Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ им. В. А. ТРАПЕЗНИКОВА

В.Н. Бурков, А.Ф. Грищенко, О.С. Кулик

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ

П Р Е П Р И Н Т

Москва 2000

УДК.65.012.

Бурков В.Н., Грищенко А.Ф., Кулик О.С. **Задачи оптимального управления промышленной безопасностью.** М.: ИПУ РАН, 2000. – 70 с.

В работе дается постановка задачи управления промышленной безопасностью. Предложен двухэтапный метод решения задачи. На первом этапе определяются оптимальные стратегии развития систем управления промышленной безопасностью (СУПБ) предприятий региона при различных уровнях СУПБ, а на втором – определяются задания на рост уровня СУПБ по критерию упущенной выгоды или затрат. Рассматриваются различные механизмы стимулирования достоверности информации, получаемой от предприятий и проводится оценка их эффективности.

Рецензент: д.т.н. А. В. Щепкин

Текст препринта воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами.

Утверждено к печати Редакционным советом Института.

ГЛАВА 1. Проблемы управления промышленной безопасностью

Вторгаясь в природу, человечество сформировало чрезвычайно сложную систему, закономерности развития которой не в достаточной степени изучены. Разрушительный потенциал крупных технологических катастроф ныне сопоставим с угрозой военно-политических катаклизмов. Только в сфере энергетики добывается, хранится и перерабатывается около 10 млрд. т. условного топлива, масса сравнимая с арсеналом ядерного оружия. Опасные химические вещества используются в количествах, измеряемых от сотен миллиардов до триллионов летальных доз, что на один два порядка выше накопленных радиоактивных веществ в тех же единицах измерения [1] Как отмечает профессор Б. Порфирьев [2], крупнейшие аварии текущего столетия, вызвавшие значительные жертвы, сопровождавшиеся эвакуацией людей, приведшие к значительному загрязнению окружающей среды, произошли в течение двух последних десятилетии. Одновременно увеличился их разрушительный эффект, на минувшее десятилетие приходится половина из почти 10 тыс. погибших в промышленных авариях и катастрофах XX века. По данным профессора Саттона в США в среднем каждый год происходит 6000 смертельных случаев в результате аварий, 50000 несчастных случаев и 7 млн. других инцидентов [3]

В России в годы реформ к объективным причинам увеличения риска возникновения аварий при эксплуатации опасных объектов добавились причины субъективного характера. Ликвидация ряда министерств и ведомств во многих отраслях промышленности привела к практическому отсутствию централизованного управления вопросами безопасности, в том числе в части отраслевого технического нормирования безопасности. Из-за отсутствия инвестиций в промышленность, на многих предприятиях сложилось сложное финансовое положение, не позволяющее обновлять основные производственные фонды, что повлекло использование устаревшего и зачастую опасного оборудования. Кроме того, отмечена тенденция ликвидации служб безопасности (охраны труда) на предприятиях.

Ухудшение положения в экономике страны в первую очередь сказалось на наиболее потенциально опасных объектах, значительная часть которых является объектами, подконтрольными Госгортехнадзору России. На подконтрольных Госгортехнадзору России производствах и объектах в 1998 г. погибло 423 человека, произошло 312 аварий. В сравнении с предыдущими годами не наблюдается заметного увеличения аварийности и травматизма. Однако, эта относительная стабильность объясняется постоянно снижающимися объемами валового национального продукта, т. е. снижением темпов производства практически во всех отраслях промышленности.

Основные причины высокой аварийности обусловлены неудовлетворительным техническим состоянием оборудования, нарушением технологической и производственной дисциплины, неудовлетворительной организацией и проведением опасных видов работ, нарушениями после ремонта и длительного простоя, неработоспособностью средств автоматики и приборного обеспечения, снижением квалификации обслуживающего персонала.

Создавшаяся ситуация в области обеспечения промышленной безопасности потребовала изменения подходов к вопросам управления в данной области, использования системного подхода при принятии решений в области промышленной безопасности. Основной тенденцией при совершенствовании подходов к обеспечению промышленной безопасности по сравнению с подходами, используемыми в социалистической системе хозяйствования, является переход от чисто контрольной (надзорной) деятельности за соблюдением конкретных требований безопасности к регулирующим методам государственного надзора, основанным на обновленной нормативной правовой базе и разрешительной деятельности. Здесь следует отметить, что эффективность регулирующих методов государственного надзора во многом определяется моделями и механизмами, используемыми при управлении промышленной безопасностью.

Управление промышленной безопасностью определяется такими функциями, как государственный надзор и контроль, нормативное регулирование и разрешительная деятельность. Разрешительная деятельность в области промышленной безопасности включает: выдачу лицензии на определенные виды деятельности, связанные с эксплуатацией опасных производственных объектов; выдачу разрешений на изготовление и использование определенных видов оборудования, материалов; на ввод в эксплуатацию опасных производственных объектов; на допуск к работе с взрывчатыми материалами и на другие виды деятельности.

Госгортехнадзор России реализует возложенные на него функции через подведомственные ему территориальные органы (управления округов, управления и инспекции), которые вместе с центральным аппаратом составляют единую систему федерального горного и промышленного надзора России.

Основным методом осуществления надзорной деятельности Госгортехнадзора России являются инспекции (проверки), складывающиеся из комплексных, целевых и оперативных обследований объектов, в ходе которых проводится проверка исполнения законодательства по промышленной безопасности на предприятии. Такой подход приводит к переложению части ответственности за нарушения требований промышленной безопасности на государственных инспекторов, снижает эффективность надзора, его глубину из-за большой нагрузки инспекторов. Современный надзор должен базироваться на управлении системами обеспечения промышленной безопасности, используя в большей степени аналитические методы оценки состояния безопасности на объектах. Такой подход используется в большинстве индустриально развитых стран, таких как Великобритания, США, Норвегия и других.

Отличительной особенностью западной системы надзора является практически полное возложение ответственности за соблюдение требований промышленной безопасности на компанию, что позволяет более полно привлекать к решению проблем промышленной безопасности ее средства и кадровый потенциал, развивать мотивационную составляющую выполнения норм безопасности.

Внедрение в России указанной системы необходимо производить поэтапно, решая следующие задачи:

– развитие законодательства в части конкретизации ответственности работодателя за невыполнение требований промышленной безопасности;
– совершенствование системы нормативно-правового обеспечения, перенос акцента с установления конкретных технических требований промышленной безопасности на

установление ориентируемого нормирования, организационных и экономических критериев управления;

- обучение инспекторского состава новым методам ведения надзора;
- разработка современных подходов к управлению промышленной безопасностью, включая создание систем внутреннего контроля в организациях, эксплуатирующих опасные производственные объекты.

Реализация указанных задач обеспечивается путем применения соответствующих экономических и организационных механизмов. Эти механизмы должны быть направлены, с одной стороны, на поддержание определенного уровня промышленной безопасности, а с другой не должны препятствовать выпуску необходимого количества продукции и услуг. Здесь следует отметить, что допустимый уровень безопасности во многом определяется уровнем развития общества. И именно этот уровень развития ограничивает возможности применения экономических и организационных механизмов. Действительно, эффективность применения механизмов напрямую зависит от той цены, которую общество готово заплатить за свою безопасность. Чем выше цена риска возникновения чрезвычайной ситуации, тем больше величина экономического эффекта от устранения возможности аварии.

Данная работа является развитием и продолжением работы [4], в которой описана трехуровневая модель управления промышленной безопасностью на основе развития систем управления промышленной безопасностью.

Исследования проводятся совместно с Госгортехнадзором России в рамках Федеральной программы «Безопасность».

ГЛАВА 2. Определение оптимальной стратегии повышения регионального уровня промышленной безопасности

2.1. Описание модели

Рассмотрим модель повышения регионального уровня промышленной безопасности, предложенную в работе [ ]. Обозначим через n число предприятий в регионе, имеющих опасное производство, y_i – уровень эффективности системы управления промышленной безопасностью (СУПБ) на предприятии i. Уровень эффективности – это комплексный показатель, характеризующий действующую на предприятии СУПБ. Каждому значению y_i соответствуют определенные нормативные требования к СУПБ, Соответствие которым можно проконтролировать. Для того, чтобы можно было сравнивать уровни СУПБ предприятий разной величины, разобьем большие предприятия на несколько групп, объединив в этих группах несколько подразделений (цехов, опасных участков) или отдельные подразделения. Каждую такую группу подразделений будем рассматривать как отдельное предприятие. Разбиение производится таким образом, чтобы все группы имели примерно одинаковые степени промышленной опасности (риска). Другими словами, рост уровня эффективности СУПБ на одну и ту же величину имеет с точки зрения регионального уровня ПБ одно и то же значение независимо от того, на каком предприятии это произошло.

Введем дискретную шкалу уровней эффективности СУПБ, например от 0 до 3. Ноль соответствует фактическому отсутствию системы управления промышленной безопасностью на предприятии (имеются лишь инструкции по технике безопасности и охране труда), тройка соответствует СУПБ, удовлетворяющей международным стандартам. При числе предприятий с опасным производством в регионе равном n региональный уровень ПБ может принимать значения от 0 до 3n. Стратегия контролирующего органа заключается в установлении промежуточных уровней эффективности СУПБ на каждом предприятии, причем таких уровней, которые предприятия реально могут обеспечить за рассматриваемый период времени, например, квартал. Постепенно повышая требования к уровню СУПБ, контролирующий орган сможет обеспечить переход предприятий на требуемый уровень СУПБ и тем самым обеспечить требуемый уровень ПБ в регионе.

В работе [ ] предлагается двухэтапный подход к решению этой задачи. На первом этапе определяется стратегия повышения регионального уровня ПБ, под которым понимается сумма нормативных уровней СУПБ предприятий региона. На втором этапе определяется нормативный уровень СУПБ каждого предприятия в рассматриваемом периоде, так чтобы сумма нормативных уровней предприятий равнялась бы региональному уровню ПБ данного периода, определенному на первом этапе, а суммарные затраты предприятий на достижение регионального уровня ПБ были минимальными.

Информация о затратах на достижение тех или иных значений уровня СУПБ представляется предприятиями как составная часть отчетов о состоянии СУПБ на предприятии. Для обеспечения достоверности отчетных данных вводится механизм инспекций (контрольных проверок) состояния СУПБ на предприятии, включающий систему санкций (штрафы, приостановка деятельности предприятия), если отчетные данные не соответствуют фактическому положению дел. Таким образом, предлагаемый в [ ] путь повышения уровня ПБ региона предполагает решение трех основных задач:

– определение стратегии повышения регионального уровня ПБ;
– определение нормативных уровней СУПБ предприятий региона;
– определение системы санкций, обеспечивающих представление достоверных данных о состоянии СУПБ в отчетах предприятий.

Для решения первой задачи в [ ] предлагается следующая сетевая модель. Путь существующий уровень ПБ региона равен R_0, и поставлена задача разработать стратегию повышения этого уровня за T периодов до величины R_T. (Примем для определенности, что $R_0 = 0$). Определим сеть, состоящую из начальной вершины x_0, конечной вершины x_T и (T-1) слоев, каждый из которых содержит (R_T+1) вершин. Начальная вершина соединена дугами со всеми вершинами первого слоя. Будем обозначать (i, t) вершину t-го слоя, которой соответствует региональный уровень i ($i = 0 \div R_T$). Из каждой вершины (i, t), где $t < T-1$, идут дуги в вершины (j, t+1), такие что $j \geq i$. Это соответствует тому, что уровень ПБ региона от периода к периоду не уменьшается. (либо повышается, либо остается прежним). Наконец, каждая вершина (i, T-1) соединена дугой с конечной вершиной x_T. Пример такой сети для случая T = 3, R_T = 3 приведен на рис. 2.1.

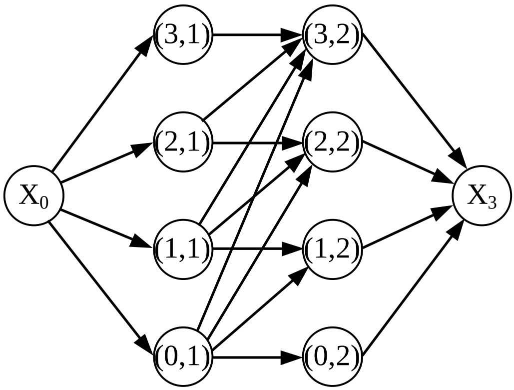


Рис. 2.1.

