

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Ю.Н. ПИВОВАРОВ  
В.Н. ТАРАСОВ  
Д.Н. СЕЛИЩЕВ

# **МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ОПЕРАТИВНОГО АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Рекомендовано Учёным советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов, изучающих вероятностные методы математического описания сигналов и систем, а также подходы к синтезу их моделей

Оренбург 2004

ББК 22.18Я73  
П 32  
УДК 004.4'6:519.87 (075.8)

Рецензент  
доктор технических наук, профессор В.Д.Шевеленко,

**П 32 Пивоваров Ю.Н., Тарасов В.Н., Селищев Д.Н.  
методы и средства оперативного анализа случайных  
процессов:  
Учебное пособие, - Оренбург: ГОУ ВПО ОГУ, 2004. - 1с.**

ISBN

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов, изучающих вероятностные методы математического описания сигналов и систем, а также подходы к синтезу их моделей.

П  $\frac{1702110000}{6Л9-97}$

ББК22.18Я73

© Пивоваров Ю.Н., Тарасов В.Н., Селищев Д.Н., 2004  
© ГОУ ОГУ, 2004

# 1 Статистические методы и модели

## 1.1 Математическое описание динамических систем

*Динамическая система (ДС)* - это любая система, выполняющая преобразование сигналов.

То преобразование, которое осуществляется системой, называется оператором системы. Если система имеет оператор  $A$ , то

$$Y(t) = A\{X(t)\}.$$

Все операторы можно разделить на:

- линейные, производящие линейные преобразования входных сигналов;

- нелинейные.

Линейные в свою очередь подразделяются на:

- линейно-однородные

- линейно-неоднородные.

Линейно-однородными называются операторы, удовлетворяющие условию:

$$L\left\{\sum_{i=1}^N b_i X_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^N L\{b_i X_i(t)\}.$$

Линейно-неоднородные имеют вид:

$$L\{X(t)\} = L\{X(t)\} + \psi(t),$$

то есть, любой такой оператор представляет собой сумму линейно-однородного оператора с некоторой функцией времени.

Примеры линейно-однородных операторов:

$$Y(t) = K * X(t),$$

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt},$$

$$Y(t) = \int_0^t X(u) du.$$

Самый общий случай любого линейного преобразования – это решение дифференциального уравнения. Системы, осуществляющие линейные преобразования, называют *линейными динамическими системами (ЛДС)*, а системы, имеющие нелинейные операторы, – *нелинейными динамическими системами (НДС)*.

В зависимости от того, изменяются ли параметры и характеристики системы во времени, различают стационарные и нестационарные системы. *Стационарной* называется система, характеристики и параметры которой неизменны во времени. В противном случае система называется *нестационарной*.

В зависимости от того, непрерывно или дискретно сигнал поступает на вход системы и выдается с ее выхода, различают *аналоговые* и *цифровые* системы.

Идеальной называется система с постоянными параметрами, обладающая свойством линейности сигналов в двух определенных точках – на входе и на выходе, в точке определения реакции системы. Говорят, что система имеет постоянные параметры, если все свойства системы инвариантны во времени (то есть система стационарна). Например, простая пассивная электрическая цепь является системой с постоянными параметрами, если сопротивления, емкости и индуктивности всех ее элементов не меняются во времени. Система линейна, если ее частотные характеристики обладают свойствами аддитивности и однородности. Понятие однородности означает, что реакция системы на любой сигнал, умноженный на некоторую постоянную, равна этой постоянной, умноженной на реакцию системы на входной сигнал.

Запишем эти утверждения в аналитической форме. Пусть  $Y(t)$  – это реакция системы на входной сигнал  $X(t)$ . Система линейна, если для двух любых входных сигналов  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  и постоянной  $C$  справедливы соотношения:

$$L\{X_1(t) + X_2(t)\} = L\{X_1(t)\} + L\{X_2(t)\},$$

$$L\{C * X(t)\} = C * L\{X(t)\}.$$

Первая из этих формул выражает свойство аддитивности, а вторая – однородности.

Гипотеза о постоянстве параметров вполне приемлема для многих физических систем, встречающихся на практике. Например, обычно не наблюдается заметных изменений основных характеристик электрических цепей или механических устройств в пределах любых представляющих практический интерес интервалов времени. Хотя такие системы встречаются далеко не всегда. Сопротивление электрического резистора может меняться вследствие сильного нагрева, а прочность сооружения может изменяться при повреждении, вызванном усталостью металла под воздействием непрерывной вибрации. Кроме того, некоторые физические системы конструируют именно как системы с переменными параметрами.

Большие ограничения накладывает гипотеза о линейности реальных систем. При наличии экстремальных условий на входе, передаточные характеристики всех реальных физических систем нелинейны. Тем не менее, не рискуя допустить больших ошибок, передаточные свойства многих

физических систем можно считать, по крайней мере, в некотором ограниченном диапазоне приложенного на входе воздействия, линейными.

### Математическое описание ЛДС

Описать динамическую систему – это значит отыскать ее оператор, то есть найти соотношения, связывающие входной и выходной сигналы. Эти соотношения могут задаваться во временной и частотной областях, при помощи изображений Лапласа или Z-преобразований (в случае дискретных систем).

#### 1.1.1 Математическое описание ЛДС во временной области

Пусть имеем линейную динамическую систему с оператором преобразования  $L$ . На ее вход подается сигнал  $X(t)$ . Который может являться процессом любой физической природы (но преобразованный для обработки именно данной системой) и обладать любыми свойствами. С выхода системы снимается сигнал  $Y(t)$ , свойства и характеристики которого определяются свойствами входного сигнала и параметрами системы.

Дать обобщенное описание системы – это значит указать вид взаимосвязи между ее входным и выходным сигналами.

$$Y(t) = L\{X(t)\}. \quad (1.1)$$

Если вид взаимосвязи известен, то свойства системы определены полностью.

Для описания систем во временной области вводится ряд характеристик, из которых наиболее распространенными являются:

- импульсная переходная характеристика (ИПХ);
- переходная функция.

*Импульсная переходная характеристика* системы – это ее реакция на сигнал в виде  $\delta$  – функции:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

То есть, бесконечно короткий импульс, имеющий бесконечно большую амплитуду и площадь, равную единице.

$$X(t) = \delta(t); \quad Y(t) = L\{\delta(t)\} = h(t).$$

Переходная функция – это реакция системы на единичный скачок (функцию Хевисайда):

$$X(t) = 1(t); \quad Y(t) = L\{1(t)\} = H(t).$$

Так как свойства системы не зависят от того, что подавать на ее вход, то эти характеристики можно однозначно связать между собой:

$$H(t) = \int_0^t h(u) du + \psi(t) \quad (\text{зависит от начальных условий}),$$

$$h(t) = \frac{dH(t)}{d(t)} + \psi(t) \quad (\text{производная от } \Psi(t)).$$

Подадим на вход системы сигнал  $X(t) = \delta(t - \tau_0)$  в соответствии с рисунком 1:

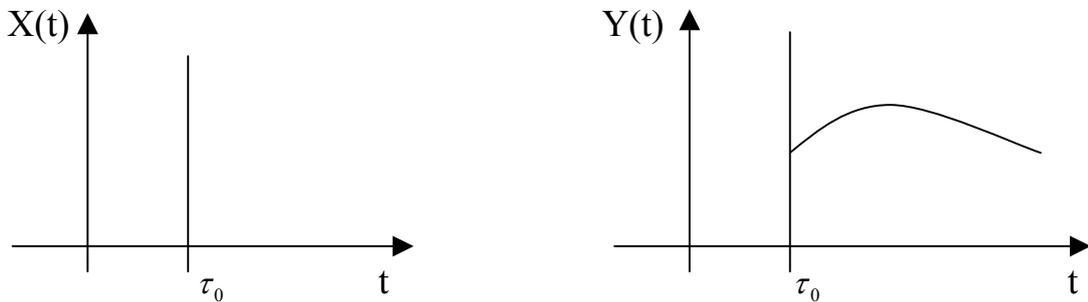


Рисунок 1 – График ИПХ динамической системы.

Из графика видно, что система не является генератором, и ее выходной сигнал рано или поздно устремится к нулю.

Импульсная переходная характеристика ЛДС будет зависеть как от текущего времени, так и от момента подачи на вход системы  $\delta$  - функции.

Удобно записать форму этой зависимости несколько иначе:

$$h(t, \tau_0) = h(t - \tau_0, \tau_0) = h(t - \tau_0, t).$$

Для рациональных систем справедливо:

$$h(t, \tau_0) = h(t - \tau_0),$$

то есть ИПХ системы зависит не от начального состояния, а лишь от момента подачи на ее вход импульса и момента рассмотрения t:

$$h(t, \tau_0) = h(t - \tau_0) = h(\tau) \quad (1.2)$$

Для нестационарных динамических систем ИПХ является функцией двух аргументов.

В дальнейшем станем рассматривать и описывать только стационарные ЛД, для описания которых существует общая методика решения. На рисунке 2 изображены различные виды импульсных характеристик.

У генераторных систем (рисунок 2в) ИПХ носит незатухающий характер, такие системы неустойчивы в отличие от систем с затухающими импульсными характеристиками (рисунок 2а и 2б).

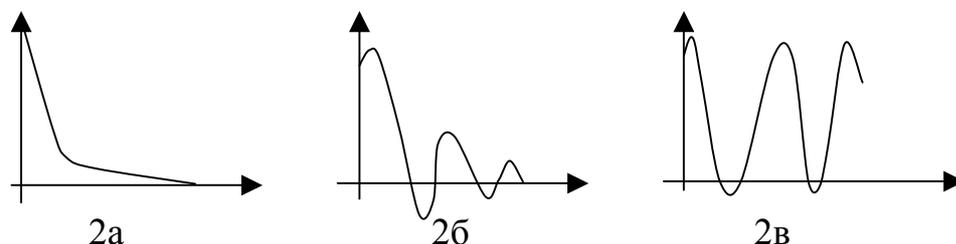


Рисунок 2 – Различные виды импульсных переходных характеристик.

ИПХ устойчивой системы должна представлять абсолютно интегрируемую функцию, то есть она должна обладать следующими свойствами:

- 1)  $\int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$ ,
- 2)  $\lim_{\tau \rightarrow 0} h(\tau) = 0$ .

Зная ИПХ, можно составить суждение о быстродействии системы. Действительно, ИПХ существенно отличается от нуля не во всем диапазоне своего аргумента, а лишь в некоторой его части. Тот интервал, после которого ИПХ можно считать практически равной нулю, называется длительностью импульсной переходной характеристики и обозначается  $\tau_u$ .

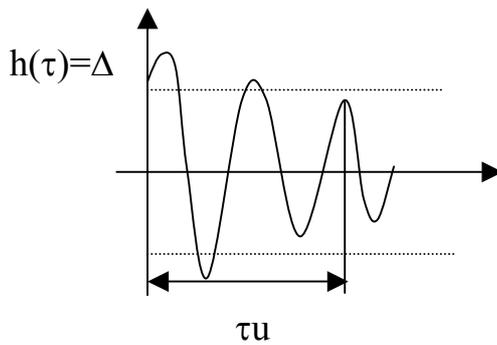
### *Способы определения длительности ИПХ*

Существует несколько способов определения величины.

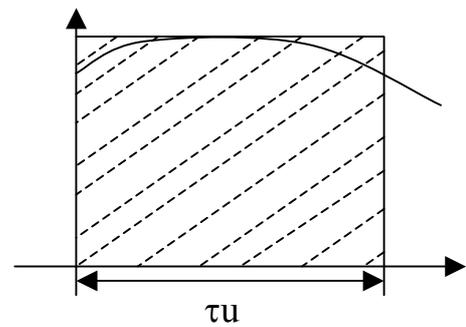
Первый из них заключается в следующем (в соответствии с рисунком 3а).

Проводим две прямые, параллельные оси абсцисс.

Длительность импульсной характеристики – это интервал времени, начиная с которого ИПХ, войдя в дифференциальный коридор, ограниченный этими прямыми, уже не покидает его.



3а



3б

Рисунок 3 – К вопросу об определении длительности ИПХ.

Это уравнение может иметь несколько корней, в качестве длительности ИПХ следует брать наибольший.

$h_n$  – наибольшее значение ИПХ,

$$\frac{h(\tau)}{h_n} = \frac{\Delta}{h_n} = \gamma, \gamma \ll 1. \quad (1.3)$$

Согласно второму способу, (в соответствии с рисунком 3б) за длительность импульсной переходной характеристики принимается основание прямоугольника, построенного на оси времени, имеющего высоту, равную наибольшему значению ИПХ и площадь, равную площади фигуры, ограниченной сверху ИПХ, снизу осью времени, а слева – осью ординат.

$$\tau_u = \frac{1}{h_n} \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau. \quad (1.4)$$

Но если ИПХ носит колебательный характер, то значение  $\tau_u$ , вычисленное по этой формуле, окажется заниженным, поэтому этот способ применяется только для монотонных импульсных характеристик.

Третий и четвертый способы отыскания длительности ИПХ аналогичны второму, но предназначены для знакопеременных характеристик:

$$\tau_u = \frac{1}{h_n} \int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau, \quad (1.5)$$

$$\tau_u = \frac{1}{h_n^2} \int_0^{\infty} h^2(\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Разные способы определения длительности ИПХ дают разный результат, поэтому для сравнения системы по этой характеристике следует использовать один и тот же способ.

*Пример 1.*

Найти длительность ИПХ системы, если эта характеристика имеет вид:

$$h(t) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right).$$

$$1) \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) = \gamma; \quad -\frac{\tau}{T} = \ln \gamma; \quad \tau = -T * \ln \gamma; \quad \tau_{u1} = T * \ln \frac{1}{\gamma};$$

$$2) \tau_{u2} = T \int_0^{\infty} \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) d\tau = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) d\tau = T = \tau_{u2};$$

$$3) \tau_{u3} = \tau_{u2} = T;$$

$$4) \tau_{u4} = T^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{T^2} \exp\left(-\frac{2\tau}{T}\right) d\tau = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2\tau}{T}\right) d\tau = \frac{T}{2} = \tau_{u4}.$$

1.1.2 Определение взаимосвязей между входными и выходными сигналами системы через ИПХ (Нахождение оператора системы).

Пусть входной и выходной сигналы связаны друг с другом соотношением:

$$Y(t) = L\{X(t)\}.$$

Представим сигнал  $X(t)$  в виде:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \delta(t - \tau) d\tau = X(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = \left. \begin{array}{l} u_6 = -\infty \\ du = -d\tau \\ u_n = \infty \end{array} \right| = \quad (1.7)$$

$$X(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) du = X(t).$$

Соотношение (1.7) определяет фильтрующее свойство – функции.

$$Y(t) = L\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} L\{X(\tau) \delta(t - \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) L\{\delta(t - \tau)\} d\tau.$$

Но  $L\{\delta(t)\}$  – не что иное, как импульсная переходная характеристика системы, следовательно,

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Независимая переменная всегда неотрицательна, и в качестве нижнего предела используется нуль, кроме того,  $t - \tau_0 \geq 0$ , так как реакция не может появиться раньше воздействия, то  $0 \leq \tau \leq t$ .

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t h(u)X(t - u)du = \int_0^t h(\tau)X(t - \tau)d\tau$$

$$\left| \begin{array}{l} t - \tau = u; \tau = t - u; d\tau = -du \\ u_s = 0; u_n = t \end{array} \right|.$$

Выходной сигнал связан с входным и ИПХ интегралом Дюамеля

$$Y(t) = \int_0^t h(t - \tau)X(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)X(t - \tau)d\tau. \quad (1.8)$$

$t$  – текущее время, прошедшее со времени подачи на вход сигнала.

В зависимости от того, на каком интервале времени необходимо рассматривать работу ЛДС, различают два режима работы:

- 1) переходной ( динамический) режим;
- 2) установившийся (статический) режим.

Переходной режим соответствует работе системы на участке, где ИПХ практически отлична от нуля.

Установившийся режим – это работа на участке, где ИПХ можно считать равной нулю:

- 1)  $0 \leq t \leq \tau_u$  - переходной режим;
- 2)  $t > \tau_u$  – установившийся режим.

В установившемся режиме выражение (1.8) принимает вид:

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau. \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Определение ИПХ по дифференциальному уравнению, связывающему входной и выходной сигналы системы

Пусть входной и выходной сигналы ЛДС связаны дифференциальным уравнением

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m x^m(t) + \dots + b_0 x(t),$$

где  $n \geq m$ .

Положим

$$X(t) = \delta(t), Y(t) = h(t) :$$

$$a_n h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 h(t) = b_m \delta^{(m)}(t) + \dots + b_0 \delta(t)$$

Найдем преобразование Фурье от левой и правой частей:

$$a_n L_\phi \{h^{(n)}(t)\} + \dots + a_1 L_\phi \{h^{(1)}(t)\} + a_0 L_\phi \{h(t)\} = b_m L_\phi \{\delta^{(m)}(t)\} + \dots + b_0 L_\phi \{\delta(t)\}.$$

Обозначим:

$$L_\phi \{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt = W(j\omega),$$

$$L_\phi \{h^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n W(j\omega),$$

$$L_\phi \{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1,$$

$$L_\phi \{\delta^{(k)}(t)\} = (j\omega)^k.$$

$$a_n (j\omega)^n W(j\omega) + \dots + a_0 W(j\omega) = b_m (j\omega)^m + \dots + b_0$$

$$W(j\omega) \{a_n (j\omega)^n + \dots + a_0\} = b_m (j\omega)^m + \dots + b_0$$

$$W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_0}.$$

(1.10)

Соотношение (1.10) определяет *частотную характеристику* системы, получить которую можно непосредственно из дифференциального уравнения, связывающего входной и выходной сигналы системы.

Импульсную переходную характеристику можно найти по имеющейся частотной с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (1.11)$$

*Пример 2.*

ЛДС описывается дифференциальным уравнением первого порядка

$$T \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = X(t),$$

найти ее ИПХ.

Импульсную переходную характеристику найдем по частотной:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}; \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{\exp\left(\frac{t}{T}\right)}{T}.$$

Проверяем:

$$W(j\omega) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \exp(-j\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{T} - j\omega t\right) dt = \frac{1}{T\left(\frac{1}{T} + j\omega\right)} = \frac{1}{j\omega T + 1}.$$

#### 1.1.4 Математическое описание ЛДС в частотной области

Полное описание линейной динамической системы в частотной области дает рассмотренная выше частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Воспользуемся подстановкой Эйлера:

$$\begin{aligned} \exp(-j\omega t) &= \cos \omega t - j \sin \omega t, \\ W(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \sin \omega t dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Первое из этих двух слагаемых представляет *вещественную*, а второе – *мнимую частотную* характеристики. Вещественная частотная характеристика (ВЧХ) представляет собой четную, а мнимая частота (МЧХ) – нечетную функцию частоты, то есть:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos \omega t dt, \\ \operatorname{Im} W(j\omega) &= \int_0^{\infty} h(t) \sin \omega t dt, \\ \operatorname{Re} W(j\omega) &= \operatorname{Re} W(-j\omega); \quad \operatorname{Im} W(j\omega) = -\operatorname{Im} W(-j\omega). \end{aligned}$$

Частотная характеристика системы  $W(j\omega)$  может быть записана и в показательной форме:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= |W(j\omega)| \exp(-j\psi(\omega)) \\ |W(j\omega)| &= \sqrt{\operatorname{Re}^2(j\omega) + \operatorname{Im}^2(j\omega)} \\ \psi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(j\omega)}{\operatorname{Re}(j\omega)}, \end{aligned}$$

где  $|W(j\omega)|$  – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), а  $\psi(\omega)$  – фазочастотная характеристика системы.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + x(t).$$

Подадим на ее вход гармонический сигнал

$$X(t) = A \exp(j\omega t) = A(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)),$$

на выходе будет наблюдаться сигнал  $Y(t) = \Phi(j\omega)A \exp(j\omega t)$  :

$$a_n (j\omega)^n \Phi(j\omega) A \exp(j\omega t) + \dots + \Phi(j\omega) A \exp(j\omega t) =$$

$$b_m (j\omega)^m A \exp(j\omega t) + \dots + A \exp(j\omega t)$$

$$y^{(k)}(t) = (j\omega)^k \Phi(j\omega) A \exp(j\omega t)$$

$$x^{(k)}(t) = (j\omega)^k A \exp(j\omega t),$$

тогда

$$a_n (j\omega)^n \Phi(j\omega) + \dots + \Phi(j\omega) = b_m (j\omega)^m + \dots + 1$$

$$\Phi(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + 1}{a_n (j\omega)^n + \dots + 1} = W(j\omega),$$

то есть, частотная характеристика ЛДС численно равна коэффициенту преобразования системы, если на ее вход подается гармонический сигнал:

$$X(t) = A \exp(j\omega t)$$

$$Y(t) = W(j\omega) A \exp(j\omega t) = \{ \operatorname{Re} W(j\omega) - j \operatorname{Im} W(j\omega) \} (A \cos \omega t + A j \sin \omega t) =$$

$$\operatorname{Re} W(j\omega) A \cos \omega t + \operatorname{Im} W(j\omega) A \sin \omega t - j \{ \operatorname{Re} W(j\omega) A \sin \omega t - \operatorname{Im} W(j\omega) A \cos \omega t \}.$$

Рассмотрим два случая:

$$a) X(t) = A \cos \omega t, Y(t) = \operatorname{Re} W(j\omega) A \cos \omega t + \operatorname{Im} W(j\omega) A \sin \omega t$$

то есть, вещественная частотная характеристика показывает, как преобразуется амплитуда входного сигнала в амплитуду выходного, синфазного с ним, а мнимая частотная характеристика показывает то же преобразование, но в амплитуду выходного сигнала, находящегося в квадратуре с выходным;

$$б) X(t) = A \sin \omega t, Y(t) = \operatorname{Re} W(j\omega) A \sin \omega t - j \operatorname{Im} W(j\omega) A \cos \omega t.$$

Если на ее вход подается произвольный гармонический сигнал

$$X(t) = A \sin(\omega t + \phi),$$

то на выходе появляется сигнал, описываемый соотношением

$$Y(t) = A|W(j\omega)|\sin[\omega t + \psi - \varphi(\omega)]. \quad (1.13)$$

То есть, амплитудно-частотная характеристика показывает, как преобразуется амплитуда входного сигнала в амплитуду выходного, а ФЧХ показывает, какой сдвиг осуществляется системой на частоте  $\omega$ .

Чтобы получить более ясное представление о частотных характеристиках обычных физических систем, следует рассмотреть некоторые простые примеры.

### *Механические системы*

В качестве примера простой механической конструкции рассмотрим систему с сосредоточенными параметрами, состоящую из массы, пружины и демпфера, причем движение груза совершается только в одном направлении (в соответствии с рисунком 4).

Здесь величина  $K$  - коэффициент жесткости пружины,  $C$  – коэффициент торможения,  $m$  – масса.

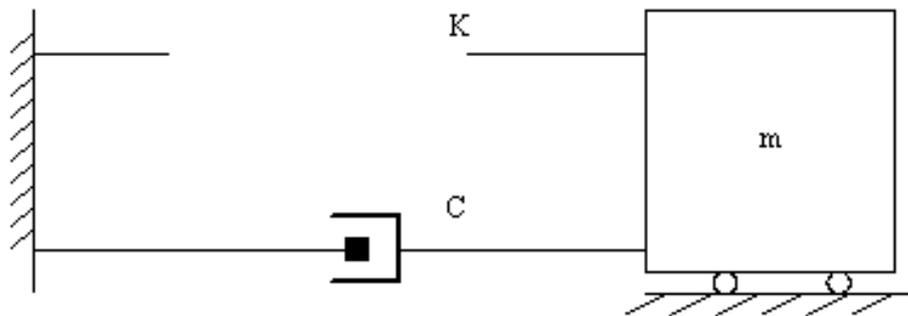


Рисунок 4 – Простая механическая система

Прежде чем перейти к нахождению частной характеристики, необходимо четко определить характер процессов на входе и выходе системы.

Зададим в качестве входного сигнала изменение силы, приложенной к массе, а в качестве выходного – смещение массы (в соответствии с рисунком 5).

Что бы определить частотную характеристику изучаемой системы, следует вначале вывести уравнения движения. Согласно одному из основных законов механики сумма всех сил, приложенных к массе, равна нулю, то есть

$$F(t) + F_k(t) + F_c(t) + F_m(t) = 0. \quad (1.14)$$

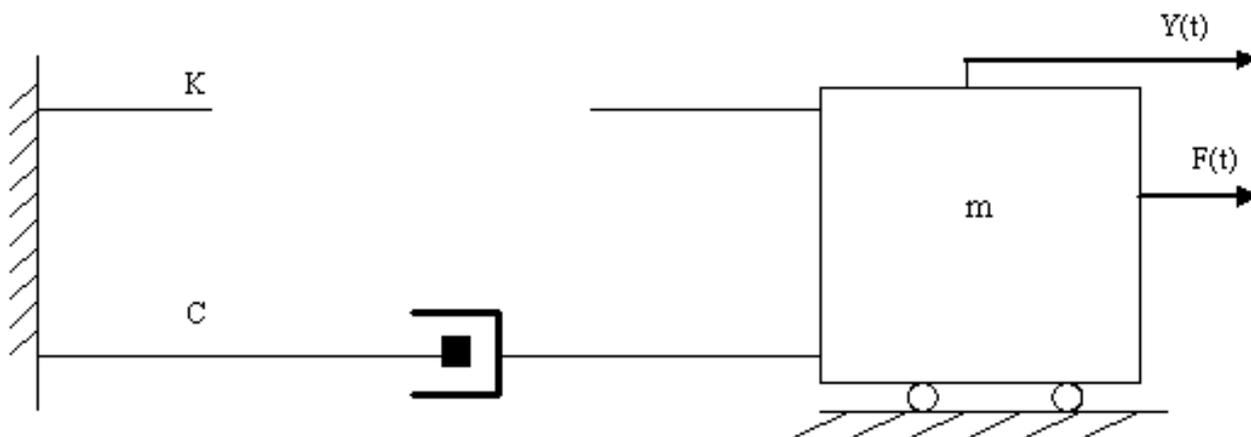


Рисунок 5 – Механическая система с вынуждающей силой на выходе

В формуле(1.14):

$$F_k(t) = -KY(t) \text{ – упругая сила,}$$

$$F_c(t) = -C\dot{Y}(t) \text{ – сила торможения,}$$

$$F_m(t) = -m\ddot{Y}(t) \text{ – сила инерции,}$$

$$\dot{Y}(t) = \frac{dY(t)}{dt} \text{ – скорость,}$$

$$\ddot{Y}(t) = \frac{d^2Y(t)}{dt^2} \text{ – ускорение.}$$

Следовательно, уравнение движения системы может быть записано в виде

$$m\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = F(t). \quad (1.15)$$

Выше говорилось, что частотная характеристика системы определяется как преобразование Фурье на  $\delta$  - функцию. В данном случае реакция системы – это смещение  $Y(t)$ , преобразование Фурье которого

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Y(t) \exp(j\omega t) dt = W(j\omega), \quad (1.16)$$

отсюда следует, что

$$\dot{Y}(j\omega) = j\omega W(j\omega),$$

$$\ddot{Y}(j\omega) = -\omega^2 W(j\omega),$$

Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей, получим

$$[-wm + jwC + K]W(jw) = 1,$$

$$W(jw) = \frac{1}{K - wm + jwC}. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) целесообразно переписать в другой форме, принимая обозначения

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{Km}}, \quad (1.18)$$

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}. \quad (1.19)$$

Величина  $\xi$  в формуле (1.18) безразмерна и называется коэффициентом *затухания*. Величина  $w$  в формуле (1.19) называется *собственной частотой незатухающих колебаний*. С учетом этих обозначений формулы (1.17) переписется в виде

$$W(jw) = \frac{1/K}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 + j2\xi \frac{w}{w_n}}. \quad (1.20)$$

Записав соотношение (1.20) в показательной форме, можно представить частотную характеристику  $W(jw)$  как функцию амплитудной и фазовой частотных характеристик, как это уже описывалось выше:

$$W(jw) = |W(jw)| \exp(\phi(jw)), \quad (1.21)$$

где

$$|W(jw)| = \frac{1/K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{w}{w_n}\right]^2}}, \quad (1.22)$$

$$\phi(w) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{2\xi w/w_n}{1 - (w/w_n)^2} \right]. \quad (1.23)$$

### Электрические системы

Предположим, что простая электрическая цепь может быть представлена системой с сосредоточенными параметрами, состоящей из

индуктивности, сопротивления и емкости. Пусть процесс на выходе системы – это разность потенциалов (в соответствии с рисунком 6).

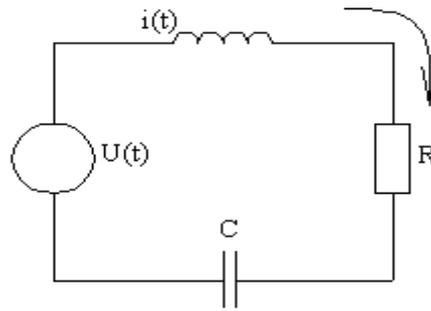


Рисунок 6 – Электрическая схема с колебаниями напряжения на входе

На рисунке 6: R – сопротивление, C – емкость, L – индуктивность, U(t) – приложенное напряжение, i(t) – результирующий процесс – сила тока. Напомним, что  $i(t) = dq/dt$ , где q(t) – заряд.

