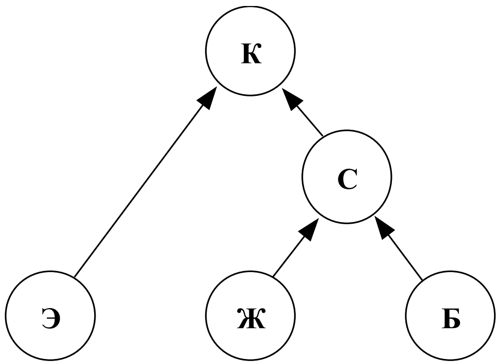

Рис. 1.2.

Представляется естественным сначала объединить критерии уровня жизни и экологической безопасности в один агрегированный критерий социального уровня (С). Далее, объединяя социальный уровень с экономической эффективностью, получим комплексную оценку социально-экономического уровня, который обеспечивает анализируемый вариант программы развития. Особенностью иерархической структуры рис. 1.2 является агрегирование в каждом узле дерева только двух оценок. Это крайне привлекательная особенность. Дело в том, что комплексная оценка должна отражать приоритеты развития региона. Формирование этих приоритетов, а значит и формирование комплексной оценки должно проводиться первыми лицами (главой администрации, его заместителями, начальниками управлений), то есть лицами, принимающими решения. Здесь мы сталкиваемся с чисто психологической проблемой. Человек способен эффективно оценить (соразмерить) только ограниченное число целей и лучше всего, если на каждом шаге оценки приходится сравнивать не более двух критериев. Такое сравнение в случае двух критериев удобно проводить, представляя результаты в виде таблицы (матрицы). Предварительно перейдем к дискретной шкале оценок по каждому критерию, а именно, будем оценивать состояние отрасли по каждому критерию по четырехбалльной шкале: плохо, удовлетворительно, хорошо, отлично, или в числовых оценках – один, два, три, четыре. В таких же шкалах будем оценивать агрегированную и комплексную оценки. На рис. 1.3 приведен пример свертки критерия «уровень жизни» с критерием «экологическая безопасность».

4	2	3	4	4
3	1	2	3	3
2	1	2	3	3
1	1	1	1	2
Б / **Ж**	**1**	**2**	**3**	**4**

Рис. 1.3.

Как уже отмечалось, эта матрица отражает общественные приоритеты, так при критическом положении в области экологии и по уровню жизни приоритет отдается обоим критериям. При удовлетворительном положении в области экологической безопасности приоритет имеет показатель «уровень жизни», поскольку состояние с хорошей оценкой по безопасности и удовлетворительной по уровню жизни оценивается как удовлетворительное, а обратная картина (оценка «хорошо» по уровню жизни и «удовлетворительно» по безопасности) оценивается как оценка «хорошо». С ростом уровня жизни приоритет смещается в сторону показателя экологической безопасности, поскольку состояние «отлично» возможно только при оценке «отлично» по показателю безопасности (при этом, возможна оценка «хорошо» по уровню жизни). Имея оценку социального уровня, мы можем построить матрицу свертки для комплексной оценки социально-экономического уровня. Пример такой оценки приведен на рис. 1.4.

4	2	3	4	4
3	2	2	3	3
2	1	2	3	3
1	1	1	2	2
С / Э	**1**	**2**	**3**	**4**

Рис. 1.4.

Здесь также можно заметить изменение системы приоритетов. При кризисном положении в экономике и обществе приоритет имеют оба показателя – и социальный уровень и уровень экономической эффективности. При удовлетворительном или хорошем значении этих показателей приоритет смещается в сторону экономической эффективности. Наконец, при высоких оценках (хорошо или отлично) приоритет снова имеет показатель социального уровня. Граничные состояния, отделяющие плохие состояния от удовлетворительных, удовлетворительные от хороших и хорошие от отличных, можно также определять по разному. Более того, эти границы могут и должны меняться со временем. Так, состояние «плохо» соответствует сегодняшнему состоянию и по экономической эффективности в регионе, и по уровню жизни ее работников, и по уровню экологической безопасности. Состояние «удовлетворительно» может соответствовать средним значениям соответствующих показателей по другим регионам. Состояние «хорошо» – лучшим значениям показателей по регионам, а «отлично» – средним значениям по другим странам в соответствующих направлениях. При росте эффективности экономики и уровня жизни цели могут измениться. Так, состояние «отлично»может соответствовать лучшим значениям показателей в мире. Обе матрицы, объединенные в графическую схему формирования комплексной оценки социально-экономического уровня, приведены на рис. 1.5.

Имея дерево свертки критериев можно оценивать любой вариант программы развития региона и на основе этого выбирать оптимальный вариант. Рассмотрим задачу выбора программы развития, обеспечивающей переход от состояния «плохо» к состоянию «удовлетворительно». Для этого определим понятия напряженных вариантов программы. Каждый вариант будем описывать вектором $x = \{x_Ж, x_Б, x_Э\}$, компоненты которого определяют оценки по соответствующим критериям.

Определение 1. Вариант x называется напряженным, если не существует другого варианта y, имеющего то же значение комплексной оценки, у которого оценки по всем критериям не выше, чем у варианта x.

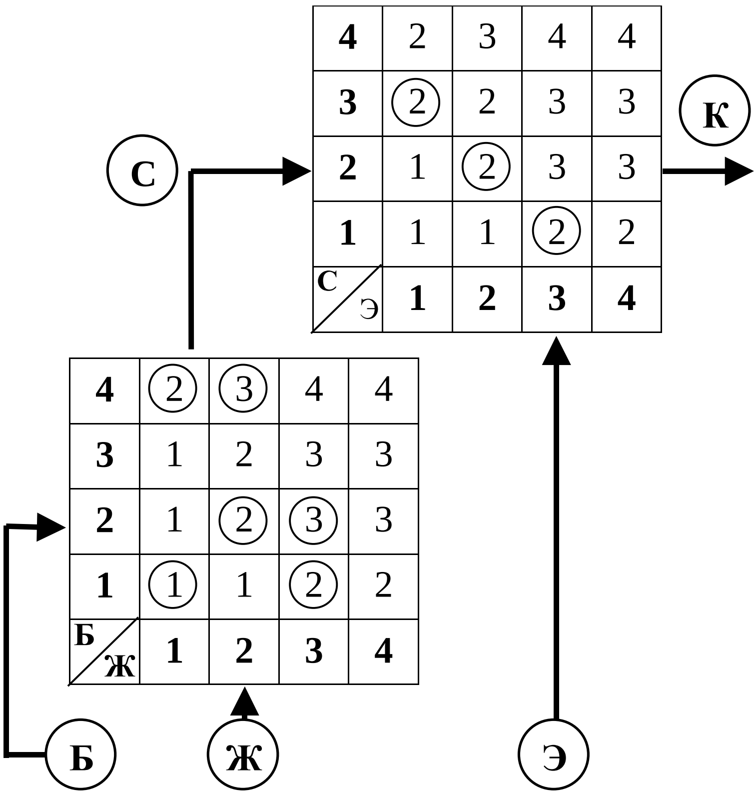

Рис.1.5.

Так, вариант x = (2, 2, 4), имеющий комплексную оценку К = 3, не является напряженным, так как имеется вариант y = (2, 2, 3), имеющий такое же значение комплексной оценки и в то же время его оценки по критериям не превышают оценок варианта x. Для варианта y = (2, 2, 3) таких вариантов не существует. Поэтому он является напряженным. Значение напряженных вариантов в том, что варианты программы развития, обеспечивающие получение требуемого значения комплексной оценки с минимальными затратами должны быть напряженными. Фактически напряженные варианты это Парето-оптимальные варианты в пространстве критериев. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением только напряженных вариантов. Опишем алгоритм построения всех напряженных вариантов.

Пусть поставлена задача перехода из состояния $x_0 = (1, 1, 1)$ с комплексной оценкой «плохо» в состояние с комплексной оценкой «удовлетворительно». Рассматриваем матрицу сверток показателей социального уровня и уровня экономической эффективности. Отмечаем все элементы матрицы, имеющие оценку 2 (удовлетворительно, рис. 1.5) и являющиеся напряженными. Это элементы, имеющие оценку 1 и слева и снизу от них. Имеем три таких элемента: (1; 3), (2; 2) и (3; 1). Для получения каждого из указанных состояний необходимо достичь соответствующих значений по показателям социального уровня (С) и экономической эффективности (Э). Так состояние (1; 3) достигается при достижении оценки 1 по показателю «С» и оценки 3 по показателю «Э». На рис. 1.5 отмечены значения показателей «С» и «Э», которые должны быть достигнуты для получения каждого из трех указанных выше состояний.

Показатели экономической эффективности являются исходными показателями. Показатель социального уровня является агрегированным показателем. Поэтому на основе матрицы свертки показателей «Ж» и «Б» необходимо указать все напряженные варианты, которые дают соответствующие оценки по показателю «С». Так, например, оценка «удовлетворительно» (2) по показателю «С» может быть получена тремя способами: (1; 4), (2; 2) и (3, 1), оценка 3 – двумя способами: (2; 4) и (3; 2), оценка 1 всего одним способом – (1; 1). Это соответствует сохранению существующего положения в области уровня жизни и экологической безопасности. Полученный граф называется сетью напряженных вариантов. Он приведен на рис. 1.6.