Заметим, что любой путь в сети, соединяющий начальную вершину с конечной, определяет некоторую стратегию повышения регионального уровня ПБ. Так, пути [x_0, (2,1), (2,2), x_3] соответствует стратегия (0, 2, 2, 3), согласно которой к концу первого периода обеспечивается региональный уровень ПБ равный R_1 = 2, к концу второго периода этот уровень сохраняется прежним (R_2 = 2), а к концу третьего периода региональный уровень ПБ повышается до требуемой величины R_3 = 3. Верно и обратное, любой стратегии повышения регионального уровня ПБ соответствует некоторый путь в сети возможных стратегий, соединяющий начальную вершину с конечной.

Обозначим S_{ij}^{t} затраты на достижение и поддержание в периоде t уровня j при условии, что в периоде (t-1) был достигнут уровень i (i ≤ j). Если i = j, то S_{ii}^{t} соответствует затратам на поддержание уровня i в периоде t. Если принять S_{ij}^{t} за длину соответствующей дуги $(i, j)^t$, соединяющей вершину (i, t-1) с вершиной (j, t), то задача сводится к определению пути, имеющего минимальную длину. Проблема состоит в том, как определять длины дуг S_{ij}^{t}. В [ ] отмечено, что величины S_{ij}^{t} определяются на основе отчетов предприятий, экспертных оценок, деклараций промышленной безопасности и опыта других регионов. Конкретная методика расчета величины S_{ij}^{t} в [ ] не предложена. Нам представляется, что при описанном двухэтапном подходе к решению задачи выбора оптимальной стратегии повышения регионального уровня ПБ определение величин S_{ij}^{t} будет вызывать существенные трудности. Более того, определенные на втором этапе нормативные требования к СУПБ предприятий региона в каждом периоде вряд ли будут соответствовать оптимальной стратегии каждого предприятия. Кроме того, выбор в качестве критерия оптимизации величины суммарных затрат предприятий на развитие и поддержание СУПБ не в полной мере соответствует экономической ситуации. Дело в том, что в условиях острого дефицита средств даже небольшое их отвлечение на создание и развитие СУПБ может привести к серьезным экономическим последствиям для предприятий, вплоть до банкротства.. Поэтому более оправданным представляется взятие в качестве критерия величины упущенной выгоды, то есть того финансового результата (например, маржинальной прибыли), который предприятие могло бы получить, используя средства, необходимые для обеспечения требуемого нормативного уровня СУПБ. В этом случае величину S_{ij}^t естественно трактовать, как величину финансового результата, который предприятия региона могли бы получить за счет использования средств, потраченных на рост регионального уровня ПБ от величины i в периоде (t-1) до величины j в периоде t. С учетом сказанного выше, дадим формальную постановку задачи определения оптимальной стратегии повышения регионального уровня пожарной безопасности.

Обозначим x_{kj}^t = 1, если k-ое предприятие должно обеспечить в периоде t нормативный уровень СУПБ, равный j и x_{kj}^t = 0 в противном случае. Так как в периоде t каждому предприятию устанавливается одно и только одно значение нормативного уровня, то

$$\sum_{j=0}^{3} x_{kj}^t = 1,\ k = \overline{1,n},\ t = \overline{1,T}. \tag{2.1.1}$$

Мы будем рассматривать ситуацию, когда нормативные уровни СУПБ предприятия не уменьшаются от периода к периоду. В принципе, конечно, возможен вариант, когда предприятию планируется снижение нормативного уровня с тем, чтобы освободившиеся при этом средства предприятие могло направить на улучшение своего финансового состояния. Однако, такие варианты стратегий мы рассматривать не будем. Условие неуменьшения нормативных требований к СУПБ предприятий можно записать следующим образом:

$$\sum_{j} x_{kj}^t \cdot j \ge \sum_{j} x_{kj}^{t-1} \cdot j,\quad t = \overline{2,T},\quad k = \overline{1,n}. \tag{2.1.2}$$

Совокупность значений $x_k = \left\{ x_{kj}^t,\ j = \overline{1,5},\ t = \overline{1,T} \right\}$, удовлетворяющих (2.1.1), (2.1.2) назовем допустимой стратегией повышения уровня СУПБ k-го предприятия. Совокупность допустимых стратегий всех предприятий $x = \left\{ x_k,\ k = \overline{1,n} \right\}$ назовем допустимой стратегией повышения регионального уровня ПБ.

Пусть поставлена задача обеспечить рост регионального уровня ПБ от начального значения $R_0 = 0$ до требуемого уровня R_T с минимальной величиной упущенной выгоды (минимальными потерями суммарного финансового результата предприятий региона). Условие достижения требуемого регионального уровня ПБ можно записать в виде

(2.1.3) $$\sum_k \sum_j x_{kj}^T \cdot j = R_T ,$$

а требование минимизации упущенной выгоды сводится к минимизации следующей функции

(2.1.4) $$S(x) = \sum_k \sum_t \sum_{i,j} x_{ki}^{t-1} \cdot x_{kj}^t s_{kij}^t ,$$

где s_{kij}^t - величина уменьшения финансового результата k-го предприятия в результате развития и поддержания СУПБ в периоде t на уровне j при условии, что в периоде (t-1) уровень СУПБ был равен i. Задача определения оптимальной стратегии повышения регионального уровня ПБ заключается в минимизации (2.1.4) при ограничениях (2.1.1) – (2.1.3). Очевидно, что эта задача нелинейного целочисленного программирования.

2.2. Метод решения

В основе предлагаемого метода решения лежит идея декомпозиции задачи. Предположим, что нам известны нормативные требования к СУПБ всех предприятий в периоде T. Обозначим их через y_{kT}, $k=\overline{1,n}$. Очевидно, что должно выполняться условие (2.1.3), то есть

(2.2.1) $$\sum_{k=1}^{n} y_{kT} = R_T .$$

Заметим теперь, что если y_{kT} заданы, то задача разбивается на n независимых задач для каждого предприятия: минимизировать

(2.2.2) $$S_k(x_k) = \sum_t \sum_{i,j} x_{ki}^{t-1} \cdot x_{kj}^{t} s_{kij}^{t} ,$$

при ограничениях

(2.2.3) $$\sum_{j=0}^{3} x_{kj}^{t} = 1, \quad t = \overline{1,T} ,$$

(2.2.4) $$\sum_{j=0}^{3} x_{kj}^{t} \cdot j \ge \sum_{j=0}^{3} x_{kj}^{t-1} \cdot j, \quad t = \overline{2,T} ,$$

(2.2.5) $$\sum_j x_{kj}^{T} \cdot j = y_{kT} .$$

Обозначим через $Q_k(y_{kT})$ значение $S_k(x_k)$ в оптимальном решении задачи (2.2.2) – (2.2.5) для k-го предприятия. Если зависимости $Q_k(y_{kT})$ получены для всех y_{kT} = 0, 1, 2, 3, и для всех предприятий, то решение исходной задачи сводится к следующей задаче: минимизировать

(2.2.6) $$Q(y_T) = \sum_{k=1}^{n} Q_k(y_{kT}),$$

при ограничениях y_{kT} – целые числа, такие что $0 \le y_{kT} \le 3$, причем

(2.2.7) $$\sum_{k=1}^{n} y_{kT} = R_T .$$

Задачи (2.2.2) – (2.2.5) для каждого предприятия полностью аналогичны задаче, решаемой на первом этапе выбора оптимальной стратегии повышения регионального уровня ПБ. Отличие в том, что в роли региона выступает отдельное предприятие. Поэтому величины s_{kij}^{t}, характеризующие упущенную выгоду k-го предприятия, возникающую по причине отвлечения средств на развитие СУПБ с уровня i до уровня j, могут быть определены для любых i, j и любых t. В силу формальной эквивалентности задач, для их решения можно применить метод, описанный в [ ]. Суть метода заключается в построении сети допустимых стратегий и определении кратчайшего пути в этой сети. Способ построения сети описан в параграфе 2.1. Рассмотрим применение метода на примере. Для упрощения вычислений примем, что число уровней СУПБ равно трем, то есть y_{kT} = 0, 1, 2, $k = \overline{1, n}$.

Пример 2.1. На рис. 2.2, 2.3 и 2.4 приведены сети допустимых стратегий для трех предприятий. Вертикальные слои вершин соответствуют трем периодам времени, а горизонтальные – трем нормативным уровням СУПБ, соответственно снизу вверх 0, 1 и 2. Числа в вершинах первого вертикального слоя равны упущенной выгоде при создании и поддержании СУПБ в периоде T = 1, соответственно на уровне 0, 1 или 2.

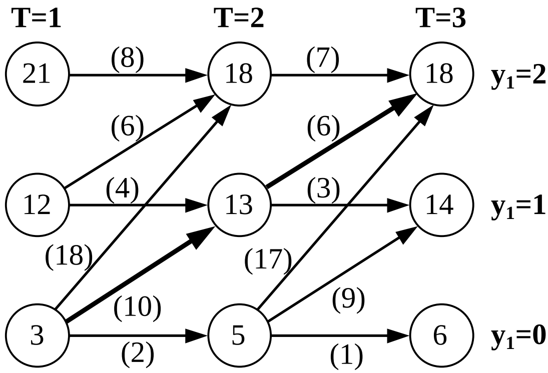


Рис. 2.2.

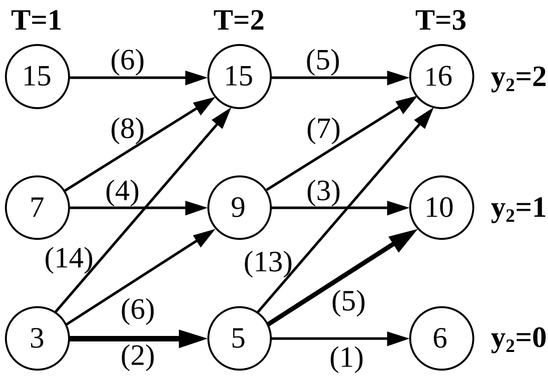


Рис. 2.3.

Числа в скобках равны упущенной выгоде s^{t}_{kij}. Так, например, число 6 у дуги, соединяющей вторую (снизу) вершину первого вертикального слоя (на рис. 2.2) с третьей (снизу) вершиной второго вертикального слоя равно упущенной выгоде от отвлечения средств на развитие СУПБ от уровня 1 в конце периода 1 до уровня

2 к концу периода 2. Числа в остальных вершинах равны минимальной

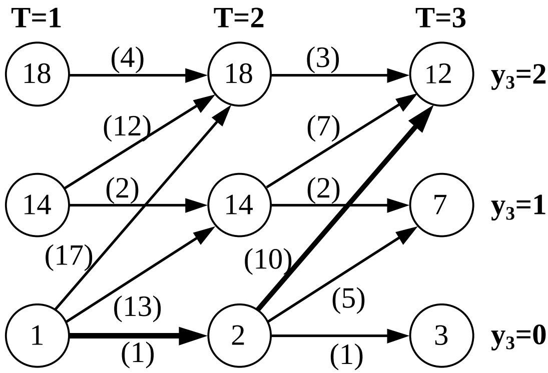


Рис. 2.4.

упущенной выгоде от отвлечения средств на развитие СУПБ до соответствующего уровня к концу соответствующего периода. Для их определения применяется известный алгоритм определения кратчайшего пути.

Зависимости $Q_k(y_{kT})$ приведены на рис. 2.5, 2.6, 2.7 соответственно.

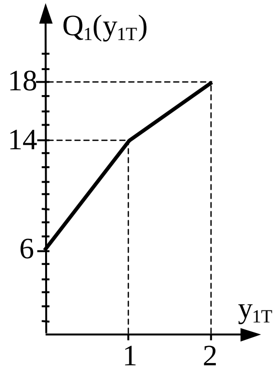


Рис. 2.5.

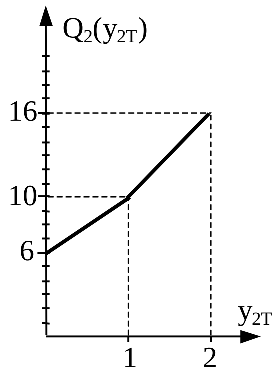


Рис. 2.6.

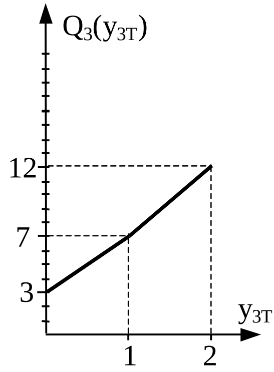


Рис. 2.7.

Пусть требуемое значение регионального уровня ПБ равно 5. В данном случае задачу легко решить простым перебором. Очевидно, что если $y_{1T} = 1$, то $y_{2T} = y_{3T} = 2$ и величина упущенной выгоды составит 14 + 16 + 12 = 42.