Для того чтобы найти соответствующую характеристику, необходимо сначала получить дифференциальное уравнение, описывающее данную систему. По закону Кирхгофа сумма всех падений напряжения в элементах цепи равна нулю:

$$U(t) + U_C(t) + U_R(t) + U_L(t) = 0, \quad (1.24)$$

где

$$U_C(t) = -\frac{1}{C} * q(t) \text{ - падение напряжения на емкости,}$$

$$U_R(t) = -R * \dot{q}(t) \text{ - падение напряжения на сопротивлении,}$$

$$U_L(t) = -L * \ddot{q}(t) \text{ - падение напряжения на индуктивности.}$$

Отсюда находим дифференциальное уравнение, описывающее систему:

$$L * \ddot{q}(t) + R * \dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = U(t). \quad (1.25)$$

Между этим уравнением и уравнением, описывающим механическую систему (1.15) существует аналогия. Поэтому, используя приведенную выше методику, сразу получим частотную характеристику данной системы:

$$W(jw) = \left[ \frac{1}{C} - w^2 L + jwR \right]^{-1}. \quad (1.26)$$

Величина  $W(jw)$  имеет размерность кулон/вольт. Индекс обозначает, что ЧХ связывает напряжение на входе с зарядом на выходе.

Коэффициент затухания и собственная частота w незатухающих колебаний определяется равенствами

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{w^* L}}.$$

Чаще используется частотные характеристики, связывающие напряжение как входной процесс с силой тока на выходе:

$$W(jw) = \frac{1}{R + jwL - 1/jwC}. \quad (1.27)$$

где  $W(jw)$  имеет размерность ампер/вольт. Функция, обратная величине (1.27), которую можно обозначить  $W_{i-u}(jw)$ , называется *импедансом*:

$$W_{i-u} = R + jwL - 1/jwC. \quad (1.28)$$

### Полоса пропускания ЛДС и способы ее определения

Область частот, внутри которой АЧХ системы почти неизменна и близка к своему максимальному значению, называется *полосой пропускания* системы (в соответствии с рисунком 7а).

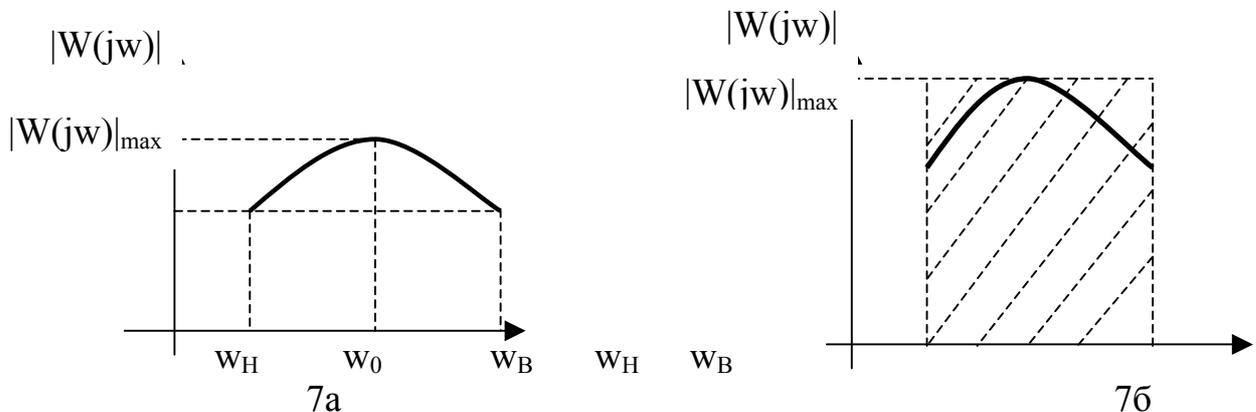


Рисунок 7 – К вопросу об определении полосы пропускания ЛДС

$w_0$  – основная частота системы, при которой АЧХ принимает наибольшее значение. Ширина полосы пропускания:

$$\Delta w_C = w_B - w_H.$$

Один из способов получения полосы пропускания сводится к тому, что находится основная частота  $w_0$  и проводится линия, параллельная оси частот

на расстоянии, достаточно малом от  $|W(j\omega)|_{\max}$ .  $\omega_g, \omega_H$  - абсциссы точек пересечения этой прямой с кривой АЧХ (в соответствии с рисунком 7а).

$$\begin{aligned} |W(j\omega)|_{\max} - \delta &= |W(j\omega)|, \\ 1 - \frac{\delta}{|W(j\omega)|_{\max}} &= \frac{|W(j\omega)|}{|W(j\omega)|_{\max}} = 1 - \gamma. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Второе слагаемое в левой части (1.29) обычно называют амплитудно-частотной погрешностью, а ее величину принимают равной 5 %.

По второму способу на оси частот как на основании строится прямоугольник (в соответствии с рисунком 7б), имеющий высоту, равную максимальному значению АЧХ и площадь, равную площади фигуры, ограниченной кривой АЧХ. Величина основания принимается равной ширине полосы пропускания:

$$\Delta\omega_{C1} = \frac{\int_0^{\infty} |W(j\omega)| d\omega}{|W(j\omega)|_{\max}}, \quad (1.30)$$

или, так как интеграл в правой части выражения (1.30) часто расходится, для определения ширины полосы пропускания используется следующее соотношение:

$$\Delta\omega_{C2} = \frac{\int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{|W(j\omega)|_{\max}^2}. \quad (1.31)$$

В зависимости от того, в каком соотношении находится между собой  $\Delta\omega_C$  и основная частота  $\omega_0$ , различают два класса системы:

- 1) широкополосные, у которых ширина полосы пропускания на много превышает значение основной частоты;
- 2) узкополосные, у которых  $\omega_0 \gg \Delta\omega_C$ .

*Пример 3.*

ЛДС описывает дифференциальным уравнением:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t),$$

ее частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1 - j\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2},$$

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

Определим верхнюю граничную частоту  $\omega_g$  :

$$1) 1 - \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad 1 + \omega^2 T^2 = \frac{1}{(1 - \gamma)^2}, \quad \omega_g = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{1}{(1 - \gamma)^2} - 1};$$

$$2) \Delta\omega_{C1} = \frac{\int_0^\infty |W(j\omega)| d\omega}{|W(j\omega)|_{\max}} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} - \text{расходится};$$

$$3) \Delta\omega_{C2} = \frac{\int_0^\infty |W(j\omega)|^2 d\omega}{|W(j\omega)|_{\max}^2} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \omega T = \operatorname{tg}(\phi)$$

$$\omega = \frac{1}{T} \operatorname{tg}(\phi)$$

$$d\omega = \frac{1}{T} * \frac{d\phi}{\cos^2(\phi)}$$

$$\Delta\omega_{C2} = \frac{1}{T} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \phi) \cos^2(\phi)} = \frac{1}{T} \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{1}{T} * \frac{\pi}{2} = \omega_g.$$

Обобщим:

$$\Delta\omega_C = C_1 * \frac{1}{T}. \quad (1.32)$$

Для той же системы  $\tau_u = C_2 * T$  :

$$\tau_u * \Delta\omega_C = \text{const.}$$

То есть, произведение ширины полосы пропускания ЛДС на длительность импульсной переходной характеристики есть величина постоянная, которая зависит от способа задания этих характеристик.

## 1.2 Математическое описание процессов (сигналов)

### 1.2.1 Основные характеристики процессов и их классификация

*Процессом* или *сигналом* называется любая функция времени. Все наблюдаемые процессы в самом общем виде можно классифицировать как

детерминированные и случайные. К детерминированным относятся процессы, которые можно описать точными математическими соотношениями. Рассмотрим, например, твердое тело, подвешенное на упругой пружине к неподвижной основе. Пусть  $m$  – масса тела (оно определяется абсолютно жестким), а  $k$  – коэффициент жесткости пружины.

Масса пружины полагается равной нулю. Предположим, что тело получает начальное смещение  $X$  из положения равновесия и освобождается в момент времени  $t=0$ . На основании законов механики можно указать соотношение:

$$x(t) = X \cos \sqrt{\frac{k}{m}} * t, t \geq 0, \quad (1.33)$$

которое точно описывает положение тела в любой момент времени в будущем. Следовательно, физический процесс, характеризующий положение тела, является детерминированным.

На практике встречается немало физических явлений, которые с высокой степенью точности могут быть описаны точными математическими соотношениями. Однако, можно назвать множество и других физических процессов, имеющих недетерминированный, случайный характер. Например, изменение высоты волн на поверхности моря, изменение напряжения на выходе у генератора, помехи в канале связи – все это процессы, которые не могут быть описаны точными математическими соотношениями. Точное значение такого процесса в некоторый момент времени в будущем предсказать невозможно. Эти процессы случайны по своей природе и должны описываться не точными уравнениями, а при помощи усредненных статических характеристик.

### *Классификация детерминированных процессов*

Процессы, описывающие детерминированные явления, могут быть периодическими и непериодическими. В свою очередь периодические процессы можно разделить на гармонические и полигармонические. К непериодическим относятся процессы, удовлетворяющие условию абсолютной интегрируемости и не удовлетворяющие этому условию. Кроме перечисленных типов процессов на практике могут встречаться и любые их комбинации.

#### 1.2.2 Математическое описание детерминированных сигналов

##### *Гармонические процессы*

Гармоническими называются периодические процессы, которые могут быть описаны функцией времени:

$$x(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \Theta), \quad (1.34)$$

где

$X$  - амплитуда;

$f_0$  - циклическая частота, измеряемая в циклах на единицу времени;

$\Theta$  - начальная фаза, измеряемая в радианах;

$x(t)$  - значение функции в момент  $t$ .

Описание формулой (1.34) гармоническая функция времени называется обычно гармоническим колебанием. На практике при анализе гармонического процесса начальной фазой часто пренебрегают. Тогда имеем:

$$x(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \Theta), \quad (1.35)$$

Соотношение (1.35) можно представить графически в виде функции времени или в амплитудно-частотном изображении, как это показано на рисунке 8.

Интервал времени, в течение которого происходит одно полное колебание, называется периодом  $T$ . Число циклов в единицу времени называется частотой  $f$ . Частота и период связаны соотношением:

$$T_0 = \frac{1}{f_0}. \quad (1.36)$$

Отметим, что представленный на рисунке 8 частотный спектр состоит только из одной составляющей амплитуды на данной частоте. Такой спектр называется *дискретным* или *линейчатым*. Примерами гармонических процессов являются колебания напряжения на выходе идеального генератора переменного тока, вибрации несбалансированного ротора и пр.

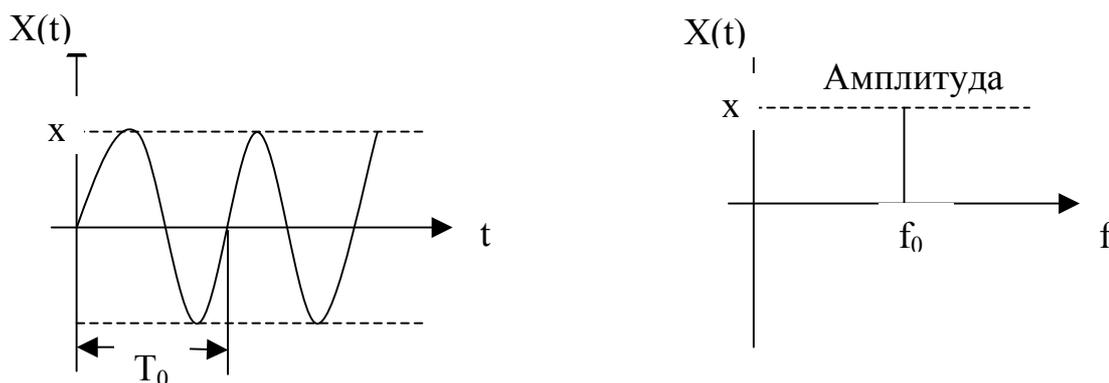


Рисунок 8 – Гармонический сигнал и его спектр

## Полигармонические процессы

К полигармоническим относятся такие типы периодических сигналов, которые могут быть описаны функцией времени, точно повторяющей свои значения через одинаковые интервалы:

$$x(t) = x(t + nT), n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.37)$$

Как и в случае гармонического процесса, интервал времени, в течении которого происходит одно полное колебание, называется *периодом*  $T$ . Число циклов в единицу времени называют *основной частотой*  $f$ . Очевидно, что гармонический процесс является частным случаем полигармонического при совпадении основной частоты последнего с частотой гармонического сигнала. Как правило, полигармонические процессы могут быть представлены формулой Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi nft) + b_n \sin(2\pi nft)),$$

где:

$$f = \frac{1}{T}; a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi nft) dt, n = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.38)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi nft) dt, n = 0, 1, 2, \dots$$

Возможен и другой способ записи ряда Фурье для полигармонического процесса:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi nft - \Theta_n), \quad (1.39)$$

где:

$$X_0 = \frac{a_0}{2}; X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\Theta = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right), n = 1, 2, 3, \dots$$

Как видно из формулы (1.39), полигармонические процессы состоят из постоянной компоненты  $X_0$  и бесконечного числа синусоидальных компонент, называемых гармониками, с амплитудами  $X_n$  и начальными фазами. Частоты всех гармоник кратны основной частоте  $f$ .

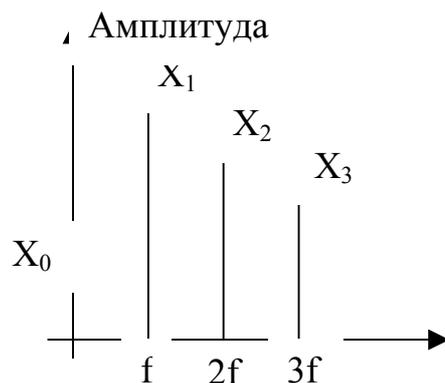


Рисунок 9 – Спектр полигармонического процесса

На практике при анализе периодических процессов начальные фазы часто принимаются во внимание. В этом случае формуле (1.39) соответствует дискретный спектр, изображенный на рисунке 9. Иногда полигармонические процессы состоят всего из одной частотной составляющей, а остальные могут отсутствовать.

Центрированным называется сигнал, лишенный постоянной составляющей

$$\overset{0}{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(kwt) + b_k \cos(kwt)) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kwt + \phi_k). \quad (1.40)$$

Полная энергия сигнала описывается соотношением

$$A = \int_0^T \overset{0}{X}^2(t) dt, \\ A = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2(kwt + \phi_n) dt = \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad (1.41)$$

то есть энергия сигнала пропорциональная сумме квадратов амплитуд бесконечного ряда гармоник.

Часто в качестве модели сигнала используется усеченный ряд Фурье

$$\overset{0}{X}_m(t) = \sum_{k=1}^N (a_k \sin(kwt) + b_k \cos(kwt)), \quad (1.42)$$

причем N определяется в предложении, что энергия модели составляет 95 % энергии самого сигнала, что эквивалентно отысканию верхней граничной частоты и, следовательно, нахождению частного диапазона сигнала.

Физические явления, которыми соответствует полигармонические процессы, встречаются гораздо чаще явлений, описываемых простой гармонической функцией. В действительности, когда тот или иной процесс относят к типу гармонических, то зачастую при этом имеют в виду только приближенное представление процесса, который на самом деле является

полигармоническим. Например, при тщательном исследовании колебаний напряжения на выходе генератора переменного тока можно обнаружить гармоники высших порядков.

### Математическое описание непериодических сигналов

Как уже говорилось выше, все непериодические сигналы условно можно подразделить на два класса:

1) сигналы, удовлетворяющие условию абсолютной интегрируемости

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty ;$$

2) сигналы, не удовлетворяющие этому условию. Вторые из них можно рассматривать и как процессы, которые формируются суммированием двух или более волн с произвольными частотами. Эти процессы обладают свойством

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt = \infty .$$

Как видим, интегрирование по времени здесь производится в пределах  $0 \leq t < \infty$ .

На практике же мы всегда ограничены некоторым конечным временем, то есть  $0 \leq t < t_u$ . Но чаще приходится давать описание сигналов на участке времени, значительно превосходящем время измерения  $t_u \ll T$ . Сигнал  $x(t)$  также может быть представлен в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \sin(kwt) + b_k \cos(kwt))$$

Такие процессы так же обладают линейчатым спектром (в соответствии с рисунком 10), однако, в этом случае спектр не носит убывающего характера.

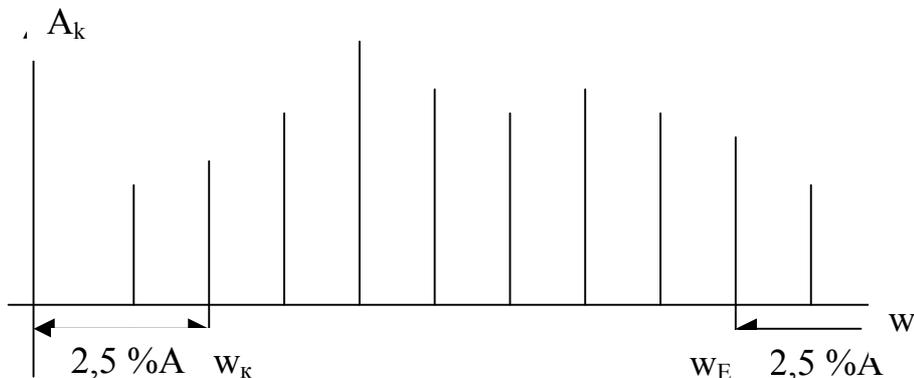


Рисунок 10 – Спектр непериодического сигнала, не удовлетворяющего условию абсолютной интегрируемости.

Модель центрированного сигнала строим точно так же, как и в случае полигармонического процесса:

$$X_m^0(t) = \sum_{k=m}^N A_k \sin(k\omega t + \phi_k). \quad (1,43)$$

Однако здесь частота  $\omega$  имеет совершенно другой смысл, так как  $T$  в данном случае не есть период сигнала, а лишь интервал наблюдения. Энергия модели так же принимается равной 95 % энергии сигнала. Нижняя и верхняя границы частотного диапазона определяется отсечением 5 % энергии, как это показано на рисунке 10.

$$A_m = 0,95A; \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{m-1} A_k^2 = 0,025A; \frac{T}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k^2 = 0,025A. \quad (1,44)$$

или

$$\frac{T}{2} \sum_{k=1}^N A_k^2 = 0,975A; \omega_n = m\omega; \omega_g = N\omega.$$

Обратимся теперь к вопросам математического описания детерминированных процессов, удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

Для описания таких сигналов используется прямое и обратное преобразование Фурье, то есть сигналы этого типа обладают не линейчатым, а непрерывным, гладким спектром:

$$\begin{aligned} x(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt; \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (1,45)$$

Фурье-образ сигнала  $x(t)$  – его спектр или частотная характеристика  $x(j\omega)$ . Для удобства частотную характеристику представляет в нескольких формах:

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt. \quad (1,46)$$

$\text{Re } X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$  - вещественная частотная характеристика, четная функция частоты;

$$\operatorname{Im} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt \quad - \text{ мнимая частотная характеристика,}$$

нечетная функция частоты.

$$X(j\omega) = \operatorname{Re} X(j\omega) - j \operatorname{Im} X(j\omega) = \exp \left[ -j \operatorname{arctd} \frac{\operatorname{Im} X(j\omega)}{\operatorname{Re} X(j\omega)} \right] * \sqrt{\operatorname{Re}^2 X(j\omega) + \operatorname{Im}^2 X(j\omega)},$$

$$\operatorname{arctd} \frac{\operatorname{Im} X(j\omega)}{\operatorname{Re} X(j\omega)} \quad - \text{ фазо-частотная характеристика;}$$

$$\sqrt{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2} \quad - \text{ амплитудно-частотная характеристика.}$$

Амплитудно-частотная характеристика может быть найдена без предварительного определения вещественной и мнимой частотных характеристик:

$$|x(j\omega)| = \sqrt{|x(j\omega)|^2} = \sqrt{x(j\omega)x(-j\omega)}.$$

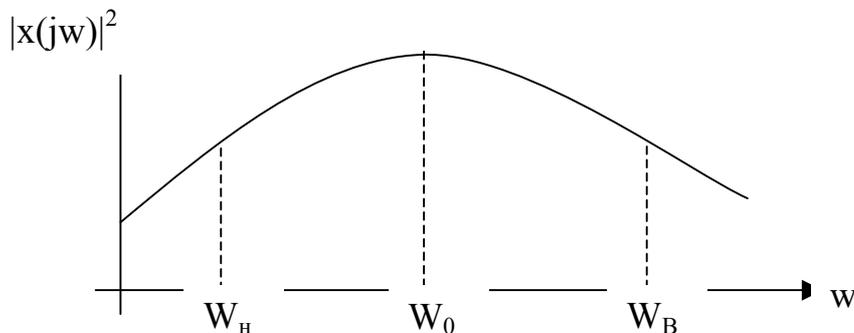


Рисунок 11 – Амплитудно-частотная характеристика детерминированного сигнала.

На рисунке 11 изображена АЧХ сигнала рассматриваемого типа. То значение частоты, при котором АЧХ имеет максимум, называется основной частотой сигнала. Диапазон частот, в котором амплитудно-частотный спектр имеет значения, сигнала. Его границы –  $\omega_n, \omega_g$ .  $\Delta\omega = \omega_g - \omega_n$  – ширина спектра сигнала.

Существует несколько способов определения частотного диапазона. Рассмотрим эти способы.

Основным являются энергетический подход к определению частотного диапазона. Вычислим энергию сигнала в предположении, что время изменяется в бесконечных пределах.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt .$$

Перепишем выражение для энергии:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(jw)e^{jw t} dw \right\} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{jw t} dt \right\} dw,$$

но выражение в скобках равно  $X(-jw)$ , тогда:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(jw)|^2 dw,$$

то есть энергия сигнала зависит только от амплитудно-частотного спектра и не зависит от фазо- частотного спектра. Вклад в энергию дают все частоты. Соотношение:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(jw)|^2 dw \quad (1.47)$$

называют равенство Парсеваля. Под частотным диапазоном сигнала понимают полосу частот, в которой сосредоточено 95 % всего сигнала (в соответствии с рисунком 12).

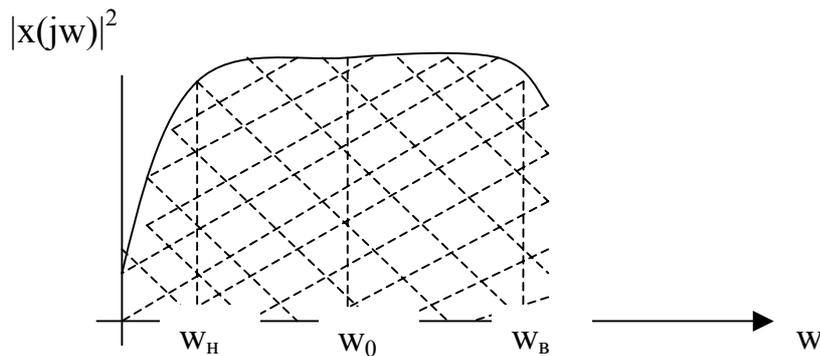


Рисунок 12 – Определение частотного диапазона по энергетическому критерию

Запишем уравнения для определения границ частотного диапазона:

$$\int_{w_H}^{w_B} |x(jw)|^2 dw = 0,95 \int_0^{\infty} |x(jw)|^2 dw. \quad (1.48)$$

Отсюда находим верхнюю и нижнюю границы полосы частот. Однако, уравнение одно, а неизвестных два. Поэтому логично воспользоваться следующим подходом:

$$\begin{cases} \int_0^{w_H} |x(jw)|^2 dw = 0,025 \int_0^{\infty} |x(jw)|^2 dw \\ \int_{w_B}^{\infty} |x(jw)|^2 dw = 0,025 \int_0^{\infty} |x(jw)|^2 dw \end{cases} \quad (1.49)$$

Оба эти уравнения имеют единственное решение. Далее можно найти ширину полосы частот  $\Delta\omega = \omega_B - \omega_H$ . Или, при известной основной частоте сигнала, можно предположить, что частотный диапазон симметричен относительно основной частоты  $\omega_0$ :

$$\begin{cases} \omega_H = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \\ \omega_B = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases} \quad (1.50)$$

Полученные значения верхней и нижней граничных частот подставляем в равенство Парсеваля:

$$\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} |x(j\omega)|^2 d\omega = 0.95 \int_0^{\infty} |x(j\omega)|^2 d\omega. \quad (1.51)$$

При известной основной частоте это уравнение с одним неизвестным и единственным решением.

Рассмотрим теперь некоторые другие подходы к определению частотного диапазона. Согласно первого из них, называемому метрологическим (в соответствии с рисунком 13), под полосой частот понимают координаты пересечения АЧС с некоторой прямой, проведенной параллельно оси частот.

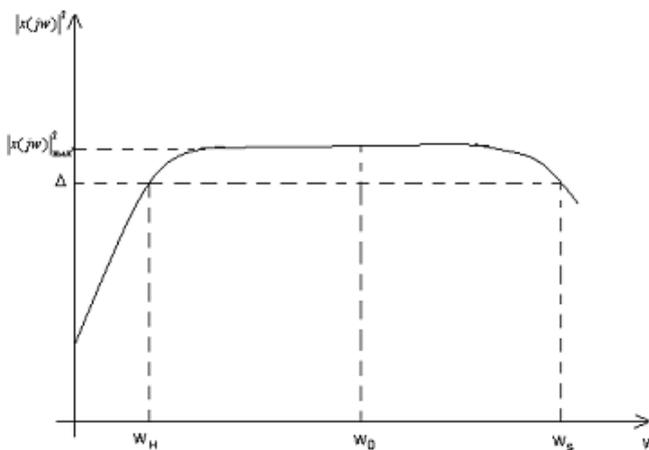


Рисунок 13 - Метрологический подход к определению частотного диапазона

$$|x(j\omega)|^2 = |x(j\omega)|_{\max}^2 - \Delta \approx |x(j\omega)|_{\max}^2, \quad (1.52)$$

$$\frac{|x(j\omega)|^2}{|x(j\omega)|_{\max}^2} = 1 - \frac{\Delta}{|x(j\omega)|_{\max}^2} = 1 - \gamma. \quad (1.53)$$

Часто выбирают  $\gamma=0.05$ , а вообще  $\gamma$  назначают исходя из конкретных технических условий, например, в радиотехнике принято считать  $\gamma=0.5$ .

Следующий и последний подход позволяет определить ширину спектра по формуле:

$$\Delta\omega_c = \frac{\int_0^\infty |x(j\omega)|^2 d\omega}{|x(j\omega)|_{\max}^2}. \quad (1.54)$$

Нижняя и верхняя границы частотного диапазона определяются в предположении их симметричности относительно  $\omega_o$ :

$$\begin{cases} \omega_n = \omega_o - \frac{\Delta\omega}{2} \\ \omega_s = \omega_o + \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases}$$

На практике все сигналы подразделяются на две группы: широкополосные и узкополосные. К узкополосным относятся сигналы, ширина спектра которых значительно меньше основной частоты:

$$\Delta\omega_c \ll \omega_o.$$

Широкополосные – это такие сигналы, у которых частотный диапазон значительно превышает основную частоту:

$$\Delta\omega_c \gg \omega_o.$$

#### *Обобщенный подход к описанию детерминированных сигналов*

В качестве модели обобщенной модели любого детерминированного сигнала можно предположить модель следующего вида:

$$x_m(t) = \sum_k^N \lambda_k \varphi_k(t), \quad (1.55)$$

где:

$\varphi_k(t)$  – координатные (базисные функции);

$\lambda_k$  – параметры модели сигнала или коэффициенты разложения сигнала, то есть всегда существует разница

$$x_m(t) - x(t).$$

Станем рассматривать сигнал на  $0 \leq t \leq T$  отрезке, а в качестве критерия адекватности модели возьмем величину  $\Delta = \int_0^T \{x_m(t) - x(t)\}^2 dt$  – квадратичную погрешность или взвешенную квадратичную погрешность

$$\delta = \int_0^T \{x_m(t) - x(t)\}^2 p(t) dt, \quad (1.56)$$

$p(t)$  – весовая функция, выбираемая из технических условий и вводимая для того, чтобы на данном временном отрезке обеспечить наилучшую адекватность модели.

$$\delta = \int_0^T x_m^2(t) p(t) dt - 2 \int_0^T x_m(t) p(t) dt + \int_0^T x^2(t) p(t) dt.$$

Рассмотрим  $\delta$  как функцию параметров модели  $\lambda$ :  $\delta > 0$ ,  $\delta$  – квадратичная форма и поэтому имеет единственный экстремум.

Условия экстремума функции нескольких переменных:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \lambda_m} = 0, \quad (m = \overline{0, N})$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \lambda_m} = 2 \int_0^T x_m(t) \frac{\partial x_m(t)}{\partial \lambda_m} p(t) dt - 2 \int_0^T \frac{\partial x_m(t)}{\partial \lambda_m} x(t) p(t) dt = 0$$

$$\frac{\partial x_m(t)}{\partial \lambda_m} = \varphi_m(t), \quad \int_0^T x_m(t) \frac{\partial x_m(t)}{\partial \lambda_m} p(t) dt = \int_0^T \frac{\partial x_m(t)}{\partial \lambda_m} x(t) p(t) dt.$$

Однако, подставляем в наше выражение:

$$2 \int_0^T x_m(t) \varphi_m(t) p(t) dt = 2 \int_0^T \varphi_m(t) x(t) p(t) dt,$$

и подставляем это в выражение для модели

$$x_m(t) = \sum_{k=0}^N \lambda_k \varphi_k(t)$$

$$\sum_{k=0}^N \lambda_k 2 \int_0^T \{ \varphi_k(t) \varphi_m(t) p(t) dt \} - 2 \int_0^T \varphi_m(t) x(t) p(t) dt = 0. \quad (1.57)$$

То есть, чтобы отыскать параметры  $\lambda_k$ , необходимо решить систему  $(N+1)$  уравнений с  $(N+1)$  неизвестными, что достаточно неудобно. Но существует и другой путь.