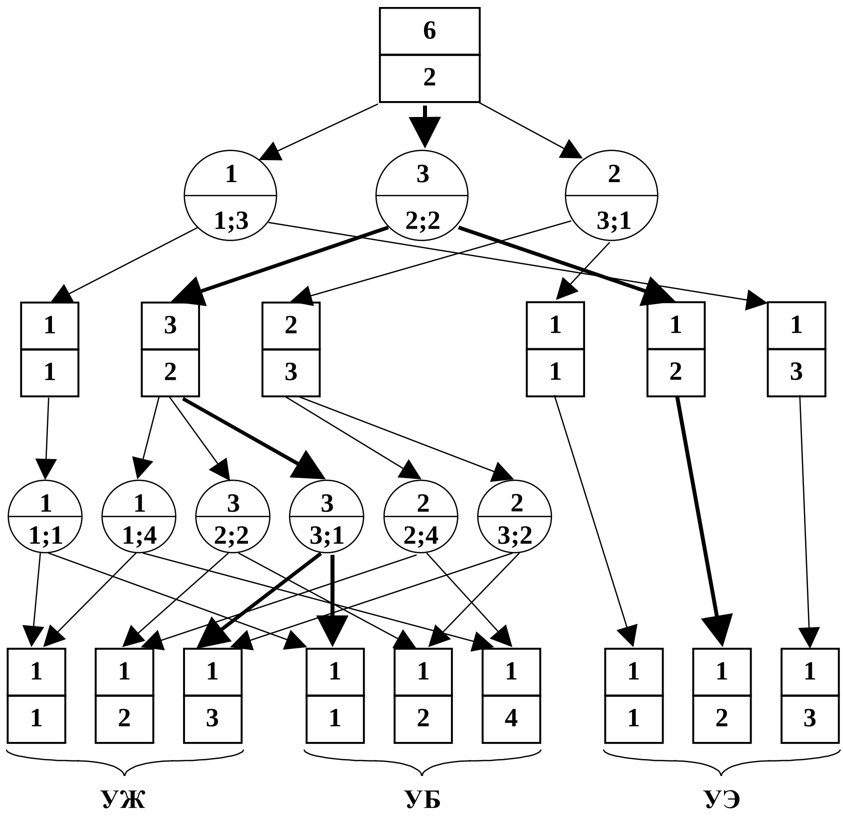

Рис.1.6.

Как следует из алгоритма его построения, он содержит все напряженные варианты, имеющие комплексную оценку «удовлетворительно».

Для получения какого-либо напряженного варианта поступаем следующим образом. Рассматриваем начальную вершину (вход) сети. Из нее исходят три дуги. Берем любую из них, например, дугу, ведущую в вершину (2; 2). Из вершины (2; 2) исходят две дуги. Отмечаем обе эти дуги. Дуга, ведущая в вершину 2 по показателю «Э» указывает, что по этому показателю требуется достичь состояния «удовлетворительно». Дуга, ведущая в вершину 2 по показателю «С» указывает, что по этому показателю также требуется достичь состояния «удовлетворительно». Из трех вариантов достижения оценки 2 по показателю «С» выбираем любой (например, вариант (3; 1), что соответствует оценке «хорошо» по показателю «Ж» и оценке «плохо» по показателю «Б». Полученному напряженному варианту соответствует подграф сети, выделенный на рис. 1.6 толстыми дугами. Он определяет напряженный вариант (3; 1; 2). Имея сеть напряженных вариантов нетрудно определить число напряженных вариантов, обеспечивающих получение требуемой оценки. Для этого применяем следующий алгоритм индексации (пометки) вершин сети:

1 шаг. Помечаем конечные вершины сети индексами 1 (индексы указаны в верхней половине вершины).

2 шаг. Двигаясь снизу вверх последовательно помечаем все вершины. Индекс вершины-кружка на рис 1.6 равен произведению индексов смежных с ней двух вершин нижнего уровня. Индекс вершины-квадрата на рис 1.6 равен сумме индексов смежных с ней вершин нижнего уровня. Индекс начальной вершины-квадрата определяет число напряженных вариантов.

Обоснование алгоритма непосредственно следует из описанного способа определения индексов. Индексы вершин указаны на рис. 1.6 в верхней части вершин. Число напряженных вариантов равно 6.

Построив сеть напряженных вариантов можно решать различные задачи формирования программы развития с учетом факторов стоимости и риска. Рассмотрим сначала задачу выбора варианта программы, обеспечивающего достижение поставленной цели с минимальными затратами. Пусть для каждого критерия i определены затраты s_{ij}, необходимые для обеспечения уровня j, то есть разработана подпрограмма (система мероприятий), выполнение которой обеспечивает рост критерия до уровня j. Примем, что подпрограммы по различным критериям независимы, то есть мероприятия i-ой подпрограммы не влияют на другие направления (цели). В этом случае существует эффективный алгоритм определения программы минимальной стоимости. В его основе также лежит метод индексации вершин сети напряженных вариантов снизу вверх.

1 шаг. Помечаем нижние вершины сети индексами s_{ij}.

Общий шаг. Вершины следующего (более высокого) уровня сети напряженных вариантов помечаются только после того, как помечены все смежные вершины нижележащего уровня. При этом индекс вершины-квадрата (в таких вершинах записывается одно число – оценка соответствующего агрегированного критерия) равен минимальному из индексов смежных вершин-кружков нижележащего уровня, а индекс вершины-кружка (в кружке записаны два числа – это пара оценок критериев нижнего уровня, агрегирование которых дает соответствующую оценку критерия верхнего уровня) равен сумме индексов смежных вершин-квадратов нижележащего уровня.

При описанной процедуре индекс начальной вершины-квадрата равен минимальным затратам на реализацию соответствующей программы. Оптимальный вариант находится «обратным ходом» – сверху вниз. Сначала находим вершину-кружок, смежную с начальной вершиной сети и имеющую минимальный индекс среди всех вершин, смежных с начальной. Из этой вершины-кружка исходят две дуги к вершинам-квадратам нижележащего уровня. Для каждой вершины-квадрата находим вершину-кружок, имеющую минимальный индекс среди всех вершин, смежных с соответствующей вершиной-квадратом и т.д. В результате будет выделен подграф, определяющий оптимальный вариант программы.

Рассмотрим работу алгоритма на примере сети напряженных вариантов рис. 1.6.

Пример1.1. Пусть матрица затрат (s_{ij}) имеет следующий вид:

Таблица 1.1.

i \ j	**1**	**2**	**3**	**4**
Ж	2	7	20	60
Б	3	10	35	50
Э	1	8	50	100

Индексы вершин сети, полученные на основе описанного алгоритма, указаны на рис. 2.8 в верхней половине соответствующих вершин. Оптимальный вариант выделен толстыми линиями. Это вариант (2; 2; 2) с затратами s^0 = 25, соответствующий сбалансированному развитию по всем направлениям.

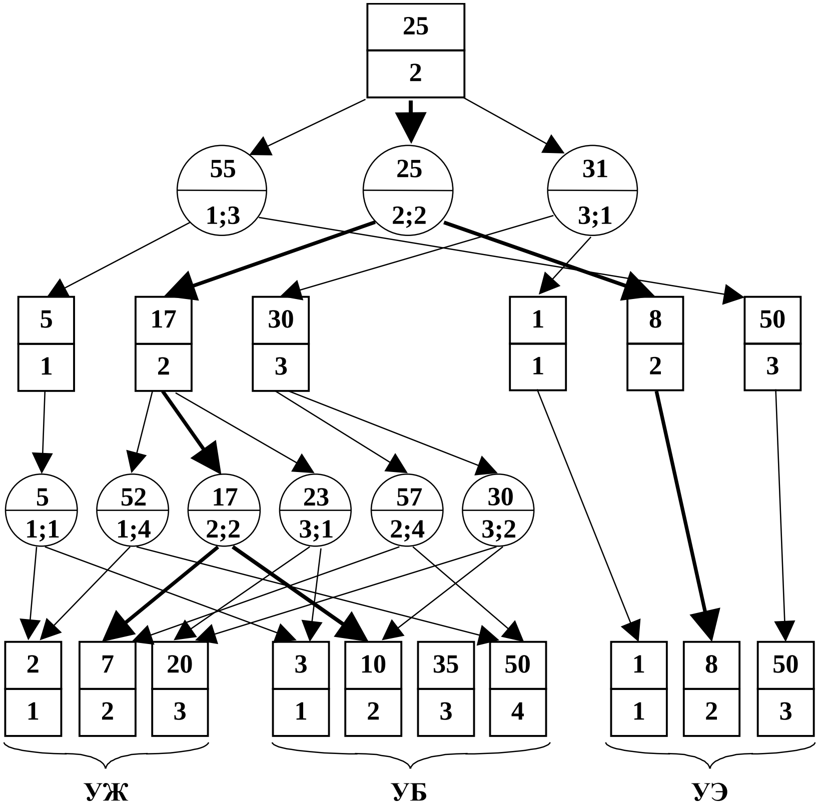
25
2
55
1;3
25
2;2
31
3;1
5
1
17
2
30
3
1
1
8
2
50
3
5
1;1
52
1;4
17
2;2
23
3;1
57
2;4
30
3;2
2
1
7
2
20
3
3
1
10
2
35
3
50
4
1
1
8
2
50
3
УЖ
УБ
УЭ

Рис.1.7.

ГЛАВА 2. Методы оптимизации комплексной программы развития с учетом риска

Рассмотренный выше подход к построению оптимальной по стоимости программы развития региона имеет один недостаток. Он связан с тем, что напряженные варианты развития обладают низкой надежностью реализации. Действительно, достаточно срыва программы по одному направлению, и поставленная цель не достигается. Для повышения надежности вариантов программы введем понятия критической оценки и резерва направления.

Пусть задан некоторый вариант развития $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, имеющий комплексную оценку K. Будем уменьшать оценку x_j направления j. Обозначим x_j^k – минимальное значение этой оценки, такое что дальнейшее уменьшение оценки x_j приводит к уменьшению комплексной оценки. Оценку x_j^k будем называть *критической* оценкой для j-го направления варианта x.

Определение 2. Резервом j-го направления варианта x называется разность

$$\Delta_j(x) = x_j - x_j^k.$$

Замечание. Если при уменьшении оценки до 1 комплексная оценка не меняется, то будем *по определению* считать, что резерв направления равен любой требуемой величине M (достаточно большой).