Если $y_{1T} = 2$, то оптимальный вариант взять $y_{2T} = 1$, $y_{3T} = 2$, что дает упущенную выгоду равную 18 + 10 + 12 = 40.

Выбирая минимальное из этих двух чисел, получаем оптимальное решение: $y_{1T} = 2$, $y_{2T} = 1$, $y_{3T} = 2$, которому соответствуют стратегии развития СУПБ предприятий, выделенные на рис. 2.2, 2.3, 2.4 толстыми дугами. Так, уровень $y_{1T} = 2$ для первого предприятия достигается к концу третьего периода при следующей стратегии: в первом периоде поддерживается существующий (0-ой) уровень СУПБ, к концу второго периода обеспечивается уровень СУПБ равный 1, а к концу третьего – уровень 2.

Рассмотрим задачу обеспечения регионального уровня ПБ за меньшее число периодов. Данные для ее решения можно получить непосредственно из рис. 2.2, 2.3 и 2.4. Так, зависимостям $Q_k(y_{k2})$

соответствуют числа второго вертикального слоя. Сведем эти данные в таблицу.

Таблица 2.1.

$k \backslash y_{k2}$	0	1	2
1	5	13	18
2	5	9	15
3	2	14	18

Простым перебором определяется оптимальное решение для этого случая: $y_{12} = 2$, $y_{22} = 1$, $y_{32} = 2$ с величиной упущенной выгоды $Q(y_2) = 45$. В более сложных случаях для решения задачи (2.2.6), (2.2.7) требуются специальные методы, описание которых дается ниже для различного вида зависимостей $Q_k(y_{kT})$.

2.3. Выпуклый случай

Поскольку $Q(y)$ заданы в дискретных точках $y = 0, 1, 2, 3$, то обычное определение выпуклости к ним не применимо. Однако, если соседние значения $Q(y)$ соединить отрезками прямой, то получим непрерывную кусочно-линейную функцию $\tilde{Q}(y)$. Будем считать $Q(y)$ выпуклой, если $\tilde{Q}(y)$ - выпуклая функция (см. рис. 2.6, 2.7). Для случая выпуклых зависимостей задача (2.2.6), (2.2.7) решается достаточно просто. Метод решения рассмотрим на примере.

Пример 2.2. Значение функций $Q_k(y_{kT}) = Q_{kj}$, $j = \overline{0, 3}$, для шести предприятий приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2.

k / y	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	3	2	1	2	2	1
1	5	3	3	3	5	3
2	7	6	7	8	8	6
3	10	9	12	13	14	10

Составляем таблицу 2.3 первых разностей Δ_{kj} = Q_{kj} – $Q_{k,j-1}$, $j = \overline{1,3}, \quad k = \overline{1,6}$.

Таблица 2.3.

k / j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	1	2	1	3	2
2	2	3	4	5	3	3
3	3	3	5	5	6	4

Первые разности, как следует из таблицы 2.3., принимают значения от 1 до 6. Составляем таблицу 2.4, в которой для каждого значения Δ от 1 до 6 и каждого предприятия высчитываем максимальный уровень j, для которого $\Delta_{kj} \le \Delta$. Так, например, при Δ = 4 для первого и второго предприятий максимальный уровень j, как следует из таблицы 2.3, равен 3, для третьего – 2, для четвертого – 1, для пятого – 2 и, наконец, для шестого – 3. Максимальные уровни будем обозначать j(k, Δ). В последнем столбце таблицы 2.4 вписываем сумму уровней всех предприятий, соответствующих данному значению Δ, то есть $R(\Delta) = \sum_{k=1}^{6} j(k, \Delta)$.

Таблица 2.4.

k / D	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**R(D)**
1	0	1	0	1	0	0	2
2	2	1	1	1	0	1	6
3	3	3	1	1	2	2	12
4	3	3	2	1	2	3	14
5	3	3	3	3	2	3	17
6	3	3	3	3	3	3	18

Итоговая таблица 2.4. дает возможность определить для каждого R_T нормативные уровни y_{kT} для каждого предприятия, минимизирующие суммарную величину упущенной выгоды. Для этого при заданном R_T определяем величину Δ такую, что $R(\Delta) \leq R_T < R(\Delta+1)$.

Определяем величины y_{kT}из условий

(2.3.1) $$\sum_k y_{kT} = R_T$$

(2.3.2) $$j(k, \Delta) \leq y_{kT} \leq j(k, \Delta+1).$$

Полученные значения $\{y_{kT}\}$ минимизируют суммарную величину упущенной выгоды. Доказательство этого факта легко следует из условий выпуклости функций, и мы не будем его приводить. Действительно, увеличивая R_T, мы каждый раз увеличиваем нормативные уровни у тех предприятий, для которых это увеличение дает минимальное приращение упущенной выгоды. Так, при $R_T \leq 2$ каждое увеличение R_T на 1 увеличивает упущенную выгоду так же на $\Delta = 1$. При $2 \leq R_T \leq 6$ увеличение R_T на 1 увеличивает упущенную выгоду уже на $\Delta = 2$, при $6 \leq R_T \leq 12$ – на 3, и т.д.

График зависимости величины минимальной упущенной выгоды от регионального уровня ПБ приведен на рис. 2.8. Заметим, что $Q(R_T)$ также является выпуклой функцией R_T.

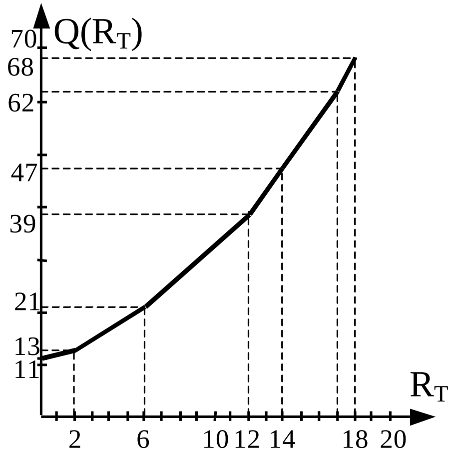


Рис. 2.8.

2.4. Вогнутый случай

Рассмотрим случай вогнутых зависимостей $Q_k(y_{kT})$, предполагая, что $Q_{k0} = 0$ (это всегда можно сделать, вычитая Q_{k0} из всех значений Q_{kj}). Известно, что задача (2.2.6), (2.2.7) в случае вогнутых зависимостей $Q_k(y_{kT})$ является многоэкстремальной. Тем не менее, учитывая специфику задачи, связанную с тем, что y_{kT} принимает целочисленные значения от 0 до 3, можно предложить эффективный алгоритм ее решения. Предварительно докажем ряд утверждений.

Утверждение 2.1. Существует оптимальное решение задачи (2.2.6), (2.2.7), в котором имеется не более одного предприятия со значением $0 < y_T < 3$.

Доказательство. Поведем доказательство методом от противного. Пусть имеются два предприятия k и q, такие что $0 < y_{kT} <3$, $0 < y_{qT} <3$.

Пусть $y_{kT} = i$, $y_{qT} = j$. Обозначим

$$a_i = Q_{k,i} – Q_{k,\, i-1},\quad b_i = Q_{k,i+1} – Q_{k,i},$$

$$a_j = Q_{k,j} – Q_{k,\, j-1},\quad b_j = Q_{k,j+1} – Q_{k,j}.$$

Положим $y_{kT} = i – 1$, $y_{qT} = j +1$. Из условия оптимальности исходного решения следует, что должны выполняться условия

(2.4.1) $$-a_i + b_j \geq 0.$$

Положим теперь $y_{kT} = i + 1$, $y_{qT} = j -1$. Аналогично предыдущему случаю из условия оптимальности исходного решения получаем

(2.4.2) $$-a_j + b_i \geq 0.$$

Из условия вогнутости функций $Q_k(y_{kT})$ и $Q_q(y_{qT})$ имеем

(2.4.3) $$b_i \leq a_i\ ,\quad b_j \leq a_j\ .$$

Объединяя условия (2.4.1) – (2.4.3), получаем

(2.4.4) $$b_j \geq a_i \geq b_i \geq a_j \geq b_j,$$

что возможно только в одном случае, когда $b_j = a_i = b_i = a_j$. Однако, в этом случае решение $y_{kT} = i-1$, $y_{qT} = j+1$, а также решение $y_{kT} = i+1$, $y_{qT} = j-1$ являются оптимальными. Берем любое из этих решений, например, первое, и повторяем процедуру. Через конечное число шагов (не более двух) мы придем к решению, в котором либо $y_{kT} = 0$, либо $y_{qT} = 3$. Таким образом, число предприятий, для которых $0 < y_{kT} < 3$ уменьшилось на единицу. Повторяя эту операцию с другой парой предприятий, имеющих промежуточное значение y_{kT}, мы за конечное число таких повторений получим оптимальное решение, содержащее не более одного предприятия со значением $0 < y_{kT} < 3$.

Пусть предприятия пронумерованы в порядке возрастания $Q_{k,3}$, то есть $Q_{13} \le Q_{23} \le \ldots \le Q_{n3}$.

Утверждение 2.2. Если $R_T = 3m$, где m – целое положительное число, то оптимальное решение задачи (2.2.6), (2.2.7) имеет вид

$$y_{kT} = 3, \quad k = \overline{1, m}, \; y_{kT} = 0, \; k > m.$$

Доказательство. Построим для функций $Q_k(y_{kT})$ оценочные функции:

$$\tilde{Q}_k(y_{kT}) = y_{kT} \cdot \frac{Q_{k3}}{3}. \tag{2.4.5}$$

Эти функции дают оценку снизу для функций $Q_k(y_{kT})$ и совпадают с ними в двух точках: $y_{kT} = 0$ и $y_{kT} = 3$. Рассмотрим задачу минимизации суммы оценочных функций при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{n} y_{kT} = R_T, \quad 0 \le y_{kT} \le 3, \quad k = \overline{1, n}.$$

Это задача линейного программирования, решение которой очевидно. Нужно взять первые m предприятий с минимальными значениями Q_{k3}. Заметим, однако, что это решение является допустимым решением для исходной задачи, поэтому оно также является оптимальным.

Таким образом, если $n = 3m + s$, где $0 < s < 3$, то существует оптимальное решение, в котором одно, и только одно предприятие имеет значение $y_{kT} = s$. Для определения этого предприятия построим 2 решения. В первом решении первые m предприятий получают максимальные нормативные уровни $y_{kT} = 3$, $k = \overline{1, m}$. Среди остальных $(n – m)$ предприятий выбирается предприятие p с минимальной величиной $Q_{ps} = \min\limits_{m<i\le n} Q_{i,s}$. Для этого предприятия $y_{pT} = s$, для остальных $y_{kT} = 0$. Величина упущенной выгоды для этого решения составит

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{m} Q_{k,3} + Q_{p,s}\ . \tag{2.4.6}$$

Во втором решении определяется предприятие **l**, такое что величина

$$Q_{\mathbf{l},3} - Q_{\mathbf{l},s} = \max_{1\le k\le m}\left(Q_{k,3} - Q_{k,s}\right).$$

Все предприятия $1 \le k \le m+1$, за исключением предприятия **l** получают нормативные уровни $y_{kT} = 3$, для предприятия **l** нормативный уровень $y_{\mathbf{l}T} = s$, для остальных предприятий $y_{kT} = 0$. Величина упущенной выгоды для второго решения составляет

$$Q_2 = \sum_{k=1,\, k\ne \mathbf{l}}^{m+1} Q_{k,3} + Q_{\mathbf{l},s}\ .$$

Разность величин $Q_1 - Q_2$ равна

$$\delta = Q_{\mathbf{l},3} + Q_{p,s} - Q_{\mathbf{l},s} - Q_{m+1,3}. \tag{2.4.7}$$

Если $\delta > 0$, то второе решение является оптимальным, если $\delta < 0$, то оптимальным является первое решение. Для обоснования предложенного алгоритма разобьем множество всех решений на два подмножества. В первом подмножестве предприятие, для которого $0 < y_{kT} < 3$ имеет номер больше, чем m, а во втором подмножестве номер такого предприятия меньше или равен m. Заметим теперь, что первое решение является оптимальным среди всех решений первого подмножества, а второе является оптимальным среди всех решений второго подмножества. Этот вывод следует из утверждений (2.1) и (2.2). Для первого подмножества это очевидно. Рассмотрим более детально обоснование алгоритма для второго подмножества.