Если выполняется условие ортогональности базисных функций,

$$\int_0^T \varphi_k(t) \varphi_m(t) p(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \varphi_k(t) \varphi_m(t) p(t) dt = \beta_m, & k = m \end{cases}$$

то наше выражение примет вид:

$$\lambda_m \int_0^T \varphi_m^2(t) p(t) dt - \int_0^T \varphi_m(t) x(t) p(t) dt = 0,$$

$$\lambda_m \beta_m - \int_0^T \varphi_m(t)x(t)p(t)dt = 0.$$

Таким образом, система уравнений сводится к совокупности (N+1) уравнений, каждое из которых имеет единственное неизвестное, которое может быть найдено:

$$\lambda_m = \frac{1}{\beta} \int_0^T \varphi_m(t)x(t)p(t)dt . \quad (1.58)$$

### 1.2.3 Математическое описание случайных процессов

#### Классификация случайных процессов

Как говорилось ранее, процессы, соответствующие случайным физическим явлениям, нельзя описать точными математическими соотношениями, поскольку результат каждого наблюдения над процессом не воспроизводим. То есть, исход любого наблюдения представляет собой лишь один из многих возможных результатов. Рассмотрим, изменение напряжения на выходе генератора некоторого шума.

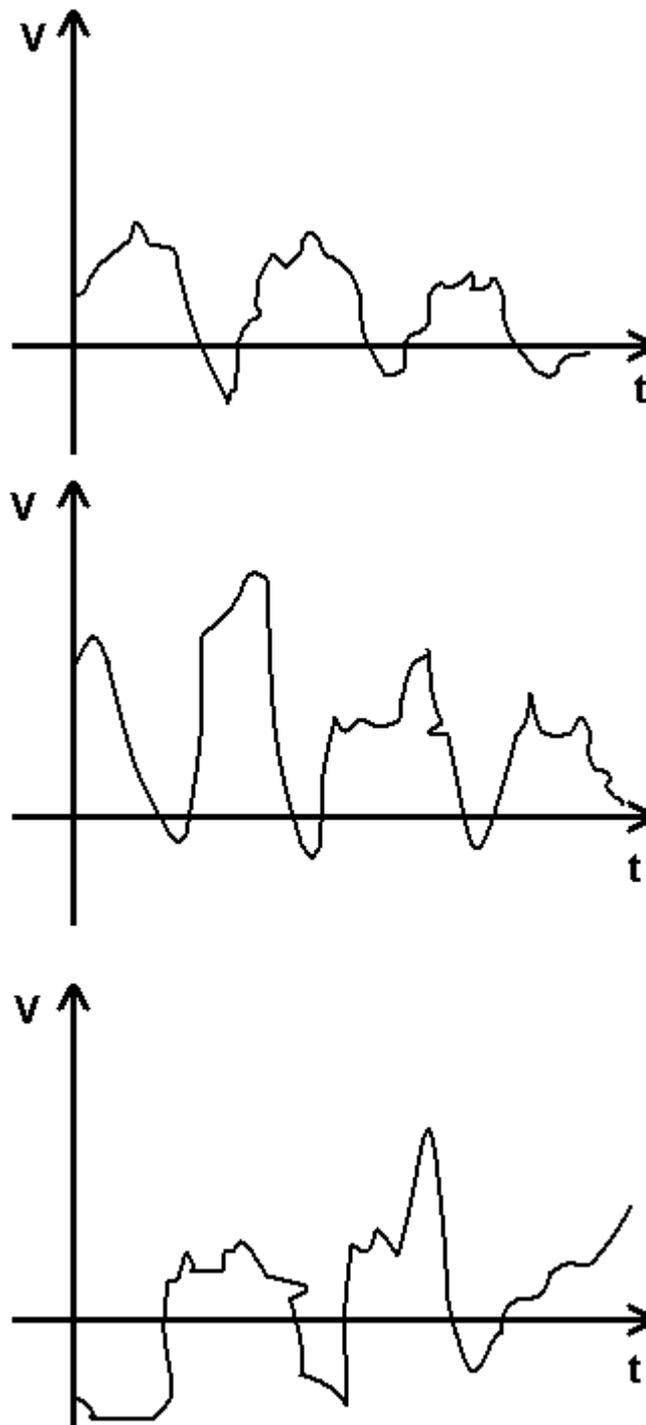


Рисунок 14 - Реализация на выходе генератора шума

Как видно из рисунка 14, записи выходного напряжения генератора от реализации к реализации меняются. Кроме того, напряжение на выходе второго такого же генератора будет изменяться совершенно другим образом, чем у первого.

Функция времени, описывающая случайное явление, называется выборочной функцией или реализацией.

Множество всех реализаций, которые могут быть получены при регистрации данного случайного явления, называется случайным или стохастическим процессом. То есть реализация, полученная в результате наблюдений над случайным физическим явлением, представляет собой элемент множества возможных физических реализаций случайного процесса.

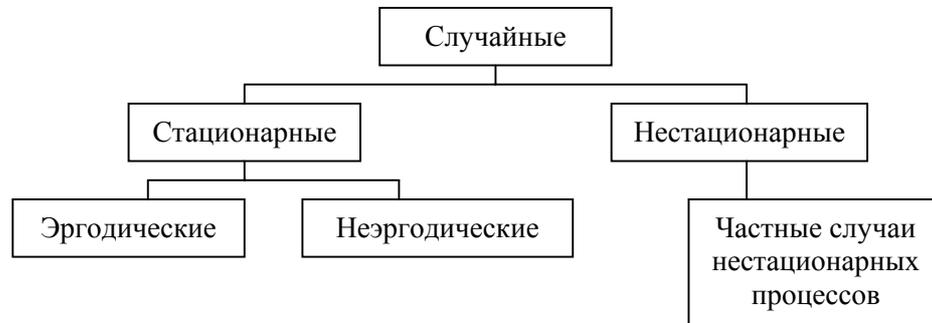


Рисунок 15 - Классификация случайных процессов

Различают стационарные и нестационарные случайные процессы. В свою очередь стационарные процессы могут быть эргодическими и неэргодическими. Для нестационарных существует специальная классификация нестационарности. Классификация случайных процессов и связь между различными их классами показана на рисунке 15.

Обсудим теперь общие черты и физический смысл указанных категорий процессов.

### Стационарные случайные процессы

Физическое явление при рассмотрении с позиций теории случайных процессов (сигналов) можно описать в любой момент времени осреднением по ансамблю реализации, представляющих данный случайный процесс. Рассмотрим ансамбль выборочных функций, образующий случайный процесс (рисунок 16). *Математическое ожидание или среднее значение* (первый начальный момент распределения) процесса в момент времени  $t$  может быть найдено путем суммирования мгновенных значений каждой реализации ансамбля в момент времени  $t$  деления этой суммы на число реализаций. Аналогичным образом корреляция между значениями случайного процесса в два различных момента времени (второй смешанный центральный момент, который называют *автокорреляционной функцией*) определяется путем осреднения по ансамблю произведений мгновенных значений центрированного процесса  $\overset{0}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$  в моменты времени  $t$  и  $t + \tau$ . То есть, математическое ожидание  $m_x(t)$  и автокорреляционная функция  $R_x(t, t + \tau)$  процесса  $\{X(t)\}$  (фигурные скобки означают ансамбль реализаций) определяются из соотношений

$$m_x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(t), \quad (1.59)$$

$$R_x(t, t + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k^0(t) X_k^0(t + \tau),$$

причем при суммировании предполагается, что появление всех реализаций равновероятно. В общем случае, когда функции  $m_x(t)$  и  $R_x(t, t + \tau)$  меняются с изменением момента времени  $t$ , случайный процесс  $\{X(t)\}$  называется *нестационарным*. В частном случае независимости  $m_x(t)$  и  $R_x(t, t + \tau)$  от  $t$ , случайный процесс  $\{X(t)\}$  называется *стационарным в широком смысле*. Математическое ожидание такого процесса постоянно, а автокорреляционная функция представляет собой функцию единственной переменной – временного сдвига между сечениями процесса, то есть  $m_x(t) = m_x$ ,  $R_x(t, t + \tau) = R_x$ .

Для случайного процесса  $\{X(t)\}$  можно отыскать бесконечное множество начальных и центральных (в том числе и смешанных) моментов; их совокупность полностью описывает плотность распределения процесса. Когда все начальные и центральные моменты не зависят от времени, процесс называют *стационарным в узком смысле* (более точное определение такого типа стационарности будет приведено ниже).

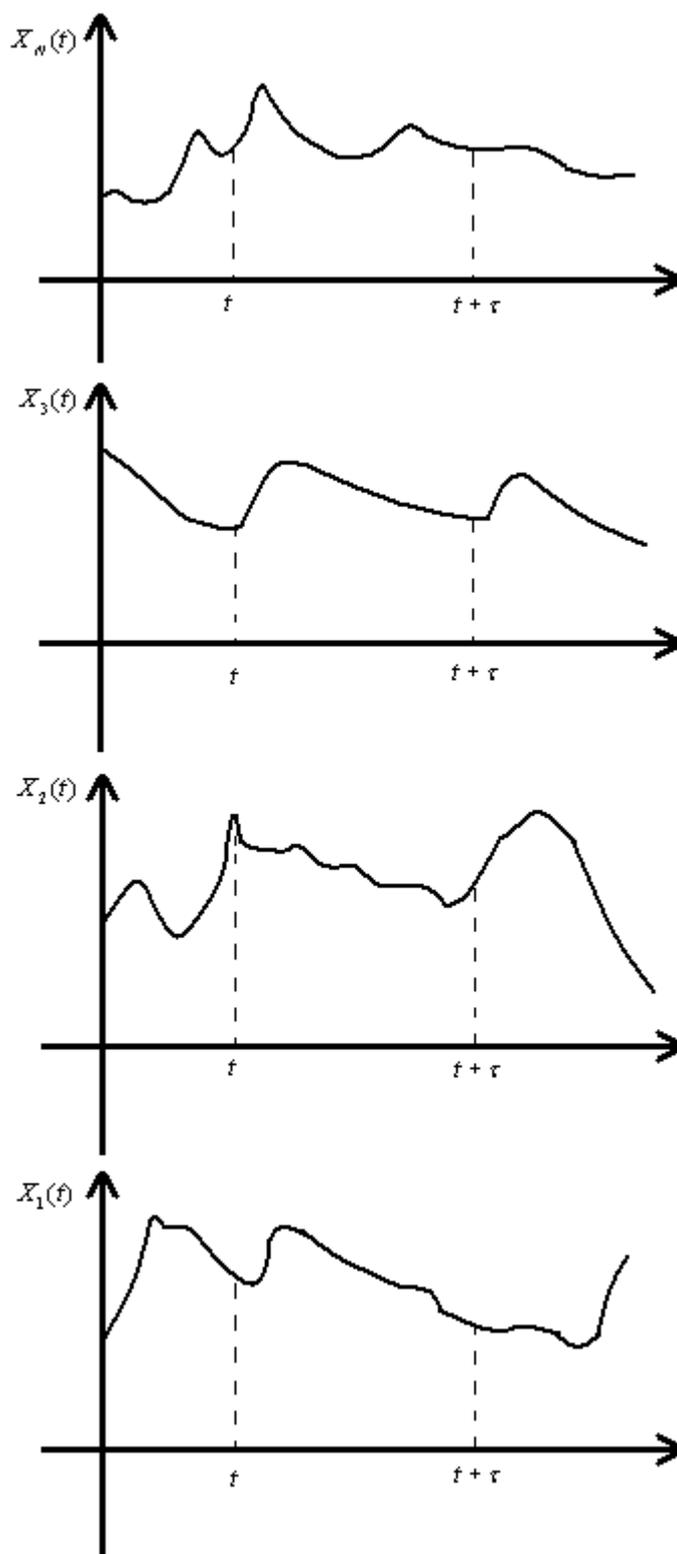


Рисунок 16 - Ансамбль реализаций, образующих случайный процесс

Любой процесс, стационарный в узком смысле, является стационарными и в широком, но не наоборот.

## *Эргодические случайные процессы*

Выше был рассмотрен вопрос об определении свойств случайного процесса путем осреднения по ансамблю в отдельные моменты времени. Однако, во многих случаях представляется возможным описать свойства стационарного случайного процесса путем осреднения по времени отдельных достаточно продолжительных реализаций ансамбля. Рассмотрим, например,  $K$ -ю выборочную функцию случайного процесса, изображенного на рисунке. Математическое ожидание  $m_x(t)$  и автокорреляционная функция этой реализации  $R_x(\tau, k)$  определяется выражениями

$$M_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_k(t) dt, \quad (1.60)$$

$$R_x(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_k(t) X_k(t + \tau) dt.$$

Если случайный процесс  $\{X(t)\}$  стационарен и  $m_x(t)$  и  $R_x(\tau, k)$ , определенные формулами (1.60), одинаковы для всех реализаций, то случайный процесс  $\{X(t)\}$  называется *эргодическим*. Для эргодического случайного процесса среднее значение и автокорреляционная функция (а также другие моменты, определяемые осреднением по времени) равны соответствующим средним по ансамблю:  $m_x(k) = m_x$ ,  $R_x(\tau, k) = R_x(\tau)$ . Заметим, что только стационарные процессы могут обладать свойством эргодичности.

Эргодические процессы представляют важную разновидность сигналов, так как все их свойства могут быть определены осреднением по времени одной единственной реализации (хотя и непременно достаточно продолжительной).

На практике процессы, соответствующие стационарным случайным явлениям, как правило, обладают свойством эргодичности, что позволяет правильно определить характеристики стационарного случайного процесса по одной выборочной реализации.

## *Нестационарные случайные процессы*

К нестационарным относятся все случайные процессы, упомянутые в приведенной выше классификации, не обладающие свойствами стационарности хотя бы в широком смысле. Характеристики нестационарного процесса в общем случае представляют собой некоторые функции времени, определить которые можно только осреднением по ансамблю реализации, образующих процесс. В практических задачах часто представляется невозможным получить достаточно большое число реализации для отыскания характеристик процесса с необходимой достоверностью. Это обстоятельство препятствует развитию практическим методов оценивания и анализа нестационарных случайных процессов.

Во многих случаях в классе нестационарных процессов, соответствующих реальным физическим явлениям, можно выделить особые

типы нестационарности, для которых задача оценивания и анализа упрощается. Например, некоторые случайные явления описываются нестационарными случайным процессом  $\{Y(t)\}$ , каждая реализация которого имеет вид  $Y(t)=A(t)X(t)$ , где  $X(t)$  – реализация стационарного случайного процесса  $\{X(t)\}$ ,  $A(t)$  - детерминированный множитель.

Процессы такого типа имеют общий детерминированный тренд. Если нестационарный процесс соответствует конкретной модели такого типа, то для его описания нет необходимости производить осреднение по ансамблю: любые требуемые характеристики можно оценить по одной реализации, как и для эргодических процессов.

### *Стационарные реализации*

Понятие стационарности, рассмотренное выше, связано с осреднением по ансамблю характеристик случайного процесса. Однако на практике часто приходится решить вопрос о стационарности и нестационарности процесса, представленного всего одной реализацией. В этом случае используется несколько отличное от приведенного выше понятие стационарности. Когда речь идет о стационарности одной выборочной функции, то это означает, что характеристики, рассчитанные по коротким временным интервалам, не меняются значительно для различных интервалов. Термин «значительно» используется здесь для обозначение того факта, что наблюдаемые изменения больше, чем можно ожидать за счет обычной выборочной статистической изменчивости.

Для разъяснения этого рассмотрим реализацию  $X_k(t)$ , полученную по  $K$ -й реализации случайного процесса  $X(t)$ . Определим математическое ожидание и автокорреляционную функцию осреднением по времени на коротком интервале продолжительности  $T$  при начальном моменте  $t$ :

$$m_x(t, k) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X_k(t) dt, \quad (1.61)$$

$$R_x(t, t + \tau, k) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X_k^0(t) X_k^0(t + \tau) dt.$$

В общем случае, когда выборочные характеристики, определенные формулами (1.61), меняются значительно при изменении начального момента  $t$ , отдельная реализация называется *нестационарной*. В частном случае, когда выборочные характеристики, определенные этими формулами, не меняются значительно при изменении  $t$ , реализация называется *стационарной*. Реализация эргодического процесса всегда стационарна. С другой стороны, реализации физически важных нестационарных процессов не обладают свойством стационарности. Следовательно, если предположение об эргодичности оправдано, то подтверждение свойства стационарности одной реализации может служить достаточным основанием для допущения стационарности и эргодичности случайного процесса, к которому принадлежит данная реализация.

#### 1.2.4 Исчерпывающее описание случайных процессов

Рассмотрим вновь случайный процесс, реализации которого изображены на рисунке 16. Зафиксируем значение временного аргумента. При фиксированном аргументе случайный процесс превращается в случайную величину и носит название сечения случайного процесса. Для приближенного описания случайного процесса зададим его в равноотстоящие (через интервал) момента времени, то есть получим сечения  $t_1, t_2, t_3$  и т. д. Устремим  $\Delta t$  к нулю, число сечений  $N$  при этом устремляется к бесконечности.

Сигнал (процесс) превращается в систему бесконечного числа случайных величин  $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)\}$ .

Исчерпывающей характеристикой системы случайных величин является совместный закон распределения, заданный в той или иной форме, например, в дифференциальной:  $f_N\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)\}$ . Таким образом, для случайного процесса исчерпывающей характеристикой является бесконечномерная плотность распределения сечений. Для удобства в дальнейшем станем записывать ее в следующей форме:  $f_N(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_N, t_N, \dots)$ .

И теперь вернемся к определению стационарности или не стационарности сигнала и зададим его несколько строже, нежели это было выполнено ранее.

В зависимости от поведения плотности распределения при прибавлении к каждому временному аргументу одной и той же величины, различают нестационарные процессы, слабо стационарные и стационарные в узком смысле.

Если при прибавлении к каждому временному аргументу одной и величины бесконечномерная плотность вероятности не изменяется, то сигнал (процесс) называется стационарным в узком смысле (см. определение выше), а в противном случае процесс таковым не является (т.е. это – либо процесс, стационарный лишь в широком смысле, либо вовсе нестационарный процесс).

То есть условие стационарности (в узком смысле) может быть записано следующим образом:

$$f(x_1, t+u; x_2, t_2+u; \dots, x_m, t_m+u; \dots) = f(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_m, t_m; \dots). \quad (1.62)$$

Выберем  $t_1+u=0$ , тогда  $u = -t_1$ : выражение для плотности приобретает вид:

$$f(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1; \dots, x_m, t_m; \dots).$$

Для двумерной плотности распределения соблюдается соотношение

$$f_2(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1) = f_2(x_1, t_1; x_2, t_2). \quad (1.63)$$

То есть плотность вероятности зависит не от времени, а от временного сдвига между сечениями, а одномерная плотность распределения вообще не зависит от какого – либо временного аргумента:

$$f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1, 0). \quad (1.64)$$

Вместо плотностей вероятностей для описания случайных процессов можно использовать и характеристические функции, представляющие собой преобразования Фурье от соответствующих плотностей распределения. Так, например, N–мерная характеристическая функция определяется соотношением:

$$\varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_N x_N) * f(x_1, t_1; \dots; x_N, t_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = M[\exp(ju_1 x_1 + ju_2 x_2 + \dots + ju_N x_N)]. \quad (1.65)$$

Отметим, что для независимых случайных величин характеристическая функция системы равна произведению характеристических функций величин, составляющих систему.

Иногда вместо плотностей вероятностей используют интегральные законы распределения – функции распределения. Одномерная функция распределения определяет относительную долю значений  $x_i(t), i=1, 2, 3, \dots$ , которые меньше некоторой величины  $X_i$ :

$$F_1(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(u, t_1) du. \quad (1.66)$$

Очевидно, что для значений  $X_1$ , в которых функция  $F(X_1, t_1)$  дифференцируема, справедливо равенство

$$f_1(x_1, t) = \frac{\partial F_1(x_1, t)}{\partial x_1}. \quad (1.67)$$

Двумерная функция распределения определяется соотношением

$$F_2(x_1, t_1, x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, t_1, u_2, t_2) du_1 du_2, \quad (1.68)$$

откуда следует, что

$$f_2(x_1, t_1, x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, t_1, x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (1.69)$$

где функция  $F2$ , приведенная в выражении, есть двумерная функция распределения.

### 1.2.5 Приближенное описание случайных процессов

Как уже говорилось выше, для полного описания случайного процесса требуется полный набор его реализаций и математическое (в смысле определения вероятностей законов распределения возможных значений процесса) описание его свойств.

Для решения такой задачи в теории стохастических сигналов используется уже известный прием применения характеристик, которые на практике называют моментными или, попросту, начальными или центральными моментами сигнала  $\{X(t)\}$  или совокупности сигналов  $\{X(t)\}$  и  $\{Y(t)\}$ .

*Начальным* моментом порядка  $K$  случайного процесса  $\{X(t)\}$  называется такая функция времени, которая в каждый момент времени  $t$ , равна математическому ожиданию  $K$ -й степени самого сигнала:

$$\alpha_k(t) = M[X^k(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X^k(t) f(x, t) dx. \quad (1.70)$$

Для определения любого момента  $\alpha_k$  достаточно знать одномерную функцию плотности распределения вероятностей:

$$\alpha_1(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f(x, t) dx. \quad (1.71)$$

Это и есть математическое ожидание (или среднее значение) процесса. Как уже говорилось выше, практически любой (и особенно стационарный по математическому ожиданию) процесс можно представить себе как аддитивную смесь постоянной (или медленно изменяющейся по среднему значению) мультипликативной составляющей.

Моменты, определяемые для централизованного сигнала, носят название *центральных*.

Центральный момент  $s$ -го порядка – это такая функция времени, которая в каждый момент времени равна математическому ожиданию  $s$ -ой степени составляющего централизованного сигнала:

$$\mu_s(t) = M[X^s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s(t) f(x, t) dx. \quad (1.72)$$

Моменты 0-го и 1-го порядка неинформативны, так как

$$\mu_0(t) = 1; \quad \mu_1(t) = 0.$$

Основное применение получил второй центральный момент:

$$\mu_2(t) = M \left[ \overset{0}{X}^2(t) \right] = D_x(t). \quad (1.73)$$

Это – дисперсия сигнала, которая характеризует степень разбросанности отдельных реализаций относительно математического ожидания.

Ту же информацию о процессе  $\{X(t)\}$  дает и среднеквадратическое отклонение, численно равное квадратному корню из дисперсии и имеющее размерность самого сигнала.

Для описания случайных процессов используют также смешанные моменты.

Смешанным начальным моментом порядка  $(k+s)$  случайного сигнала  $\{X(t)\}$  называется такая функция двух временных аргументов  $t_1$  и  $t_2$ , которая при фиксированных значениях этих аргументов численно равна математическому ожиданию произведения  $k$ -й и  $s$ -й степеней соответствующих сечений сигнала:

$$d_{k,s}(t_1, t_2) = M \left[ X^k(t_1) X^s(t_2) \right]. \quad (1.74)$$

Центральный смешанный момент порядка  $(k+s)$  определяется выражением вида:

$$\mu_{k,s}(t_1, t_2) = M \left[ \overset{0}{X}^k(t_1) \overset{0}{X}^s(t_2) \right]. \quad (1.75)$$

Для приближенного описания свойств случайного процесса наиболее широкое применение получил центральный смешанный момент порядка  $(1+1)$ :

$$\mu_{1,1}(t_1, t_2) = M \left[ \overset{0}{X}(t_1) \overset{0}{X}(t_2) \right] = R_x(t_1, t_2) \quad (1.76)$$

– математическое ожидание произведения двух сечений центрированного сигнала. Это уже упоминавшаяся автокорреляционная функция сигнала  $\{X(t)\}$  (авто – т.е. характеризуется корреляция, или взаимосвязь двух сечений одного и того же процесса).

1. Таким образом, для приближенного описания свойств сигнала используют математическое ожидание, дисперсию и автокорреляционную функцию.

Выясним, о каких свойствах сигнала несет информацию АКФ, а для этого рассмотрим ее собственные свойства.

АКФ обладает свойством симметричности относительно своих аргументов, то есть не изменяет своего значения при перемене временных аргументов местами:

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1). \quad (1.77)$$

2. По величине АКФ не может превышать произведения среднеквадратических отклонений соответствующих сечений:

$$R_x(t_1, t_2) \leq \delta_x(t_1)\delta_x(t_2). \quad (1.78)$$

3. При совпадении временных аргументов АКФ превращается в дисперсию:

$$R_x(t, t) = M \left[ \overset{0}{X^2}(t) \right] = D_x(t). \quad (1.79)$$

То есть набор характеристик, необходимых для приближенного описания случайного сигнала, может быть сокращен до двух:  $m_x$  и  $R_x(t)$ .

Вернемся ко второму свойству АКФ и положим  $t_1=t_2=t$ :

$$R_x(t, t) \leq \delta_x^2(t), \text{ то есть } R_x(t, t) \leq D_x(t). \quad (1.80)$$

Наибольшее значение АКФ имеет при равных временных аргументах, и это наибольшее значение равно дисперсии сигнала.

На практике часто используют нормированную автокорреляционную функцию, под которой понимают функцию вида:

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} = \frac{M \left[ \overset{0}{X}(t_1)\overset{0}{X}(t_2) \right]}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}. \quad (1.81)$$

Нормированная АКФ – величина безразмерная. По определению нормированная АКФ – это коэффициент корреляции между двумя сечениями случайного процесса.

Рассмотрим, как будут трансформироваться свойства АКФ при переходе к нормированной функции:

- 1)  $\rho_x(t_1, t_2) = \rho_x(t_2, t_1)$ ;
- 2)  $\rho_x(t_1, t_2) \leq 1$ ;
- 3) при равенстве временных аргументов:  
 $t_1 = t_2 = t, \quad \rho_x(t, t) = 1.$

Выясним, как будет вести себя  $\rho_x(t_1, t_2)$  при изменении интервала времени между сечениями  $t_1 - t_2 = \tau$  от нуля до бесконечности.

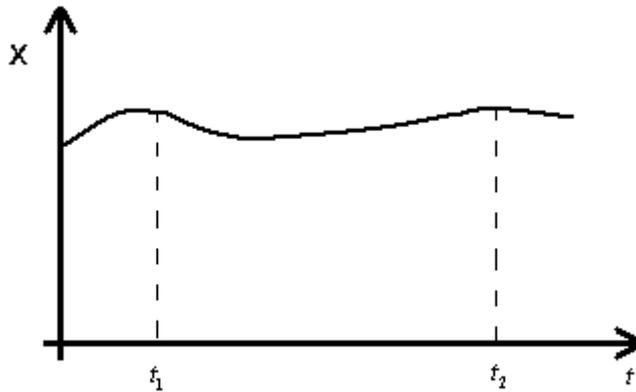


Рисунок 17 – Реализация случайного процесса (к вопросу о поведении нормированной АКФ в зависимости от интервала времени между сечениями)

Таким образом, выясняется четвертое свойство АКФ:

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow \infty} R_x(t_1, t_2) = 0. \quad (1.82)$$

Если рассматривать АКФ как функцию интервала времени между сечениями, то эта функция, при стремящемся к бесконечности аргументе, будет стремиться к нулю:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho_x(t_1, t_2) = 0, \quad (1.83)$$

то есть взаимосвязь между сечениями будет ослабевать и даже теряться (в соответствии с рисунком 17).

### *Математическое описание системы двух случайных сигналов*

Пусть имеем два случайных сигнала  $\{X(t)\}$  и  $\{Y(t)\}$ , каждый из которых можно представить в виде совокупности их сечений. Для точного их описания их следует представлять бесконечным числом случайных величин.

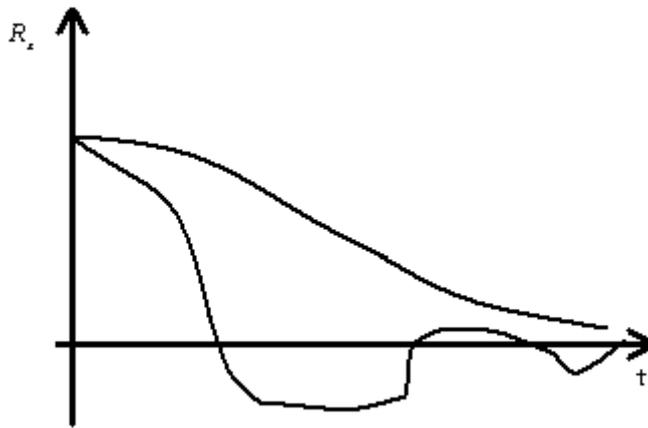


Рисунок 18 – Возможные изменения нормированной АКФ в зависимости от интервала времени между реализациями

Если совместная плотность распределения всех сечений этих сигналов не изменяются при прибавлении ко всем временным аргументам одной и той же величины, то эти сигналы называются *стационарными и стационарно-связанными*.

Рассмотрим приближенное описание свойств системы двух сигналов. Для этого будем использовать моментные характеристики.

Для каждого из сигналов указывают его математическое ожидание и АКФ:

$$m_x(t), m_y(t); R_x(t_1, t_2), R_y(t_1, t_2).$$

Кроме этих характеристик вводится еще одна: взаимная корреляционная функция  $R_{xy}(t_1, t_2)$  (ВКФ).