Заметим, что если $\Delta_j(x) = 0$ для всех j, то есть оценки всех направлений варианта x являются критическими, то мы получаем напряженный вариант развития. Очевидно, что при разработке программы развития для повышения надежности ее реализации целесообразно предусмотреть резервы для особо рисковых направлений.

Аналогично можно определить резерв промежуточной (обобщенной) оценки относительно комплексной оценки, а также резерв оценки данного направления относительно обобщенной оценки.

Рассмотрим комплексную оценку состояния региона, связанную с программой развития малого предпринимательства. Выделим основные цели развития малого предпринимательства. Первая цель – это рост экономической эффективности и, как следствие, налоговых поступлений. Вторая цель – увеличение доходности, отражающаяся, в основном, в росте заработной платы, а третья цель – увеличение занятости. Естественно объединить уровень занятости и уровень доходности в обобщенный критерий «социальный уровень». Окончательно получаем структуру комплексной оценки состояния региона (в части, связанной с развитием малого предпринимательства), показанную на рис. 2.1.

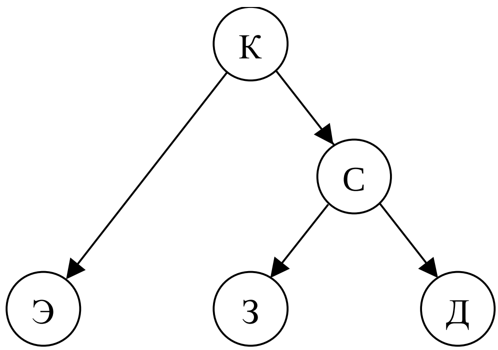

Рис. 2.1.

На рисунке направление занятости обозначено буквой «З», доходности – «Д», экономической эффективности – «Э». Обобщенная оценка социального уровня обозначена «С».

С привлечением экспертов – руководящих работников Администрации заполняются смысловые матрицы, показанные на рис. 2.2. Как и в работе [4], оценки 1, 2, 3, 4 соответствуют качественным градациям – «плохо», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

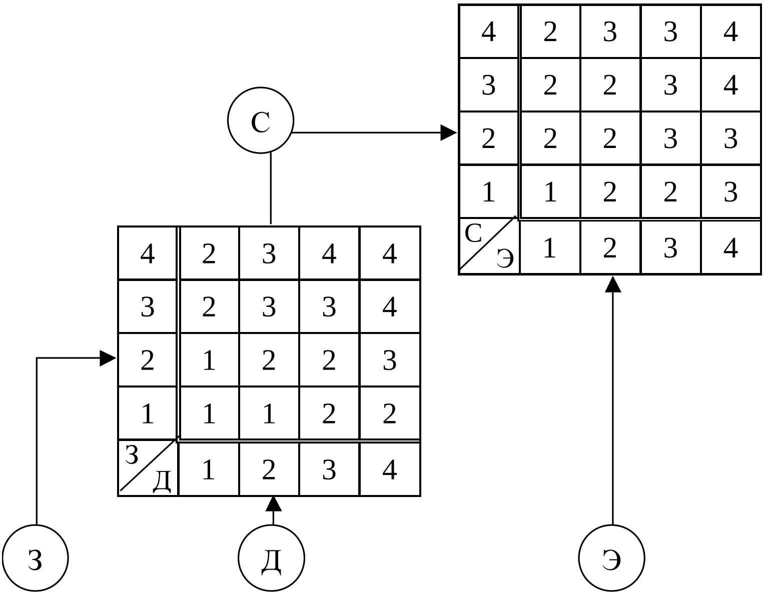

Рис. 2.2.

Заметим, что приведенные матрицы отражают политику областной Администрации в области развития малого предпринимательства. Так, например, обобщенная оценка социального уровня равна единице («плохо») и в случае, когда оценка уровня занятости равна 1, а уровня доходности – 2 («удовлетворительно»), и в случае, когда, наоборот, оценка уровня занятости равна 2, а оценка уровня доходности – 1. Действительно, в данном случае для Администрации одинаково важны обе цели – и увеличение уровня доходности, и увеличение уровня занятости. Аналогично, при объединении оценок социального уровня и уровня экономической эффективности при малых значениях оценок («плохо» или «удовлетворительно») для Администрации важно продвижение хотя бы в одном направлении. Однако, в области высоких оценок («хорошо» и «отлично») приоритет отдается уровню экономической эффективности. Это и понятно, так как рост экономической эффективности позволяет решить многие проблемы области (и социальные, и экономические).

Дадим иллюстрацию введенных понятий критической оценки и резерва направления на структуре комплексной оценки, рис. 2.2. Рассмотрим вариант x = (3, 2, 3), имеющий комплексную оценку 3. Для первого направления оценка Э = 3 является критической, поэтому резерв первого направления для этого варианта равен $\Delta_1 = 0$. Для второго направления критической оценки нет, так как даже оценка «плохо» по уровню доходности при хорошей оценке по уровню занятости дает удовлетворительную оценку социального уровня, что, в свою очередь, обеспечивает комплексную оценку «хорошо» при уровне экономической эффективности «хорошо». Таким образом, резерв второго направления равен любому требуемому значению. Наконец, для третьего направления значение критической оценки $x_3^k = 2$ и резерв направления $\Delta_3 = 1$.

Определим резерв обобщенной оценки «Социальный уровень» относительно комплексной оценки. Легко видеть, что критическое значение обобщенной оценки равно $C^k = 2$, и резерв обобщенной оценки $\Delta_C = 3–2 = 1$. Определим, наконец, резервы второго и третьего направления (доходность и занятость) относительно обобщенной оценки, обозначая их $\Delta_Д(C)$ и $\Delta_З(C)$. Имеем для уровня доходности –

критическая оценка равна 2 и резерв $\Delta_{Д}(C)$ равен 0. Для уровня занятости $З^k = 3$ и $\Delta_{З}(C) = 0$. Заметим, что

$$\Delta_{Д}(C) + \Delta_{C} = 0 + 1 < \Delta_{Д} = M,$$

$$\Delta_{З}(C) + \Delta_{C} = 0 + 1 = 1 = \Delta_{З},$$

то есть резерв направления не меньше (больше или равен) суммы резерва обобщенной оценки и резерва направления относительно обобщенной оценки.

В дальнейшем будем рассматривать матрицы, в которых изменения оценки по строке или столбцу происходит не более, чем на единицу. Заметим, что этого всегда можно добиться путем введения дополнительных строк или столбцов. Кроме того, маловероятно, что при изменении оценки направления или обобщенной оценки на единицу, оценка более высокого уровня (соответственно – обобщенная или комплексная оценка) изменилась сразу на 2 единицы. В этом случае имеет место следующая связь между резервом направления, резервом обобщенной оценки и резервом направления относительно обобщенной оценки.

Теорема 1. Резерв направления больше или равен сумме резерва обобщенной оценки и резерва направления относительно обобщенной оценки.

Доказательство. Пусть величина резерва направления относительно обобщенной оценки равна $\Delta(C)$. Это значит, что при уменьшении оценки по данному направлению на $\Delta(C)$ единая обобщенная оценка не изменится (а значит, не изменится и комплексная оценка). Пусть резерв обобщенной оценки равен Δ_{C}. Это значит, что уменьшение обобщенной оценки на Δ_{C} не меняет комплексной оценки. Уменьшим оценку направления на величину $\Delta_{C} + \Delta(C)$. При этом величина комплексной оценки не изменится, так как при уменьшении оценки направления на $\Delta(C) + K$, $K = 1, 2, \dots, \Delta_C$, величина обобщенной оценки уменьшится не более чем на K единиц в силу отмеченного выше свойства матриц свертки критериев. Таким образом, резерв направления не меньше (больше или равен) чем $\Delta_C + \Delta(C)$.

Будем рассматривать варианты, резервы направлений которых не превышают 1. Этого вполне достаточно для практики, поскольку такая ситуация обеспечивает достаточную надежность реализации программы.

Следствие 2.1. Если оценка направления больше 1, а резерв направления равен 1, то он равен сумме резерва обобщенной оценки и резерва направления относительно обобщенной оценки.

Доказательство. Если резерв направления строго больше суммы резерва обобщенной оценки и резерва направления относительно обобщенной оценки, то оба последних резерва равны 0. Но из этого следует, что уменьшение оценки направления на 1 уменьшает обобщенную оценку на 1, что в свою очередь уменьшает комплексную оценку на 1 и, следовательно, резерв направления равен 0. Полученное противоречие доказывает следствие.

По аналогии с [4] введем понятие напряженного варианта с резервами.

Пусть заданы требуемые резервы для всех направлений.

Определение 3. Вариант $x = (Э, Д, З)$ с резервами направлений не менее заданных $\Delta_Э$, $\Delta_Д$, $\Delta_З$ называется напряженным, если не существует другого варианта $x_1 = (Э_1, Д_1, З_1)$ с величинами резервов направлений не менее заданных, у которого оценки направлений не более, чем у варианта x.

Значение напряженных вариантов в данном случае то же самое, что и в случае напряженных вариантов без резерва, то есть, программу минимальной стоимости при заданных резервах направлений следует искать среди напряженных вариантов с резервами направлений не менее заданных.

Опишем алгоритм определения всех напряженных вариантов с резервами.