Если $\mathbf{l}$ - номер предприятия с нормативным уровнем $0 < y_{\mathbf{l}T} < 3$, и $\mathbf{l} \le m$, то в силу утверждения (2.2) первые (m+1) предприятий за исключением $\mathbf{l}$-го имеют в оптимальном решении максимальную величину нормативного уровня, то есть $y_{iT} = 3$ для $i = \overline{1, m+1}$, $i \neq \mathbf{l}$. В этом случае

$$Q_2 = \sum_{k=1}^{m+1} Q_{k,3} - \left(Q_{\mathbf{l},3} - Q_{\mathbf{l}s}\right).$$

Очевидно, для того, чтобы Q_2 была минимальной, следует выбрать $\mathbf{l}$, для которого разность $(Q_{\mathbf{l}3} - Q_{\mathbf{l}s})$ максимальна, что и дает второе решение.

Пример 2.3. Значение Q_{kj} для шести предприятий приведены в таблице 2.5.

Таблица 2.5.

j \ k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	9	12	9	10	7	9
2	14	17	16	17	19	19
3	17	19	20	21	21	22

Возьмем $R_T = 11 = 3 \cdot 3 + 2$, то есть $m = 3$, $s = 2$.

Имеем для первого подмножества $\min\limits_{4 \le i \le 6} Q_{i2} = \min(17, 19, 19) = 17 = Q_{42}$. Следовательно, $Q_1 = Q_{13} + Q_{23} + Q_{33} + Q_{42} = 73$.

Для второго подмножества имеем $\max\limits_{1 \le i \le 3}\left(Q_{i3} - Q_{i2}\right) = \max(3, 2, 4) = 4 = Q_{33} - Q_{32}$. Следовательно, $Q_2 = Q_{13} + Q_{23} + Q_{32} + Q_{43} = 77$.

Так как $Q_2 > Q_1$, то оптимальное решение имеет вид:

$$y_{1T} = 3,\ y_{2T} = 3,\ y_{3T} = 3,\ y_{4T} = 2,\ y_{5T} = y_{6T} = 0.$$

2.5. Выпукло-вогнутый случай

Пусть часть функций $Q_k(y_{kT})$ являются выпуклыми, а часть – вогнутыми. В этом случае задача решается в два этапа. На первом этапе решается задача только для множества предприятий с вогнутыми функциями $Q_k(y_{kT})$ при различных значениях $R = \overline{1, R_T}$. Пусть H – множество предприятий с вогнутыми зависимостями. Обозначим $Q_H(R)$ – зависимость минимальной величины суммарного ущерба от уровня R. Заметим, что эта функция не является, как правило, ни выпуклой, ни вогнутой.

На втором этапе решается задача для предприятий с выпуклыми зависимостями $Q_k(y_{kT})$ и одним обобщенным предприятием H, имеющим зависимость $Q_H(R)$. Для решения этой задачи эффективным методом является метод ветвей и границ. В этом методе зависимость $Q_H(R)$ заменяется выпуклой оценочной функцией $\tilde{Q}_H(R) \le Q_H(R)$, максимально близкой к $Q_H(R)$. Эффективность метода определяется в данном случае тем, что невыпуклой является только одна функция $Q_H(R)$, и поэтому ветвление будет проводиться только в случае, если $\tilde{Q}_H(R) \ne Q_H(R)$. Рассмотрим применение метода на примере.

Пример 2.4. Возьмем три первых предприятия из примера 2.2 и три первых предприятия из примера 2.3.

I этап. Решаем задачу для трех предприятий с вогнутыми функциями $Q_k(y_{kT})$, данные о которых приведены ниже.

Таблица 2.6.

k / **j**	**1**	**2**	**3**

1	9	12	9
2	14	17	16
3	17	19	20

Применяя алгоритм, описанный в разделе 2.4, получаем последовательно:

1. $R = 1$. $Q_H(1) = 9$;
2. $R = 2$. $Q_H(2) = 14$;
3. $R = 3$. $Q_H(3) = 17$;
4. $R = 4$. $Q_H(4) = \min(17 + 9; 19 + 9) = 26$;
5. $R = 5$. $Q_H(5) = \min(17 + 16; 19 + 14) = 33$;
6. $R = 6$. $Q_H(6) = 36$;
7. $R = 7$. $Q_H(7) = \min(36 + 9; 39 + 9) = 45$;
8. $R = 8$. $Q_H(8) = \min(36 + 16; 39 + 14) = 52$;
9. $R = 9$. $Q_H(9) = 56$;

График зависимости $Q_H(R)$ приведен на рис. 2.9.

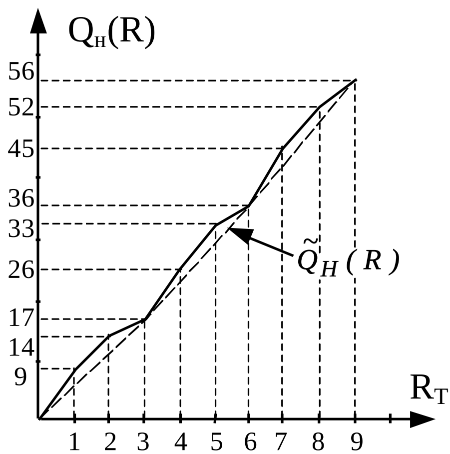


Рис. 2.9.

Пунктиром показана функция $\tilde{Q}_H(R)$, являющаяся оценкой снизу для функции $Q_H(R)$.

II этап. Пусть $R_T = 12$. Данные о трех предприятиях с выпуклыми функциями $Q_k(y_{kT})$ приведены ниже (начальные величины Q_{k0} вычтены из всех Q_{kj}).

Таблица 2.7.

j \ k	**1**	**2**	**3**
1	2	2	2
2	6	7	6
3	12	14	13

Вычисляем таблицу первых разностей (таблица 2.8).

Таблица первых разностей функции $\tilde{Q}_H(R)$ для обобщенного предприятия Н имеет вид таблицы 2.9.

Таблица 2.8.

j \ k	**1**	**2**	**3**
1	2	2	2
2	4	5	4
3	6	7	7

Таблица 2.9.

R	$0 \le R \le 3$	$3 \le R \le 6$	$6 \le R \le 9$
D	$5^2/_3$	$6^1/_3$	$6^2/_3$

Применяя алгоритм для случая выпуклых функций, получаем следующее решение:

$$y_{1Т} = 3,\ y_{2Т} = 2,\ y_{3Т} = 3,\ y_{НТ} = 4.$$

Так как $\tilde{Q}_{Н}(4) < Q_{Н}(4)$, то разбиваем множество всех решений на два подмножества. В первом подмножестве $y_{НТ} \le 4$, а во втором - $y_{НТ} \ge 4$.

Оценка первого подмножества. Первые разности для функции $\tilde{Q}_{Н}(R)$ при $R \le 4$ приведены ниже:

Таблица 2.10.

R	$0 \le R \le 3$	$3 \le R \le 4$
D	$5^{2}/_{3}$	9

Теперь оптимальное решение будет иметь следующий вид:

$$y_{1Т} = y_{2Т} = y_{3Т} = y_{НТ} = 3,$$

а величина упущенной выгоды равна

$$12 + 14 + 13 + 17 = 56.$$

Оценка второго подмножества. Первые разности для функции $\tilde{Q}_{Н}(R)$ при $4 \le R \le 9$ приведены ниже:

Таблица 2.11.

R	$4 \le R \le 6$	$6 \le R \le 9$
D	5	$6^{2}/_{3}$

Оптимальное решение для этого подмножества решений имеет вид:

$$y_{1Т} = 2,\ y_{2Т} = 2,\ y_{3Т} = 2,\ y_{НТ} = 6.$$

а величина упущенной выгоды равна

$$6 + 7 + 6 + 36 = 55.$$

Оценка второго подмножества меньше, поэтому выбираем второе подмножества. Заметим теперь, что оценка 55 является достижимой, поскольку $\tilde{Q}_H(6)$ = $Q_H(6)$. Таким образом мы получили оптимальное решение.

Дадим описание общей схемы предлагаемого алгоритма и оценку его сложности.

1. Решение задачи для множества предприятий с вогнутыми зависимостями $Q_k(y_{kT})$ для всех значений R. Если n_1 – число предприятий с вогнутыми зависимостями, то число решаемых задач не более $3n_1$. Из них n_1 задач решаются сразу (это задачи, для которых $R = 3m$, где m – целое число) в соответствии с утверждением 2. Сложность решения остальных $2n_1$ задач растет прямопропорционально n_1. Поэтому сложность решения задачи первого этапа, оцениваемая числом элементарных операций (сложение, вычитание, сравнение) растет прямопропорционально n_1^2.

2. Построение оценочной функции $\tilde{Q}_H(R)$.

Опишем алгоритм построения оценочной функции. Обозначим через $m = \min(R_T, 3n_1)$.

I шаг. Определяем величины

$$q_1(R) = \frac{Q_H(R)}{R}$$

и находим минимальную из q(R), $1 \le R \le m$. Пусть минимум достигается в точке R_1. Переходим к следующему шагу, если $R_1 < m - 1$.

II шаг. Определяем величины

$$q_2(R) = \frac{Q_H(R) - Q_H(R_1)}{R - R_1}$$

для всех $R_1 < R \leq m$, и находим минимальную из них. Пусть минимум достигается в точке R_2. Переходим к следующему шагу, если $R_2 < m - 1$.

k-ый шаг. Определяем величины

$$q_k(R) = \frac{Q_H(R) - Q_H(R_{k-1})}{R - R_{k-1}}$$

для всех $R_{k-1} < R \leq m$, и находим минимальную из них. Пусть минимум достигается в точке R_k. Переходим к следующему шагу, если $R_k < m - 1$.

За конечное число шагов k_1 (не более m-1) процедура будет закончена. Точки $(R_s, Q_H(R_s))$, $s = \overline{1, k_1}$, включая точки (0, 0) и $(m, Q_H(m))$, дают искомую оценочную функцию.

Сложность алгоритма растет прямопропорционально m^3.

3. Решение оценочной задачи. Оценочная задача является задачей с выпуклыми функциями, метод решения которой описан в разделе 2.3. При заданном R_T сложность ее решения растет прямопропорционально n_2^2, где n_2 – число предприятий с выпуклыми функциями $Q_k(y_{kT})$.

4. Разбиение на подмножества и решение оценочных задач для подмножеств. Выбор подмножества с минимальной оценкой.

5. Для выбранного подмножества повторяются шаги 2, 3, 4. Очевидно, что число подмножеств не превышает m. Следовательно, сложность решения всей задачи растет прямопропорционально величине

$$an_1^2 + [bm^3 + c(n - n_1)^2]m,$$

где a, b, c – положительные константы.

В целом, при больших n сложность растет прямопропорционально n^4 (в худшем случае). Эта оценка свидетельствует о достаточной эффективности предложенного алгоритма.

2.6. Общий случай

Рассмотрим общий случай, когда существуют предприятия, функции $Q_k(y_{kT})$ которых не являются ни выпуклыми, ни вогнутыми. Опишем применение метода ветвей и границ для этого случая.

I шаг. Строим оценочные функции $\tilde{Q}_k(y_{kT})$ для всех невыпуклых зависимостей $Q_k(y_{kT})$.

II шаг. Решаем оценочную задачу, как описано в разделе 2.3.

Нетрудно доказать, что всегда существует решение оценочной задачи, в котором только не более чем для одного предприятия имеет место $\tilde{Q}_k(y_{kT}) \neq Q_k(y_{kT})$ в оптимальном решении оценочной задачи. Из этого факта следует естественная процедура разбиения на подмножества. Если для предприятия k в оптимальном решении y^*_{kT} оценочной задачи имеет место $\tilde{Q}_k(y^*_{kT}) < Q_k(y^*_{kT})$, то разбиваем множество всех решений на два подмножества. В первом подмножестве $y_{kT} \leq y^*_{kT}$, а во втором - $y_{kT} \geq y^*_{kT}$.

III шаг. Оцениваем каждое подмножество, решая оценочные задачи согласно шагам I и II. Из двух подмножеств выбираем подмножество с минимальной оценкой. Если для этого подмножества в оптимальном решении оценочной задачи существует предприятие, для которого $\tilde{Q}_k(y^*_{kT}) < Q_k(y^*_{kT})$, то повторяем процедуру разбиения на подмножества, каждый раз оценивая новые подмножества и выбирая из всех полученных подмножеств то, оценка которого минимальна. Как только получено подмножество, для которого нижняя оценка является точной (то есть, $\tilde{Q}_k(y_{kT}) = Q_k(y_{kT})$ для всех предприятий), задача решена.

Замечание. Если для какого либо подмножества получена задача с выпуклыми, вогнутыми или выпуклыми и вогнутыми зависимостями, то для ее решения применяются алгоритмы, описанные в разделах 2.3, 2.4, 2.5 соответственно.

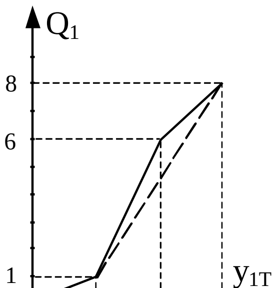
Рассмотрим работу метода ветвей и границ на примере.