Взаимной корреляционной функцией между двумя сигналами  $\{X(t)\}$  и  $\{Y(t)\}$  называется такая функция времени, которая при фиксированных значениях временных аргументах равна математическому ожиданию произведения соответствующих сечений этих сигналов:

$$R_{x,y}(t_1, t_2) = M \left[ \overset{0}{Y}(t_1) \overset{0}{X}(t_2) \right]. \quad (1.84)$$

Иногда вместо этой функции используют нормированную ВКФ:

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{R_{yx}(t_1, t_2)}{\sigma_y(t_1)\sigma_x(t_2)} = \frac{M \left[ \overset{0}{Y}(t_1) \overset{0}{X}(t_2) \right]}{\sigma_y(t_1)\sigma_x(t_2)}. \quad (1.85)$$

Как видно из формулы (1.85),  $\rho_{yx}$  - это коэффициент корреляции между сечениями  $Y(t_1)$  и  $X(t_2)$ .

Рассмотрим свойства этих функций:

$$1. \rho_{yx}(t_1, t_2) = \rho_{xy}(t_1, t_2), \text{ так как}$$

$$R_{yx} = M \left[ \dot{Y}(t_1) \dot{X}(t_2) \right] = M \left[ \dot{X}(t_2) \dot{Y}(t_1) \right] = R_{xy}(t_2, t_1). \quad (1.86)$$

Взаимная корреляционная функция несимметрична относительно своих аргументов.

$$\rho_{yx}(t_1, t_2) = \rho_{xy}(t_2, t_1).$$

$$2. R_{yx}(t_1, t_2) \leq \sigma_y(t_1)\sigma_x(t_2)$$

$$\rho_{yx}(t_1, t_2) \leq 1. \quad (1.87)$$

3. При одинаковых значениях временных аргументов:

$$R_{yx}(t, t) = M \left[ \overset{0}{Y}(t) \overset{0}{X}(t) \right] = D_{yx}(t) - \text{взаимная дисперсия.} \quad (1.88)$$

$R_{yx}(t_1, t_2)$  описывает степень линейной статистической взаимосвязи между временными сечениями различных сигналов.

Пусть  $t_2 - t_1 = \tau$  - интервал времени между сечениями.

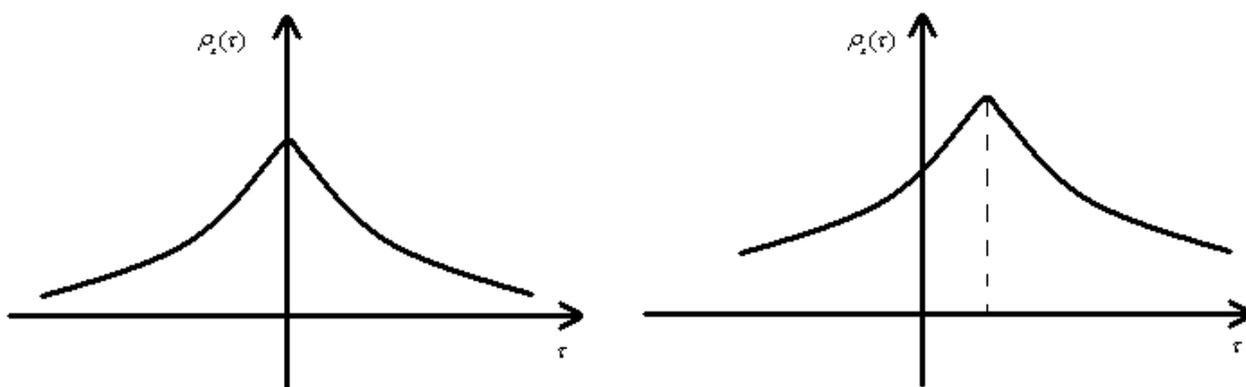


Рисунок 19 – Графики зависимостей АКФ и ВКФ от интервала времени между сечениями

АКФ симметрична, и для ее описания можно изучать только одну ветвь, а в случае ВКФ необходимо исследовать обе ветви.

Нормированная ВКФ достигает своего максимума при  $\tau_0$ , то есть два сигнала наиболее линейно связанные при этом сдвиге между их временными сечениями.

Если  $\rho_{yx}(\tau) = 1$ , то сигналы  $X(t)$  и  $Y(t)$  связаны линейной функциональной зависимостью при  $\tau = \tau_0$ . Все понятия можно обобщить на случай системы произвольного числа сигналов  $\{X_i(t)\}$ ,  $i = 1, \vec{N}$

Для этого достаточно установить  $m_{xi}(t)$  – математические ожидания всех сигналов;

$R_{xi}(t_1, t_2)$  – АКФ всех сигналов;

$R_{yi, xi}(t_1, t_2)$  – ВКФ между всеми парами сигналов.

Математическое описание стационарных случайных сигналов

Пусть имеем случайный процесс  $\{X(t)\}$ , который является стационарным. При этом его одномерная плотность вероятности будет зависеть только от  $X$ , и не будет зависеть от времени:

$$f(X, t) = f(X). \quad (1.89)$$

Не будут зависеть от времени и все начальные и центральные моменты:

$$\alpha_k(t) = \alpha_k$$

и, в частности, дисперсия

$$D_x(t) = \sigma_x^2 = D_x.$$

Для АКФ справедливо следующее соотношение:  $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2)$ , то есть АКФ зависит не от начала отсчета, а лишь от сдвига между временными сечениями.

Дисперсия характеризует мощность случайного сигнала, например:

$$i(t) = X(t), \quad P(t) = i^2(t) * R, \quad M[P(t)] = R * M[X^2(t)].$$

То есть, если предположить, что сигнал центрирован, то это выражение представляет его дисперсию (мощность, выделяемую на единичной нагрузке).

Рассмотрим АКФ стационарного случайного сигнала:

$$t_2 - t_1 = \tau, \quad R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau).$$

1. По величине АКФ процесса не может превышать его дисперсию:

$$R_x(\tau) \leq D_x = \sigma_x^2.$$

2. АКФ – четная функция своего аргумента:

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau).$$

3. АКФ при нулевом аргументе равна дисперсии сигнала:

$$R_x(0) = D_x.$$

Для нормированной корреляционной функции эти свойства трансформируются следующим образом:

- 1)  $\rho_x(\tau) \leq 1$ ;
- 2)  $\rho_x(\tau) = \rho_x(-\tau)$ ;
- 3)  $\rho_x(0) = 1$ .

Общим для АКФ и нормированной АКФ стационарного случайного сигнала является то, что при неограниченном увеличении временного сдвига между сечениями обе они стремятся к нулю:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_x(\tau) = 0.$$

При описании свойств стационарного процесса часто указывают такой интервал времени, начиная с которого можно считать  $\rho_x = 0$ . Это интервал корреляции, который принято обозначать  $\tau_k$ .  $\tau_k$  показывает, в каком промежутке времени сечения сигнала сильно коррелированы (при  $\tau > \tau_k$  эти сечения считаются некоррелированными). Кроме того интервал корреляции часто несет информацию о частотных свойствах сигнала, определяя длительность АКФ во времени.

Рассмотрим методы определения  $\tau_k$ .

1. Выбирается малая величина  $\delta \ll 1$ , и на расстоянии от оси времени проводят две прямые, параллельные этой оси (в соответствии с рисунком 20).

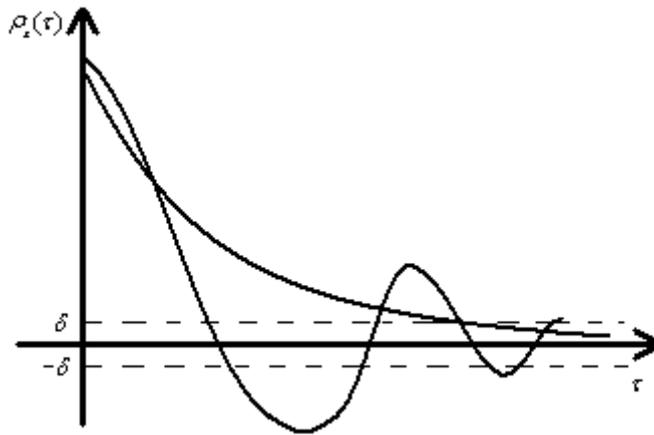


Рисунок 20 – Определение интервала корреляции (метрологический подход)

Тот момент времени, начиная с которого удовлетворяется условие:  $|\rho_x(\tau)| < \delta$  принимают за  $\tau_k$ . Величину  $\delta$  обычно принимают равной 2 – 5 % от 1.

2. На оси времени как на основании строится прямоугольник, высота которого равна единице, а площадь равна площади всей фигуры под кривой нормированной АКФ ( в соответствии с рисунком 21).

$$\tau_k = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau . \tag{1.90}$$

Этот метод применяется для определения  $\tau_x$  монотонных, не знакопеременных АКФ.

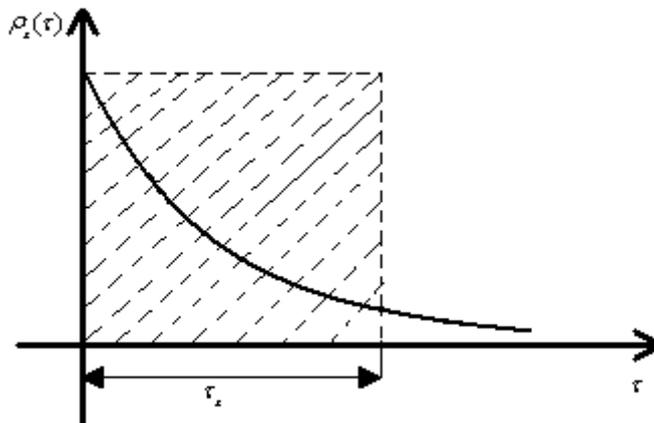


Рисунок 21 – Определение интервала корреляции (формантный подход)

Для вычисления знакопеременных АКФ принято использовать следующие три подхода:

$$1) \tau_k = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau; \quad (1.91)$$

$$2) \tau_k = \int_0^{\infty} |\rho_x^2(\tau)| d\tau; \quad (1.92)$$

$$3) \tau_x = \frac{\mu_N}{\mu_N - 1}, \quad (1.93)$$

где  $\mu_N$  - момент АКФ, определяемый соотношением:

$$\mu_N = \int_0^{\infty} \tau^N \rho_x(\tau) d\tau;$$

$N$  - любое целое положительное число.

Из приведенных методов наиболее часто на практике используется четвертый.

Посмотрим, какой из приведенных способов дает наибольшее значение интервала корреляции:

$$\tau_{k1} = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau \leq \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau = \tau_{k2},$$

$$\tau_{k3} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| |\rho_x(\tau)| d\tau \leq \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau = \tau_{k2},$$

так как  $|\rho_x(t)| \leq 1$ .

Таким образом,  $\tau_{k1} \leq \tau_{k2}; \tau_{k3} \leq \tau_{k2}$ .

*Пример.*

Пусть имеем стационарный случайный процесс  $X(t)$  с нормированной корреляционной функцией

$$\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$$

и определим его интервал корреляции первыми четырьмя способами:

$$e^{-\alpha|\tau|} = \delta; \quad -\alpha\tau = \ln \delta; \quad \tau_k = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\delta}.$$

То есть, чем больше  $\alpha$ , тем круче спадает АКФ, и тем меньше величина интервала корреляции.

$$\tau_{k1} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha}; \quad \tau_{k2} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha};$$

$$\tau_{k3} = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{2\alpha}.$$

### *Приближенное описание АКФ*

Во-первых, АКФ может быть приближенно описана интервалом корреляции. Кроме того, для приближенного описания АКФ используются моментные характеристики этой функции.

Нормированным моментом порядка  $K$  АКФ называется величина

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \tau^k \rho_x(\tau) d\tau. \quad (1.94)$$

Если  $K=0$ , то  $\mu_k = \tau_k$ , то есть интервал корреляции представляет собой момент АКФ нулевого порядка. Для приближенного описания АКФ используется ее модель

$$\rho_M(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N, \tau),$$

где  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$  - коэффициенты (параметры) модели.

Для описания АКФ необходимо отыскать значения этих параметров, что можно проделать, используя метод моментов, согласно которому моменты истинной АКФ должны равняться моментам модели функции корреляции:

$$\mu_k = \mu_k^{(M)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.95)$$

Использование метода моментов позволяет достаточно точно описывать АКФ при больших значениях  $\tau$ .

При малых  $\tau$  более целесообразно пользоваться критериям производных, который сводится к тому, что коэффициенты модели вычисляются приравниванием соответствующих производных нормированной АКФ и ее модели в нуле:

$$\rho_x^{(k)}(0) = \rho_x^{(k)}(0), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.96)$$

*Описание системы стационарных и стационарно связанных сигналов*

Пусть имеем два случайных сигнала, которые стационарно связаны между собой.

Взаимная корреляционная функция (ВКФ) системы имеет вид:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M \left[ \overset{0}{X}(t_1) \overset{0}{Y}(t_2) \right].$$

Для описания системы двух случайных процессов необходимо знать двумерную плотность вероятности

$$f[X(t_1), Y(t_2)] = f(X, t_1 + u, t_2 + u). \quad (1.97)$$

Выражение (1.97) представляет собой условие стационарной связности.

Как в случае АКФ, положим  $\tau = t_2 - t_1$ . Рассмотрим свойства ВКФ системы двух стационарно связанных сигналов.

1. Так как

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1),$$

то

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (1.98)$$

(в соответствии с рисунком 22).

2. Аналогично

$$R_{xy}(\tau) \leq \sigma_x \sigma_y; \quad (1.99)$$

3.  $R_{xy}(0) \neq \sigma_x \sigma_y.$  (1.100)

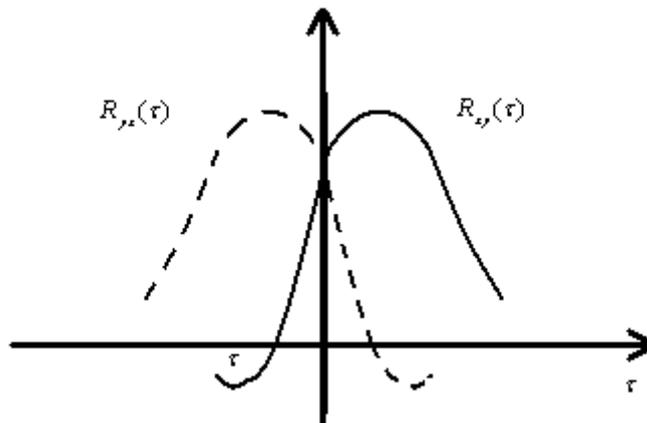


Рисунок 22- График ВКФ системы двух стационарно связанных сигналов

Нормированная функция взаимной корреляции:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.101)$$

обладает аналогичными свойствами:

- 1)  $\rho_{xy}(\tau) = \rho_{xy}(-\tau)$ ;
- 2)  $\rho_{xy}(\tau) \leq 1$ .

Для приближенного описания ВКФ используется ряд характеристик: координата и величина экстремума, интервал взаимной корреляции, моментные характеристики и производные ВКФ при различных значениях аргументах.

Интервал взаимной корреляции двух стационарно связанных случайных сигналов определяется как интервал времени, внутри которого ВКФ отлична от нуля, а вне его – равна или близка к нулю (в соответствии с рисунком 23).

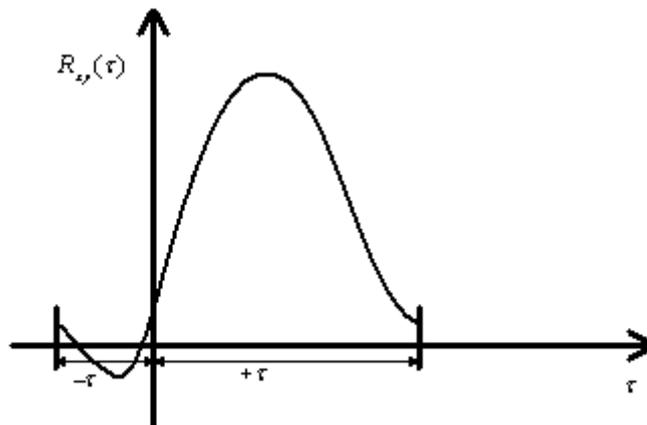


Рисунок 23 – К вопросу об определении интервала взаимной корреляции

Способы отыскания сходны со способами определения интервала корреляции с отличием, что в данном случае приходится оценивать взаимодействие как в положительной, так и в отрицательной области.

$$1) \rho_{xy}(\tau) = \delta; \quad (1.102)$$

$$2) \tau_{кв} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 \rho_{xy}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau; \quad (1.103)$$

$$3) \tau_{кв} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau; \quad (1.104)$$

$$4) \tau_{кв} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}^2(\tau)| d\tau. \quad (1.105)$$

Так же, как и в случае АКФ, для приближенного описания ВКФ используют ее моменты, которые определяются следующим образом:

$$\mu_{xy}^{(q)} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^q \rho_{xy}(\tau) d\tau, \quad (1.106)$$

где q- порядок момента.

Если известна координата максимального значения ВКФ, то можно использовать и такие моменты:

$$\varepsilon_{xy}^{(q)} = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - \tau_0)^q \rho_{xy}(\tau) d\tau. \quad (1.107)$$

### 1.2.6 Обобщенные модели случайных процессов (по Пугачеву)

Всякий случайный процесс может быть представлен в виде:

$$X(t) = m_x(t) + X^0(t) \quad (1.108)$$

и описан моделью:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t), \quad (1.109)$$

где  $U_k$  - коэффициенты разложения случайной величины;  
 $\varphi_k$  - координатные, детерминированные функции.

В качестве критерия адекватности модели исследуемому сигналу можно взять критерий минимума среднеквадратической погрешности:

$$\Delta = M \left[ \{X_M(t) - X(t)\}^2 \right] = \min, \quad (1.110)$$

$$M[X_M(t)] = M[m_x(t)] + \sum_{k=1}^{\infty} M[U_k] \varphi_k(t). \quad (1.111)$$

Чтобы обеспечить равенство математических ожиданий модели и сигнала необходимо, чтобы сумма равнялась нулю. Это возможно, когда все случайные величины  $U_k$  центрированы. Дальнейшее построение модели сводится к отысканию  $U_k$ .

$$\Delta = \min$$

$$\overset{0}{X}_M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t) \quad (1.112)$$

$$\Delta = M \left[ \left\{ \overset{0}{X}_M(t) - \overset{0}{X}(t) \right\}^2 \right] = \min . \quad (1.113)$$

Это выполняется при  $\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_k(t)} = 0$ ,

$$\text{или } \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_k(t)} = M \left[ \left\{ \overset{0}{X}_M(t) - \overset{0}{X}(t) \right\} \frac{\partial \overset{0}{X}_M}{\partial \varphi_k(t)} \right] = 0.$$

$$\text{Но } \frac{\partial \overset{0}{X}_M}{\partial \varphi_k(t)} = U_k,$$

$$M \left[ \left\{ \overset{0}{X}_M(t) - \overset{0}{X}(t) \right\} U_k \right] = 0,$$

отсюда

$$M \left[ \overset{0}{X}_M(t) U_k \right] = M \left[ \overset{0}{X}(t) U_k \right], \quad (1.114)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} M [U_m U_k] \varphi_m(t) = M \left[ \overset{0}{X}(t) U_k \right], \quad k = 0, 1, \dots, \infty. \quad (1.115)$$

Это нереально, поэтому кроме требования центрированности, накладываем еще одно условие

$$M [U_m(t) U_k(t)] = R_{m,k}.$$

Для того чтобы избежать необходимости решать систему уравнений, потребуем выполнения условия ортогональности

$$R_{m,k} = \begin{cases} D_k, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \quad (1.116)$$

то есть случайные величины  $U$  должны быть некоррелированными.

$$M \left[ \overset{0}{U}_k^2 \right] = D_k,$$

$$D_k \varphi_k(t) = M \left[ U_k \overset{0}{X}(t) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.117)$$

Вместо системы уравнений получаем совокупность уравнений, каждое из которых имеет единственное неизвестное.

Определяем координатные функции

$$\varphi_k(t) = \frac{M \left[ U_k \overset{0}{X}(t) \right]}{D_k} \quad (1.118)$$

при известной дисперсии.

Или наоборот, задаваясь координатными функциями, отыскиваем дисперсии:

$$D_k = \frac{M \left[ U_k \overset{0}{X}(t) \right]}{\varphi_k(t)}. \quad (1.119)$$

Вывод: любой случайный процесс  $X(t)$  можно описать моделью

$$X_M(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t),$$

причем математические ожидания модели и сигналы должны совпадать, а коэффициенты разложения представляют центрированные и некоррелированные случайные величины.

$$D_k \varphi_k(t) = M \left[ U_k \overset{0}{X}(t) \right].$$

Так как  $D_k \varphi_k(t) \neq 0$ , то и  $M \left[ U_k \overset{0}{X}(t) \right] \neq 0$ , следовательно, любой коэффициент разложения должен быть коррелирован с самим сигналом  $X(t)$ .

Вычислим минимальное значение среднеквадратической погрешности. Итак, центрированная модель имеет вид

$$\overset{0}{X}_M(t) = \sum_{k=1}^N U_k \varphi_k(t)$$

Среднеквадратическая погрешность определяется выражением

$$\Delta = M \left[ \left\{ \overset{0}{X}_M(t) - \overset{0}{X}(t) \right\}^2 \right].$$

Или

$$\Delta = M \left[ \overset{0}{X}_M^2(t) \right] - 2M \left[ \overset{0}{X}_M(t) \overset{0}{X}(t) \right] + M \left[ \overset{0}{X}^2(t) \right]$$

причем последнее слагаемое равно дисперсии исследуемого сигнала.

$$\overset{0}{X}_M^2(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \varphi_k(t) \varphi_m(t) M[U_k U_m] = \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t),$$

$$\overset{0}{X}_M(t) \overset{0}{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t) \overset{0}{X}(t),$$

$$M \left[ \overset{0}{X}_M(t) \overset{0}{X}(t) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) M \left[ U_k \overset{0}{X}(t) \right],$$

НО

$$M \left[ U_k \overset{0}{X}(t) \right] = \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t), \text{ то есть}$$

$$M \left[ \overset{0}{X}_M(t) \overset{0}{X}(t) \right] = \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t),$$

$$\Delta_{\min} = D_x(t) - 2 \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t) + \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t),$$

$$\Delta_{\min} = D_x(t) - \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t). \quad (1.120)$$

Отсюда видно, что среднеквадратическая погрешность убывает до нуля, когда N стремится к бесконечности.

Выражение  $\sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t)$ , будем считать дисперсией модели.

Минимальную среднеквадратическую погрешность чисто формально можно представить в виде

$$\Delta_{\min} = \left\{ R_x(t, t_1) - \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t_1) \right\} \Big|_{t=t_1}. \quad (1.121)$$

где  $R_x(t, t_1)$  - АКФ сигнала. Отсюда можно предложить, что

$$\sum_{k=1}^N D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t_1) = R_M(t, t_1) - \text{АКФ модели.}$$

Обратимся к модели и найдем ее функцию корреляции:

$$R_M(t, t_1) = M \left[ \overset{0}{X}_M(t) \overset{0}{X}_M(t_1) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= M \left[ \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \varphi_k(t) \varphi_m(t_1) U_k U_m \right] = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \varphi_k(t) \varphi_m(t_1) M[U_k U_m] = \\
&= \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t_1),
\end{aligned} \tag{1.122}$$

то есть, наше предложение о виде АКФ модели верно.

Таким образом, минимум среднеквадратической погрешности определяется выражением

$$\Delta_{\min} = \{R_x(t, t_1) - R_M(t, t_1)\} | t = t_1. \tag{1.123}$$

Выводы.

1. В качестве модели АКФ случайного процесса можно брать ее каноническую модель:

$$R_M(t, t_1) \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t_1),$$

и чем точнее модель АКФ, тем точнее будет модель самого сигнала.

2. Из выражения для канонической модели АКФ вытекает каноническая модель сигнала, и для построения последней необходимо предварительно синтезировать каноническую модель его функции корреляции.

### 1.2.7 Математическое описание стационарных случайных сигналов в частотной области

Настоящий раздел посвящен рассмотрению частотных, или спектральных свойств стационарных случайных процессов. В зависимости от того, на ограниченном или неограниченном промежутке времени исследуется сигнал, эти свойства разительно отличаются друг от друга.

*Спектральное представление стационарного сигнала, рассматриваемого на ограниченном интервале времени*

Пусть  $\overset{0}{X}(t)$  - центрированный стационарный случайный процесс на участке  $0 \leq t \leq T$ , а  $R_x(t, t_1)$  - АКФ этого процесса.

Так как  $\overset{0}{X}(t)$  - стационарный сигнал, то его корреляционная функция является функцией одного аргумента:

$$R_x(t, t_1) = R_x(t_1 - t) = R_x(\tau),$$

где  $\tau = t_1 - t$ . Найдем диапазон изменения:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ 0 \leq t_1 \leq T \end{array} \right\} \Rightarrow -T \leq t_1 - t \leq T; \quad -T \leq \tau \leq T.$$

На рисунке 24 изображен график зависимости АКФ от интервала между сечениями.

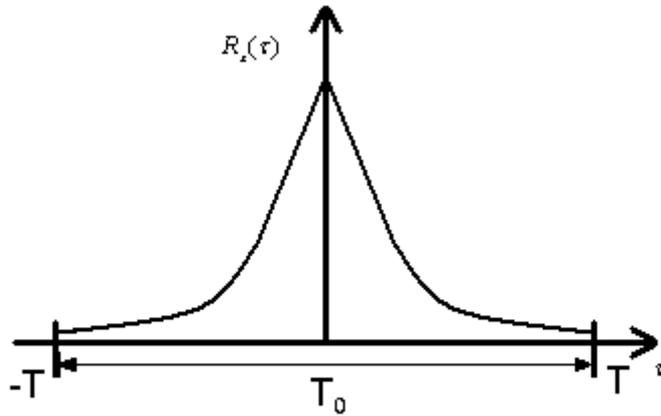


Рисунок 24 – График АКФ, ограниченного во времени стационарного случайного процесса

Построим каноническую модель АКФ, для этого представим ее в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$R_x(\tau) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(kw\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin(kw\tau). \quad (1.124)$$

Определим коэффициенты ряда:

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} R_x(\tau) \cos(kw\tau) d\tau;$$

$$\lambda_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} R_x(\tau) \sin(kw\tau) d\tau,$$

$w = \frac{2\pi}{T_0}$ ;  $\lambda_k = 0$ , так как АКФ – четная функция своего аргумента,  $\sin$ -нечетная, а интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю;

$$b_k = D_k, \text{ тогда}$$

$$R_x(\tau) = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(kw\tau);$$

$$D_x = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} R_x(\tau) \cos(kw\tau) d\tau, \text{ избавляемся от } T_0:$$

$$w = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}, \text{ тогда}$$

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cos(kw\tau) d\tau.$$

Докажем, что эта модель является канонической., для этого вместо  $\tau$  подставим его значение

$$R_x(t, t_1) = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(kw(t - t_1)),$$

но  $\cos(kw(t - t_1)) = \cos(kwt - kwt_1) = \cos(kwt) \cos(kwt_1) + \sin(kwt) \sin(kwt_1)$ , тогда

$$R_x(t, t_1) = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k (\cos(kwt) \cos(kwt_1) + \sin(kwt) \sin(kwt_1))$$

Таким образом, сам сигнал может быть представлен в виде:

$$X(t) = \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos kwt + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \sin kwt. \quad (1.125)$$

Коэффициенты разложения при этом обладают следующими свойствами.

1.  $M[\Phi] = M[U_k] = M[V_k] = 0$ , то есть все они центрированы.
2. Коэффициенты разложения некоррелированы между собой:  
 $M[\Phi U_k] = M[\Phi V_k] = 0$  при любых  $k$ .
3.  $M[U_k U_m] = \begin{cases} 0, k \neq m \\ D_k, k = m \end{cases}$ .
4.  $M[U_k V_m] = 0$   
 $D[\Phi] = \frac{D_0}{2}$ .

То есть сигнал описывается разложением:

$$\begin{aligned}
X(t) &= \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \cos(k\omega t) + V_k \sin(k\omega t)) = \\
&= \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)),
\end{aligned}$$

где

$$A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}; \quad \varphi_k = \arctg\left(\frac{V_k}{U_k}\right).$$

Любой стационарный случайный сигнал может быть представлен в виде бесконечного ряда тригонометрических функций со случайными амплитудами и фазами.

Определим дисперсию  $k$ -й гармоники:

$$\begin{aligned}
D_k &= M\{[U_k \cos k\omega t + V_k \sin k\omega t]\} = \\
&= \cos^2(k\omega t)M[U_k^2] + 2 \sin(k\omega t) \cos(k\omega t)M[U_k V_k] + \\
&= \sin^2(k\omega t)M[V_k^2].
\end{aligned} \tag{1.126}$$

Дисперсия  $D_x$  характеризует мощность  $k$ -й гармонической составляющей канонической модели сигнала.

Зависимость величины  $D_k$  от частоты получила название спектра случайного сигнала или спектра мощности случайного сигнала или энергетического спектра.

$$\begin{aligned}
D_k &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cos k\omega \tau d\tau \\
R_x(t, t_1) &= \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(k\omega(t - t_1)).
\end{aligned} \tag{1.127}$$

Спектр случайного сигнала, ограниченного во времени, имеет линейчатый дискретный характер, он определен на строго фиксированных частотах.

Спектр обладает следующими основными свойствами.