Сначала рассмотрим случай, когда резерв $\Delta = 1$ имеет только одно направление, например, уровень занятости ($\Delta_3 = 1$). Примем, что поставлена задача обеспечить значение комплексной оценки 2 («удовлетворительно»). Рассмотрим напряженные варианты оценок социального и экономического уровня, дающие оценку 2. Разделим их на две группы. В первую группу включаем варианты с нулевым резервом оценки социального уровня. Согласно лемме для этих вариантов оценка уровня занятости должна иметь резерв $\Delta_3 = 1$ (если, конечно, эта оценка не равна 1). Анализируя матрицу свертки показателей экономической эффективности и социального уровня, выделяем следующие варианты (1; 2) и (2; 1). Алгоритм их выделения аналогичен алгоритму определения напряженных вариантов, описанному в работе [4]. Во вторую группу включим варианты в которых резерв обобщенной оценки социального уровня равен 1 (согласно лемме, резерв направления «уровень занятости» можно взять равным 0). Такой вариант всего один – (1; 3). Алгоритм выделения таких вариантов также аналогичен описанному в [4] с тем отличием, что сначала находятся напряженные варианты с нулевым резервом (в нашем случае это вариант (1, 2)), а затем оценка социального уровня в том варианте увеличивается на 1 (получаем вариант (1, 3)). Это не касается варианта (2, 1), который по определению имеет любой резерв по критерию социального уровня (хуже 1 быть не может).

Для каждого из вариантов первой группы определяем варианты оценок уровня дохода и уровня занятости, имеющие резерв $\Delta_3 = 1$ по критерию уровня занятости (или имеющие по этому критерию оценку уровня занятости, равную 1. В результате для обобщенного варианта Э = 2, С = 1 получаем единственный вариант (2, 1, 1), а для обобщенного варианта Э = 1, С = 2 получаем три варианта: (1, 1, 4), (1, 2, 3) и (1, 3, 1). Первый из них получен из напряженного варианта с нулевым резервом по уровню занятости (1, 1, 3) путем увеличения оценки уровня занятости на одну единицу, второй – (1, 2, 3), также получен из напряженного варианта с нулевым резервом $\Delta_3 = 0$ (1, 2, 2) путем увеличения оценки уровня занятости на 1. Наконец, третий имеет оценку уровня занятости, равную 1, и потому имеет любой резерв.

Перейдем к рассмотрению второй группы, состоящей из одного обобщенного варианта (1, 3). Для этого находим все напряженные варианты с нулевыми резервами, имеющие оценку социального уровня 3. Таких вариантов два: (1, 2, 3) и (1, 4, 2), из них вариант (1, 2, 3) уже был получен выше. Окончательно получаем сеть напряженных вариантов, в которых резервы первых двух направлений (уровень экономической эффективности и уровень доходности) больше или равны 0, резерв направления «уровень занятости» не менее 1. Сеть рис. 2.3. содержит все напряженные варианты с требуемыми резервами, дающими комплексную оценку 2. Их всего 5: (1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 4, 2), (2, 1, 1).

Дадим обобщение описанного алгоритма на случай, когда требуемые резервы равны 1 для обоих направлений – и уровня занятости и уровня доходности. В данном случае, как и ранее на первом этапе, следует рассмотреть две группы обобщенных вариантов (то есть вариантов, описываемых обобщенной оценкой социального уровня и оценкой уровня экономической эффективности).

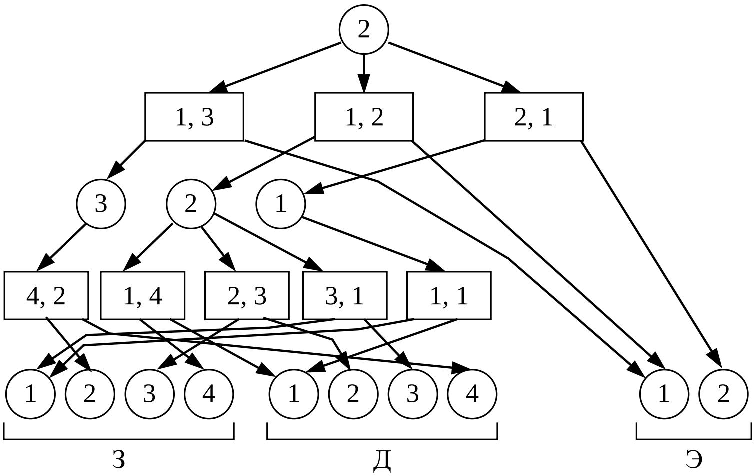

Рис. 2.3.

В первую группу входят обобщенные варианты с нулевым резервом оценок социального уровня.

Во вторую группу входят обобщенные варианты с резервом оценки социального уровня, равным 1.

Отличие возникает на втором этапе для первой группы. Действительно, согласно лемме 2.1 мы должны определить для каждого обобщенного варианта все варианты с резервами по направлениям уровня доходности и уровня занятости не менее 1. Заметим, однако, что все варианты, показанные на рис. 2.3. уже имеют резерв по направлению уровня доходности не менее 1, так что сеть напряженных вариантов, в которых по направлениям уровня доходности и уровня занятости имеется резерв не менее 1 совпадает с сетью рис. 2.3.

Наконец, если требуется построить сеть напряженных вариантов с резервами по всем направлениям не менее 1, то поступаем следующим образом. На первом этапе выделяем две группы обобщенных вариантов. В первую группу входят напряженные варианты с резервом обобщенной оценки не менее 0 и резервом оценки уровня экономической эффективности не менее 1, а во вторую группу – все напряженные варианты с резервами обобщенной оценки социального уровня и оценки уровня экономической эффективности не менее 1. Второй этап выполняется аналогично описанному выше. В нашем случае изменения коснутся только обобщенного варианта (2; 1), поскольку остальные два обобщенных варианта имеют оценку Э = 1, а значит – любую величину резерва. Вариант (2; 1) мы заменяем на вариант (3; 1), в котором по направлению уровня экономической эффективности имеется резерв $\Delta_Э = 1$.

Описанный алгоритм позволяет строить все напряженные варианты при любых требованиях к резервам направлений. Когда резерв по направлениям уровень занятости и уровень доходности больше 1, то приходится на первом этапе рассматривать большее число групп обобщенных вариантов.

Построив сеть напряженных вариантов, можно решать задачу оптимизации программы по стоимости, применяя алгоритм, описанный в п. 1, если мероприятия по отдельным направлениям не пересекаются. В принципе такая ситуация возможна, если предприятия малого бизнеса разбиты на три группы. Для одной группы предприятий основной целью программы реформирования является рост экономической эффективности, для другой – увеличение занятости, а для третей – увеличение уровня дохода (заработной платы работников). В этом случае отбор кандидатов для участия в региональной программе можно проводить независимо для каждой группы при заданном уровне критерия по соответствующему направлению (оставить на уровне «плохо», подтянуть до уровня «удовлетворительно», «хорошо» или даже «отлично»). Соответственно, можно оценить затраты Администрации на достижение требуемых уровней по каждому направлению.

Пример 2.1. Пусть матрица затрат имеет вид:

Таблица 2.1.

i \ j	**1**	**2**	**3**	**4**
1	5	15	40	70
2	3	10	50	100
3	2	18	30	80

Работа алгоритма показана на рис. 2.4. (описание алгоритма дано в п. 1). Толстыми дугами выделен оптимальный по стоимости вариант (2, 1, 1), нацеленный на рост уровня экономической эффективности.

Несмотря на простоту и элегантность этого алгоритма, описанная ситуация не совсем адекватна реальной действительности. На практике предприятия, заинтересованные включиться в региональную программу, разрабатывают свои программы реформирования, предусматривающие рост всех трех показателей – и уровня экономической эффективности, и уровня занятости, и уровня доходности. Более того, Администрация стимулирует предприятия к разработке именно таких программ и организует конкурсный отбор с учетом всех трех факторов. Для такого случая описанный алгоритм уже не применим. Дадим формальную постановку задачи для этого случая.

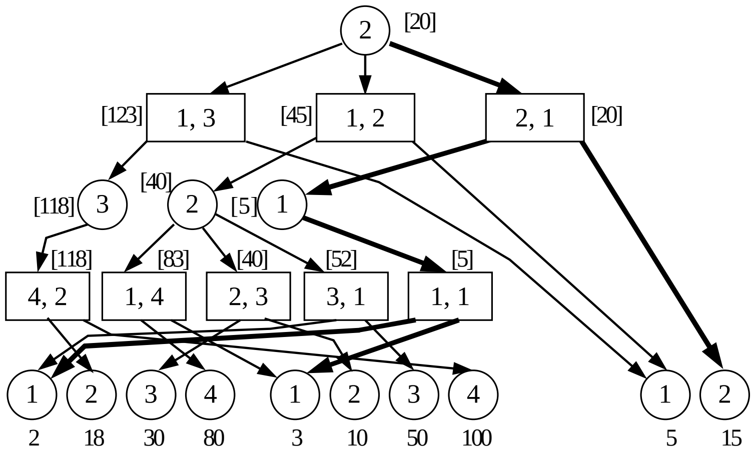

Рис. 2.4.

Пусть выбран вариант K программы, которому соответствуют вполне определенные значения роста уровня экономической эффективности (увеличение налоговых поступлений), уровня доходности (рост заработной платы) и уровня занятости (рост числа работающих или уменьшение уровня безработицы). Обозначим соответствующие значения уровня экономической эффективности b_{1k}, уровня доходности – b_{2k} и уровня занятости – b_{3k}. Обозначим далее через a_{ij} – вклад i-го предприятия в увеличение значения соответствующего уровня j согласно разработанной программе реформирования, а через c_i – затраты Администрации на реформирование i-го предприятия (в основном это налоговые льготы). Задача при заданном варианте заключается в определении множества предприятий Q, такого что

$$\sum_{i \in Q} a_{ij} \geq b_{jk} \tag{2.1}$$

и суммарные затраты Администрации

$$\sum_{i \in Q} c_i \tag{2.2}$$

минимальны.

Пусть число вариантов программы, обеспечивающих требуемое значение комплексной оценки при заданных резервах направлений, равно m. Тогда необходимо выбрать такой вариант k, для которого при соответствующем векторе b_k решение задачи (2.1), (2.2) дает минимум затрат.