Пример 2.5. Рассмотрим четыре предприятия с функциями $Q_k(y_{kT})$, графики которых приведены на рис. 2.10 (а, б, в, г).

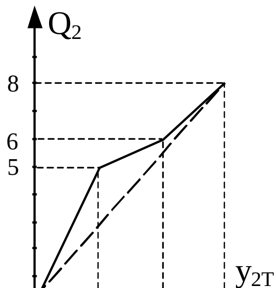
Пусть $R_T = 6$.

I шаг. Строим оценочные функции (они показаны пунктиром на рис. 2.10).

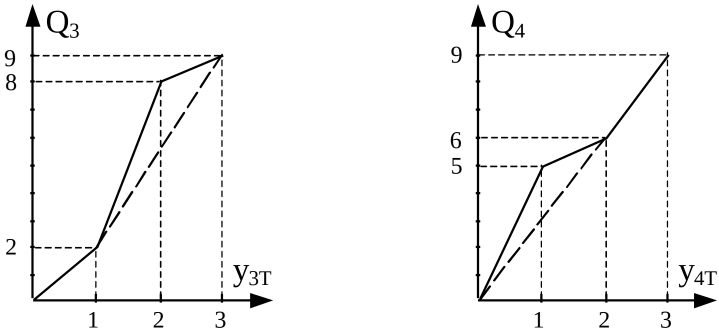
II шаг. Решаем оценочную задачу. Для этого построим таблицу первых разностей (таблица 2.12).



а)



б)



а) б)

Рис. 2.10.

Таблица 2.12.

j \ k	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	$2^2/_3$	2	3
2	$3^1/_2$	$2^2/_3$	3	3
3	$3^1/_2$	$2^2/_3$	3	3

Составляем таблицу 2.13 максимальных уровней в зависимости от величины первой разности Δ (см. таблицу 2.4).

Таблица 2.13.

D \ k	**1**	**2**	**3**	**4**	**R(**D**)**
1	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	2
$2^2/_3$	1	3	1	0	5
3	1	3	3	3	10

Оптимальный план (один из многих) имеет вид:

$$y_{1T} = 1,\ y_{2T} = 3,\ y_{3T} = 2,\ y_{4T} = 0.$$

Оценка $\tilde{Q}(6)$ = 1 + 8 + 5 = 14.

Так как $\tilde{Q}_3(2) < Q_3(2)$, то разбиваем множество всех решений на два подмножества. В первом подмножестве $y_{3T} \le 2$, а во втором - $y_{3T} \ge 2$.

Оценка первого подмножества. Таблица первых разностей принимает уже другой вид:

Таблица 2.14.

j \ k	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	$2^2/_3$	2	3
2	$3^1/_2$	$2^2/_3$	6	3
3	$3^1/_2$	$2^2/_3$	-	3

Теперь оптимальное решение оценочной задачи будет другим:

$$y_{1T} = 1,\ y_{2T} = 3,\ y_{3T} = 1,\ y_{4T} = 1.$$

Оценка первого подмножества равна:

$$Q(y_{3T} \le 2) = 1 + 8 + 2 + 3 = 14.$$

Оценка второго подмножества. Таблица первых разностей имеет вид:

Таблица 2.15.

j \ k	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	$2^2/_3$	-	3
2	$3^1/_2$	$2^2/_3$	-	3
3	$3^1/_2$	$2^2/_3$	1	3

Оптимальное решение оценочной задачи:

$$y_{1T} = 1,\ y_{2T} = 2,\ y_{3T} = 3,\ y_{4T} = 0.$$

Оценка второго подмножества равна:

$$Q(y_{3T} \geq 2) = 1 + 5^1/_3 + 9 = 15^1/_3.$$

Выберем первое подмножество, имеющее меньшую оценку. Так как в оптимальном решении оценочной задачи для первого подмножества имеет место $\tilde{Q}_4(1) < Q_4(1)$, то разбиваем его на два подмножества. В первом подмножестве $y_{4T} \leq 1$, а во втором – $y_{4T} \geq 1$.

Оценка подмножества y_{3T} £ 2, y_{4T} £ 1.

Оптимальное решение оценочной задачи имеет вид:

$$y_{1T} = 1,\ y_{2T} = 3,\ y_{3T} = 1,\ y_{4T} = 1.$$

Оценка подмножества равна

$$Q(y_{3T} \leq 2,\ y_{4T} \leq 1) = 1 + 8 + 2 + 5 = 16.$$

Заметим, что эта оценка является точной нижней оценкой, так как $\tilde{Q}_k = Q_k$ для всех предприятий.

Оценка подмножества y_{3T} £ 2, y_{4T} ³ 1.

Оптимальное решение оценочной задачи имеет вид:

$$y_{1T} = 1,\ y_{2T} = 2,\ y_{3T} = 1,\ y_{4T} = 2.$$

Оценка подмножества равна

$$Q(y_{3T} \leq 2,\ y_{4T} \geq 1) = 1 + 5^1/_3 + 2 + 6 = 14^1/_3.$$

Выбираем подмножество $y_{3T} \leq 2$, $y_{4T} \geq 1$ с минимальной оценкой.

Так как в оптимальном решении оценочной задачи имеет место $\tilde{Q}_2(2) < Q_2(2)$, то разбиваем это подмножество на два. В одном из них $y_{2T} \leq 2$, а во втором – $y_{2T} \geq 2$.

Оценка подмножества {y_{2T} £ 2, y_{3T} £ 2, y_{4T} ³ 1}.

Оптимальное решение оценочной задачи имеет вид:

$$y_{1T} = 1,\ y_{2T} = 2,\ y_{3T} = 1,\ y_{4T} = 2.$$

Оценка подмножества равна

$$Q(y_{2T} \leq 2,\ y_{3T} \leq 2,\ y_{4T} \geq 1) = 1 + 6 + 2 + 6 = 15,$$

и является точной нижней оценкой.

Оценка подмножества {y_{2T} ³ 2, y_{3T} £ 2, y_{4T} ³ 1}.

Оптимальное решение оценочной задачи имеет вид:

$$y_{1T} = 1,\ y_{2T} = 3,\ y_{3T} = 0,\ y_{4T} = 2.$$

Оценка подмножества равна

$$Q(y_{2T} \geq 2,\ y_{3T} \leq 2,\ y_{4T} \geq 1) = 1 + 8 + 0 + 6 = 15,$$

и также является точной нижней оценкой.

Окончательно получаем два оптимальных решения:

$$y_{1T} = 1,\ y_{2T} = 2,\ y_{3T} = 1,\ y_{4T} = 2, \text{ и}$$

$$y_{1T} = 1,\ y_{2T} = 3,\ y_{3T} = 0,\ y_{4T} = 2$$

с величиной упущенной выгоды равной 15.

Дерево ветвлений, в вершинах которого указаны оценки снизу соответствующих подмножеств, приведено на рис. 2.11. Толстыми дугами выделены подмножества решений, в которых определены оптимальные решения.

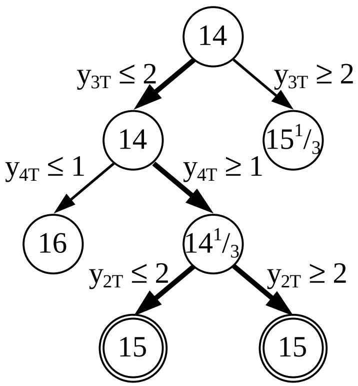


Рис. 2.11.

2.7. Метод динамического программирования

Метод динамического программирования в ряде случаев является более эффективным по сравнению с методом ветвей и границ, особенно, в случае малых n и R_T.

Идея метода в том, что последовательно определяется минимальная величина упущенной выгоды для возможных значений $0 \leq R \leq R_T$, если региональный уровень R обеспечивается за счет первых двух предприятий, затем первых трех, и т.д. Обозначим через $\Phi_m(R)$ – минимальную величину упущенной выгоды в случае, если уровень R обеспечивается только за счет первых m предприятий. Величины $\Phi_{m+1}(R)$ определяются на основе уравнения Беллмана:

(2.7.1) $$\Phi_{m+1}(R) = \min_{0 \leq i \leq 3}\left[\Phi_m(R-i) + Q_{m+1}(i)\right].$$

Сложность алгоритма прямопропорциональна $R_T \cdot n$ или, учитывая, что $R_T \leq 3n$, прямопропорциональна n^2. Заметим, однако, что в методе ветвей и границ оценка n^4 достигается в самом худшем случае. Средняя оценка, как показали многочисленные примеры, также имеет порядок n^2. В то же время, во многих случаях метод ветвей и границ имел сложность порядка n. Рассмотрим применение метода на примере 2.5.

Значения $\Phi_1(R)$, $0 \leq R \leq 3$, приведены ниже.

Таблица 2.16.

R	0	1	2	3
Φ_1(R)	0	1	6	8

Вычислим $\Phi_2(R)$, $0 \leq R \leq 6$. Имеем:

$\Phi_2(0) = 0$,

$\Phi_2(1) = \min(\Phi_1(0) + Q_{21}; \Phi_1(1) + Q_{20}) = 1$,

$\Phi_2(2) = \min(\Phi_1(0) + Q_{22}; \Phi_1(1) + Q_{21}; \Phi_1(2) + Q_{20}) = \min(6; 6; 6) = 6$,

$\Phi_2(3) = \min(\Phi_1(0) + Q_{23}; \Phi_1(1) + Q_{22}; \Phi_1(2) + Q_{21}; \Phi_1(3) + Q_{20}) =$

$= \min(8; \underline{7}; 11; 8) = 7$,

$\Phi_2(4) = \min(\Phi_1(1) + Q_{23}; \Phi_1(2) + Q_{22}; \Phi_1(3) + Q_{21}) = \min(\underline{9}; 12; 13) =$ 9,

$\Phi_2(5) = \min(\Phi_1(2) + Q_{23}; \Phi_1(3) + Q_{22}) = 14$,

$\Phi_2(6) = \Phi_1(3) + Q_{23} = 16$.

Вычислим $\Phi_3(R)$. Заметим, что так как $R_T = 6$, то первые три предприятия должны обеспечить по крайней мере уровень не менее $R = 3$. Имеем:

$\Phi_3(3) = \min(\Phi_2(0) + Q_{33}; \Phi_2(1) + Q_{32}; \Phi_2(2) + Q_{31}; \Phi_2(3) + Q_{30}) =$

$= \min(9; 9; 8; \underline{7}) = 7$,

$\Phi_3(4) = \min(\Phi_2(1) + Q_{33}; \Phi_2(2) + Q_{32}; \Phi_2(3) + Q_{31}; \Phi_2(4) + Q_{30}) =$

$= \min(10; 14; \underline{9}; \underline{9}) = 9$,

$\Phi_3(5) = \min(\Phi_2(2) + Q_{33}; \Phi_2(3) + Q_{32}; \Phi_2(4) + Q_{31}; \Phi_2(5) + Q_{30}) =$

$= \min(14; 15; 11; 14) = 11$,

$\Phi_3(6) = \min(\Phi_2(3) + Q_{33}; \Phi_2(4) + Q_{32}; \Phi_2(5) + Q_{31}; \Phi_2(6) + Q_{30}) =$

$= \min(16; 17; 16; 16) = 16$.

Наконец, вычислим $\Phi_4(R_T)$.

$\Phi_4(6) = \min(\Phi_3(3) + Q_{43}; \Phi_3(4) + Q_{42}; \Phi_3(5) + Q_{41}; \Phi_3(6) + Q_{40}) =$

$= \min(16; \underline{15}; 16; 16) = 15$.

Естественно, мы получили те же самые оптимальные решения.

ГЛАВА 3. Механизмы стимулирования роста уровня промышленной безопасности

3.1. Постановка задачи

В предыдущей главе рассмотрена модель определения оптимальной стратегии повышения регионального уровня промышленной безопасности. В основе модели лежит задача определения нормативных требований к СУПБ предприятий таким образом, чтобы обеспечить требуемый региональный уровень ПБ с минимальной величиной упущенной выгоды. Для того, чтобы решить эту задачу, территориальные органы Госгортехнадзора должны получить от предприятий информацию о величине упущенной выгоды Q_{kj} при переходе за период T на j-ый уровень СУПБ. Центральной проблемой является создание условий, исключающих сознательное искажение этой информации. Механизмы управления, стимулирующие представление достоверной информации, называются механизмами честной игры или неманипулируемыми механизмами. В работе [ ] рассмотрен механизм такого рода, в котором в качестве фактора, стимулирующего рост уровня СУПБ выступает уменьшение платы за риск, налоговые льготы (уменьшение налогооблагаемой прибыли с ростом уровня СУПБ и т.д.).