1. Он неотрицателен  $D_k \geq 0$ .
2. Представляет собой четную функцию  $k$ :  $D_k = D_{-k}$

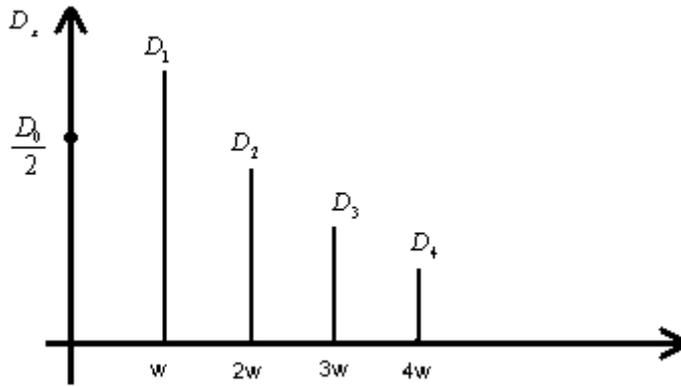


Рисунок 25 – Энергетический спектр случайного сигнала

3. Положим  $\tau=0$

$$D_x = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k,$$

то есть энергия (мощность) всего сигнала складывается из мощности (энергии) постоянной составляющей и всех гармоник.

4. Рассмотрим, как ведет себя дисперсия  $k$ -й гармоники при неограниченном увеличении промежутка времени  $T$ .

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T |R_x(\tau)| d\tau = \frac{2}{T} \int_0^T |R_x(\tau)| d\tau < \frac{2D_x}{T} \int_0^T |\rho_x(\tau)| d\tau = \frac{2D_x}{T} \tau_k, \quad (1.128)$$

где  $\tau_k = \int_0^T |\rho_x(\tau)| d\tau$  - интервал корреляции процесса  $X(t)$ .

То есть,  $D_k < \frac{2D_x}{T} \tau_k$  - при увеличении  $T$  дисперсия гармоники убывает.

5. Как видно из равенства (1.128) предел дисперсии при неограниченном увеличении  $T$  равен нулю

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D_k = 0. \quad (1.129)$$

Рассмотрим, к чему стремится дисперсия при неограниченном росте порядкового номера гармоники  $k$ .

Обозначим:  $kw\tau = \chi$ ,  $\chi_0 = kwT = k\pi$ ,  $\chi_n = -k\pi$ ,

$$\tau = \frac{\chi}{kw}, \quad d\tau = \frac{d\chi}{kw} = \frac{T}{k\pi} d\chi,$$

$$D_k = \frac{1}{k\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} R_x\left(\frac{\chi}{k\pi}\right) \cos \chi d\chi, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} D_k = 0.$$

при больших  $k$

$$D_k = \frac{1}{k\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} \cos(\chi) d\chi.$$

То есть, при больших  $k$  энергетический спектр затухает.

Рассмотрим вопрос определения *полосы частот* сигнала.

В основу определения частотного диапазона кладется энергетический подход, то есть под *полосой частот* подразумевает такая, в которой сосредоточена практически вся энергия (мощность) сигнала, а именно – 95 %.

$$X_M(t) = \sum_{k=m}^N A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

$$\omega_n = m\omega; \quad \omega_g = N\omega.$$

Таким образом, верхняя и нижняя границы полосы частот при известных  $m$  и  $N$  легко определяются. Ширина спектра при

$$\Delta\omega = (N - m)\omega$$

$$D_M = \sum_{k=m}^N D_k \text{ - мощность сигнала в полосе частот.}$$

Отсюда ищутся  $m$  и  $N$ . Но непосредственно таким подходом воспользоваться нельзя, нужны другие способы. Например, предположим, что потери энергии на частотах от 0 до  $m-1$  и от  $N+1$  до  $\infty$  равны, тогда:

$$\frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} D_k = 0.025D_x, \tag{1.130}$$

отсюда определяют  $m$ :

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} D_k = 0.025D_x,$$

из этого выражения можно найти  $N$ , но вычислить сумму бесконечного ряда неудобно, поэтому часто прибегают к такому подходу:

$$D_x = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^N D_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} D_k,$$

это мощность всего сигнала;

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} D_k = D_x - \frac{D_0}{2} - \sum_{k=1}^N D_k = 0.025D_x. \tag{1.131}$$

Этим уравнением для определения  $N$  воспользоваться проще, для этой цели можно применить и такое выражение:

$$0.975D_x = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^N D_k. \quad (1.132)$$

*Спектральное представление стационарного случайного сигнала, рассматриваемого на неограниченном интервале времени*

Пусть имеем стационарный случайный сигнал  $X(t)$ , рассматриваемый на интервале времени  $0 \leq t < \infty$ .

Для описания его частотных свойств введем в рассмотрение отношение дисперсии  $k$ -й гармоники к ширине полосы частот между двумя близлежащими спектральными линиями.

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{-jk\omega\tau} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{-jk\omega\tau} \end{aligned}$$

Заменим во второй сумме  $k$  на  $-k$ :

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{D_{-k}}{2} e^{jk\omega\tau}$$

но  $D_k = D_{-k}$ . Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{D_{-k}}{2} e^{jk\omega\tau} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau} \quad (1.133)$$

Таким образом частота  $\omega$  численно равна расстоянию между спектральными линиями, то можно сделать формальную замену:

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\Delta\omega\tau}. \quad (1.134)$$

В свою очередь

$$D_x = \frac{1}{T} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cos(k\Delta\omega\tau) dt. \quad (1.135)$$

Найдем отношение

$$\frac{D_k}{\Delta w} = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cos(k\Delta w \tau) d\tau = S^*(k\Delta w). \quad (1.136)$$

Это – функция  $k\Delta w$ , обладающая свойствами:

$$S^*(-k\Delta w) = S^*(k\Delta w),$$

то есть  $S^*(k\Delta w)$  - четная функция своего аргумента, кроме того, она неотрицательна.

Перейдем от  $D_k$  к введенной нами функции:

$$D_k = \Delta w S^*(k\Delta w)$$

$$S^*(k\Delta w) = \frac{1}{2} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cos(k\Delta w \tau) d\tau, \quad (1.137)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^*(k\Delta w) e^{ik\Delta w \tau} \Delta w. \quad (1.138)$$

Устремим  $\Delta w$  к нулю, а интервал времени  $T$  к бесконечности.  $S^*(k\Delta w)$  при неограниченном увеличении времени наблюдения называется *спектральной плотностью*.

$$\begin{cases} R_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(u) \exp(ju\tau) du \\ S^*(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(u\tau) d\tau. \end{cases} \quad (1.139)$$

Вместо аргумента  $u$  и введем  $w$ :

$$\begin{cases} R_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(w) \exp(jw\tau) dw \\ S^*(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau. \end{cases} \quad (1.140)$$

Спектральная плотность мощности (СПМ) случайного сигнала обладает теми же свойствами: она является неотрицательной и четной функцией частоты.

Для того чтобы АКФ можно было представить в виде Фурье – преобразования от СПМ, переобозначим ее:

$$S(w) = \frac{S^*(w)}{2}. \quad (1.141)$$

В формулах произойдут следующие изменения

$$\begin{cases} R_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(w) \exp(jw\tau) dw \\ S^*(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau. \end{cases} \quad (1.142)$$

Рассмотрим свойства новой спектральной плотности:

$$\cos(w\tau) = \frac{e^{jw\tau} + e^{-jw\tau}}{2};$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(jw\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau. \end{aligned}$$

В первом интеграле сделаем замену аргумента на противоположный по знаку и т.к.  $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ , то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau, \end{aligned}$$

то есть спектральная плотность может быть записана в виде:

$$S(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau. \quad (1.143)$$

Вывод: АКФ и СПМ связаны между собой парой преобразований Фурье.

Сделаем подстановку:  $\exp(jw\tau) = \cos(w\tau) + j\sin(w\tau)$ , тогда

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \cos(w\tau) dw + j \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \sin(w\tau) dw,$$

но так как СПМ является четной функцией, а синус – нечетной, то второй интеграл равен нулю, и тогда

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \cos(w\tau) dw,$$

$$\text{то есть: } \begin{cases} R_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \tau) d\omega \\ S(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau \end{cases} \quad (1.144)$$

Укажем некоторые свойства спектральной плотности мощности. Во-первых, СПМ является четной функцией своего аргумента

$$S(\omega) = S(-\omega),$$

во-вторых, спектральная плотность – неотрицательная функция:

$$S(\omega) \geq 0,$$

и в третьих, вычислим дисперсию сигнала:

$$D_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (1.145)$$

То есть, интеграл от спектральной плотности в бесконечных пределах равен дисперсии (полной мощности) сигнала. Это – условие нормировки.

#### *Частотный диапазон сигнала и способы его определения*

Под частотным диапазоном случайного сигнала понимают такую полосу частот, в которой сосредоточена практически вся его мощность (95 %).

Мощность сигнала – это его дисперсия, значит, в частотном диапазоне содержит 95 % дисперсии. Будем рассматривать только одну ветвь (в соответствии с рисунком 26).

Случайный сигнал будет содержать энергию, соответствующую площади заштрихованной фигуры.

$$\int_{\omega_n}^{\omega_g} S(\omega) d\omega = 0.95 \frac{D_x}{2}. \quad (1.146)$$

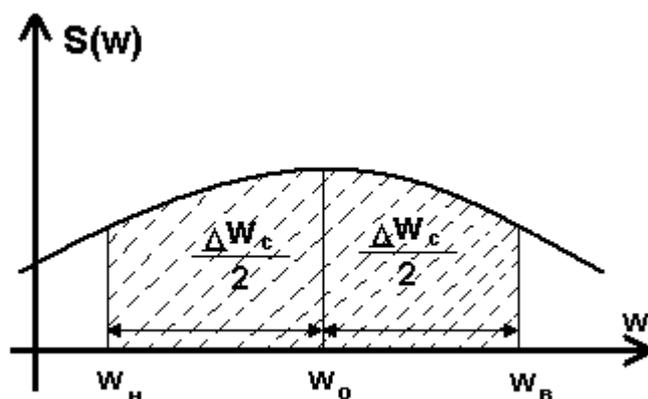


Рисунок 26 – К вопросу об определении частотного диапазона сигнала

Однако это уравнение нельзя использовать для вычисления ширины спектра, так как в него входит два неизвестных.

Существует несколько способов определения частотного диапазона. Рассмотрим первый из них. Предположим, что потери энергии слева и справа от частотного диапазона одинаковы:

$$\int_{-\infty}^{w_n} S(w)dw = 0.025 \frac{D_x}{2} \quad (1.147)$$

$$\int_{w_e}^{\infty} S(w)dw = 0.025 \frac{D_x}{2}.$$

$S(w)$  – монотонная функция, т.е. решение единственно. Ширина частотного диапазона по его верхней и нижней границам:

$$\Delta w_c = w_e - w_n.$$

Та частота, на которой спектральная плотность имеет максимум, называется основной частотой сигнала  $w_0$ .

Если известна основная частота  $w_0$ , то делается предположение о том, что спектр сигнала симметричен относительно этой частоты:

$$\begin{cases} w_e = w_0 + \Delta w_c / 2 \\ w_n = w_0 - \Delta w_c / 2 \end{cases} \quad (1.148)$$

Тогда уравнение (1.146) примет вид

$$\int_{w_0 - \frac{\Delta w_c}{2}}^{w_0 + \frac{\Delta w_c}{2}} S(w)dw = 0.95 \frac{D_x}{2}. \quad (1.149)$$

В этом уравнении имеется единственное неизвестное –  $\Delta w_c$  – эквивалентная ширина спектра мощности, и так как СПМ – монотонная функция, то уравнение имеет одно решение.

Итак, для определения частотного диапазона необходимо следующее.

1. Определить основную частоту  $w_0$ .
2. Решить уравнение и найти эквивалентную ширину спектра мощности.
3. Найти верхнюю и нижнюю границы частотного диапазона.

Возможен и частотный случай, когда нижняя граничная частота равна нулю, и приходится определять только верхнюю частоту диапазона:

$$\int_0^{w_g} S(w)dw = 0.95 \frac{D_x}{2}. \quad (1.150)$$

Здесь единственное неизвестное – верхняя граничная частота, которая численно равна эквивалентной ширине частотного диапазона.

Наибольшее применение на практике получил *формантный* подход к определению частотного диапазона  $\Delta w_c$ .

Согласно этому подходу, вначале определяется ширина частотного диапазона. Под ней понимается величина основания прямоугольника (в соответствии с рисунком 27), построенного на оси частот и имеющего высоту, равную максимальному значению СПМ, а площадь – равную площади фигуры, ограниченной кривой спектральной плоскости.

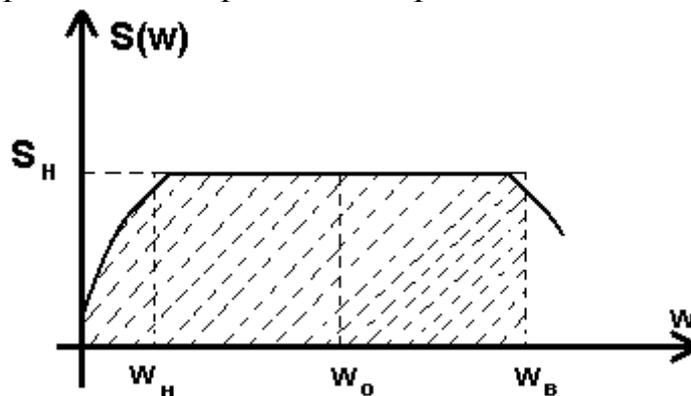


Рисунок 27 – Формантный метод определения частотного диапазона

$$\begin{aligned} \Delta w_c S_H &= \frac{D_x}{2} \\ \Delta w_c &= \frac{D_x}{2S_H} \\ w_n &= w_0 - \frac{\Delta w_c}{2} \\ w_g &= w_0 + \frac{\Delta w_c}{2}. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Достоинством этого подхода является минимум вычислений. На практике часто используют его модификацию:

$$\Delta w_c = \frac{D_x}{2S_n} = \frac{\int_0^{\infty} S(w)dw}{2S_n} \quad (1.152)$$

или

$$\Delta w_c = \frac{\int_0^{\infty} S^2(w)dw}{2S_n^2}. \quad (1.153)$$

Рассмотрим связь между этими двумя способами:

$$\int_0^{\infty} S^2(w)dw = \int_0^{\infty} S(w)S(w)dw \leq S_n \int_0^{\infty} S(w)dw$$

С учетом этого неравенства:

$$\Delta w_{c1} \leq \frac{S_n \int_0^{\infty} S(w)dw}{S_n^2}, \quad \Delta w_{c2} \leq \frac{\int_0^{\infty} S(w)dw}{S_n},$$

но

$$\Delta w_c = \frac{\int_0^{\infty} S(w)dw}{2S_n}, \Rightarrow \Delta w_{c1} \leq \Delta w_c.$$

Это справедливо для любых сигналов. Еще одним способом определения частотного диапазона является так называемый метрологический подход. При этом подходе под частотным диапазоном понимается такой, в котором СПМ  $S(w)$  незначительно отличается от своего наибольшего значения (в соответствии с рисунком 28).

Координаты пересечения линии, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на  $S_n - \delta$ , с кривой  $S(w)$  дают граничные частоты  $W_H$   $W_B$ .

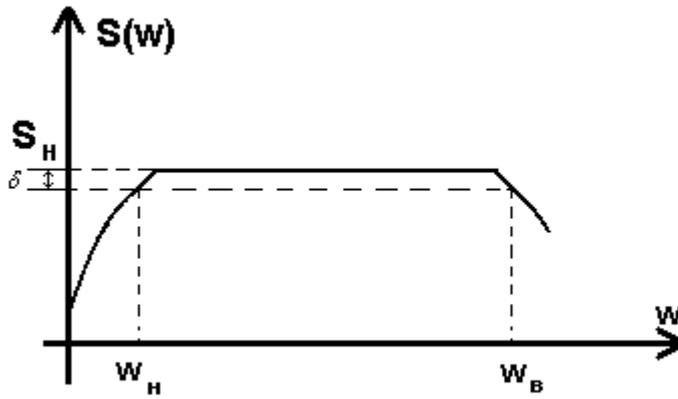


Рисунок 28 – Метрологический подход к определению частотного диапазона

$$\begin{aligned}
 S_H - \delta &= S(w); & 1 - \gamma &= \frac{S(w)}{S_H}; \\
 \gamma &= 5 - 10\% \\
 1 - \frac{\delta}{S_H} &= \frac{S(w)}{S_H}. & & (1.154)
 \end{aligned}$$

Этот способ дает заниженные значения эквивалентной ширины спектра мощности.

В зависимости от того, в каком соотношении находятся между собой  $w_0$  и ширина спектра, различают два типа сигналов:

Широкополосные, у которых ширина частотного диапазона значительно превышает значение основной частоты:  $\Delta w_c \gg w_0$ ;

Узкополосные, у которых основная частота намного больше эквивалентной ширины спектра мощности.

Укажем здесь еще одно свойство всех стационарных случайных процессов, которое носит название *соотношения неопределенности*.

Произведение интервала корреляции случайного сигнала на эквивалентную ширину спектра его есть величина постоянная, значение которой зависит от способов задания этих характеристик:

$$\tau_k \Delta w_c = const. \quad (1.155)$$

Например, рассмотрим широкополосный сигнал с нулевой основной частотой  $w_0 = 0$ , тогда  $S_H = S(0)$ . Мы знаем, что

$$\begin{aligned}
 \Delta w_c &= \frac{\int_0^{\infty} S(w) dw}{2S_H} = \frac{D_x}{S_H}, \\
 w_0 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau,$$

$$S(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) d\tau = \frac{D_x}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau = \frac{D_x \tau_x}{\pi} = S_H$$

$$\Delta\omega_c = \frac{D_x \pi}{2D_x \tau_k} = \frac{\pi}{2\tau_k}; \text{ тогда } \Delta\omega_c \tau_k = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим теперь некоторые специальные виды сигналов.

### Полосовые шумы

*Полосовым шумом* называется сигнал, СПМ которого постоянна на заданной полосе частот, а вне ее равна нулю (в соответствии с рисунками 29 и 30).

$\omega_0$  – частота, делящая частотный диапазон пополам:

$$\omega_0 = \frac{\omega_H + \omega_B}{2};$$

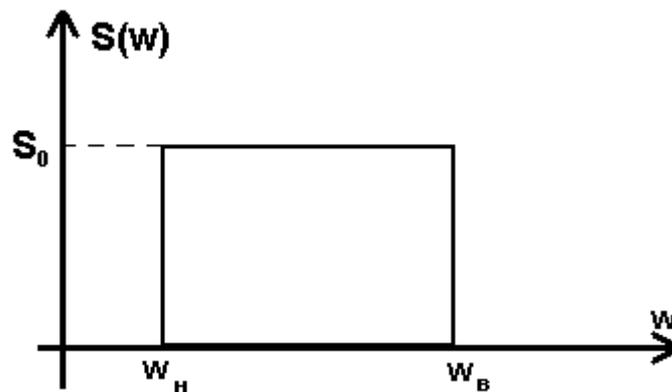


Рисунок 29 – Спектр узкополосного сигнала

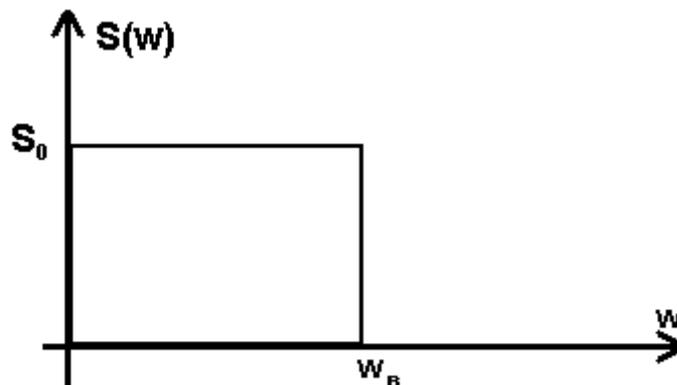


Рисунок 30 – Спектр широкополосного сигнала

$S_0$  – интенсивность шума.

Основной частотой широкополосного сигнала считается нулевая частота.

Рассмотрим узкополосный шум. Выразим его интенсивность через дисперсию:

$$\Delta w_c S_0 = \frac{D_x}{2} - \text{это площадь прямоугольника на рисунке 29,}$$

$$S_0 = \frac{D_x}{2\Delta w_c} = \frac{D_x}{2(w_d - w_n)}.$$

Рассмотрим функцию корреляции полосового шума.

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \cos(w\tau) dw = 2 \int_0^{\infty} S(w) \cos(w\tau) dw = \\ &= 2 \int_{w_n}^{w_g} S(w) \cos(w\tau) dw = 2 \int_{w_n}^{w_g} S_0 \cos(w\tau) dw = \\ &= \frac{2D_x}{2(w_g - w_n)} \int_{w_n}^{w_g} \cos(w\tau) dw = \frac{D_x}{w_g - w_n} \left. \frac{\sin(w\tau)}{\tau} \right|_{w_n}^{w_g} = \\ &= \frac{D_x}{\tau(w_g - w_n)} \sin\left(\frac{w_g - w_n}{2} \tau\right) \cos\left(\frac{w_g + w_n}{2} \tau\right), \end{aligned}$$

НО  $w_g - w_n = \Delta w_c$ ,  $(w_g + w_n)/2 = w_0$ , ТОГДА

$$R_x(\tau) = D_x \frac{2}{\Delta w_c \tau} \sin\left(\frac{\Delta w_c}{2} \tau\right) \cos(w_0 \tau),$$

ИЛИ

$$R_x(\tau) = D_x \frac{\sin\left(\frac{\Delta w_c}{2} \tau\right)}{\frac{\Delta w_c}{2} \tau} \cos(w_0 \tau). \tag{1.156}$$

АКФ полосового шума имеет колебательный, затухающий характер. Рассмотрим вопрос: при каких условиях отсчеты шума будут некоррелированными? АКФ будет равной нулю, когда либо синус, либо косинус равны нулю:

а)  $\sin\left(\frac{\Delta w_c}{2} \tau\right) = 0$ , когда  $\frac{\Delta w_c}{2} \tau = k\pi$ ,

$k=1,2,\dots$  (при  $k=0$  значения АКФ равно единице);

$$\tau = 2k\pi / \Delta w_c; \quad w = 2\pi f; \quad \Delta w_c = 2\pi \Delta f_c, \tau = k / \Delta f_c. \quad (1.157)$$

Таким образом, отсчеты шума будут некоррелированными, если их брать через интервал  $1 / \Delta f_c$ :

$$\text{б) } \cos(w_0 \tau) = 0; \quad w_0 \tau = (2k + 1)\pi / 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tau = \frac{(2k + 1)\pi}{2w_0}; \quad w_0 = 2\pi f;$$

$$\tau = \frac{(2k + 1)\pi}{2 * 2\pi f_0} = \frac{2k + 1}{4f_0}. \quad (1.158)$$

Найдем шаг по аргументу:

$$\frac{2k + 1}{4f_0} - \frac{(2k + 1) + 1}{4f_0} = \frac{2k + 1 - 2k + 2 - 1}{4f_0} = \frac{1}{2f_0}. \quad (1.159)$$

Таким образом, получены два шага дискретизации, при которых отсчеты сигнала становятся некоррелированными. Из них надо брать тот, который имеет наименьшее значение, для узкополосных сигналов это -  $1 / 2f_0$  – наименьший шаг, при котором отсчеты некоррелированы.

Рассмотрим теперь широкополосный шум.

$$w_H = 0; \quad w_c = \Delta w_c.$$

Для определения АКФ сигнала воспользуемся формулой для функции корреляции узкополосного шума (1.156), положив  $w_H = 0$ .

$$R_x(\tau) = \frac{D_x}{w_c \tau} \sin(w_c \tau) = D_x \frac{\sin(\Delta w_c \tau)}{\Delta w_c \tau}$$

$$\sin(\Delta w_c \tau) = 0$$

$$\Delta w_c \tau = k\pi; \quad \tau = \frac{k\pi}{\Delta w_c \tau} = \frac{k\pi}{2\pi \Delta f_c} = \frac{k}{2f_c}.$$

Шаг дискретизации по времени для получения некоррелированных отсчетов составляет

$$\Delta t = \frac{1}{2\Delta f_c}. \quad (1.160)$$

Белый шум

Белый шум – это такой стационарный случайный сигнал спектральная плотность мощности которого постоянна на любой частоте (в соответствии с рисунком 31).

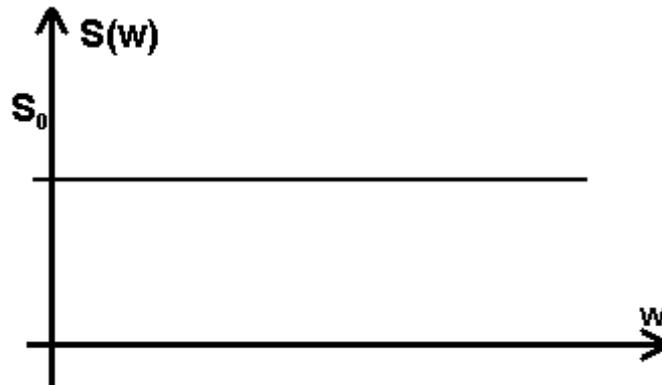


Рисунок 31 – Спектр белого шума

Понятие белого шума аналогично понятию белого света, содержащего все спектральные составляющие. Белый шум представляет собой математическую абстракцию, так как площадь под прямой  $S(w_0) = S_0$  бесконечна (а следовательно, бесконечна и дисперсия, т.е. полная мощность сигнала).

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \exp(jw\tau) dw = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jw\tau) dw = \\
 &= 2\pi S_0 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jw\tau) dw \right\} = 2\pi S_0 \delta(\tau).
 \end{aligned}$$

$2\pi S_0 = N$  - интенсивность белого шума (как уже отмечалось, о мощности белого шума говорилось бессмысленно).

Итак, корреляционная функция белого шума имеет вид

$$R_x(\tau) = N\delta(\tau), \quad (1.161)$$

по виду АКФ совпадает с дельта – функцией, и все ее свойства аналогичны свойствам дельта – функции:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0 \\ \infty, & \tau = 0 \end{cases}.$$

Отсчеты сигнала, являющегося белым шумом, взятые с любым шагом дискретизации, отличным от нуля, всегда некоррелированы. То есть, если имеется возможность генерировать белый шум, то не представляется

сложным получать последовательность случайных величин, не коррелированных во времени.

Если СПМ случайного сигнала постоянна в широком диапазоне частот, перекрывающем полосу пропускания динамической системы, то по отношению к этой данный сигнал можно принять за белый шум.

Иногда для на практике вводится нормированная СПМ:

$$S_n(w) = \frac{S(w)}{D_x} \quad (1.162)$$

по аналогии с нормированной АКФ.

$$\begin{cases} R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \exp(jw\tau) dw \\ S(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau. \end{cases}$$

Разделим левую и правую части на  $D_x$ , получим:

$$\begin{cases} \rho_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(w) \exp(jw\tau) dw \\ S_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau. \end{cases}$$

То есть нормированные СПМ и АКФ связаны между собой той же парой преобразований Фурье, что и ненормированные характеристики.

Все свойства нормированной спектральной плотности полностью аналогичны свойствам СПМ (четная, неотрицательная), кроме условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_n(w) dw = 1.$$

#### *Неканоническая модель стационарного случайного сигнала (по Чернецкому)*

Пусть имеем стационарный случайный сигнал  $X(t)$ , который попытаемся описать моделью  $X(t)$ , определяемую критериями

$$M[X(t)] = M[X_M(t)], \quad (1.163)$$

$$D[X(t)] = D[X_M(t)], \quad (1.164)$$

$$R_x(\tau) = R_M(\tau). \quad (1.165)$$

Модель стационарного случайного процесса можно предположить в следующем виде:

$$X(t) = m_x + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t), \quad (1.166)$$

где  $b_1, b_2, \omega$  – центрированные, независимые случайные величины. Эту модель можно представить в виде

$$X(t) = m_x + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} * \sin\left(\omega t + \arctg\left(\frac{b_1}{b_2}\right)\right).$$

То есть, случайный процесс представляет аддитивную смесь постоянной составляющей и суммы гармоник со случайными амплитудами, частотами и фазами.

В данной модели компактность достигается за счет того, что частота носит случайный характер. В этом и заключается ее основное отличие от канонической модели Пугачева.

Для центрированного случайного сигнала модель имеет вид.

$$\overset{0}{X}_M(t) = b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t).$$

Найдем дисперсию модели

$$D_M = M\left[\overset{0}{X}_M(t)^2\right];$$

$$\begin{aligned} \overset{0}{X}_M(t) &= b_1^2 \sin^2(\omega t) + 2b_1 b_2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) + b_2^2 \cos^2(\omega t) = \\ &= b_1^2 \sin^2(\omega t) + b_1 b_2 \sin(2\omega t) + b_2^2 \cos^2(\omega t) = \\ &= b_1^2 \sin^2(\omega t) + b_1 b_2 \sin(2\omega t) + b_2^2 b_2^2 \sin(\omega t) = \\ &= (b_1^2 - b_2^2) \sin^2(\omega t) + b_2^2 + b_1 b_2 \sin(2\omega t). \end{aligned}$$

В соответствии с этой формулой находим дисперсию:

$$\begin{aligned} D_M &= M[(b_1^2 - b_2^2)] * M[\sin^2(\omega t)] + M[b_2^2] + M[b_1] * M[b_2] * M[si] \\ &\{M[b_1^2] - M[b_2^2]\} * M[\sin^2(\omega t)] + M[b_2^2] + 0 \end{aligned}$$

т.к  $b_1$  и  $b_2$  центрированы.