Таким образом, необходимо выбрать вариант k и множество Q, обеспечивающие

$$\min_k \min_Q \sum_{i \in Q} c_i$$

при ограничении (2.1).

Это задача целочисленного линейного программирования с ограничениями, зависящими от параметра k. Эффективных методов ее решения не существует. Рассмотрим методы решения задачи в частных случаях, а именно, примем, что существует нумерация предприятий, такая что

$$\frac{a_{1j}}{c_1} \geq \frac{a_{2j}}{c_2} \geq \mathbf{L} \geq \frac{a_{nj}}{c_n}, \quad j = 1, 2, 3\ . \tag{2.3}$$

Другими словами, если эффективность программы реформирования предприятия i по направлению j, равная a_{ij}/c_i, выше чем у предприятия k, то его эффективность по другим направлениям тоже выше чем у предприятия k. Назовем это условие согласованностью по направлениям.

Следует отметить, что анализ программ реформирования предприятий Владимирской области, представленных на конкурс, показал, что условие согласованности по направлениям имеет место почти всегда (за небольшими исключениями). Это и понятно, предприятие, представившее эффективную программу экономического роста, как правило, обеспечивает и рост заработной платы и высокую занятость. При справедливости сделанного предположения можно предложить эффективный метод решения задачи.

Определим минимальный номер q предприятия, такой что

$$\max_k \min_j \frac{A_{qj}}{b_{jk}} \geq 1 \text{ , где} \tag{2.4}$$

$$A_{qj} = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} \text{ .}$$

Пусть максимум в выражении (2.4) достигается на варианте p. Тогда

$$\min_j \frac{A_{qj}}{b_{jp}} \geq 1 \text{ ,}$$

и следовательно вариант p имеет величину комплексной оценки не менее требуемой.

Рассмотренный метод по сути дела является методом «затраты – эффект» [6] при условии согласованности по направлениям.

Если неравенство (2.4) выполняется как строгое равенство, то полученное решение является оптимальным.

Пример 2.2. Пусть имеются шесть предприятий, желающих включиться в региональную программу, и представивших свои программы реформирования, данные о которых приведены ниже:

Таблица 2.2.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\mathbf{a_{i1}}$	8	3	7	6	2	2
$\mathbf{a_{i2}}$	7	3	6	7	3	3
$\mathbf{a_{i3}}$	10	4	8	10	4	5
$\mathbf{c_i}$	2	1	3	4	2	3

Пусть, далее, имеются три варианта программы, дающие требуемое значение комплексной оценки:

$$\pi_1 = (2, 3, 1); \quad \pi_2 = (1, 2, 3); \quad \pi_3 = (2, 2, 2).$$

Каждой оценке s каждого направления j соответствуют конкретные уровни Y_{sj} соответствующих критериев, приведенные в таблице 2.3.

Таблица 2.3.

s \ j	**1**	**2**	**3**
1	5	8	5
2	10	12	16
3	18	18	23
4	25	30	35

Из таблицы 2.3 получаем значения целевых установок b_{jk} для каждого из трех вариантов программы:

Таблица 2.4.

k \ j	**1**	**2**	**3**
1	10	18	5
2	5	12	23
3	10	12	16

1 шаг. Берем q = 1. Имеем:

$$A_{11} = a_{11} = 8; \quad A_{12} = 7; \quad A_{13} = 10;$$

$$\min_j \frac{A_{1j}}{b_{j1}} = \min\left(\frac{8}{10}; \frac{7}{18}; \frac{10}{5}\right) = \frac{7}{18};$$

$$\min_j \frac{A_{1j}}{b_{j2}} = \min\left(\frac{8}{5}; \frac{7}{12}; \frac{10}{23}\right) = \frac{10}{23};$$

$$\min_j \frac{A_{1j}}{b_{j3}} = \min\left(\frac{8}{10}; \frac{7}{12}; \frac{10}{16}\right) = \frac{7}{12}.$$

Так как

$$\max\left(\frac{7}{18}; \frac{10}{23}; \frac{7}{12}\right) < 1,$$

то переходим к шагу 2.

2 шаг. Берем q = 2.

$$A_{21} = 11; \quad a_{22} = 10; \quad a_{23} = 14.$$

Имеем:

$$\min\left(\frac{11}{10}; \frac{10}{18}; \frac{14}{5}\right) = \frac{5}{9};$$

$$\min\left(\frac{11}{5}; \frac{10}{12}; \frac{14}{23}\right) = \frac{14}{23};$$

$$\min\left(\frac{11}{10}; \frac{10}{12}; \frac{14}{16}\right) = \frac{5}{6}.$$

Так как

$$\max\left(\frac{5}{9}; \frac{14}{23}; \frac{5}{6}\right) < 1,$$

то переходим к шагу 3.

3 шаг. Берем q = 3.

$$A_{31} = 18; \quad A_{32} = 16; \quad A_{33} = 22.$$

Имеем:

$$\min\left(\frac{18}{10}; \frac{16}{18}; \frac{22}{5}\right) = \frac{8}{9};$$

$$\min\left(\frac{18}{5}; \frac{16}{12}; \frac{22}{23}\right) = \frac{22}{23};$$

$$\min\left(\frac{18}{10}; \frac{16}{12}; \frac{22}{16}\right) = 1\frac{1}{3}.$$

Так как

$$\max\left(\frac{8}{9}; \frac{22}{23}; \frac{4}{3}\right) > 1,$$

то решение получено. Ему соответствует третий вариант программы $\pi 3 = (2, 2, 2)$, с включением в нее первых трех предприятий. Минимальные затраты равны 6, причем по всем направлениям значение критериев выше требуемых.

Описанный алгоритм может не дать оптимального решения. Как известно [6], оптимальное решение в методе «затраты – эффект» можно получить, решая так называемую «задачу о ранце». Для того, чтобы применить этот подход к решению поставленной задачи, введем понятие сбалансированности программ реформирования.

Определение 4. Программы реформирования предприятий называются сбалансированными, если оптимальное решение задачи максимизации критерия по данному направлению при ограниченных затратах одно и то же для любого направления и любого уровня затрат.

Если программы реформирования предприятий сбалансированы, то при выбранном варианте достаточно решить три задачи о ранце, каждая из которых заключается в минимизации затрат на достижение требуемого значения критерия по данному направлению и из них выбрать решение с максимальными затратами. Однако, более эффективен следующий метод. Решаем параметрическую задачу о ранце, максимизируя уровень первого критерия при заданных затратах (затраты являются параметром). Поскольку программы реформирования сбалансированы, то полученные оптимальные решения является оптимальными и для второго и третьего критерия. Осталось определить минимальные затраты, при которых уровни критериев не меньше требуемых хотя бы для одного варианта. Поясним алгоритм на примере.

Пример 2.3. Возьмем данные из примера 2.2. Так как там было получено решение с затратами С = 6, то достаточно уровень затрат менять от 1 до 6. Алгоритм решения параметрической задачи о ранце аналогичен алгоритму решения обычной задачи о ранце методом динамического программирования. Согласно этому алгоритму строится сеть, путь максимальной длины в которой определяет оптимальное решение соответствующей задачи о ранце. Эта сеть для рассматриваемого примера приведена на рис. 2.5.

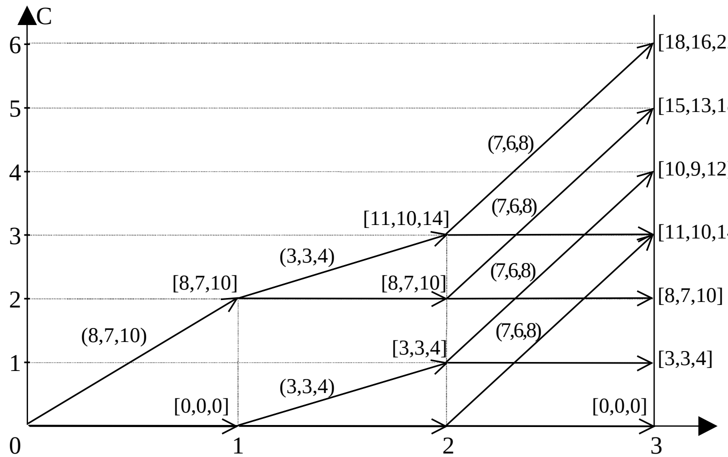

Рис. 2.5.

Заметим, что в данном случае достаточно рассмотреть первые три предприятия. Три числа у наклонных дуг равны вкладам соответствующих предприятий в увеличение критериев по трем направлениям, а три числа у конечных вершин равны значениям критериев по направлениям для соответствующего подмножества предприятий. Рассмотрим три варианта программы поддержки предпринимательства из примера 2.2, которым соответствуют значения критериев из таблицы 2.4. Определим минимальные затраты, при которых значения критериев не меньше чем хотя бы у одного из вариантов. Нетрудно убедиться, что при затратах $C = 5$ значения критериев (15, 13, 18) превышают соответствующие значения b_{kj} из третьего варианта. Действительно, $15 > b_{31} = 10$, $13 > b_{32} = 12$, $18 > b_{33} = 16$. Таким образом в оптимальном решении в программу включаются первое и третье предприятия, причем выбирается третий вариант программы, $\pi_3 = (2, 2, 2)$.

Достаточным условием сбалансированности программ реформирования является следующее:

$$a_{ij} = \alpha_j \times a_i,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,3}$$

(условия сильной сбалансированности).

Действительно, в этом случае задача минимизации затрат при заданном увеличении значений j-го критерия, то есть задача минимизации (2.2) при ограничении:

$$\sum_{i \in Q} a_{ij} = \alpha_j \sum_{i \in Q} a_i \geq b_{jk}$$

сводится к минимизации (2.4.2) при ограничениях:

$$\sum_{i \in Q} a_i \geq \frac{b_{jk}}{\alpha_j},\quad j = \overline{1,3},$$

которые можно заменить одним ограничением:

$$\sum_{i\in Q} a_i \geq \min_k \max_j \frac{b_{jk}}{\alpha_j} = B \ . \qquad (2.5)$$

Таким образом, в данном случае задача сведена к обычной задаче о ранце.