Обозначим через a величину стимулирующего норматива (например, уменьшение налогооблагаемой прибыли при росте уровня СУПБ на единицу). Тогда при планируемом уровне для k-го предприятия, равном x_k, эффект для предприятия будет равен ax_k. Обозначая упущенную выгоду через $\varphi_k(x_k)$ мы можем представить целевую функцию k-го предприятия в виде разности стимулов ax_k и упущенной выгоды $\varphi_k(x_k)$, то есть

(3.1.1) $$f_k(x_k) = ax_k - \varphi_k(x_k).$$

Пусть $\varphi_k(x_k)$ – вогнутые, непрерывно дифференцируемые функции x_k. В этом случае условие максимума (3.1.1) можно записать в виде

(3.1.2) $$\frac{d\varphi_k(x_k)}{dx_k} = a$$

(предполагаем, что максимум достигается в точке $x_k > 0$). Разрешая уравнение (3.1.2) относительно x_k, получаем

(3.1.3) $$x_k = \xi(a).$$

Определим параметр a из условия

(3.1.4) $$\sum_{k=1}^{n} \xi_k(a) = R_T,$$

где R_T – требуемое значение регионального ПБ.

Примем, что информация о функции $\varphi_k(x_k)$, сообщаемая отдельным предприятием слабо влияет на параметр a, то есть даже при больших изменениях $\varphi_k(x_k)$ величина a, получаемая из решения уравнения (3.1.4) изменяется незначительно (гипотеза слабого влияния). В этом случае, как известно [ ], представление достоверной информации является доминантной стратегией каждого предприятия.

Пример 3.1. [ ]. Пусть $\varphi_k(x_k) = \frac{1}{2r_k} x_k^2$.

Обозначим через s_k оценку параметра r_k, сообщаемую предприятием k. В этом случае уравнение (3.1.2) принимает вид

$$a - \frac{x_k}{s_k} = 0$$

или

(3.1.5) $$x_k = as_k.$$

Из условия (3.1.4) получаем

(3.1.6) $$a = \frac{R_T}{S}, \text{ где } S = \sum_k s_k .$$

Подставляя (3.1.5) и (3.1.6) в (3.1.1) имеем

(3.1.7) $$f_k = a^2 s_k \left(1 - \frac{s_k}{2r_k}\right).$$

Очевидно, что если пренебречь влиянием s_k на a, то максимум (3.1.7) достигается в точке $s_k = r_k$, что соответствует представлению предприятием достоверной информации.

Если учесть влияние s_k на a, то равновесная ситуация s* (точка Нэша) определяется из системы уравнений [ ]

$$s_k^* = r_k \frac{\sigma_k^*}{r_k + \sigma_k^*}, \text{ где } \sigma_k^* = \sum_{i \neq k} s_i^* .$$

Если предприятия близки по значениям r_k, то

$$s_k^* \approx r_k \frac{n-1}{n} = r_k \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Относительная погрешность (сознательное искажение информации) составляет:

$$\varepsilon = \frac{r_k - s_k}{r_k} = \frac{1}{n}.$$

Если $n = 10$, то $\varepsilon = 10\%$.

Приведенный анализ не учитывает ряда особенностей задачи определения стратегии повышения регионального уровня ПБ. Дело в том, что зависимости $\varphi_k(x_k)$ не являются не только выпуклыми, но и просто непрерывными. Они заданы в дискретных точках и принимают значения Q_{kj}, $j = \overline{0,3}$.

Далее, предложенный механизм стимулирования не является единственно возможным. Так, возможен вариант компенсации предприятиям затрат на создание и развитие СУПБ (именно затрат, а не упущенной выгоды), если компенсация затрат производится в начале периода, что позволяет предприятиям направить средства на развитие производства.

Конечно, если компенсация происходит в конце периода, то компенсировать следует величину упущенной выгоды. Фактически, механизм компенсаций затрат можно рассматривать как некоторый механизм централизованного финансирования мероприятий по созданию и развитию СУПБ.

3.2. Сравнение механизмов стимулирования и компенсации

Рассмотрим механизм компенсации упущенной выгоды на простой модели из примера (3.1).

Пример 3.2. Оценка затрат k-го предприятия равна $\frac{1}{2s_k} x_k^2$.

Примем R_T за 1, что не ограничит общности рассмотрения. Так как $x_k = \frac{s_k}{S}$, то величина компенсации составит

$$\frac{1}{2s_k}\left(\frac{s_k}{S}\right)^2 = \frac{s_k}{2S^2}.$$

Фактическая величина упущенной выгоды предприятия составит

$$\frac{1}{2r_k} x_k^2 = \frac{s_k^2}{2r_k S^2}.$$

Целевая функция предприятия в случае механизма компенсации имеет вид

$$\frac{s_k}{2S^2} - \frac{s_k^2}{2r_k S^2} = \frac{1}{2S^2} s_k \left(1 - \frac{s_k}{r_k}\right).$$

Предполагая гипотезу слабого влияния, определим доминантную стратегию предприятия:

(3.2.1) $$s_k^2 = \frac{1}{2} r_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Таким образом, все предприятия в два раза завышают оценку величины упущенной выгоды при отвлечении средств на создание и развитие СУПБ**!**

Определим величину средств, которая расходуется на компенсацию затрат.

(3.2.2) $$\Phi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2s_k} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{H^2} = \frac{1}{H}, \quad \text{где} \quad H = \sum_{k=1}^{n} r_k.$$

Сравним эту величину с величиной средств, идущих на стимулирование в механизме стимулирования:

(3.2.3) $$\Phi_c = \sum_{k=1}^{n} a x_k = a = \frac{1}{H}!$$

Сравнивая (3.2.2) и (3.2.3) убеждаемся, что оба механизма требуют одинаковых централизованных средств.

Насколько общим является вывод о равенстве величины централизованных средств для двух механизмов стимулирования и компенсации. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi_k(x_k, r_k) = r_k\varphi(x_k/r_k)$, где φ - выпуклые, непрерывно дифференцируемые функции, причем $\varphi_k' = 0$. При гипотезе слабого влияния и механизм стимулирования и механизм компенсации требуют одинакового объема централизованных средств.

Доказательство. Решим сначала задачу минимизации

$$\sum_{k=1}^{n} s_k \varphi\left(\frac{x_k}{s_k}\right)$$

при условии $\sum_k x_k = 1$. Имеем в оптимальном решении

$$\varphi'\left(\frac{x_k}{s_k}\right) = a, \quad \frac{x_k}{s_k} = \xi(a).$$

Определяя $\xi(a)$ из условия $\sum_k x_k = 1$, получаем

$$x_k = \frac{s_k}{S}, \quad k = \overline{1, n}, \quad a = \varphi'\left(\frac{1}{S}\right).$$

Рассмотрим механизм стимулирования. Имеем $s_k = r_k$, $k = \overline{1, n}$. Величина средств на стимулирование составляет

(3.2.4) $$\Phi_c = \sum_{k=1}^{n} a x_k = a = \varphi'\left(\frac{1}{H}\right).$$

Рассмотрим механизм компенсации. Разность величины компенсации и величины упущенной выгоды для предприятия k составляет

$$s_k \varphi\left(\frac{1}{S}\right) - r_k \varphi\left(\frac{s_k}{r_k S}\right).$$

Определим максимум этой величины по s_k. Имеем

$$S\varphi\left(\frac{1}{S}\right) = \varphi'\left(\frac{s_k}{r_k S}\right).$$

Заметим, что $S\varphi(1/S)$ составляет суммарную величину компенсации из централизованного фонда. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} s_k \varphi\left(\frac{x_k}{s_k}\right) = S\varphi\left(\frac{1}{S}\right), \quad \text{так как} \quad x_k = \frac{s_k}{S}.$$

Имеем

$$s_k = r_k S \cdot \xi\left[S\varphi\left(\frac{1}{S}\right)\right].$$

Из условия $\sum_{k=1}^{n} s_k = S$ получаем

$$\xi\left[S\varphi\left(\frac{1}{S}\right)\right] = \frac{1}{H}, \text{ или}$$

(3.2.5) $$\Phi_k = S\varphi\left(\frac{1}{S}\right) = \varphi'\left(\frac{1}{H}\right),$$

что полностью совпадает с (3.1.4)**!**

Пусть $\varphi(z) = z^{\alpha}$, $\alpha > 1$. В этом случае $\varphi'(z) = \alpha z^{\alpha-1}$, и уравнение (3.1.2) принимает вид

$$\frac{1}{S^{\alpha-1}} = \alpha \frac{1}{H^{\alpha-1}}\text{, или}$$

$$S = H\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

График функции $(1/\alpha)^{1/\alpha-1}$ приведен на рис. 3.1.

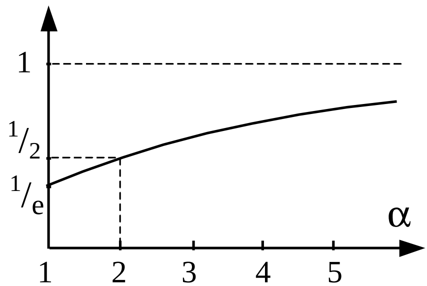


Рис. 3.1.

Заметим, что

$$\lim_{\alpha\to 1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{1}{e},\ \text{а}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = 1.$$

Таким образом, оба механизма эквивалентны с точки зрения величины требуемых централизованных средств. Однако, механизм стимулирования имеет важное преимущество – он стимулирует представление достоверной информации о величине упущенной выгоды (или о величине затрат). Полученный результат, опять же, имеет место для выпуклых, непрерывно-дифференцируемых функций. Как поведут себя механизмы стимулирования и механизмы компенсации в дискретном случае? Ответ на этот вопрос требует дальнейших исследований.

3.3. Принцип обратных приоритетов

Рассмотренные выше механизмы стимулирования и компенсации требуют определенной величины централизованных средств. Однако, что делать, если централизованные средства ограничены или состояние бюджета на позволяет реализовать налоговые льготы в требуемом объеме?

Пусть имеется определенная величина Ф централизованных средств, которую регион может направить для стимулирования развития СУПБ предприятий. В теории активных систем предложены и исследованы различные механизмы распределения ограниченных ресурсов [ ]. Среди них выделяются так называемые приоритетные механизмы [ ].

Обозначим через y_i – заявку на ресурс, представляемую i-ым предприятием, z_i – количество получаемого им ресурса. Для каждого предприятия определяется функция приоритета $\eta_i(y_i)$ и ресурс Ф распределяется согласно выражению

(3.3.1) $$z_i = \min[y_i;\ \gamma\eta_i(y_i)],$$

где параметр γ определяется из условия

(3.3.2) $$\sum_{i=1}^{n} \min\left[y_i; \gamma\eta_i\left(y_i\right)\right] = R\ .$$

Если $\eta_i(y_i)$ – возрастающие функции y_i для всех i, то это механизм прямых приоритетов, если $\eta_i(y_i)$ – убывающие функции y_i для всех i, то это механизм обратных приоритетов. Наконец, если $\eta_i(y_i)$ не зависит от y_i для всех i, то это механизм абсолютных приоритетов. Механизмы прямых приоритетов в настоящее время редко применяются в силу того, что они порождают тенденцию роста величины заявляемого ресурса. В механизмах абсолютных приоритетов, как правило, величина получаемого ресурса не зависит от заявки и определяется величиной приоритета. Основным преимуществом механизмов обратных приоритетов является исключение тенденции роста заявок. Более того, в условиях дефицита ресурса они порождают обратную тенденцию – уменьшения заявок, причем тем большую, чем больше дефицит.

Приоритетные механизмы исследовались для случая, когда центр занимался только распределением ресурса. В нашем случае центр, помимо распределения ресурса, устанавливает элементам также и планы повышения уровня СУПБ. Рассмотрим механизмы обратных приоритетов на примере функций затрат $(1/2r_i)x_i^2$. Пусть, как и ранее, s_i – оценка параметра r_i. В этом случае

$$y_i = \frac{s_i}{2S^2}.$$

Возьмем в качестве приоритетов функции $\eta_i(y_i) = 1/y_i$. В этом случае механизм распределения фонда Ф будет иметь вид

$$z_i = \min\left[\frac{s_i}{2S^2};\ \ \frac{1/s_i}{\sum_j 1/s_j}\Phi\right]. \tag{3.3.4}$$

Целевая функция i-го элемента имеет вид

(3.3.5) $$f_i = \min\left[\frac{s_i}{2S^2};\ \frac{1/s_i}{\sum\limits_j 1/s_j}\Phi\right] - \frac{s_i^2}{2r_iS^2}.$$

Предположим, что для всех предприятий минимум в выражении (3.3.5) достигается на первом члене. В этом случае, как легко видеть, максимум f_i для каждого предприятия достигается при сообщении оценки $s_i = {}^1/_2 r_i$ (при гипотезе слабого влияния). В этом случае механизм обратных приоритетов эквивалентен механизму компенсации.