Должно выполняться условие:  $D_M = D_x$ , то есть

$$\{M[b_1^2] - M[b_2^2]\} * M[\sin^2(\omega t)] + M[b_2^2] = D_x. \quad (1.167)$$

Левая часть не должна зависеть от времени. Это выполняется, когда  $M[b_1^2] = M[b_2^2]$ , тогда  $M[b_2^2] = D_x$ , таким образом

$$M[b_1^2] = M[b_2^2] = D_x.$$

То есть, случайные величины, входящие в модель Чернецкого могут быть любыми, но непременно центрированными и с равными дисперсиями, которые, в свою очередь, должны быть равными дисперсии моделируемого сигнала.

Напомним еще об одном требовании, которому должна удовлетворять модель – равенства корреляционных функций исследуемого сигнала и модели:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_M(\tau) \\ R_M(\tau) &= M\left[\overset{0}{X}_M(t)\overset{0}{X}_M(t-\tau)\right]; \\ \overset{0}{X}_M(t) &= b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t); \\ \overset{0}{X}_M(t-\tau) &= b_1 \sin(\omega(t-\tau)) + b_2 \cos(\omega(t-\tau)); \\ \overset{0}{X}_M(t)\overset{0}{X}_M(t-\tau) &= b_1^2 \sin(\omega t)\sin(\omega(t-\tau)) + b_1 b_2 \sin(\omega t)\cos(\omega(t-\tau)) \\ &+ b_1 b_2 \cos(\omega t)\sin(\omega(t-\tau)) + b_2^2 \cos(\omega t)\cos(\omega(t-\tau)) \\ R_M(\tau) &= M[b_1^2]M[\sin(\omega t)\sin(\omega(t-\tau))] + \\ &+ M[b_1]M[b_2]M[\sin(\omega t)\cos(\omega(t-\tau))] + \\ &+ M[b_1]M[b_2]M[\cos(\omega t)\sin(\omega(t-\tau))] + \\ &M[b_2^2]M[\cos(\omega t)\cos(\omega(t-\tau))] \end{aligned}$$

Но так как  $b_1$  и  $b_2$  являются центрированными случайными величинами, то их математическое ожидания равны нулю, и тогда

$$\begin{aligned} R_M(\tau) &= M[b_1^2]M[\sin(\omega t)\sin(\omega(t-\tau))] + \\ &+ M[b_2^2]M[\cos(\omega t)\cos(\omega(t-\tau))] = \\ &= D_x M[\sin(\omega t)\sin(\omega(t-\tau))] + D_x M[\cos(\omega t)\cos(\omega(t-\tau))] = \\ &= D_x M[\cos(\omega t)] \end{aligned}$$

Следует отметить, что данные функции корреляции удовлетворяют условию стационарности (не зависят от времени, но лишь от временного сдвига между сечениями процесса) и имеет одинаковую с исследуемым сигналом дисперсию.

$$R_x(\tau) = D_x M[\cos(w\tau)]. \quad (1.168)$$

Зададимся теперь вопросом, как правильно выбрать значение частоты  $w$ ?

Параметры же  $b_1$  и  $b_2$  выбираются из условия равенства дисперсий оцениваемого сигнала и модели.

Для этого разделим левую и правую части выражения для АКФ на  $D_x$ .

$$\rho_x(\tau) = M[\cos(w\tau)].$$

Пусть  $f(w)$  – плотность вероятности распределения случайной величины  $w$ , тогда

$$M[\cos(w\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \cos(w\tau) dw.$$

Но нормированная АКФ равна

$$\rho_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \cos(w\tau) dw.$$

Из этого интегрального уравнения можно найти плотность распределения  $f(w)$  случайной величины  $w$ .

Однако, памятуя о том, что нормированная спектральная плотность стационарного случайного процесса и его нормированная АКФ связаны друг с другом парой преобразований Фурье:

$$S_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau$$

$$R_x(\tau) = D_x M[\cos(w\tau)].$$

Корреляционная функция не зависит от выбора параметров  $b_1$  и  $b_2$ , но лишь от случайной частоты  $w$ . Напрашивается вывод о том, что плотность распределения случайной величины  $w$  численно должна быть равна

$$f(w) = S(w). \quad (1.169)$$

То есть, случайные величины  $b_1$  и  $b_2$  и  $w$ , входящие в модель Чернецкого, должны представлять собой центрированные и независимые случайные величины. При этом дисперсии величин  $b_1$  и  $b_2$  должны быть равными друг другу и равны дисперсии исследуемого сигнала.

Плотность распределения случайной величины  $w$  должна быть при этом равна нормированной спектральной плотности моделируемого сигнала.

*Математическое описание систем случайных сигналов в частотной области*

Пусть имеем два стационарных случайных сигнала  $X(t)$  и  $Y(t)$ . Каждый из них характеризуется своей корреляционной функцией

Для описания свойств системы сигналов в частотной области используется взаимная спектральная плотность мощности (ВСП), которая определяется как преобразование Фурье от взаимной корреляционной функции:

$$S_{yx}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau. \quad (1.170)$$

Рассмотрим свойства ВСП:

$$S_{yx}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \cos(w\tau) d\tau - j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \sin(w\tau) d\tau. \quad (1.171)$$

Взаимная спектральная плотность является комплексной функцией своего аргумента, ее мнимая часть не равна нулю.

$$\operatorname{Re} S_{yx}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \cos(w\tau) d\tau - \text{вещественная часть ВСП,}$$

$$\operatorname{Im} S_{yx}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \sin(w\tau) d\tau - \text{мнимая часть ВСП.}$$

Вещественная часть ВСП является четной, а мнимая – нечетной функцией частоты.

$$S_{yx}(w) = \operatorname{Re} S_{yx}(w) - j \operatorname{Im} S_{yx}(w) = |S_{yx}(w)| \exp(-j\varphi(w)),$$

где

$|S_{yx}(w)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 S_{yx}(w) + \operatorname{Im}^2 S_{yx}(w)}$  - амплитудно – частотный спектр сигнала, четная функция частоты,

$$\varphi(w) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im} S_{yx}(w)}{\operatorname{Re} S_{yx}(w)} \right) - \text{фаза-частотный спектр.}$$

В формуле (1.170) вместо  $w$  подставим  $-w$ :

$$S_{yx}(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \exp(jw\tau) d\tau.$$

В правой части переменную интегрирования заменим на  $-\tau$

$$S_{yx}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(-\tau) \exp(-jw\tau) d\tau$$

$$R_{yx}(-\tau) = R_{yx}(\tau), \text{ тогда}$$

$$S_{yx}(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau = S_{xy}(w).$$

Таким образом,

$$S_{yx}(-w) = S_{xy}(w).$$

Взаимная спектральная плотность удовлетворяет свойству

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yx}(w) \exp(jw\tau) dw.$$

То есть, взаимная корреляционная функция и ВСП связаны между собой парой преобразований Фурье.

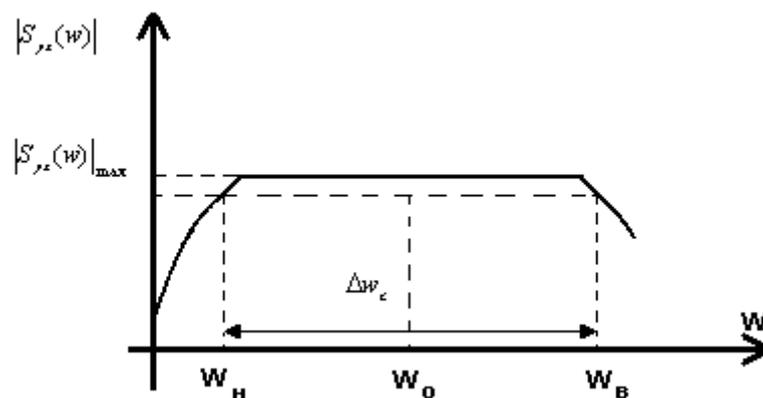


Рисунок 32 – К определению ширины взаимного спектра

Та частота, на которой модуль ВСП достигает максимума, называется основной частотой взаимного спектра.

Весь взаимный спектр располагается вблизи этой частоты. Тот диапазон частот, в котором модуль взаимной спектральной плотности мало отличается от своего наибольшего значения, носит название частного диапазона взаимного спектра.

Ширина его равна ширине взаимного спектра:

$$\Delta w = w_g - w_n .$$

### Определение ширины взаимного спектра

Ширина взаимного спектра может быть определена одним из двух следующих способов:

$$1) \Delta w_c = \frac{\int_0^{\infty} |S_{yx}(w)| dw}{|S_{yx}(w)|_{\max}}, \quad (1.175)$$

$$2) \Delta w_c = \frac{\int_0^{\infty} |S_{yx}(w)|^2 dw}{|S_{yx}(w)|_{\max}^2}. \quad (1.176)$$

Второй способ получил большее распространение, так как первый интеграл часто расходится.

Взаимный спектр несет информацию о взаимосвязи сигналов в частотной области. Наибольшая такая взаимосвязь наблюдается при частоте  $w_0$ .

Ширина взаимного спектра указывает на тот частотный диапазон, где взаимосвязь между сигналами достаточно велика.

### *Анализ линейных динамических систем, работающих при входных случайных воздействиях*

Пусть имеем ЛДС с импульсной переходной характеристикой  $h(\tau)$ , на вход которой поступает случайный процесс  $X(t)$ .

Надо уметь находить выходной сигнал и определять все его свойства, если известны характеристики входного сигнала, т.е. находить

$$M[Y(t)], D[Y(t)], R_y(t, t + \tau), R_{yx}(t, t + \tau).$$

Они будут зависеть от свойств входного сигнала и характеристик ЛДС.

$$Y(t) = \int_0^t h(\tau) X(t - \tau) d\tau. \quad (1.177)$$

$$1. \quad M[Y(t)] = \int_0^t h(\tau) m_x(t - \tau) d\tau = m_y(t) \quad (1.178)$$

$$\overset{0}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = \int_0^t h(\tau) \{X(t-\tau) - m_x(t-\tau)\} d\tau \quad (1.179)$$

$$\overset{0}{Y}(t) = \int_0^t h(\tau) \overset{0}{X}(t-\tau) d\tau$$

$$\overset{0}{Y}(t=u) = \int_0^{t-u} h(\tau_1) \overset{0}{X}(t+u-\tau_1) d\tau_1$$

$$\overset{0}{Y}(t) \overset{0}{Y}(t+u) = \int_0^t \int_0^{t+u} h(\tau) h(\tau_1) \overset{0}{X}(t-\tau) \overset{0}{X}(t+u-\tau) d\tau d\tau_1 .$$

2. Находим математические ожидания левой и правой частей:

$$R_y(t, t+u) = \int_0^t \int_0^{t+u} h(\tau) h(\tau_1) R_x(t-\tau, t+u-\tau) d\tau d\tau_1 . \quad (1.180)$$

Найдем дисперсию выходного сигнала, для этого положим  $u=0$ :

$$3. \quad D[Y(t)] = \int_0^t \int_0^t h(\tau) h(\tau_1) R_x(t-\tau, t-\tau) d\tau d\tau_1 , \quad (1.181)$$

то есть, чтобы отыскать дисперсию выходного сигнала необходимо знать АКФ входного.

4. взаимная корреляционная функция:

$$R_{yx}(t, t+u) = M \left[ \overset{0}{Y}(t) \overset{0}{X}(t+u) \right] = \int_0^t h(\tau) R_x(t-\tau, t+u-\tau) d\tau . \quad (1.182)$$

Выходной сигнал стационарной ЛДС при входном нестационарном сигнале будет нестационарным.

Иногда используют следующий подход. Входной сигнал представляют в виде канонической модели

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t) ,$$

тогда выходной сигнал:

$$Y(t) = \int_0^t h(\tau) m(t-\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \int_0^t h(\tau) \varphi_k(t-\tau) d\tau \quad (1.183)$$

$$\psi_k(t) = \int_0^t h(\tau) \varphi_k(t-\tau) d\tau$$

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \psi_k(t) .$$

Если на входе линейной динамической системы имеем каноническую модель входного сигнала, то на выходе получаем каноническую модель

выходного сигнала с теми же коэффициентами разложения. Отличаются только координатные функции.

Пусть входной сигнал является стационарным. Рассмотрим характеристики выходного сигнала системы.

$$m_y(t) = \int_0^t h(u)m_x(u)du = m_x \int_0^t h(u)du . \quad (1.184)$$

Вывод: выходной сигнал стационарной ЛДС при стационарном входном сигнале не стационарен по математическому ожиданию.

$$D_y(t) = \int_0^t \int_0^t h(\tau)h(\tau_1)R_x(\tau, \tau_1)d\tau d\tau_1 \quad (1.185)$$

$$R_y(t, t+u) = \int_0^t \int_0^{t+u} h(\tau)h(\tau_1)R_x(u - \tau_1 + \tau)d\tau d\tau_1 . \quad (1.186)$$

По автокорреляционной функции выходной сигнал не стационарен при стационарном входном.

Взаимно–корреляционная функция:

$$R_{yx}(t, t+u) = \int_0^t h(\tau)R_x(u + \tau)d\tau . \quad (1.187)$$

То есть, входной и выходной сигналы нестационарно связаны.

Рассмотрим теперь установившийся ( статический) режим работы ЛДС, устремив верхний предел интегрирования к бесконечности.

$$1. m_y = m_x \int_0^\infty h(u)du ; \quad (1.188)$$

$$2. D_y = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau)h(\tau_1)R_x(\tau_1 - \tau)d\tau d\tau_1 ; \quad (1.189)$$

$$3. R_y(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau)h(\tau_1)R_x(u - \tau_1 + \tau)d\tau d\tau_1 ; \quad (1.190)$$

$$4. R_{yx}(u) = \int_0^\infty h(\tau)R_x(u + \tau)d\tau . \quad (1.191)$$

В установившемся режиме работы выходной сигнал ЛДС при стационарном входном является стационарным и стационарно связанным со входным.

Спектральная плотность мощности выходного сигнала определяется выражением

$$S_y(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R_y(u) \exp(jwu)du .$$

Подставим сюда выражение для АКФ:

$$S_y(w) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau)h(\tau_1) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R_x(u - \tau_1 + \tau) \exp(-jwu) du \right\} d\tau d\tau_1.$$

Рассмотрим интеграл в скобках:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} u - \tau_1 + \tau \\ u = u_1 + \tau_1 - \tau \\ du = du_1 \\ u_g = \infty; u_n = -\infty \end{aligned} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R_x(u) \exp(-jw(u + \tau_1 - \tau)) du = \\ & = \exp(jw\tau) \exp(-jw\tau_1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R_x(u) \exp(-jwu) du = \\ & = S_x(w) \exp(jw\tau) \exp(-jw\tau_1) \end{aligned}$$

– подставим в исходный интеграл

$$\begin{aligned} S_y(w) &= S_x(w) \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau)h(\tau_1) \exp(-jw\tau_1) \exp(jw\tau) d\tau d\tau_1 = \\ &= S_x(w) \left\{ \int_0^\infty h(\tau_1) \exp(-jw\tau_1) d\tau_1 \right\} \left\{ \int_0^\infty h(\tau) \exp(jw\tau) d\tau \right\} = \\ & S_x(w) W(jw) W(-jw) = S_x(w) |W(jw)|^2. \end{aligned} \quad (1.192)$$

То есть, спектральная плотность мощности выходного сигнала ЛДС при подаче на нее стационарного случайного сигнала связана с СПМ выходного сигнала через квадрат модуля частотной характеристики.

Если искать дисперсию, АКФ и ВКФ по соотношениям (1.189), (1.190) и (1.191), то придется иметь с двойными интегралами, в то время как эти характеристики можно найти проще, пользуясь найденной зависимостью (1.192):

$$D_y = \int_{-\infty}^\infty S_y(w) dw = \int_{-\infty}^\infty S_x(w) |W(jw)|^2 dw, \quad (1.193)$$

то есть дисперсия, так же как и СПМ, зависит не от всей частотной характеристики, а только от АЧХ.

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^\infty S_y(w) \exp(jw\tau) dw = \int_{-\infty}^\infty S_x(w) |W(jw)|^2 \exp(jw\tau) dw.$$

Рассмотрим, какое практическое применение имеет найденная зависимость. Спектр выходного сигнала зависит от СПМ выходного и амплитудно-частотной характеристики системы.

Пусть на выход ЛДС подается белый шум, тогда

$$S_y(w) = S_0 = const, \quad (1.194)$$

$$S_y(w) = S_0 |W(jw)|^2,$$

то есть СПМ выходного сигнала зависит только от квадрата модуля частотной характеристики системы. Меняя частотную характеристику, можно получать сигналы с различными спектрально-корреляционными свойствами, окрашенные шумы. Это очень важный вывод, так как многие задачи планирования эксперимента решаются имитационным моделированием, которое предполагает, в свою очередь, использование в качестве исследуемых сигналов случайных процессов с заданными спектральными характеристиками (для проверки свойств синтезируемых фильтров, систем, и т.д.).

$$R_{yx}(u) = \int_0^{\infty} h(\tau) R_x(u + \tau) d\tau. \quad (1.195)$$

Пусть мы определили АКФ входного сигнала и функцию взаимной корреляции между входным и выходным сигналами. Соотношение (1.95) можно использовать для определения ИПХ исследуемой системы. Найдем ВКФ между входным  $X(t)$  и выходным  $Y(t)$  сигналами системы, заменив в соотношении (1.195)  $u$  аргумента знак на противоположный:

$$R_{yx}(-u) = \int_0^{\infty} h(\tau) R_x(-u + \tau) d\tau \quad (1.196)$$

$$R_{xy}(u) = \int_0^{\infty} h(\tau) R_x(u - \tau) d\tau. \quad (1.197)$$

Пусть на вход системы подается стационарный белый шум. Его корреляционная функция:

$$R_x(\tau) = N\delta(\tau), R_x(u - \tau) = N\delta(u - \tau),$$

$$R_{xy}(u) = N \int_0^{\infty} h(\tau) \delta(u - \tau) d\tau.$$

Согласно фильтрующему свойству дельта – функции:

$$R_{xy}(u) = N * h(u),$$

то есть вид ВКФ совпадает с видом импульсной переходной характеристики ЛДС.

$$h(u) = \frac{R_{xy}(u)}{N}. \quad (1.198)$$

Соотношение (1.198) можно использовать как алгоритм определения ИПХ.

Далее подается тестовый сигнал – белый шум и вычисляются взаимная спектральная плотность входного и выходного сигналов.

$$S_{xy}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(u) \exp(-jwu) du =$$

$$= \int_0^{\infty} h(\tau) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(u-\tau) \exp(-jwu) du \right\} dt.$$

Внутренний интеграл:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(u_1) e^{-jw(u_1+\tau)} du_1 = \left. \begin{array}{l} u-\tau = u \\ u = u_1 + \tau \\ du = du_1 \end{array} \right|_{u_{1n} = -\infty}^{u_{1e} = \infty} =$$

$$= e^{-jw\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(u_1) e^{-jwu_1} du_1 \right\} = e^{-jw\tau} S_x(w)$$

подставляем в исходный интеграл:

$$S_{xy}(w) = S_x(w) \int_0^{\infty} h(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau = S_x(w) * W(jw). \quad (1.199)$$

То есть взаимная спектральная плотность между входными и выходными сигналами связана с СПМ входного сигнала через частотную характеристику системы.

Вещественная частотная характеристика оказывает влияние на вещественную часть ВСП и не оказывает влияния на мнимую часть ВСП, и наоборот.

Вывод: частотную характеристику системы можно определять, зная взаимную спектральную плотность входного и выходного сигналов, а также СПМ входного сигнала.

$$W(jw) = \frac{S_{xy}(w)}{S_x(w)} \quad (1.200)$$

Любой сигнал можно представить как аддитивную смесь полезного сигнала и помехи:

$$X(t) = S(t) + \overset{0}{X}(t) \quad (1.201)$$

Выходной сигнал системы:

$$Y(t) = m_y(t) + \overset{0}{Y}(t). \quad (1.202)$$

КДС осуществляет преобразование, причем

$$m_y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)S(\tau)d\tau, \quad D_y = D \begin{bmatrix} \overset{0}{Y} \end{bmatrix}.$$

$D_y = \min$  – условие минимума помехи.

Зададимся вопросом, что надо сделать для того, чтобы значение дисперсии выходного сигнала понизилось (а значит, и уменьшилось значение помехи)?

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(w)dw = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w)|W(jw)|^2 dw = 2 \int_0^{\infty} S_x(w)|W(jw)|^2 dw. \quad (1.202)$$

Пусть максимальное значение СПМ входного сигнала  $S_{xH}$ , тогда  $S(w) \leq S_{xH}$ .

$$D_y = s \int_0^{\infty} S_x(w)|W(jw)|^2 dw \leq 2S_{xH} \int_0^{\infty} |W(jw)|^2 dw. \quad (1.203)$$

Это оценка дисперсии сверху, то есть оценка той величины, которой она не превышает.

Пусть эквивалентная ширина спектра мощности сигнала  $\overset{0}{X}(t)$  будет

$$\Delta w_c = \frac{D_x}{2S_H}.$$

Пусть ширина полосы пропускания ЛДС определяется выражением

$$\Delta w_c = \frac{\int_0^{\infty} |W(jw)|^2 dw}{|W(jw)|_H^2},$$

$$S_{xH} = \frac{D_x}{2\Delta w_c},$$

$$\int_0^{\infty} |W(jw)|^2 dw = \Delta w_c |W(jw)|_H^2.$$

Подставим это выражение для дисперсии (1.203):

$$\frac{2D_u}{2\Delta w_c} \Delta w_\phi |W(jw)|^2 = D_x |W(jw)|^2 \frac{\Delta w_\phi}{\Delta w_c}$$

$$D_y \leq D_x |W(jw)|^2 \frac{\Delta w_\phi}{\Delta w_c}. \quad (1.204)$$

Выражение (1.204) определяет оценку сверху дисперсии выходного сигнала.

Выводы.

1. Мощность выходной помехи тем больше, чем больше мощность входной помехи.

2. Ширину полосы пропускания ЛДС нужно делать как можно меньше ширины спектра мощности сигнала, стремится к тому, чтобы отношение  $\frac{\Delta w_\phi}{\Delta w_c}$  было как можно меньше.

Перепишем соотношение по-другому:

$$\tau_u \Delta w_\phi = const, \quad \tau_k \Delta w_c = const$$

$$\frac{\Delta w_\phi}{\Delta w_c} = \frac{\tau_k}{\tau_u} = const, \quad \frac{\Delta w_\phi}{\Delta w_c} = C \frac{\tau_k}{\tau_u}.$$

$C$  – константа, которая зависит от способа задания величин  $\Delta w_\phi, \Delta w_c, \tau_k, \tau_u$ .

$$D_y = C * D_x |W(jw)|^2 \frac{\tau_k}{\tau_u}. \quad (1.205)$$

Соотношения (1.204) и (1.205) используется на равных основаниях.

Вывод: для наилучшего подавления помехи нужно увеличивать длительность ИПХ системы по сравнению с интервалом корреляции исследуемого процесса. Но увеличивая длительность ИПХ, мы ухудшаем быстродействие.

### *Нормализация стационарных случайных процессов линейными динамическими системами*

Пусть  $X(t)$ - стационарный случайный сигнал с произвольным законом распределения. Он подается на вход ЛДС с импульсивной переходной характеристикой  $h(\tau)$ .

В становившемся режиме работы выходной сигнал системы определяется выражением:

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau ,$$

$\tau_u$  - длительность ИПХ, то есть

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau . \quad (1.206)$$

Разобьем  $\tau_u$  на отдельные промежутки  $\Delta$  (шаг дискретизации)  $N = \frac{\tau_u}{\Delta}$  - число промежутков разбиения.

Для дискретизированного по времени сигнала процесс на выходе системы определится соотношением:

$$Y(t) = \sum_{k=1}^N h(k\Delta)X(t - k\Delta) . \quad (1.207)$$

Выберем шаг дискретизации, равный  $\tau_k$  тогда  $N = \frac{\tau_u}{\tau_k}$ ,

$$Y(t) = \sum_{k=1}^N h(k\tau_{kx})X(t - k\tau_{kx}) , \quad (1.208)$$

$$Y_k = h(k\tau_{kx})X(t - k\tau_{kx}) ,$$

или

$$Y_k = C_k X(t - k\tau_{kx}), Y = \sum_{k=1}^N Y_k , \quad (1.209)$$

то есть выходной сигнал представляется в виде суммы случайных величин. Определим свойства этих величин.

$$Y_k = C_k X(t - k\tau_k) ,$$

$$\overset{0}{Y}_k = C_k \overset{0}{X}(t - k\tau_k) .$$

Рассмотрим другое сечение сигнала:

$$\overset{0}{Y}_m = C_m \overset{0}{X}(t - m\tau_k)$$

и корреляционный момент между ними:

$$\begin{aligned}
R[Y_k, Y_m] &= M \left[ \overset{0}{Y}_k, \overset{0}{Y}_m \right] = C_k C_m M \left[ \overset{0}{X}(t - k\tau_k), \overset{0}{X}(t - m\tau_k) \right] = \\
&= C_k C_m R[(m - k)\tau_k] = \begin{cases} C_m^2 R_x(0) = C_m^2 D_x, & k = m \\ 0, & k \neq m. \end{cases}
\end{aligned}$$

То есть  $R_y(\tau_k), R_y(2\tau_k), \dots = 0$  при  $k \neq m$ , таким образом, отчеты  $Y$  некоррелированы.

$Y = \sum_{k=1}^N Y_k$ , пусть  $N = \frac{\tau_u}{\tau_k} \rightarrow \infty$ , тогда по центральной предельной теореме Ляпунова

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(y) = f(y), \quad (1.210)$$

норм

$$N = \frac{\tau_u}{\tau_k}, \quad \frac{\tau_u}{\tau_k} \rightarrow \infty, \quad \frac{\tau_u}{\tau_k} \rightarrow 0.$$

Если длительность ИПХ системы намного превышает значение интервала корреляции входного сигнала, то закон распределения выходного сигнала можно считать нормальным при любом законе распределения входного. Чем больше, тем лучше нормализация и, естественно, тем хуже быстродействие.

$$\tau_u \Delta w_n = const,$$

$$\tau_k \Delta w_c = const,$$

$$\frac{\tau_u}{\tau_k} = C \frac{\Delta w_n}{\Delta w_c}.$$

То есть, чем уже полоса пропускания ЛДС по сравнению с эквивалентной шириной спектра мощности входного сигнала, тем лучше эта система осуществляет нормализацию.

### *Вопросы синтеза оптимальных ЛДС*

При постановке задачи синтеза оптимальной системы, прежде всего, необходимо выбрать критерий оптимальности, задать, в каком смысле данная система является оптимальной.

Таких критериев может быть много, например:

- 1)  $D_y = \min$ - критерий минимума дисперсии помехи;
- 2)  $D_y/D_x = \min$  критерий наилучшей помехозащищенности;

3) пусть  $Y_u(t)$  – идеальное значение выходного сигнала, величина  $Y(t) - Y_u(t)$  характеризует отклонение поведения системы от идеала, для практических целей ее использовать неудобно, так как она знакопеременна, поэтому воспользуемся другой, положительной:  $\{Y(t) - Y_u(t)\}^2$ , но она случайна, так что для характеристики отклонения возьмем ее математическое ожидание:

$$M[\{Y(t) - Y_u(t)\}^2] = \Delta - \text{среднеквадратическая погрешность.}$$

$$\Delta = \min .$$

(1.211)

Соотношение (1.211) определяет так называемый среднеквадратический критерий.

Кроме перечисленных критериев можно использовать интегральный среднеквадратический критерий:

$$\int_0^{\infty} M[\{Y(t) - Y_u(t)\}^2] dt = \min , \quad (1.212)$$

критерий максимального быстродействия и пр.

Можно решать две оптимизационные задачи:

- 1) параметрическая оптимизация;
- 2) строгая оптимизация.

Поставим задачу в общем виде. Есть полезный сигнал  $S(t)$ , который искажается аддитивной помехой  $X(t)$ , то есть входной сигнал имеет вид:

$$X(t) = S(t) + X(t).$$

В идеале выходной сигнал определяется выражением:

$$Y_u(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) S(t - \tau) d\tau . \quad (1.213)$$

В качестве критерия адекватности будем использовать критерий минимума среднеквадратической погрешности.

Определим вид импульсной переходной характеристики системы  $h(\tau)$ , исходя из условия  $\Delta = \min$ , а далее по  $h(\tau)$  станем строить структуру ЛДС.

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau$$

$\Delta$  - функционал от  $\tau$ .

Пусть  $h_0(\tau)$  - ИПХ оптимальный системы.