Пример 2.4. Имеются шесть предприятий со значениями $a_1 = 8$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 6$, $a_5 = 2$, $a_6 = 4$. Пусть $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$. Возьмем три варианта программы из примера 2.2:

$$\pi_1 = (2, 3, 1); \quad \pi_2 = (1, 2, 3); \quad \pi_3 = (2, 2, 2),$$

значения b_{jk} которых приведены в таблице 2.4. Определим величину B из ограничения (2.5). Определяем сначала

$$B_1 = \max_j \frac{b_{j1}}{\alpha_j} = \max\left(\frac{10}{1}; \frac{18}{2}; \frac{5}{1}\right) = 10,$$

$$B_2 = \max\left(\frac{5}{1}; \frac{12}{2}; \frac{23}{1}\right) = 23,$$

$$B_3 = \max\left(\frac{10}{1}; \frac{12}{2}; \frac{16}{1}\right) = 16 .$$

Находим $B = \min(B_1; B_2; B_3) = 10$. Возьмем затраты C_i из примера 2.2. Получаем следующую задачу о ранце: определить $x_i = 0$ или 1, $i = \overline{1,\ 6}$, минимизирующие

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6$$

при ограничении

$$8x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 4x_6 \geq 10.$$

Ее решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, остальные $x_i = 0$. Таким образом, в программу включаются первые два предприятия, причем выбирается первый вариант программы.

Условие сильной сбалансированности естественным образом выполняется, если комиссия по отбору предприятий в программу будет проводить отбор, учитывая сбалансированность программы реформирования, то есть если оценка программы будет проводиться по критерию

$$K_i = \min \frac{a_{ij}}{\alpha_j}.$$

Очевидно, что максимизируя K_i, предприятие разработает сбалансированную программу, в которой $a_{ij} = \alpha_j \times a_i$ ($K_i = a_i$).

ГЛАВА 3. Общая постановка задачи

Дадим теперь общую постановку задачи оптимизации программы по стоимости, рассмотренную на примерах в предыдущих разделах. Итак, примем, что задана процедура комплексного оценивания вариантов программы, на основе которой можно построить сеть напряженных вариантов (с резервами или без резервов). Эта сеть позволяет определить все напряженные (Парето-оптимальные) варианты программы, обеспечивающие требуемое значение комплексной оценки. Обозначим через r – число таких вариантов, $b_k = \{b_{jk}\}$ – вектор, компоненты b_{jk} которого определяют требуемое значение критерия по j-му направлению в k-ом варианте программы, $j = \overline{1, m}$ (m – число оцениваемых направлений (факторов)), $k = \overline{1, \mathbf{l}}$ ($\mathbf{l}$ – число вариантов программы). Пусть, далее, имеются n предприятий – потенциальных участников программы, разработавших и представивших на конкурс программы реформирования и реструктуризации. Каждое предприятие может представить несколько вариантов программ реформирования, которые отличаются результатами (то есть вкладом в увеличение критериев по направлениям) и требуемыми затратами Администрации. Пусть каждое предприятие представляет не более q программ реформирования. Обозначим через a_{is}^{j} вклад i-го предприятия в увеличение критерия по j-му направлению региональной программы в варианте s программы реформирования, c_{is} – затраты Администрации на реализацию s-го варианта программы реформирования для i-го предприятия. Введем переменные $x_{is} = 1$, если i-е предприятие включено в региональную программу с s-ым вариантом программы реформирования и $x_{is} = 0$ в противном случае.

Выпишем ограничения, определяющие допустимые варианты программы развития региона. Первое ограничение отражает требование выбора для каждого предприятия не более одного варианта программы реформирования, то есть

$$\sum_{s=1}^{q} x_{is} \le 1,\ i = \overline{1,\ n} \tag{3.1}$$

Следующая группа ограничений опирается на условие достижения требуемых значений критериев по направлениям

$$\sum_{i,s} a_{is}^{j} x_{is} \ge b_{jk},\ \ j = \overline{1,\ m} \tag{3.2}$$

где $b_k = \{b_{jk}\}$ – требуемые значения критериев по направлениям для выбранного варианта k региональной программы из множества вариантов, обеспечивающих требуемое значение комплексной оценки. Требуется решить задачу выбора варианта региональной программы, выбора множества предприятий, участвующих в региональной программе и, наконец, выбора варианта программы реформирования для каждого из этих предприятий, так чтобы затраты администрации

$$C(x) = \sum_{i,s} c_{is} x_{is} \tag{3.3}$$

были минимальными.

Задача (3.1)-(3.3) относится к классу задач системной оптимизации, поскольку требуется выбрать правые части ограничений (3.2), а затем решить задачу (3.1)-(3.3), которая, в свою очередь, является сложной комбинаторной задачей (многомерной задачей о ранце). Как было показано выше для случая сбалансированных программ реформирования предприятий, решение задачи сводится к обычной задаче о ранце. К сожалению, эффективных алгоритмов проверки условий сбалансированности программ реформирования пока не получено. Однако, легко проверить выполнение условий сильной сбалансированности. Напомним, что программы реформирования предприятий являются сильно сбалансированными по направлениям, если параметры a_{is}^{j} удовлетворяют соотношениям

$$a_{is}^{j} = \alpha_j a_{is}, \quad j = \overline{1, m}, \; i = \overline{1, n}, \; s = \overline{1, q}.$$

В этом случае ограничения (3.2) можно заменить одним ограничением

$$\sum_{i,s} a_{i,s} x_{i,s} \geq \min_k \max_j \frac{b_{jk}}{\alpha_j} = b. \qquad (3.4)$$

Заметим, что без ограничения общности всегда можно взять $\alpha_1 = 1$.

Для проверки условий сильной сбалансированности достаточно определить

$$\alpha_{is}^{j} = \frac{a_{is}^{j}}{a_{is}^{1}} \text{ для всех } i, s \text{ и } j = \overline{2, m}.$$

Если $\alpha_{is}^{j} = \alpha^{j}$, то есть одно и то же для всех i, s, то варианты программ реформирования являются сильно сбалансированными. Для получения приближенного решения представим числа a_{is}^{j} приближенно в виде

$$a_{is}^{j} = \alpha_j a_{is},$$

где $\alpha_1 = 1$, $a_{is}^{j} = a_{is}$, то есть первое направление является базовым. Поставим задачу определения чисел α_j так, чтобы ошибка

$$\max_{i,s} \left| a_{is}^{j} - \alpha_j a_{is} \right| = \delta_j \qquad (3.5)$$

была минимальной.

Представим (3.5) в виде

$$-\delta_j \le a_{is}^j - \alpha_j a_{is} \le \delta_j \;,$$

$$\frac{a_{is}^j - \delta_j}{a_{is}} \le \alpha_j \le \frac{a_{is}^j + \delta_j}{a_{is}} \;, \qquad (3.6)$$

$$\max_{is} \frac{a_{is}^j - \delta_j}{a_{is}} \le \alpha_j \le \min_{is} \frac{a_{is}^j + \delta_j}{a_{is}}.$$

Очевидно, что минимальному δ_j соответствует уравнение

$$\max_{is} \frac{a_{is}^j - \delta_j}{a_{is}} = \min_{is} \frac{a_{is}^j + \delta_j}{a_{is}}. \qquad (3.7)$$

Опишем итерационный алгоритм определения δ_j. Для упрощения записи примем, что каждое предприятие имеет по одному варианту программы реформирования, причем обозначим $a_{i1}^j = a_i^j$.

1 шаг. Определяем

$$\max_{i} \frac{a_i^j}{a_i} = \frac{a_q^j}{a_q} \quad \text{и} \quad \min_{i} \frac{a_i^j}{a_i} = \frac{a_p^j}{a_p}$$

и вычисляем δ_1

$$\delta_1 = \frac{a_p a_q^j - a_q a_p^j}{a_q + a_p}. \qquad (3.8)$$

2 шаг. Определяем

$$\max_{i} \frac{a_i^j - \delta_1}{a_i} = \frac{a_q^j - \delta_1}{a_q} \quad \text{и} \quad \min_{i} \frac{a_i^j + \delta_1}{a_i} = \frac{a_p^j + \delta_1}{a_p}.$$

Если

$$\frac{a_q^j - \delta_1}{a_q} > \frac{a_p^j + \delta_1}{a_p},$$

то вычисляем δ_2 по формуле (3.8) и повторяем эту процедуру до тех пор, пока на очередном шаге не получим δ_j, такое что выполняется равенство (3.7). Если ошибки δ_j допустимы для всех $j = \overline{2, m}$, то можно считать программы реформирования предприятий сбалансированными.

Пример 3.1. пусть множество потенциальных участников региональной программы состоит из трех предприятий, данные о которых приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

Предприятие	**1**		**2**		**3**	
Варианты	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
a_i^1	3	8	2	7	2	6
a_i^2	3	7	3	6	3	7
a_i^3	4	10	4	8	5	10
c_i	1	2	2	3	3	4

Пусть далее имеются три варианта программы, дающие требуемое значение комплексной оценки:

$$\pi_1 = (2, 3, 1); \quad \pi_2 = (1, 2, 3); \quad \pi_3 = (2, 2, 2)$$

с векторами b_k следующего вида:

$$b_1 = (10, 18, 5); \quad b_2 = (5, 12, 23); \quad b_3 = (10, 12, 16).$$

Рассмотрим возможность считать программы реформирования предприятий сбалансированными.

Рассматриваем второе направление.