Для того, чтобы минимум достигался на первом члене необходимо и достаточно выполнение условия:

(3.3.6) $$\Phi \geq \frac{1}{H},\ \text{ или }\ \Phi H \geq 1.$$

Докажем этот факт. Для этого заметим, что величина 1/H равна сумме компенсационных выплат всем предприятиям при сообщении ими оценок $s_i = {}^1/_2 r_i$, $i = \overline{1, n}$. Действительно,

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2S^2} = \frac{1}{2S} = \frac{1}{H}.$$

Пусть $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$. Из выражения (3.3.5) следует, что чем меньше коэффициент r_i, тем больше доля фонда Φ, получаемая согласно обратным приоритетам. Поэтому предприятие с минимальной величиной параметра r_n получит максимальную долю фонда. А значит, это предприятие получит долю фонда, равную величине компенсационных выплат при $s_n = {}^1/_2 r_n$. Вычитаем из фонда Φ долю, равную компенсации предприятию n и повторяем процедуру (3.3.5) для оставшихся предприятий. Продолжая таким образом, получаем, что каждое предприятие получает долю фонда, равную величине компенсации.

Пусть теперь Ф < 1/H. В этом случае, при $s_1 = r_1/2$, предприятие 1 получит долю фонда меньше чем величина компенсации, так как минимум будет достигаться на втором члене под знаком минимума в выражении (3.3.5). Поэтому, в равновесии $s_1 < r_1/2$. Если $s_1 \geq r_2/2$, то величина s_1 определяется из уравнения

$$s_1(1 + s_1Q_{2,n}) = 2(s_1 + H_{2,n})^2\Phi,$$

$$\text{где } Q_{2,n} = \sum_2^n \frac{2}{r_i},\ H_{2,n} = \frac{1}{2}\sum_2^n r_i\ .$$

Пусть число предприятий, для которых $s_i < ½\, r_i$, равно k. Покажем, что в этом случае для всех этих предприятий $s_i = s_k$, $i = \overline{1,k}$. Действительно, из условия равенства выражений под знаком минимума получаем, что

$$s_i^2 = \frac{2\gamma S^2\Phi}{\sum_j \frac{1}{s_j}},$$

то есть не зависит от i. Величина s_k определяется из следующего квадратного уравнения:

(3.3.7) $$s_k(k + s_kQ_{k+1,n}) = 2(ks_k + H_{k+1,n})^2\Phi.$$

Число k определяется путем последовательного решения уравнения (3.3.7) для k = 1, 2, ··· , пока не будет получено k такое, что $s_k \geq r_{k+1}/2$.

Таким образом, чем меньше фонд Ф, тем больше предприятий будут сообщать одинаковые оценки параметров $s_k < ½\, r_k$, что приводит к неоптимальному распределению нормативных требований по предприятиям, а значит, к росту затрат на достижение требуемого значения регионального уровня промышленной безопасности. Этот качественный вывод сохраняется для функций затрат более общего вида, например, функций типа Кобба-Дугласа.

3.4. Дискретные функции затрат. Выпуклый случай

Перейдем к исследованию эффективности рассмотренных выше механизмов для дискретных зависимостей затрат (упущенной выгоды) на развитие СУПБ до требуемого уровня. Далее для однозначности будем понимать под величинами Q_{kj} затраты, хотя это может быть и упущенная выгода. Сначала рассмотрим так называемый выпуклый случай, когда замена дискретной функции соответствующей кусочно-линейной непрерывной функцией дает выпуклую функцию.

А) Механизм стимулирования

Механизм стимулирования роста уровня СУПБ в дискретном случае будет иметь вид

(3.4.1) $$\Phi_k = \sum_{j=1}^{3} (\lambda j - s_{kj}) x_{kj} \text{ ,}$$

где s_{kj} – оценка затрат предприятия k, требуемых на достижение уровня j, s_{k0} = 0, то есть, при установлении предприятию нормативных требований y_{kT} = j, предприятие получает либо из централизованного фонда стимулирования, либо в виде налоговых льгот, сумму λj.

Примем, как и в непрерывном случае, гипотезу слабого влияния оценок $s_k = \{s_{kj}\}$ отдельного предприятия на параметр стимулирования λ. В этом случае, как показано в [ ], сообщение достоверных оценок $s_k = Q_k$ является доминантной стратегией предприятия, если механизм управления является механизмом открытого управления (честной игры). Согласно принципу честной игры, план x_k повышения уровня СУПБ k-го предприятия должен удовлетворять следующим условиям совершенного согласования:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\lambda_j - s_{kj}\right)x_{kj} = \max_j\left(\lambda_j - s_{kj}\right).$$

Смысл этих условий в том, что предприятие должно получить задание по росту уровня СУПБ до такой величины q, при которой разность стимулов λj и оценок затрат s_{kj} максимальна.

При сообщении достоверных оценок условия совершенного согласования принимают вид

(3.4.2) $$\sum_{j=1}^{3}\left(\lambda j - Q_{kj}\right)x_{kj} = \max_j\left(\lambda j - Q_{kj}\right),\ \ k = \overline{1,n},\ \ Q_{k_0} = 0\,.$$

Возникает вопрос, всегда ли существует параметр стимулирования λ такой, что оптимальный план x* является эписогласованным, то есть, удовлетворяет условиям (3.4.2). Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.1. Для любых Q_{kj}, j = 1, 2, 3, $k = \overline{1,n}$, существует параметр λ такой, что условия совершенного согласования выполняются для оптимального плана x*.

Доказательство. Рассмотрим задачу оптимального планирования нормативных уровней к СУПБ предприятий: минимизировать

(3.4.3) $$\sum_{i,j} Q_{k,i}x_{k,j}$$

при ограничениях: $x_{kj} = \{0, 1\}$,

(3.4.4) $$\sum_j x_{k,j} \le 1,\ \ k = \overline{1,n}\,,$$

(3.4.5) $$\sum_{k,j} j \cdot x_{k,j} \geq R_T .$$

Ограничение $x_{kj} = \{0, 1\}$ можно заменить условием $x_{kj} \geq 0$,так как при этом условии задача всегда имеет целочисленное решение. Сформулируем двойственную задачу, введя двойственные переменные $u_k \geq 0,\ k = \overline{1, n}$ и $\lambda \geq 0$: максимизировать

$$\lambda R_T - \sum_{k=1}^{n} u_k$$

при ограничениях

$$\lambda_j - u_k \leq Q_{kj}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = \overline{1, n},$$

или

(3.4.6) $$u_k = \max_j \left(\lambda \cdot j - Q_{kj}\right), \quad k = \overline{1, n} .$$

Поскольку прямая задача имеет решение, то двойственная задача тоже имеет решение, то есть существует $\lambda \geq 0$, u_k, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяющие (3.4.6), а значит, условия совершенного согласования имеют место. Теорема доказана.

Величину стимулирующего параметра легко определить, зная оптимальный план x*. Если обозначить через j_k – уровень СУПБ k-го предприятия в оптимальном плане, то минимальная величина λ определяется выражением

(3.4.7) $$\lambda = \max_k \left(Q_{k, j_k} - Q_{k, j_k - 1}\right).$$

Пример 3.3. Значения Q_{kj} для пяти предприятий приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

k / j	1	2	3	4	5

1	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$
2	$\underline{5}$	$\underline{4}$	7	$\underline{3}$	$\underline{3}$
3	10	10	14	$\underline{6}$	7

Пусть $R_T = 10$. Применяя алгоритм, описанный в пункте 2.3, получаем оптимальное решение:

$$x_{12} = 1,\ x_{22} = 1,\ x_{31} = 1,\ x_{43} = 1,\ x_{52} = 1,$$

остальные $x_{kj} = 0$. Минимальные затраты равны

$$5 + 4 + 3 + 6 + 3 = 21.$$

Имеем:

$$\lambda = \max\,(5 - 2;\ 4 - 1;\ 3 - 0;\ 6 - 3;\ 3 - 1) = 3.$$

Теорема 3.1 справедлива при гипотезе слабого влияния. Насколько правомерна эта гипотеза? Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала случай одинаковых предприятий. Имеет место

Теорема 3.2. Если $R_T = kn + s$, где $0 < s < n$, $k = 0$, 1 или 2, то сообщение достоверной информации является равновесной стратегией каждого предприятия.

Доказательство. Примем для определенности (и без ограничения общности) $k = 1$. Так как $0 < s < n$, то s предприятий имеют задание $y_T = 2$, а $(n - s)$ предприятий имеют задания $y_T = 1$. Очевидно, что предприятия, у которых $y_T = 1$, не могут повлиять на величину стимулирующего параметра λ, так как λ определяется группой предприятий, у которых $y_T = 2$. Поэтому примем, что они сообщают достоверные оценки Q_{kj}. С другой стороны, попытка предприятия со значением $y_T = 2$ повысить разницу $Q_{k2} - Q_{k1}$ и тем самым увеличить λ сразу же приведет к уменьшению его задания до $y_T = 1$. При этом, одно из предприятий с $y_T = 1$ получит более выгодное задание $y_T = 2$, а величина λ не изменится. В определенном смысле сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого предприятия. Исключение составляет маловероятный случай, когда все предприятия с заданием $y_T = 1$ вдруг повысят свои оценки $S_{k2} > Q_{k2}$. В этом случае любому из предприятий q с заданием $y_T = 2$ выгодно повысить свою оценку до величины $S_{q2} < S_{k2}$. При этом параметр λ увеличится. Однако, такая ситуация не является равновесной. Теорема доказана.

Пусть теперь $R_T = k \cdot n$, $0 < k < 3$. В этом случае любое предприятие q может увеличить параметр стимулирования, увеличивая одновременно оценки $Q_{q,k}$ и $Q_{q,k+1}$, как показано на рис. 3.2 для случая $k = 1$ (точки A_1, B_1). Максимальное увеличение λ определяется точками A и B и равно, как легко видеть из рисунка, $Q_{k2} - 2Q_{k1}$. При этом A увеличивается до величины $Q_{k2} - Q_{k1}$.

Для случая $k = 2$ максимальное увеличение λ определяется величиной $Q_{k3} + 2Q_{k2} - Q_{k1}$ (точки A и B на рис.3.3). Максимальная величина λ составит $Q_{k3} - Q_{k2}$.

На основе поведенного анализа случая одинаковых предприятий можно сделать определенные выводы для общего случая. Степень искажения информации зависит от первых разностей функции затрат. Более того, если j_k – задание для k-го предприятия, то величина

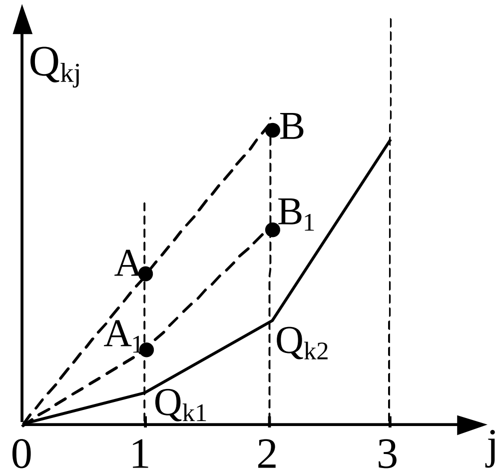


Рис. 3.2.

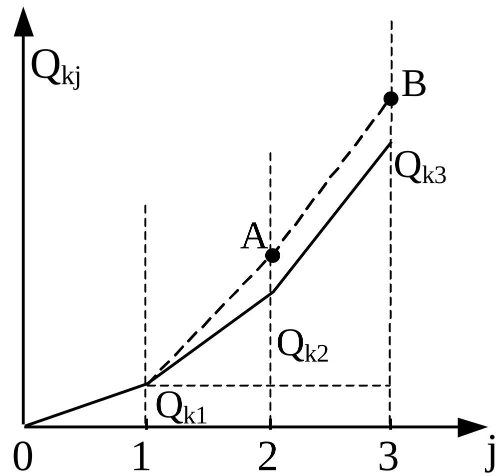


Рис. 3.3.

$$\Delta = \min_{i \neq k} \left[Q_{j_i+1} - Q_{j_i} \right] - \left[Q_{j_k} - Q_{j_k - 1} \right]$$

определяет максимальное увеличение λ за счет искажения информации k-ым предприятием. Можно сделать качественный вывод, что с увеличением числа предприятий увеличивается вероятность появления предприятий с близкими первыми разностями и, следовательно, уменьшается степень искажения информации.