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h_0(t)X(t-\tau)d\tau. \quad (1.214)$$

Задачу будем решать методом неопределенных множителей Лагранжа:

$$h(\tau) = h_0(\tau) + \lambda h_n(\tau), \quad (1.215)$$

здесь  $\lambda$  – произвольная величина,  $-\infty < \lambda < \infty$ ,  
 $h(\tau)$  - произвольная функция.

$$h(\tau)|_{\lambda=0} = h(\tau), \quad Y(t) = Y_0(t) + \lambda Y_n(t),$$

где

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h_0(t)X(t-\tau)d\tau, \quad (1.216)$$

$$\Delta = M \left[ \{Y_0(t) + \lambda Y_n(t) - Y_u(t)\}^2 \right]. \quad (1.217)$$

Рассмотрим  $\Delta$  как функционал от  $\lambda$ :  $\Delta = f(\lambda)$ ,

$$\Delta|_{\lambda=0} = M \left[ \{Y_0(t) - Y_n(t)\}^2 \right] = \Delta_{\min};$$

$$\frac{d\Delta}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0.$$

Если это условие выполняется для любых  $h_n(\tau)$ , то  $h_0(\tau)$  - ИПХ оптимальной системы.

$$\frac{d\Delta}{d\lambda} = M [2\{Y_0(t) + \lambda Y_n(t) - Y_u(t)\}Y_n(t)] = 0,$$

но  $\lambda = 0$ , тогда

$$\frac{d\Delta}{d\lambda} = M [2\{Y_0(t) - Y_u(t)\}Y_n(t)] = 0,$$

$$M [Y_0(t) - Y_n(t)] - M [Y_n(t) - Y_u(t)] = 0.$$

Подставим выражение для  $Y_0(t)$  (1.214) и  $Y_n(t)$  (1.216):

$$Y_0(t)Y_n(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_0(u)h_n(\tau)X(t-u)X(t-\tau)dud\tau,$$

$$Y_0(t)Y_n(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_0(u)Y_n(t)X(t-u)du$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_0(u) h_n(\tau) X(t-u) X(t-\tau) du d\tau - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_0(u) Y_n(t) X(t-u) du d\tau = 0$$

$$\int_0^{\infty} h_n(u) \left\{ \int_0^{\infty} h_0(u) M[X(t-u) X(t-\tau)] d\tau - M[Y_u(t) X(t-u)] \right\} du = 0.$$

Это условие выполняется при любом виде  $h(\tau)$ , если внутренний интеграл равен нулю.

$$\int_0^{\infty} h_0(u) M[X(t-u) X(t-\tau)] d\tau - M[Y_u(t) X(t-u)] = 0. \quad (1.218)$$

Это – условие синтеза оптимальных динамических систем, из него определяется  $h(\tau)$ - оптимальная ИПХ. Уравнение (1.218) справедливо как для стационарных так и для нестационарных случайных сигналов.

В частном случае, когда полезный сигнал и помеха стационарны, математические ожидания, стоящие в левой части, не будут зависеть от времени, а лишь от разности временных аргументов.

$$M[X(t-u) X(t-\tau)] = \Psi(\tau - u) = \Psi(u - \tau) \quad (1.219)$$

$$M[Y_u(t) X(t-u)] = \gamma(u). \quad (1.220)$$

В этом случае наше уравнение примет вид:

$$\int_0^{\infty} h_0(\tau) \psi(u - \tau) d\tau = \gamma(u). \quad (1.221)$$

Это – классическое уравнение Винера–Хопфа. Оно имеет совершенно определенную физическую интерпретацию и может быть решено в явном виде, тогда величина  $\Psi(t)$  рассматривается как входной сигнал динамической системы, а  $\gamma(t)$  – как выходной.

В изображениях Лапласа соотношение между этими величинами будет выглядеть как:

$$\gamma(p) = W(p) \Psi(p), \text{ отсюда } W(p) = \frac{\gamma(p)}{\Psi(p)},$$

где:

$$\gamma(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pu) \gamma(u) du,$$

$$\Psi(p) = \int_0^{\infty} \Psi(u) \exp(-pu) du.$$

Положим  $\Phi = 0$ , тогда

$$M[X(t) X(t-u)] = \Psi(u),$$

$$M[Y_u(t) X(t-u)] = \gamma(u).$$

Итак, если на выход системы подается аддитивная смесь полезного сигнала и помехи  $X(t) = S(t) + \overset{0}{X}(t)$ , то для синтеза оптимальной системы необходимо знать: сам полезный сигнал  $S(t)$ , автокорреляционную функцию помехи, кроме того, нужно достаточно определенно знать, что именно мы хотим на выходе -  $Y_u(t)$ . По этим данным можно найти функции  $\gamma(u)$  и  $\Psi(u)$ . Затем находим изображения по Лапласу  $\gamma(u)$  и  $\Psi(u)$ . По этим изображениям отыскиваем передаточную функцию  $W(p)$  оптимальной системы, на основе которой и осуществляется ее техническая реализация.

## **2 Статистическая обработка информации**

### **2.1 Задачи статистической обработки информации**

Проблема статистической обработки информации многогранна. Задачи, связанные с ней, имеются и в области управления технологическими процессами, и в области управления производством в целом, они актуальны также в экономике, социологии, при проведении научно-экспериментальных исследований и т.д.

Сама обработка информации необходима для того, чтобы иметь возможность управлять ходом процессов и явлений. На управляемые процессы воздействует бесчисленное множество случайных факторов, которые невозможно учесть, поэтому обработка информации должна иметь статистический характер. Задачей этой статистической обработки является выявление тенденций в развитии тех или иных процессов и явлений и повышении достоверности получаемых сведений.

Задача статистической обработки информации является весьма сложной, многоплановой и требующей больших временных и материальных затрат. Поэтому важна обоснованность требований, предъявляемых к качеству статистической обработки информации-достоверности и оперативности.

### **2.2 Математическое описание объекта измерения. Понятие об объекте измерения и его математическом описании**

Основная задача информационно-измерительной системы (ИИС) в автоматизированной системе управления (АСУ) – представлять информацию об управляемом процессе в таком виде, чтобы обеспечить возможность суждения о качестве его протекания и выработать соответствующее воздействие. Для получения такой информации (которую в дальнейшем станем называть *объектом измерения*) совокупность сигналов, характеризующая управляемый процесс, подвергается обработке в ИИС.

Объект измерения (ОИ) – это связующее звено между собственно управляемым процессом и АСУ. Несмотря на то, что ОИ несет в себе неисчерпаемое количество информации о процессе, он лишь приближенно

представляет этот процесс в информационном отношении. Поэтому для выявления информации, необходимой для оптимизации процесса управления, нужно, во-первых, выбрать и обосновать адекватную в некотором смысле модель процесса и, во-вторых, правильно выбирать ОИ. Эти вопросы связаны с отбором существенных для управления сигналов, с минимизацией информативных измеряемых параметров процесса и т.д.

Лишь имея эти два исходных момента (выбранные ОИ и адекватную модель процесса), можно приступить к решению задачи эффективной обработки совокупности первичных измерительных сигналов, которая может быть сформулирована следующим образом: при заданном ОИ и выбранной модели процесса необходимо преобразовать ОИ таким образом, чтобы достаточно оперативно и достоверно получать информацию о параметрах модели управляемого процесса.

Состояние ОИ описывается совокупностью конечного числа величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Изменение этих величин во времени характеризует поведение ОИ, то есть процессы, протекающие в нем.

Для установления соответствия состояния или поведения ОИ предъявляемым к нему требованиям вводятся специальные критерии поведения объекта. Эти критерии могут быть техническими, точностными, временными, психологическими, гигиеническими и др. В общем случае вводится несколько показателей исследуемого объекта  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ . Все эти определяются по состоянию объекта измерения

$$Y_1 = A_1 \{X_1, \dots, X_n\}$$
$$Y_k = A_k \{X_1, \dots, X_n\},$$

где  $A_i$  - вид преобразования, который необходимо осуществить над объектом измерения, чтобы получить показатель качества объекта исследования  $Y_i$ .

Из изложенного следует, что любая ИИС должна определять составляющие объекта измерения  $X_1, \dots, X_n$  и затем путем обработки результатов этих измерений определять показатели качества объекта исследования  $Y_1, \dots, Y_k$ . Составляющие объекта исследования  $X_1, \dots, X_n$  являются входными сигналами ИИС.

Прежде чем создать ИИС для исследования того или иного объекта, необходимо на основании предварительных теоретических и экспериментальных исследований сформировать объект измерения.

После того, как выявлены составляющие объекта измерения  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , необходимо проанализировать взаимосвязи между ними. В результате этого анализа выясняется, какие из составляющих  $X_1, X_2, \dots, X_n$  являются взаимонезависимыми, а какие зависят друг от друга. Целью такого анализа, в конечном счете, является минимизация числа составляющих, которые должны быть непосредственно измерены.

Очевидно, что если все составляющие  $X_1, X_2, \dots, X_n$  взаимонезависимы, то они обязательно должны в дальнейшем и все измеряться. Если же окажется, что некоторые из них (или все) взаимозависимы, то общее число

составляющих, подлежащих непосредственно измерению, может быть сокращено. В этом случае достаточно измерить лишь взаимонезависимые составляющие, а из зависимых измерить только те, по которым могут быть определены оставшиеся. Таким образом, общее число составляющих, подлежащих непосредственно измерению, может быть сокращено до  $M=N-j$ , где  $j$  - число уравнений, связывающих между собой взаимозависимые составляющие.

Это обстоятельство в дальнейшем может принести большой эффект, так как позволит сократить общее число первичных преобразователей информационно-измерительной системы.

Для пояснения сказанного приведем пример. Пусть объектом исследования является электрическая цепь, представляющая собой нагрузку, подключенную к источнику питания. Состояние этого объекта в каждый момент времени характеризуется тремя параметрами ( $N=3$ ): напряжением источника питания  $U$ , током  $I$ , протекающим через нагрузку и сопротивлением нагрузки  $R$ . В данном примере все эти три параметра объекта исследования являются одновременно и составляющими объектами измерения. Анализ объекта (электрической цепи) показывает, что его параметры  $U, I$  и  $R$  взаимосвязаны между собой ( $U=I \cdot R$ ). Поэтому нет необходимости измерять отдельно все эти величины. Достаточно измерить лишь любые две из них, а третью подсчитать по их значениям, то есть определить косвенным путем.

Этот пример показывает, какой большой эффект дает анализ взаимосвязей между составляющими объекта измерения.

Взаимосвязи должны быть проанализированы не только качественно, но и количественно. Качественный анализ показывает, какие из составляющих объекта независимы друг от друга. А какие взаимосвязаны. Но он совершенно не позволяет судить о том, сильные (жесткие) ли эти связи или слабые. Если эти связи слабые и практические ими можно пренебречь, то мы не можем несколькими составляющим достаточно просто и, главное, точно определить другие, слабо связанные с первыми.

Таким образом, одной из важнейших задач является количественная оценка взаимосвязей между составляющими объекта измерения.

Знание взаимосвязей между отдельными составляющими позволит в дальнейшем определить алгоритмы нахождения некоторых составляющих по другим, с которыми связаны первые. Чем точнее будет найден этот алгоритм, тем точнее будут измерены показатели объекта исследования и его состояние или поведение.

Возникает вопрос о точности количественной оценки взаимосвязей между составляющими объекта измерения. Очевидно, при прочих равных условиях, чем точнее определены количественные взаимосвязи, тем лучше. Но, с другой стороны, повышенные точности количественной оценки взаимосвязи между составляющими сопряжено с большими трудностями и неизбежно приводит к усложнению алгоритма нахождения одних составляющих через другие. Поэтому точность количественной оценки

взаимосвязей должна быть выбрана разумной и целиком и полностью согласована с той необходимой точностью, которая допускается при измерениях тех или иных составляющих объекта измерения.

Следующей важной задачей является изучение свойств составляющих объект измерения. Знание этих свойств позволит в дальнейшем синтезировать оптимальные алгоритмы измерения параметров объекта исследования, выбрать необходимые типы измерительных преобразователей и определить частоты их опроса.

Перечисленные задачи могут быть решены на основании математического описания объекта измерения.

### 2.2.1 Общий подход к математическому описанию объекта измерения

Рассмотрим некоторые общие вопросы математического описания объекта измерения. При этом будем иметь в виду, что конечной целью является описание взаимосвязей между составляющими объектами измерения и математическое описание самих составляющих.

Поскольку составляющие объекта  $X_1, X_2, \dots, X_n$  являются случайными величинами, то естественно рассматривать их в совокупности как систему случайных величин  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Исчерпывающим описанием этой системы величин является закон распределения. Допустим, что тем или иным способом определена плотность совместного распределения величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , входящих в систему  $f(X_1, \dots, X_n)$ .

По известной плотности распределения системы случайных величин находят плотности распределения  $f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_n)$  отдельных величин, входящих в систему:

$$f(x_1) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n ;$$

$$f(x_n) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{n-1} .$$

Зная плотность распределения системы величин и плотности распределения отдельных величин, входящих в систему, можно проверить, являются ли все величины (составляющие)  $X_1, \dots, X_n$  взаимонезависимыми. Критерием взаимонезависимости является выполнение условия

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n). \quad (2.1)$$

Если это условие будет выполнено, то все параметры можно рассматривать как взаимонезависимые. Если же окажется, что условие (2.1) не выполняется, то это будет означать, что часть величин  $X_1, \dots, X_n$  или все они являются взаимонезависимыми. В этом случае необходимо выявить взаимонезависимые и взаимозависимые величины и затем найти алгоритм определения одних составляющих через другие.

Для решения этой задачи необходимо определить условные плотности распределения каждой из составляющих  $X_1, \dots, X_n$ :

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}, \dots, x_n\right) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1}, \quad (2.2)$$

$$f\left(\frac{x_n}{x_1}, \dots, x_{n-1}\right) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n}. \quad (2.3)$$

Критерием независимости величины  $X_k$  от всех остальных является равенство

$$f(x_k / x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(x_k). \quad (2.4)$$

Невыполнение этого равенства будет означать, что величина  $X_k$  взаимозависима с какими-то из величин  $X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n$ , а именно с теми, функцией которых является условная плотность распределения величины  $X_k$ .

Чтобы найти эту функциональную связь, надо определить условное математическое ожидание величины  $X_k$ :

$$M\left[\frac{x_k}{x_1}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x_k f\left(\frac{x_k}{x_1}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\right) dx_k. \quad (2.5)$$

Это условное математическое ожидание отражает функциональную связь величины  $X_k$  с другими:

$$x_k = M\left[\frac{x_k}{x_1}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\right]. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) как раз и показывает алгоритм определения составляющей объекта измерения  $X$ , через другие, с которыми она связана.

Таким образом знание совместного закона распределения составляющих объекта измерения позволяет решать все интересующие задачи. Но, к сожалению, нахождение такого закона распределения сопряжено с громадными трудностями, связанными с большой затратой материальных средств и времени. Особенно это усугубляется при большом числе составляющих объекта измерения. Поэтому описанию методике целесообразно применять лишь тогда, когда число составляющих невелико ( $n = 3-5$ ).

При большом числе составляющих объекта измерения, с целью сокращения материальных и временных затрат, целесообразно в начале решать качественную задачу, позволяющую лишь ответить на вопрос, какие из составляющих взаимонезависимы, а какие зависят друг от друга. К количественной оценке взаимозависимостей между ними надо переходить лишь после решения первой задачи.

Первая, качественная задача, может быть решена двояко. Во – первых, уже на основе предварительного словесного описания исследуемого объекта и физических процессов, протекающих в нем, может быть вынесено суждение о взаимосвязи составляющих.

Помощь здесь могут оказать, например, функциональные схемы объектов.

Если априорно выявить взаимосвязи удастся лишь между небольшим числом составляющих или вообще не представляется возможным, то целесообразно провести статистическое исследование объекта исследования.

### 2.2.2 Применение дисперсионного анализа

Наиболее эффективным статистическим методом выявления взаимосвязности является дисперсионный анализ.

Этот метод состоит в том, что путем изменения соответствующих параметров объекта исследования изменяют заданным образом одну или несколько других составляющих объекта измерения. Эти измерения могут повлиять на величину одной или нескольких других составляющих. Степень такого влияния, его качественные характеристики как раз и описываются с помощью дисперсионного анализа. В зависимости от числа составляющих, степень влияния которых на другие мы хотим оценить, различают однофакторный, двухфакторный и т.д. дисперсионные анализы.

На примере однофакторного и двухфакторного дисперсионного анализа поясним, как происходит выявление взаимосвязей между составляющими объекта измерения путем использования данного метода.

Пусть ставится задача определить, является ли составляющая  $X_k$  зависимой от составляющей  $X_a$ . Эта задача решается при помощи однофакторного дисперсионного анализа. Для этого составляющей  $X_a$  задают ряд значений  $X_{a1}, X_{a2}, \dots, X_{an}$  и при каждом значении производится  $n$  измерений составляющих  $X_k$ .

Для удобства результаты измерений обычно заносятся в таблицу 2.1.

Таблица 2.1 – Значения параметров ОИ (для одномерного дисперсионного анализа)

Значения	Номер измерения				
	1	...	J	...	N
$X_A$	$X_{k11}$	...	$X_{k1j}$	...	$X_{k1n}$
$X_{A1}$	...	...	...	...	...
...	$X_{ki1}$	...	$X_{kij}$	...	$X_{kin}$
$X_{ai}$	...	...	...	...	...
...	$X_{km1}$	...	$X_{kmj}$	...	$X_{kmn}$

В таблице 2.1 через  $X_{kij}$  обозначен результат  $j$ -го измерения составляющей  $X_k$  при значении  $X_a = X_{ai}$ . Как видно из таблицы, всего мы имеем  $n * m$  результатов измерения составляющей  $X_k$ .

Обозначим через  $X_{kl}^*$  среднее арифметическое из измерений составляющих  $X_k$ , выполненных при значении  $X_a = x_{a1}$ , через  $X_k$  – среднее арифметическое из  $n$  измерений составляющей  $X_k$ , выполненных при значении  $X_a = x_{a2}$  и т.д.

$$\begin{aligned} X_{k1}^* &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{k1j}, \\ X_{ki}^* &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{kij}, \\ X_{km}^* &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{kmj}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Очевидно, если влияние составляющей  $X_a$  на составляющую  $X_k$  существенно, то есть  $X_k$  зависит от  $X_a$ , то мы должны ожидать повышенного рассеивания средних  $X_{k1}^*, \dots, X_{ki}^*, \dots, X_{km}^*$  и наоборот. Обозначим через  $X_k^*$  общее среднее арифметическое всех  $m \cdot n$  измерений составляющей  $X_k$ :

$$X_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{kij} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{ki}^*. \quad (2.8)$$

Определим общую статистическую дисперсию всех результатов измерений составляющей  $X_k$ :

$$D_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{kij} - X_k^*)^2. \quad (2.9).$$

Эта дисперсия обязана своим появлением всем действующим факторам – как влиянию составляющей  $X_a$ , так и фактору случайности при каждом конкретном значении  $X_a$ . Основная задача, которую решает дисперсионный анализ – это разделение общей дисперсии на компоненты, которые характеризовали бы влияние на составляющую  $X_k$  составляющей  $X_a$  и фактора случайности, в отдельности.

Принимая во внимание формулу (2.7) и (2.8), статистическую дисперсию представим в виде

$$D_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(X_{kij} - X_{ki}^*) + (X_{ki}^* - X_k^*)]^2 = \frac{1}{mn} (Q_A + Q_O), \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} Q_A &= n \sum_{i=1}^m (X_{ki}^* - X_k^*)^2; \\ Q_O &= n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{kij} - X_{ki}^*)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, статистическая дисперсия  $D_k^*$  результатов измерения составляющей  $X_k$  при различных значениях  $X_A$  пропорционально сумме слагаемых  $Q_A$  и  $Q_0$ , т.е. рассеивание, результатов измерения составляющей  $X_k$  складывается из двух компонент:  $Q_A$  и  $Q_0$ . Величина  $Q_A$  характеризует влияние на дисперсию  $D_k^*$  составляющей  $X_k$ , а величина  $Q_0$  – влияние случайных погрешностей.

Для того чтобы оценить степень влияния составляющей  $X_A$  на  $X_k$ , необходимо сравнить между собой слагаемые  $Q_A$  и  $Q_0$ . Очевидно в том случае, когда влияние составляющей  $X_A$  на  $X_k$  существенно, т.е. зависит от  $X_A$ , мы должны получить  $Q_A \gg Q_0$ . Если же влияние  $X_A$  на  $X_k$  несущественно, то рассеивание результатов измерения, составляющей  $X_k$  будет вызвано лишь случайными погрешностями, и мы должны получить  $Q_A \ll Q_0$ .

Так как результаты измерения параметра  $X_k$  носят случайный характер, то и величины  $Q_A$  и  $Q_0$  будут также случайными. Поэтому их сравнения нужно проводить вероятностными методами.

На практике случайные погрешности измерений очень часто оказываются распределенными по нормальному закону. В этом случае сравнение слагаемых  $Q_A$  и  $Q_0$ , т.е. оценку влияния составляющей  $X_A$  на  $X_k$ , можно проводить с помощью так называемого  $F$ -критерия:

$$F = \frac{C_A}{C_0}, \quad (2.11)$$

где

$$C_A = \frac{Q_A}{m-1}; \quad C_0 = \frac{Q_0}{m(n-1)}.$$

Величина  $F$  является случайной, так как величина  $Q_A$  и  $Q_0$  случайны. Доказано, что величина подчинена так называемому  $F$ -распределению с  $(m-1)$  и  $m(n-1)$  – степенями свободы.

Правило оценки степени влияния составляющей  $X_A$  на  $X_k$ , сводится к следующему:

- 1) подсчитываются значения величин  $Q_A$  и  $Q_0$  ( $m-1$ ) и  $m(n-1)$ ;
- 2) по этим значениям подсчитываются  $C_A$ ,  $C_0$  и затем  $F$ ;
- 3) по специальным таблицам, имеющимся в справочниках, задаваясь доверительной вероятностью  $q$  (обычно полагают  $q=0.95, \dots, 0.999$ ) по степеням свободы  $(m-1)$  и  $m(n-1)$  с учетом  $C_A$ ,  $C_0$  и находится  $F_q$ ;
- 4) гипотеза о том, что составляющая  $X_k$  зависима от  $X_A$  принимается, если  $F > F_q$ ;
- 5) если  $F \leq F_q$ , то влияние составляющей  $X_A$  на  $X_k$  нужно считать незначительным, так как в этом случае рассеивание результатов измерений вызвано в основном случайными, погрешностями измерений  $X_k$ .

Если с помощью дисперсионного анализа установлено, что составляющая  $X_A$  зависит от  $X_k$ , то это отнюдь не означает, что составляющая  $X_A$  зависит от  $X_k$ , так как первая может быть причиной, а вторая – следствием. Так, например, ЭДС. Термопары зависит от разности

температур между ее холодным и горячим спаями. Но температура между горячим и холодным спаями этой термопары ни в коем случае не зависит от термоэдс. Точно так же, если  $X_k$  не зависит от  $X_A$ , то это не означает  $X_A$ , что также не зависит от  $X_k$ . Поэтому, чтобы выявить взаимонезависимые составляющие объекта измерения, нужно проверять с помощью дисперсионного анализа взаимное влияние их друг на друга.

Рассмотрена методика применения дисперсионного анализа для выявления наличия зависимости какой – то одной составляющей объекта измерения от другой. Теперь необходимо определить, является ли составляющая объекта  $X_k$  зависимой от двух других  $X_A$  и  $X_B$  или зависит от какой – то одной из них. Эта задача решается с помощью двухфакторного дисперсионного анализа. Для этого одной из составляющих объекта, например  $X_B$ , задается какое – то значение  $X_{B1}$ . При этом значения  $X_B$  начинают изменять значения составляющей  $X_A$  и при каждом конкретном ее значении  $X_{A1}, \dots, X_{Ai}, \dots, X_{Am}$  осуществляют измерение величины  $X_k$ . Затем устанавливают другое значение  $X_B = X_{B2}$  и снова осуществляют измерение при тех же самых значениях  $X_A$ , что и в предыдущем случае. Такие измерения проводят для ряда значений  $X_{B1}, \dots, X_{Bj}, \dots, X_{Bn}$ , составляющей  $X_B$ . В итоге получают  $n \cdot m$  результатов измерения составляющей  $X_k$ , где  $n$  и  $m$  – соответствующее число значений, которое задали составляющим объекта измерения  $X_B$  и  $X_A$ . Результаты измерений заносят в таблицу 2.2.

В этой таблице через  $X_{kij}$ ; обозначен результат измерения  $X_k$  при значении  $X_A = X_{Ai}$  и  $X_B = X_{Bj}$ .

Введем обозначения:

$$X_{kAi}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{kij}, \text{ - среднее значение составляющей при } X_A = X_{Ai}$$

$$X_{kBj}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{kij}, \text{ - среднее значение составляющей при } X_B = X_{Bj}$$

$$X_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{kij} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n X_{kAj}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m X_{kBj}^* \text{ - среднее арифметическое}$$

результатов измерений составляющей  $X_k$ .

Таблица 2.2 – Значения параметров ОИ (для двумерного дисперсионного анализа).

$X_A$	$X_B$	$X_B$	...	$X_B$	...	$X_B$
$X_{A1}$		$X_{k11}$		$X_{k1j}$	...	$X_{k1n}$
...		...	...	...	...	...
$X_{Ai}$		$X_{ki1}$	...	$X_{kij}$	...	$X_{kin}$
...		...	...	...	...	...
$X_{Am}$		$X_{km1}$	...	$X_{kij}$	...	$X_{kmn}$

Очевидно, на величину среднего  $X_{kAi}^*$  оказывает влияние, помимо случайных факторов, лишь составляющая объекта  $X_A$ , так как по всем значениям  $X_B$  проведено усреднение. Точно так же величина  $X_{kBj}^*$  среднего

зависит лишь от значений составляющей  $X_B$ . Поэтому рассеивание  $X_{kAi}^*$  средних не будет зависеть от значений  $X_B$ , а рассеивание  $X_{kBj}^*$  - от значений  $X_A$ .

Общее рассеивание результатов измерения составляющей  $X_k$  может быть оценено величиной статистической дисперсии:

$$D_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{kij} - X_k^*)^2. \quad (2.12)$$

Принимая во внимание обозначения, введенные выше, формулу (2.12) представим в виде:

$$D_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[ \frac{(X_{kAi}^* - X_k^*) + (X_{kBj}^* - X_k^*) + (X_{kij} + X_{kAi}^* - X_{kBj}^* + X_k^*)}{(X_{kij} + X_{kAi}^* - X_{kBj}^* + X_k^*)} \right]^2 = \frac{1}{mn} (Q_A + Q_B + Q_O), \quad (2.13)$$

где

$$Q_A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{kAj}^* - X_k^*)^2;$$

$$Q_B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{kBj}^* - X_k^*)^2;$$

$$Q_O = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{kij} - X_{kAi}^* - X_{kBj}^* + X_k^*)^2.$$

Таким образом, статическая дисперсия  $D_k^*$  пропорциональна сумме трех слагаемых  $Q_A$ ,  $Q_B$ ,  $Q_O$ . Причем, помимо случайных факторов, вызванных погрешностями изменения, на величину слагаемого  $Q_A$  влияет лишь  $X_A$ , а на величину  $Q_B - X_B$ .

Оценка степени влияния составляющих объекта измерения  $X_A$  и  $X_B$  на составляющую  $X_k$  как и при однофакторном дисперсионном анализе, производится при условии нормального распределения случайных погрешностей измерений с помощью  $F$ -критерия:

$$F_A = \frac{\frac{1}{m-1} Q_A}{\frac{1}{(m-1)(n-1)} Q_O} = \frac{C_A}{C_O}; \quad (2.14)$$

$$F_B = \frac{\frac{1}{n-2} Q_B}{\frac{1}{(m-1)(n-1)} Q_O} = \frac{C_B}{C_O}. \quad (2.15)$$

Правило оценки степени влияния составляющих  $X_A$  и  $X_B$  на  $X_k$  заключается в следующем:

- 1) подсчитываются величины  $Q_A$ ,  $Q_B$ ,  $(m-1)$ ,  $(n-1)$  и  $(m-1)(n-1)$ ;

- 2) по значениям величины п.1 определяются  $C_A$ ,  $C_B$ ,  $C_0$ , а затем  $F_A$ ,  $F_B$ ;
- 3) задаются величиной доверительной вероятности  $q$ ;
- 4) по специальным таблицам по степеням свободы  $(m-1)$  и  $(m-1)(n-1)$  с учетом  $C_A$ , и  $C_0$ , находится  $F_{qA}$ , а по степеням свободы  $(n-1)$  и  $(m-1)(n-1)$  с учетом  $C_B$  и  $C_0 - F_{qB}$ ;
- 5) если  $F_A \leq F_{qA}$  и  $F_B \leq F_{qB}$ , то влияние составляющих объекта измерения  $X_A$  и  $X_B$  на  $X_K$  несущественно и может считать, что практически не зависит ни от  $X_A$ , ни от  $X_B$ ;
- 6) при  $F_A > F_{qA}$  и  $F_B > F_{qB}$  принимается гипотеза о том, что влияние составляющих объекта измерения  $X_A$  и  $X_B$  на  $X_K$  существенно, т.е.  $X_K$  зависит как от  $X_A$ , так и от  $X_B$ ;
- 7) если  $F_A \leq F_{qA}$  и  $F_B \leq F_{qB}$ , то на составляющую влияет в основном не  $X_A$ , а  $X_B$ , т.е. составляющая  $X_K$  зависит лишь от  $X_B$ ;
- 8) при  $F_A > F_{qA}$  и  $F_B \leq F_{qB}$  принимается гипотеза о том, что составляющая объекта измерения зависит лишь от  $X_A$ .

Итак, рассмотрена методика применения дисперсионного анализа для выявления взаимосвязанных и взаимонезависимых составляющих объекта измерения. При этом необходимо подчеркнуть, что применение дисперсионного анализа особенно эффективно при одновременном излучении нескольких составляющих объекта измерения на какую – то другую составляющую.

Дисперсионный анализ позволяет решить лишь качественную задачу – выделить из общего числа составляющих объекта измерения  $x_1, \dots, x_N$  взаимонезависимые и взаимозависимые.

Следующей, более высокой ступенью описания исследуемого объекта должно явиться выявление количественных соотношений между взаимосвязанными составляющими объекта измерения.