1 шаг. Определяем

$$\min \frac{a_{is}^2}{a_{is}^1} = \min\left(\frac{3}{3}; \frac{7}{8}; \frac{3}{2}; \frac{6}{\underline{\underline{7}}}; \frac{3}{2}; \frac{7}{6} \right) = \frac{6}{7}$$

$$\max\frac{a_{is}^2}{a_{is}^1}=\max\left(\frac{3}{3};\ \frac{7}{8};\ \frac{3}{\underline{\underline{2}}};\ \frac{6}{7};\ \frac{3}{2};\ \frac{7}{6}\right)=\frac{3}{2}$$

$$\delta_1=\frac{7\times3-6\times2}{9}=1\,.$$

2 шаг. Определяем

$$\min\left(\frac{3+1}{3};\ \frac{7+1}{8};\ \frac{3+1}{2};\ \frac{6+1}{\underline{\underline{7}}};\ \frac{3+1}{2};\ \frac{7+1}{6}\right)=1\,,$$

$$\max\left(\frac{3-1}{3};\ \frac{7-1}{8};\ \frac{3-1}{\underline{\underline{2}}};\ \frac{6-1}{7};\ \frac{3-1}{2};\ \frac{7-1}{6}\right)=1\,.$$

Таким образом, $\delta_2=\delta_1=1$, $\alpha_2=1$.

Рассмотрим третье направление.

1 шаг. Определяем

$$\min\frac{a_{is}^3}{a_{is}^3}=\min\left(\frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ 2;\ \frac{8}{7};\ \frac{5}{2};\ \frac{5}{3}\right)=\frac{8}{7}$$

$$\max\frac{a_{is}^3}{a_{is}^3}=\frac{5}{2}$$

$$\delta_1=\frac{7\times5-2\times8}{9}=2\frac{1}{9}\,.$$

2 шаг. Определяем

$$\min\left(\frac{4+2\frac{1}{9}}{3};\ \frac{10+2\frac{1}{9}}{8};\ \frac{4+2\frac{1}{9}}{2};\ \frac{8+2\frac{1}{9}}{7};\ \frac{5+2\frac{1}{9}}{2};\ \frac{10+2\frac{1}{9}}{6}\right)=1\frac{4}{9}\,,$$

$$\max\left(\frac{4-2\frac{1}{9}}{3};\ \frac{10-2\frac{1}{9}}{8};\ \frac{4-2\frac{1}{9}}{2};\ \frac{8-2\frac{1}{9}}{7};\ \frac{5-2\frac{1}{9}}{2};\ \frac{10-2\frac{1}{9}}{6}\right)=1\frac{4}{9}\,.$$

Таким образом, $\alpha_3=1^4/_9$, ошибка приближения $\delta_3=2^1/_9$.

Если признать ошибки приближения $\delta_2 = 1$ и $\delta_3 = 2^1/_9$ допустимыми, то можно применить метод решения для случая сбалансированных программ реформирования.

Решаем задачу о ранце для первого направления при различных уровнях затрат, то есть строим сеть аналогичную сети рис. 2.5 из примера 2.3. Соответствующая сеть при уровне затрат от 1 до 6 приведена на рис. 3.1.

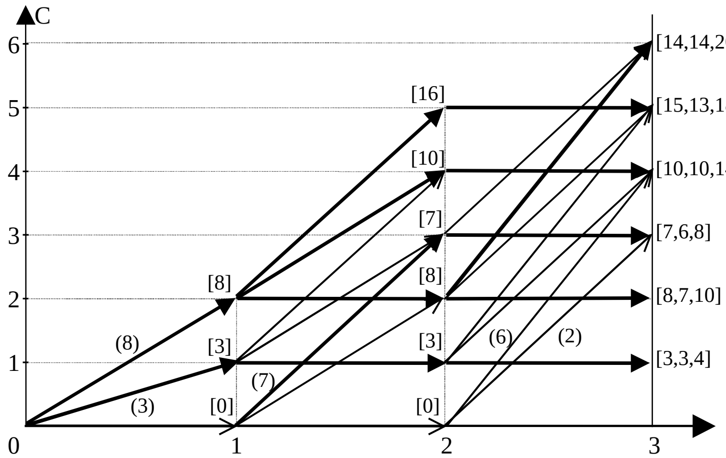

Рис. 3.1.

Оптимальные пути (с точки зрения первого направления) выделены толстыми линиями. У конечных вершин поставлены значения критериев для всех трех направлений.

Теперь осталось определить минимальный уровень затрат, при котором значения критериев по направления не ниже требуемых хотя бы для одного из векторов b_k. Простым перебором находим, что минимальные затраты $c_{min} = 5$. Значения критериев для соответствующего оптимального решения (15, 13, 18) превосходят требуемые величины для вектора b_3 = (10, 12, 16). Таким образом, оптимальным является выбор третьего варианта региональной программы π_3 = (2, 2, 2) и включение в программу первых двух предприятий со вторыми вариантами программы реформирования.

Если нет уверенности в выполнении условия сбалансированности программ реформирования предприятий, то решение задачи становится более сложным. Можно, конечно, применяя описанный выше метод, построить сеть, позволяющую определить все Парето-оптимальные варианты, однако, их число может быть достаточно большим. Рассмотрим еще один подход к решению задачи в основе которого лежит другой способ построения комплексной оценки, а именно, будем оценивать не величины критериев по направлениям, а непосредственно программы реформирования предприятий. Так в предыдущем примере потенциальными участниками программы были три предприятия, каждое из которых представляло две программы реформирования. Поступим следующим образом. Сначала получим обобщенную оценку программ первых двух предприятий. Возможный вариант приведен на рис. 3.2.

Предприятие 2 \ Предприятие 1	0	1	2
2	3	3	4
1	2	3	3
0	1	2	3

Рис. 3.2.

Шкалу обобщенной оценки возьмем состоящей из четырех градаций – 1, 2, 3, 4. Теперь агрегируем обобщенную оценку двух первых предприятий с вариантами программ третьего предприятия, рис. 3.3.

4	2	2	3
3	1	1	2
2	1	1	1
1	1	1	1
	0	1	2

Предприятие 3

Рис. 3.3.

Таким образом мы получаем возможность определять комплексную оценку для любого набора предприятий, участвующих в программе. Если теперь построить сеть напряженных вариантов, то применяя описанный в разделе 1 алгоритм, мы определяем оптимальный по стоимости состав предприятий, участвующих в программе. Сеть напряженных вариантов для комплексной оценки 2 рис. 3.2, 3.3 приведена на рис. 3.4.

Индексы вершин поставлены в квадратных скобках. Оптимальный вариант выделен толстыми линиями. Ему соответствует включение в программу первых двух предприятий с вторыми вариантами реформирования, что совпадает с решением, полученным в примере 3.1. Основная проблема при применении описанного подхода связана с построением комплексной оценки в определенном смысле согласованной с комплексной оценкой направлений. Согласованность означает, что любое подмножество программ предприятий, имеющее

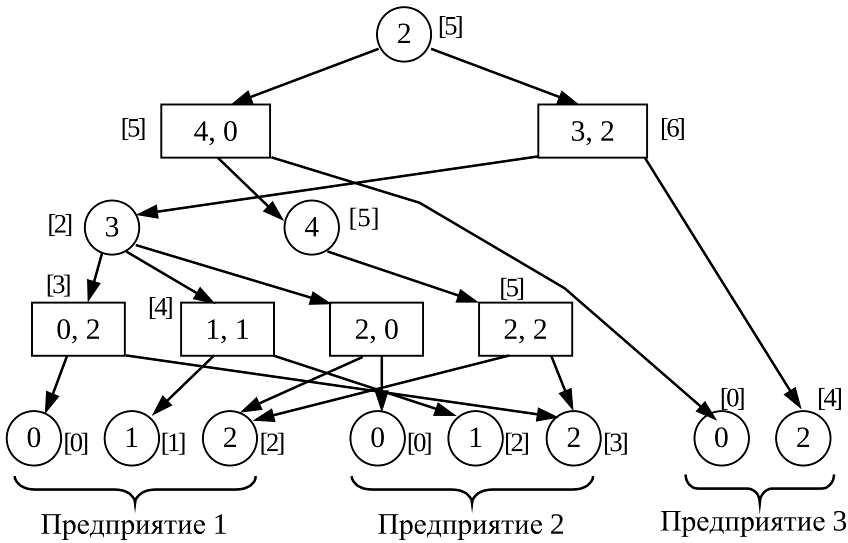

Рис. 3.4.

комплексную оценку К при агрегировании оценок по направлениям, имеет ту же оценку при агрегировании по предприятиям. И наоборот, если данное подмножество программ предприятий имеет комплексную оценку К при агрегировании по предприятиям, то оно имеет ту же комплексную оценку К при агрегировании по направления. Так, например, в рассмотренном примере 3.1 комплексную оценку 2 имеют следующие напряженные варианты программы предприятий:

Комплексная оценка	2	2	2	2	2	2
Предприятие 1	2	0	2	2	1	1
Предприятие 2	2	2	0	1	2	1
Предприятие 3	0	2	2	1	1	2

Легко видеть, что комплексная оценка программ реформирования предприятий в данном случае не согласована с комплексной оценкой направлений региональной программы. Действительно, вариант, в котором первое предприятие входит во второй программой, а остальные два – с первой, имеет комплексную оценку 2 при агрегировании по направлениям и в то же время – комплексную оценку 1 при агрегировании по предприятиям. Пример согласованной оценки по предприятиям приведен на рис. 3.5.