Б) Компенсационный механизм

Как и для механизма стимулирования, сначала рассмотрим случай одинаковых предприятий. Отдельно следует рассмотреть случай, когда $R_T = s$, $0 < s < n$. Это единственный случай, когда представление достоверной информации всеми предприятиями является равновесной ситуацией (и доминантной в том же смысле, как отмечалось при анализе механизма стимулирования). Действительно, любое повышение оценки Q_{k1} предприятием k, имеющим задание $y_T = 1$, приводит к уменьшению задания до 0. Сложнее обстоит дело для случаев, когда $R_T = kn + s$, $k = 1$ или 2, $0 < s < 3$. В отличии от механизма стимулирования (теорема 3.2), в данном случае в равновесии оценки затрат завышены, что иллюстрирует рис. 3.4.

Действительно, при $k = 1$ предприятие, имеющее задание $y_T = 2$, может завысить оценки s_{k1} и s_{k2}, соответственно, до точек A_1 и B_1, сохранив при этом прежнее задание. Предприятие, имеющее задание $y_T = 1$ также может завысить оценку s_{k1}, до точки A_1, сохранив прежнее задание. Заметим, что суммарная величина компенсационных выплат будет в точности равна величине стимулирования в механизме стимулирования. Аналогично, при k = 2 могут повысить оценки затрат все предприятия до точек A, B, C (см. рис. 3.4). Величина компенсационных выплат также равна величине выплат в механизме стимулирования. Таким образом, в рассмотренных случаях имеет место аналог теоремы 3.1.

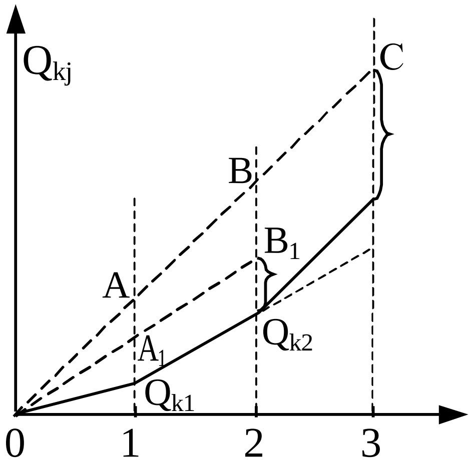


Рис. 3.4.

В случае $R_T = kn$ или в случае разных предприятий тенденция роста оценок усиливается по тем же причинам, какие были исследованы пи анализе механизма стимулирования.

3. Механизм обратных приоритетов

Анализ механизма обратных приоритетов проведем сначала при предположении, что предприятие изменяет оценку затрат только для уровня СУПБ, который назначен ему в качестве задания.

Пусть j_i – задание, назначенное предприятию i, s_{i,j_i} - оценка затрат. Тогда доля фонда Φ, получаемая предприятием i определяется выражением

$$\Phi_i = \min\left[s_{i,j_i};\ \gamma\frac{A_{j_i}}{s_{i,j_i}}\right], \tag{3.4.8}$$

где γ определяется из уравнения $\sum_{i=1}^{n}\Phi_i = \Phi$. Здесь A_{j_i} - приоритет j_i-го уровня. Заметим, что при сделанном предположении изменение оценки в сторону уменьшения не меняет оптимального решения, полученного при условии достоверности данных. Поэтому анализ механизма обратных приоритетов в данном случае ничем не отличается от классического анализа, описанного в литературе [ ], а именно, в равновесии Нэша оценки предприятий будут определяться выражениями:

$$s^*_{ij_j} = \frac{\sqrt{A_{j_i}}}{\sum_j \sqrt{A_j}}\Phi,\quad i = \overline{1,n}. \tag{3.4.9}$$

Насколько обоснованным является предположение об изменении предприятием только той оценки затрат, которая соответствует полученному заданию? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим простой пример.

Пример 3.2. Пусть имеются два предприятия и $R_T = 3$. Таблица значений Q_{kj} приведена ниже.

Таблица 3.2.

j \ k	1	2
1	4	1
2	9	16

Возьмем приоритеты уровней $A_1 = 1$, $A_2 = 4$. Очевидно, в оптимальном решении $y_{1T} = 2$, $y_{2T} = 1$, $Q_T = 10$. Возьмем форд $Ф = 6$. В равновесии фонд распределится следующим образом: $Ф_1 = 4$, $Ф_2 = 2$. Прибыли предприятий составят

$$f_1 = 4 - 9 = -5; \quad f_2 = 2 - 1 = 1;$$

Очевидно, что первому предприятию невыгодно получать задание $y_{1T} = 2$, так как при задании $y_{1T} = 1$ его прибыль (точнее убыток) будет равна $2 - 4 = -2$, что предпочтительнее. Для того, чтобы не получить задание $y_{1T} = 2$ первому предприятию достаточно завысить оценку s_{12} до величины 20. В этом случае оптимальное решение изменится: $y_{1T} = 1$,. $y_{2T} = 2$, соответственно, $Ф_1 = 2$, $Ф_2 = 4$. Убытки предприятий составят $f_1 = -2$; $f_2 = -12$. Теперь второе предприятие будет завышать оценку, чтобы не получить задания $y_{2T} = 2$. Равновесия не существует, оценки затрат неограниченно растут. Для повышения устойчивости механизма обратных приоритетов следует изменить приоритеты так, чтобы хотя бы одному из предприятий было выгодно повышенное задание $y_T = 2$.

Возьмем, например, $A_1 = 1$, $A_2 = 25$. В этом случае при оптимальном плане $y_{1T} = 2$,. $y_{2T} = 1$ имеем $Ф_1 = 5$, $Ф_2 = 1$ и $f_1 = 9 - 5 = 4$, $f_2 = 1 - 1 = 0$. Этот вариант устраивает оба предприятия, так как в варианте $y_{1T} = 1$,. $y_{2T} = 2$ первое предприятие имеет $1 - 4 = -3$, а второе – $5 - 16 = -11$, то есть оба проигрывают.

Интересно проанализировать вариант распределения форда, при котором обоим предприятиям выгодно иметь высокое задание $y_T = 2$. Мы рассмотрим крайний случай, когда приоритет $A_1 = 0$. В этом случае весь форд Ф получает предприятие, имеющее задание $y_T = 2$. Фактически в этом случае механизм обратных приоритетов переходит в конкурсный механизм. Для того, чтобы конкурс был эффективен, необходимо, чтобы оба предприятия были заинтересованы в получении задания $y_T = 2$. Для этого величина фонда должна удовлетворять условиям

$$\Phi - Q_{12} > -Q_{11}, \quad \Phi - Q_{22} > -Q_{21}$$

или

$$\Phi > \max (Q_{12} - Q_{11}; Q_{22} - Q_{21}). \tag{3.4.10}$$

Примем, что величина фонда удовлетворяет (3.4.10). Проведем анализ полученной игры. Для того, чтобы предприятию 1 получить задание $y_{1T} = 2$, необходимо максимально увеличить оценку s_{11} и, по возможности, уменьшить оценку s_{12}. Аналогично должно поступать предприятие 2. Величина s_{11}, очевидно, ограничена $s_{11} \le s_{12}$. Аналогично, $s_{21} \le s_{22}$. Следовательно, $s_{11} = s_{12} = s_1$, $s_{21} = s_{22} = s_2$. Очевидно, что задание $y_T = 2$ получит предприятие с меньшей оценкой. Согласно принципу обратных приоритетов, предприятие получает величину фонда, равную min (s, Q), где s - оценка затрат. Заметим теперь, что предприятию 1 невыгодно сообщать оценку s_1 меньше, чем $Q_{12} - Q_{11}$. Действительно, если $s_1 < Q_{12} - Q_{11}$, то получив высокое задание $y_{1T} = 2$, предприятие 1имеет выигрыш (проигрыш)

$$s_1 - Q_{12} < - Q_{11},$$

то есть меньше, чем при получении низкого задания $y_{1T} = 1$. Аналогично, предприятию 2 невыгодно сообщать оценку $s_2 < Q_{22} - Q_{21}$.

Окончательно получаем, что если $s_1 < s_2$, то предприятие 1 получает высокое задание (выигрывает конкурс). Это произойдет в том случае, если

$$Q_{12} - Q_{11} < Q_{22} - Q_{21},$$

или

$$Q_{12} + Q_{21} < Q_{11} + Q_{22}.$$

В противном случае, если $s_1 > s_2$, побеждает второе предприятие. Это произойдет, если

$$Q_{22} - Q_{21} < Q_{12} - Q_{11}$$

или

$$Q_{22} + Q_{11} < Q_{12} + Q_{21}.$$

Таким образом, в любом случае, конкурс обеспечивает оптимальное назначение заданий по развитию СУПБ.

3.5. Дискретные функции затрат. Вогнутый случай

Рассмотрим случай вогнутых зависимостей Q_k, $k = \overline{1, n}$. Начнем анализ со случая $R_T = 3m$, $1 \le m < n/3$. Как следует из утверждения 2.2, в этом случае первые m предприятий получают максимальные задания $y_T = 3$, а остальные - $y_T = 0$ (напоминаем, что предприятия пронумерованы по возрастанию Q_{k3}). Фактически, мы получаем конкурс предприятий за право получить задание $y_T = 2$. При этом, как было показано в пункте 3.4 для случая $R_T = s$, $0 < s < n$ (этот случай тоже приводит к конкурсу), механизм стимулирования и механизм компенсации эквивалентны. Исследования подобных конкурсов детально проведено в [5]. Поэтому отметим основные выводы. Во-первых, максимальное задание получают первые m предприятий. Во-вторых, в равновесии Нэша все эти предприятия сообщают одинаковые оценки затрат $S_{k3} = Q_{m+1,3}$ (предполагается, что в случае равенства оценок, приоритет имеет предприятие с меньшим номером). В целом, на стимулирование или на компенсацию потребуется одна и та же сумма средств, которая равна $mQ_{m+1,3}$.

Рассмотрим механизм обратных приоритетов. Примем, что фонд Ф меньше, чем $mQ_{m+1,3}$. Поскольку все предприятия, получившие максимальные задания имеют одинаковые приоритеты, в равновесии Нэша все они будут сообщать одинаковые оценки и, следовательно, фонд Ф будет разделен между ними поровну: $\Phi_k = {}^1/_m\Phi$, $k = \overline{1,m}$. Остальные (n – m) предприятий сообщают максимально допустимые оценки $s_i = s_{max}$, не получают заданий на рост уровня СУПБ ($y_T = 0$) и, соответственно, не получают средств из фонда. Покажем, что данная ситуация является равновесием Нэша.

Действительно, первые m предприятий получают высокое задание при сообщении любой оценки затрат в силу приоритетности своих номеров. Поэтому их задача – получить максимальное количество средств из фонда, что дает ситуацию равновесия $s_i = {}^1/_m\Phi$, $i = \overline{1,m}$. Остальные предприятия, конечно, могут получить высокое задание, сообщив оценку $s_i < {}^1/_m\Phi$. При этом, предприятие получит долю фонда в размере s_i и его выигрыш будет равен

$$s_i - Q_{i,3} < {}^1/_m\Phi - Q_{i,3} < Q_{m+1,3} - Q_{i,3} \le 0$$

для всех $i \ge m + 1$.

Важно отметить, что в равновесии назначение заданий будет оптимальным при любой величине фонда. Анализ остальных случаев $R_T = 3m + s$, где $0 < s < 3$, является более сложной задачей и требует дальнейших исследований.

Заключение

Описанные в работе модели и механизмы могут составить основу для разработки систем поддержки принятия решений по развитию СУПБ в регионах и повышению на этой основе регионального уровня промышленной безопасности. Представляется целесообразным развитие исследований в этой области как в направлении более точных оценок эффективности предлагаемых механизмов, так и анализа новых механизмов, в первую очередь, механизмов страхования, роль которых в обеспечении промышленной безопасности существенна.

Представляется, также, актуальным применение описанных механизмов в системах обеспечения экологической безопасности и охраны природы.

Литература

1. *Легасов В. А.* Из сегодня - в завтра // Правда, 1987. 5 окт.
2. *Порфирьев Б. Н.* Государственное управление в чрезвычайных ситуациях. - М.: Наука, 1991.
3. IAN Sutton Process Safety Management. USA, 1997.
4. *Бурков В.Н., Кловач Е.В., Красных Б.А., Сидоров В.И.* Модели и механизмы управления промышленной безопасностью. М.: ИПУ РАН, 1999.
5. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Как управлять проектами. – М.: СИНТЕГ, 1997.