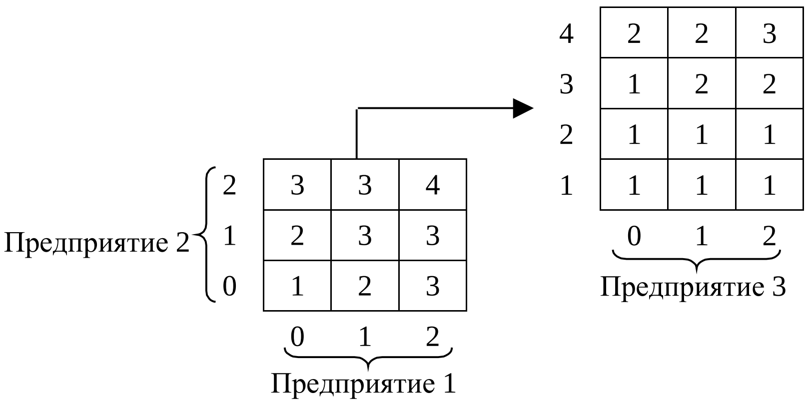

Рис. 3.5.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что любой напряженный вариант, имеющий оценку 2 при агрегировании по направлениям, имеет такую же оценку при агрегировании по предприятиям и наоборот.

Задача построения комплексной оценки программ реформирования предприятий, согласованной с заданной комплексной оценкой направлений региональной программы развития, относится к сложным комбинаторным задачам. Важно, однако, что такую комплексную оценку всегда можно построить.

Теорема 2. Для любой комплексной оценки направлений программы регионального развития всегда можно построить согласованную комплексную оценку программ реформирования предприятий, входящих в региональную программу.

Доказательство. Возьмем произвольную структуру комплексной оценки предприятий, например, сначала получим обобщенную оценку программ реформирования первого и второго предприятий, затем делаем свертку этой оценки с третьим предприятием и т.д. Рассмотрим первые два предприятия. Пусть число вариантов программы реформирования каждого предприятия равно m (включая вариант «не участвовать в региональной программе»). Тогда число возможных вариантов реформирования двух предприятий равно m^2. Каждому варианту k соответствует вектор $b_k = \{b_{kj}\}$, $j = \overline{1,q}$, где q – число направлений региональной программы. Обозначим через m_2 число различных векторов b_k и присвоим каждому из них обобщенную оценку s_k, такую что $s_k > s_p$ если $b_k >> b_p$ ($b_k >> b_p$, если $b_k \neq b_p$ и $b_{kj} \geq b_{pj}$ для всех j). Продолжая таким образом, получаем обобщенную оценку программ реформирования (n-1) предприятий с m_{n-1} различными вариантами, каждому из которых соответствует определенный вектор b, причем различные варианты имеют разные векторы b. На последнем шаге строим матрицу, строкам которой соответствуют различные варианты программ реформирования первых (n-1) предприятий, а столбцам – варианты программы реформирования n-го предприятия. На пересечении строк и столбцов ставится комплексная оценка соответствующего варианта региональной программы, получаемая по заданной комплексной оценке направлений региональной программы.

Заметим, что доказательство проводится аналогичным образом для любой структуры комплексной оценки предприятий.

Пример 3.2. Имеются три предприятия, каждое из которых разработало по два варианта программы реформирования. Таким образом, для каждого предприятия имеются три возможных варианта: вариант 0 – не участвовать в программе, вариант 1 – участвовать по первому варианту и вариант 2 – по второму. Программа развития региона оценивается по двум направлениям. Вклады предприятий в развитие каждого направления и затраты Администрации приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2.

Предприятие	**1**		**2**		**3**	
Варианты	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
a_1	3	5	2	6	3	8
a_2	7	8	4	5	9	7
c	5	9	4	7	6	8

1 шаг. Рассматриваем 1 и 2 предприятия. Возможные варианты реформирования (их всего 9) приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3.

Обобщенная оценка	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbf{b_1}$	0(1)	2(1)	3(1)	6(1)	5(1)	5(1)	7(1)	9(2)	11(2)
$\mathbf{b_2}$	0(1)	4(1)	7(9)	5(1)	8(2)	11(2)	12(3)	12(3)	13(3)

Примем, что оценка направлений региональной программы имеет три возможных значения, причем для первого направления:

оценка «плохо» – если $b_1 \le 7$;

«удовлетворительно» – если $7 < b_1 \le 14$;

«хорошо» – если $14 < b_1$.

Для второго направления:

оценка «плохо» – если $b_2 \le 5$;

«удовлетворительно» – если $5 < b_2 \le 11$;

«хорошо» – если $11 < b_2$.

Комплексная оценка направлений программы приведена в таблице 3.4.

Таблица 3.4.

Направление 2 \ Направление 1	1	2	3
3	2	2	3
2	1	2	3
1	1	2	2

В таблице 3.3 в скобках указана комплексная оценка вариантов программы без включения третьего предприятия. Если включить в программу третье предприятие с первым вариантом программы реформирования, то на основе таблицы 3.3 получим таблицу 3.5.

Таблица 3.5.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbf{b_1}$	3(1)	5(1)	6(1)	9(2)	8(2)	8(2)	10(2)	12(2)	14(2)
$\mathbf{b_2}$	9(2)	13(3)	16(3)	14(3)	17(3)	20(3)	21(3)	21(3)	22(3)

Наконец, если включить в региональную программу предприятие 3 в вторым вариантом развития, то получим таблицу 3.6.

Таблица 3.6.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbf{b_1}$	8(2)	10(2)	11(2)	14(2)	13(2)	13(2)	15(3)	16(3)	19(3)
$\mathbf{b_2}$	7(2)	11(2)	14(3)	12(3)	15(3)	18(3)	19(3)	19(3)	20(3)

На основе полученных таблиц составляем матрицу свертки для комплексной оценки программ реформирования предприятий, приведенную в таблице 3.7.

Таблица 3.7.

Предпри-ятие 3	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3
	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2
		1	2	3	4	5	6	7	8	9

Предприятия 1 и 2

Из таблицы видно, что столбцы со 2 по 6 идентичны. Поэтому оценки 2, 3, 4, 5 и 6 заменяем одной оценкой 2. Аналогично, оценки 7, 8 и 9 заменяем одной оценкой 3. Окончательно получаем комплексную оценку программ реформирования предприятий (рис. 3.6), согласованную с комплексной оценкой направлений региональной программы (таблица 3.4).

Теперь можно решить задачу обеспечения требуемого значения комплексной оценки с минимальными затратами, построив сеть напряженных вариантов. Для комплексной оценки 2 эта сеть приведена на рис. 3.7. Числа в квадратных скобках у висячих вершин равны затратам предприятий на соответствующие программы реформирования. Оптимальный вариант региональной программы выделен толстыми дугами. Он включает только одно третье предприятие.

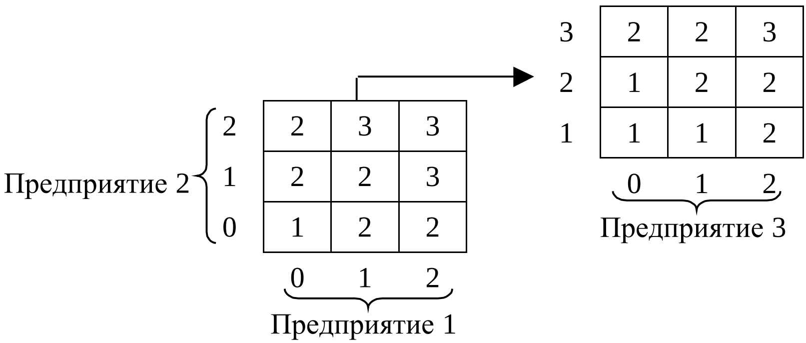

Рис. 3.6.

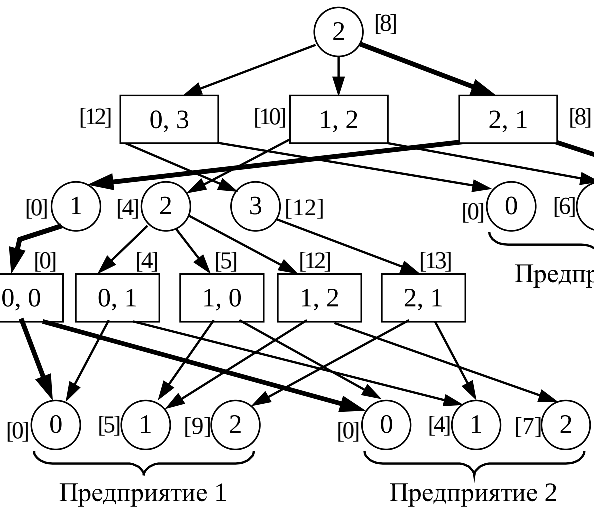

Рис. 3.7.

Решим задачу для требуемого значения комплексной оценки (хорошо). Из рис. 3.6 видно, что оценка 3 может быть получена только одним способом (2, 3), что включает второй вариант программы реформирования для третьего предприятия и обобщенную оценку 3 программ реформирования первых двух предприятий. Из рис. 3.7 видно, что минимальные затраты для обеспечения обобщенной оценки 3 равны 12, что соответствует включению в региональную программу первого предприятия с первым вариантом программы реформирования и второго – со вторым.

Литература

1. Семенов И.Б., Чижов С.А., Полянский С.В. Комплексное оценивание в задачах управления системами социально-экономического типа. Препринт. – М.: Институт проблем управления, 1996.
2. Глотов В.А., Павельев В.В. Векторная стратификация. – М.: Наука, 1984.
3. Анохин А.М., Глотов В.А., Павельев В.В., Черкашин А.М. Комплексное оценивание: принцип бинарности и его приложения. Препринт. – М.: Институт проблем управления, 1994.
4. Андронникова Н.Г., Баркалов С.А., Бурков В.Н., Котенко А.М. Модели и методы оптимизации региональных программ развития. Препринт. – М.: Институт проблем управления, 2001.
5. Бурков В.Н. и др. Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. – М.: Наука, 1984.
6. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: СИНТЕГ, 2001.