### 2.3 Статистические способы описания взаимосвязей между составляющими объекта измерения

Иногда связи между некоторыми составляющими объекта измерения удается математически описать на основе априорных сведений о физических процессах, протекающих в объекте. Если же таких сведений имеется недостаточно или они совсем отсутствуют, то соотношения, связывающие ряд составляющих объекта, могут быть установлены только на основе экспериментальных исследований. При этом, учитывая, что составляющие носят случайный характер, результаты экспериментальных исследований должны обязательно подвергаться той или иной статистической обработке.

Допустим в результате дисперсионного анализа установлено, что составляющая объекта измерений  $X_k$  зависит от составляющей  $X_A$ . Теперь ставится задача установить количественную зависимость составляющей  $X_k$  от  $X_A$ .

В математической статистике доказано, что стохастическую зависимость между величинами  $X_k$  и  $X_A$  дает регрессия, т.е. математическое ожидание (среднее значение) величины  $X_k$ , вычисленное при условии, когда величина  $X_A$  примет определенное значение. Поэтому идеальной целью можно считать отыскание уравнения регрессии.

Однако точное уравнение регрессии можно написать зная среднее значение  $X_k$  для всех допустимых  $X_A$ . В практических же наблюдениях такая ситуация невозможна. Более того, даже отдельные значения средних составляющей  $X_k$ , не могут быть найдены точно, а допускаются лишь приближенные оценки. В связи с этим можно искать лишь уравнения приближенной регрессии, оценивая тем или иным способом величину и вероятность этой приближенности.

Для того чтобы получить уравнение приближенной регрессии, то есть найти зависимость составляющей  $X_k$  от  $X_A$ , составляющей  $X_A$  задают ряд значений  $X_{A1}, \dots, X_{Ai}, \dots, X_{An}$  и при каждом этом значении измеряют значение составляющей  $X_k$ . Результаты заносят в таблицу 3.

Таблица 3 Значения для построения линии регрессии

$X_A$	$X_{Ai}$	...	$X_{An}$	...	$X_{An}$
$X_k$	$X_{ki}$	...	$X_{ki}$	...	$X_{kn}$

Основным способом отыскания уравнения регрессии является принцип наименьших квадратов. Этот принцип утверждает, что наилучшее уравнение приближенной регрессии дает та функция из рассматриваемого класса, для которой сумма квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^n [X_{ki} - \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l)]^2 \quad (2.16)$$

имеет наименьшее значение.

В формуле (2.16)  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  - неопределенные параметры (коэффициенты), входящие в аналитическое выражение уравнения регрессии.

Величина суммы  $S$  зависит, с одной стороны, от вида уравнения регрессии  $X_k = \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ , с другой стороны от численных значений коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ .

Для того чтобы сумма  $S$ , была минимальна, во – первых, должен быть известен заранее из соображений аналогии, из теоретических рассуждений или из сравнения эмпирических данных с известными функциями. Наиболее трудной задачей является подбор типа регрессии непосредственно по изучаемой зависимости совершенно не известны. При этом желательно всегда выбирать такой вид уравнения регрессии, чтобы число 1 неопределенных коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  было значительно меньше числа изменения  $n$ .

Пусть исходя из тех или иных соображений, выбран вид уравнения регрессии. Тогда величину суммы  $S$  (2.16), можно рассматривать как функцию от коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ . Теперь задача состоит в том, чтобы

найти такой выбор этих коэффициентов, который минимизировал бы величину  $S$ .

Из математического анализа известно, что необходимым условием минимума функции  $S$  (дифференцируемой) многих переменных является выполнение равенств:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dS}{d\alpha_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{dS}{d\alpha_l} = 0 \end{array} \right\}. \quad (2.17)$$

Принимая во внимание формулу (2.16), после преобразований получим систему уравнений, с неизвестными:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n X_{ki} \frac{d\Psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l)}{d\alpha_1} - \sum_{i=1}^n \Psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l) \frac{d\Psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l)}{d\alpha_1} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n X_{ki} \frac{d\Psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l)}{d\alpha_1} - \sum_{i=1}^n \Psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l) \frac{d\Psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l)}{d\alpha_1} \end{array} \right\}. \quad (2.18)$$

Решая эту систему уравнений, находим неизвестные коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ . Если она имеет единственное решение, то при  $S \geq 0$  это решение всегда будет обеспечивать минимум величины  $S$ . Если же решений будет несколько, то из них необходимо выбрать то, которое минимизирует величину  $S$ .

Найденные в результате решения системы уравнения (2.18) коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  будут, очевидно, являться функциями  $X_k$  и  $X_A$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \phi_1(X_{k1}, \dots, X_{kn}; X_{A1}, \dots, X_{An}); \\ \alpha_l &= \phi_l(X_{k1}, \dots, X_{kn}; X_{A1}, \dots, X_{An}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

А так как значения составляющих  $X_k$  и  $X_A$ , полученные в результате их измерения, носят случайный характер, вследствие влияния случайных погрешностей измерения, то случайными будут и коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ . Поэтому эти коэффициенты должны быть обязательно подвергнуты статистической оценке. В частности, необходимо оценить степень их случайности, т.е. величину среднеквадратического отклонения каждого коэффициента, и указать доверительный интервал и доверительную вероятность.

Последняя задача оказывается в большинстве случаев очень трудной и поэтому ограничивается лишь указанием среднеквадратических отклонений этих коэффициентов.

После того как коэффициенты в уравнении приближенной регрессии найдены и оценены, само это уравнение должно быть подвергнуто статистическому анализу. В результате этого анализа, во – первых,

выясняется, нуждается ли полученное уравнение регрессии в поправке; во-вторых, если такая необходимость имеется, то ищется сама поправка.

Для решения первой задачи подсчитывается статистическая дисперсия:

$$D = \frac{1}{n-l} S = \sum_{i=1}^n [X_{ki} - \Psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l)]^2, \quad (2.20)$$

являющаяся общей мерой рассеяния всех  $X_{ki}$  вокруг функции  $\Psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$ . Очевидно, чем меньше величина  $D$ , тем лучше подобрано уравнение регрессии.

В образовании дисперсии  $D$  участвуют два фактора: рассеяние  $X_{ki}$  вокруг истинной линии регрессии (вокруг своих средних), вызванное случайными погрешностями измерений составляющей  $X_k$ , описываемое дисперсией  $D_k$ , и погрешность в определении приближенной регрессии  $X_k = \Psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$ , которой соответствует некоторая дисперсия  $D_p$ . Поскольку эти факторы независимы, то

$$D = D_k + D_p.$$

Так как дисперсия  $D_k$  вызвана независимыми от нас причинами (случайными погрешностями измерений составляющей  $X_k$ ), то уменьшить величину дисперсии  $D$  возможно лишь уменьшением дисперсии  $D_p$  т.е. улучшением сходимости приближенной регрессии к истинной. При этом необходимо иметь в виду следующее. Чем точнее подобрано уравнение регрессии, тем меньше  $D_k$ . Но любое уточнение уравнения регрессии сопряжено с большой вычислительной работой, и, кроме того, чем точнее уравнение регрессии, тем оно, как правило, сложнее. С другой стороны, из уравнения (2.21) видно, что бессмысленно стремиться обеспечить величину  $D_p$  очень малой по сравнению с  $D_k$ . Так как при  $D_p \ll D_k$  величина дисперсии практически остается неизменной ( $D \approx D_k$ ).

Поэтому в качестве критерия верности выбранного уравнения регрессии естественно считать приближенное равенство ( $D \approx D_k$ ). Если же  $D > D_k$ . То уравнение регрессии необходимо уточнить. Таким образом, чтобы оценить верность выбранного уравнения регрессии, необходимо сравнивать между собой дисперсии  $D$  и  $D_k$ . А так как эти дисперсии носят случайный характер, то такое сравнение должно осуществляться статистическим способом. Для этого применяется. Как и при дисперсионном анализе,  $F$  – критерий (критерий Фишера).

Правило сравнения сводится к следующему:

- 1) по формуле (2.20) подсчитывается величина  $D$ ;
- 2) определяется дисперсия  $D_k$  результатов измерения параметра  $X_k$ , для чего проводятся специальные измерения;
- 3) вычисляется отношение  $D/D_k = F$ ;

4) задаваясь доверительной вероятностью  $g$ . Из таблиц по известным  $D, D_k$  и их степеням свободы находится число  $F_g$ ;

5) если  $F < F_g$ , то считается, что дисперсия  $D$  образована только за счет случайных погрешностей измерений и, следовательно, никакие уточнения уравнения регрессии не способны уменьшить эту дисперсию, т.е. нужно признать правильность выбора уравнения регрессии;

6) при  $F > F_g$  дисперсия  $D$  образуется не только за счет случайных погрешностей измерения, но и вследствие неправильного подбора уравнения регрессии. В этом случае уравнение регрессии должно быть уточнено.

Для уточнения уравнения регрессии  $X_k = \Psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$ , в него вводится поправка  $\Psi(X_A, \beta_1, \dots, \beta_c)$ , где  $\beta_1, \dots, \beta_c$  неизвестные коэффициенты, и рассматривается уточненное уравнение регрессии в виде

$$X_k = \Psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l) + \Psi_1(X_A, \beta_1, \dots, \beta_c). \quad (2.22)$$

При этом считается, что неизвестными должны быть не только коэффициенты  $\beta_1, \dots, \beta_c$ , но и коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ . Все они, как и ранее, определяются по принципу наименьших квадратов, т.е. так, чтобы минимизировалась величина суммы:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n [X_{ki} - \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l) - \Psi_1(X_{Ai}, \beta_1, \dots, \beta_c)]^2. \quad (2.23)$$

После этого подсчитывается дисперсия

$$D_1 = \frac{S_1}{n - l - c}, \quad (2.24)$$

являющаяся мерой рассеяния всех  $X_{ki}$  вокруг функции

$$[\Psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l) + \Psi_1(X_{Ai}, \beta_1, \dots, \beta_c)]$$

Добавка к уравнению регрессии признается подобранной правильно, если окажется, что  $D_1 < D$ . В противном случае (когда  $D_1 > D$ ) добавка признается выбранной неправильно и необходимо искать новую. Здесь, как и ранее, дисперсии должны сравниваться статистическим способом с помощью  $F$ -критерия.

При правильно выбранной добавке к уравнению регрессии производится сравнение дисперсий  $D_1$  и  $D_k$  с целью выяснения, нуждается ли новое уравнение регрессии в дополнительном уточнении. Таким образом, уравнение регрессии уточняется до тех пор, пока не будет выяснено, что оно подобрано правильно, т.е. не противоречит экспериментальным данным. Правильно подобранное уравнение регрессии принимается в качестве функциональной связи между составляющими объекта измерения  $X_k$  и  $X_A$ .

При этом необходимо всегда помнить, что уравнение регрессии может не выражать никаких теоретических закономерностей.

Рассмотрен самый общий подход к получению математической зависимости одной составляющей объекта измерения к другой. Теперь необходимо рассмотреть случай, когда априорно о характере этой зависимости ничего неизвестно, и она определяется лишь на основе опытных данных. Основной проблемой здесь является выбор вида уравнения регрессии, которое должно быть как можно более простым.

В настоящее время при решении этой задачи наибольшее распространение получили два способа.

При первом способе уравнения регрессии  $X_k = \Psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$  берется в виде

$$X_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_A + \alpha_3 X_A^2 + \dots + \alpha_l X_A^{l-1}. \quad (2.25)$$

Это так называемая параболическая регрессия.

В этом случае система уравнений (2.18), из которой должны быть определены неизвестные коэффициенты, принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \sum_{i=1}^n X_{Ai}^0 + \alpha_2 \sum_{i=1}^n X_{Ai} + \dots + \alpha_l \sum_{i=1}^n X_{Ai}^{l-1} &= \sum_{i=1}^n X_{ki} X_A^0 \\ \dots & \\ \alpha_1 \sum_{i=1}^n X_{Ai}^{l-1} + \alpha_2 \sum_{i=1}^n X_{Ai}^l + \dots + \alpha_l \sum_{i=1}^n X_{Ai}^{2(l-1)} &= \sum_{i=1}^n X_{ki} X_A^{l-1} \end{aligned} \right\}. \quad (2.26)$$

Эта система уравнений является линейной и ее решение не представляет труда.

Для сокращения вычислительной работы задачу по определению уравнения регрессии решают путем последовательных приближений. Вначале задаются уравнением регрессии вида  $X_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_A$ , определяют коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и проверяют описанными выше способами правильность выбора уравнения регрессии. Если уравнение регрессии нуждается в уточнении, то рассматривают уравнение вида  $X_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_A + \alpha_3 X_A^2$ . Снова определяют коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и проверяют правильность их выбора. Так поступают до тех пор, пока уравнение регрессии не окажется подобраным правильно.

Такой способ определения уравнения регрессии довольно прост, но имеет один серьезный недостаток: при каждом уточнении уравнения, т.е. при повышении его степени, все значения коэффициентов, вычисленные ранее, оказываются бесполезными и их приходится определять вновь. В результате возрастает объем вычисленной работы.

От указанного недостатка свободен второй способ определения уравнения регрессии, при котором это уравнение задается в виде

$$X_k = \alpha_1 P_0(X_A) + \alpha_2 P_1(X_A) + \dots + \alpha_l P_{l-1}(X_A), \quad (2.27)$$

где  $P_{l-1}(X_A)$  - многочлены Чебышева П.Л.

Первые два из этих многочленов имеют вид

$$P_0(X_A) = 1; \quad P_2(X_A) = X_A - \frac{n-1}{2},$$

а остальные определяются по формуле

$$P_{l+1} = P_1(X_A)P_l(X_A) - \frac{l^2(n^2 - l^2)}{4(4l^2 - 1)}P_{l-1}(X_A). \quad (2.28)$$

Коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  в формуле (2.27) также находятся по методу наименьших квадратов. При этом формулы для их определения получаются достаточно простыми.

Достоинство описываемого способа определения уравнения регрессии в том, что вычисленные по формуле (2.28) коэффициенты не зависят от того, каков будет порядок разыскиваемого уравнения регрессии. Это значит, что, находя уравнение регрессии методом последовательных уточнений, мы используем все ранее найденные коэффициенты, больше их не пересчитывая. Повышение порядка регрессии на единицу потребует теперь нахождения лишь одного коэффициента.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ki}; \\ \alpha_2 &= \frac{\sum_{i=1}^n X_{ki} P_1(X_{Ai})}{\sum_{i=1}^n P_1(X_{Ai})}; \\ &\dots \\ \alpha_l &= \frac{\sum_{i=1}^n X_{ki} P_{l-1}(X_{Ai})}{\sum_{i=1}^n P_{l-1}(X_{Ai})} \end{aligned} \right\}. \quad (2.29)$$

Таким образом, рассмотрены способы определения математической зависимости между двумя составляющими объекта измерения. Точно так же решается задача и определения математической зависимости одной составляющей объекта измерения  $X_k$  от нескольких  $X_A, X_B$ . Разница заключается лишь в том, что в данном случае уравнение регрессии надо искать в виде

$$X_k = \Psi(X_A, X_B, \dots; \alpha_1, \dots, \alpha_e), \quad (2.30)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_e$  как и ранее, неопределенные коэффициенты, значения которых должны быть найдены по принципу наименьших квадратов.

## 2.4 Математическое описание составляющих объекта измерения

После того как получены математические зависимости одних составляющих объекта измерения от других, необходимо перейти к

математическому описанию самих составляющих, которые являются, входными сигналами ИИС.

Основной предпосылкой для описания составляющих объекта измерения должно быть то, что эти составляющие носят случайный характер и, помимо этого, изменяются во времени. То есть мы должны рассматривать составляющие объекта измерения как случайные процессы или сигналы.

В качестве обобщенной модели какой-то  $k$ -той составляющей объекта измерения можно взять модель вида

$$X_k(t) = \phi(t)N(t) + \Psi(t), \quad (2.31)$$

где  $\phi(t)$  и  $\Psi(t)$  - некоторые детерминированные функции времени;

$N(t)$  – случайная функция времени.

Из формулы (2.31) следует, что для математического описания составляющей объекта измерения  $X_k(t)$  нужно уметь описывать детерминированные компоненты и случайную  $N(t)$ .

#### 2.4.1 Методы представления детерминированных компонент составляющих объекта измерения.

Детерминированные функции времени (сигналы) могут иметь различный вид. Поэтому естественно стремиться представить любую детерминированную функцию в каноническом виде через какие-то стандартные функции.

Одним из распространенных, канонических представлений детерминированных функций является разложение их в ряд по ортогональным функциям:

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \phi_k(t), \quad (2.32)$$

где  $A_k$  - коэффициенты разложения;

$\phi_0(t), \dots, \phi_k(t)$  - ортогональные координатные функции, т.е. такие, что

$$\int_a^b p(t) \phi_k(t) \phi_i(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq k \\ 1, & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Здесь  $p(t)$ -весовая функция.

В качестве координатных функций могут выступать самые разнообразные функции. Так, если функция  $\phi(t)$  рассматривается на конечном интервале времени от  $T_1$  до  $T_2$ , то в качестве координатных функций могут быть выбраны различные ортогональные полиномы Чебышева, Лежандра и др.

Наиболее часто в качестве координатных ортогональных функций выбираются тригонометрические функции. В этом случае детерминированная функция  $p(t)$ , рассматриваемая на конечном интервале времени от  $T_1$  до  $T_2$ , может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\phi(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kwt + b_k \cos kwt). \quad (2.33)$$

Здесь  $w = \frac{2\pi}{(T_2 - T_1)}$  - круговая частота первой гармоники;

$$a_k = \frac{2}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \phi(t - T_1) \sin kwt dt;$$

$$b_k = \frac{2}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \phi(t - T_1) \cos kwt dt.$$

Формулу (2.33) перепишем в виде

$$\phi(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kwt + \phi_k), \quad (2.34)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \phi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}.$$

Как видно из формулы (2.34) сигнал  $\phi(t)$  представлен в виде суммы его постоянной составляющей  $\frac{b_0}{2}$  и бесконечного числа гармонических составляющих  $A_k \sin(kwt + \phi_k)$ .

На практике очень часто число членов ряда (2.34) ограничивают конечным числом  $n$ , выбирая величину  $n$  так, чтобы 95 % энергии сигнала было сосредоточено в диапазоне частот от 0 до  $nw$ .

Энергия сигнала  $\phi(t)$  существующего на интервале времени от  $T_1$  до  $T_2$ , определяется по формуле:

$$E = \int_{T_1}^{T_2} \phi^2(t) dt. \quad (2.35)$$

Подставляя в выражение (2.35) значение  $\phi(t)$  из формулы (2.33), представим энергию сигнала в функции коэффициентом ряда Фурье:

$$E = \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2. \quad (2.36)$$

Если энергия сигнала известна, то число и членов ряда Фурье, которым можно ограничиться при описании сигнала, определяется по формуле:

$$0.95E = \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{k=0}^n A_k^2. \quad (2.37)$$

Зная  $n$ , можно определить такую важную характеристику сигнала, как верхнюю граничную частоту спектра, которая принимается равной частоте наивысшей гармоники, т.е.

$$F_b = \frac{w_b}{2\pi} = \frac{nw}{2\pi} = \frac{n}{T_2 - T_1}. \quad (2.38)$$

Энергию сигнала необходимо знать не только для того, чтобы определить допустимое конечное число членов ряда или верхнюю граничную частоту спектра сигнала, но и для оценки энергетических характеристик сигнала. К энергетическим характеристикам сигнала, помимо

его энергии относится так называемая мощность сигнала и его действующее значение.

Мощностью сигнала  $\phi(t)$ , существующего на интервале времени от  $T_1$  до  $T_2$ , называется величина

$$P_c = \frac{E}{T_2 - T_1} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \phi^2(t) dt, \quad (2.39)$$

а действующим значением-

$$\sqrt{P_c} = \sqrt{\frac{E}{T_2 - T_1}} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \phi^2(t) dt}. \quad (2.40)$$

Из формул (2.35), (2.39) и (2.40) видно, что все энергетические характеристики сигнала (энергия  $E$ , мощность  $P$ , и действующее значение) жестко связаны между собой.

Если, сигнал  $\phi(t)$  представлен в виде ряда Фурье (2.33) или (2.34) то, как следует из выражений, (2.36) и (2.39), его мощность может быть определена по формуле

$$P_c = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2. \quad (2.41)$$

Ряд Фурье (2.38) для функции  $\phi(t)$  существующий на интервале от  $T_1$  до  $T_2$  может быть записан также в комплексной форме:

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}, \quad (2.42)$$

где комплексный коэффициент  $C_k$  определяется по формуле

$$C_k = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \phi^2(t - T_1) e^{-jk\omega t} dt. \quad (2.43)$$

Коэффициенты разложения в ряде (2.42) связаны с коэффициентами разложения ряда (2.33) соотношением:

$$C_k N_k = \frac{b_k - ja_k}{2}. \quad (2.44)$$

Если сигнал  $\phi(t)$  задается в виде ряда (2.42), то его мощность подсчитывается по формуле:

$$P_c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_k^*, \quad (2.45)$$

где  $C_k^*$  - комплексная величина, сопряженная с  $C_k$ .

В тех случаях, когда детерминированный сигнал  $\phi(t)$  является непериодической функцией и  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(p(t)) |dt| < \infty$ , то его можно представить в виде:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.46)$$

где

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.47)$$

Обычно в такой форме представляют импульсные сигналы.

Комплексная величина  $S(\omega)$  называется спектральной плотностью сигнала или комплексным спектром. Модуль  $|S(\omega)| = \sqrt{S(\omega)S^*(\omega)}$  величины  $S(\omega)$  называется просто спектром сигнала.

Энергия сигнала  $\phi(t)$  представленного в виде выражения может быть подсчитана по формуле:

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.48)$$

а верхняя граничная частота  $E_b$  его спектра определяется из уравнения

$$0.95E = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi F} |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.49)$$

$$\int_0^{2\pi F} |S(\omega)|^2 d\omega = 0.95 \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.50)$$

Уравнением (2.49) целесообразно пользоваться при известной энергии сигнала, а уравнением (2.50) - при неизвестной.

Большое значение для математического описания сигналов имеет теорема Котельникова, которая утверждает, что непрерывная функция времени  $\phi(t)$  не содержащая частот выше граничной  $\omega_b = 2\pi F_b$ , полностью определяется отсчетами мгновенных значений  $\phi(k\Delta t)$  в точках, отстоящих друг от друга на интервалы  $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_b}$ .

Эта теорема позволяет представить непрерывную функцию  $\phi(t)$  в виде

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k\Delta t) \frac{\sin \omega_b(t - k\Delta t)}{\omega_b(t - k\Delta t)}. \quad (2.51)$$

$$\phi(t) \approx \sum_{k=-n/2}^{n/2} \phi(k\Delta t) \frac{\sin \omega_b(t - k\Delta t)}{\omega_b(t - k\Delta t)}. \quad (2.52)$$

Если функция  $\phi(t)$  с ограниченным спектром рассматривается на конечном интервале времени  $T$ , то точное разложение (2.51) заменяется приближенными:

$$\phi(t) \approx \sum_{k=-n/2}^{n/2} \phi(k\Delta t) \frac{\sin \omega_b(t - k\Delta t)}{\omega_b(t - k\Delta t)}, \quad (2.53)$$

где

$$n = \left( \frac{T}{\Delta t} \right) + 1 \approx 2F_b T.$$

Таким образом, в данном случае функция определяется в виде конечного числа  $n = 2F_b T$  ее отсчетов.

## 2.4.2 Методы представления случайных компонент составляющих объекта измерения

Рассмотрим способы представления случайных компонент составляющих объект измерения.

Случайный сигнал (процесс)  $N(t)$  в общем случае может быть охарактеризован его  $m$ -мерной плотностью вероятности системы  $m$  случайных величин  $(N(t_1), \dots, N(t_m))$ , где  $t_1, \dots, t_m$  - произвольные значения аргумента  $t$ .

Многомерные плотности вероятности позволяют описать случайный процесс сколь угодно полно. Однако нахождение  $m$ -мерной плотности вероятности – очень трудная задача, которую удается решить далеко не всегда. Поэтому на практике часто ограничиваются рассмотрением хотя и менее полных, но зато более простых так называемых характеристик или моментов случайного процесса.

Обычно указывают математическое ожидание, второй начальный момент, дисперсию, корреляционную функцию. Иногда дополнительно указывают коэффициенты асимметрии и эксцесса. Для определения приведенных характеристик достаточно знать лишь двумерную плотность распределения.

При математическом описании случайного процесса желательно также указать стационарным или нестационарным он является.

Для стационарных случайных процессов, помимо рассмотренных, указывают еще ряд важных характеристик. Одной из таких характеристик является интервал корреляции. Наиболее распространенными формулами для подсчета этой величины являются:

$$\tau_k = \frac{\int_0^{\infty} R_N(\tau) d\tau}{R_N(0)}, \quad (2.54)$$

$$\tau_k = \frac{\int_0^{\infty} |R_N(\tau)| d\tau}{R_N(0)}. \quad (2.55)$$

Другой важной характеристикой стационарного случайного процесса является спектральная плотность дисперсии (мощности)

$$S_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_N(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.56)$$

Для оценки интервала частот, в котором существует стационарный случайный процесс, вводят понятие эквивалентной ширины спектра мощности, которую определяют по формуле

$$\Delta\omega_s = \frac{\int_0^{\infty} S_N(\omega) d\omega}{S_{Nm}(\omega)}, \quad (2.57)$$

Где  $S_{Nm}(\omega)$  - максимальное значение спектральной плотности.

Эквивалентная ширина спектра мощности связана с интервалом корреляции соотношением

$$\Delta w, \tau_k = const. \quad (2.58)$$

Во многих практических случаях также полезно провести исследование случайного процесса, для того, чтобы изучить, является ли он эргодическим. Эргодическим называется такой процесс, для которого среднее по времени равно в вероятностном смысле среднему по ансамблю реализаций.

Если процесс окажется эргодическим, то в дальнейшем его обработка с помощью информационно-измерительной системы будет значительно проще, чем неэргодического.

Выше рассмотрены основные способы математического описания детерминированных и случайных функций, которые являются элементами модели (2.31) составляющей  $X_k(t)$  объекта измерения. После этого нетрудно описать характеристики самой составляющей  $X_k(t)$

Из изложенного в данном разделе видно, что математическое описание объекта измерения - непростая задача и требует для своего решения провести большой объем экспериментальных исследований и статистической обработки их результатов.

### 3 Методы оценки характеристик составляющих объекта измерения

В первой части настоящего пособия, было показано, что для математического описания объекта измерения необходимо располагать определенной совокупностью характеристик его составляющих, описывающих с той или иной степенью полноты свойства этих составляющих. Как правило, эти характеристики могут быть определены лишь путем обработки результатов экспериментальных исследований. Из за случайного характера составляющих объекта измерения обработка результатов измерений должна производиться статистическими методами. В итоге получают не сами характеристики составляющих объекта измерения, а некоторые их приближенные значения, называемые оценками.

Под оценкой  $\hat{\Theta}$  характеристики  $\Theta$  составляющей  $X(t)$  понимается некоторое преобразование последней

$$\hat{\Theta} = A_{\Theta} \{X(t)\}, \quad (3.1)$$

где вид преобразования  $A_{\Theta}$  должен выбираться исходя из типа оцениваемой характеристики. В тоже время должно обеспечиваться как можно меньшее отклонение оценки от оцениваемой характеристики.

Для количественного описания степени отклонения оценки от оцениваемой характеристики используется ряд величин, наиболее

употребительными из которых являются погрешности от смущенности и статическая методическая, определяемые по формулам

$$\gamma_{ст} = \frac{\sigma_{\Theta}}{m_{\Theta}}, \quad (3.2)$$

$$\gamma_{см} = \frac{m_{\Theta} - \Theta}{\Theta}, \quad (3.3)$$

где  $m_{\Theta}$  и  $\sigma_{\Theta}$  - математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение оценки.

Погрешность от смущенности характеризует систематическую, а статическая методическая – случайную составляющие погрешности определения характеристики по ее оценке.

Оценка, имеющая погрешность от смущенности, равной нулю, называется несмещенной.

Обычно на величины погрешностей накладываются ограничения сверху, обусловленные специфическими условиями эксплуатации объекта исследования. При одинаковых ограничениях на величины погрешностей возможны различные способы получения одной и той же оценки, отличающиеся друг от друга простой технической реализацией и оперативностью. Возникает необходимость выбрать такой из них, который при заданных требованиях к оперативности был наиболее прост в технической реализации.

Чтобы правильно решить эту задачу, рассмотрим различные способы оценивания характеристик случайных процессов.

При этом основное внимание сосредоточим на оценке характеристик стационарных случайных процессов. В природе стационарных процессов в чистом виде не существует. Однако при определенных ограничениях на длительность интервалов измерения и при известных требованиях к точности измерения эти процессы можно считать практически стационарными. Именно для этого класса процессов, удовлетворяющих условию эргодичности, существует большое число различных способов статической обработки.

### 3.1 Методы оценки одномерных моментных характеристик

Как уже было показано, составляющие объекта измерения представляют собой случайные процессы. К одномерным характеристикам случайного процесса  $X(t)$  относятся начальные и центральные моменты различных порядков.

Простейшей одномерной моментной характеристикой стационарного случайного процесса  $X(t)$  является начальный момент первого порядка, называемый математическим ожиданием  $m_x = M[X(t)]$ .

Для получения оценки  $m_x$  математического ожидания используется преобразование вида

$$\hat{m}_x = \hat{M}[X(t)], \quad (3.4)$$

где  $\hat{M}[\cdot]$  - оператор усреднения.

В зависимости от вида этого оператора оценки математического ожидания будут обладать различными свойствами. Наибольшее применение на практике получили следующие операторы усреднения:

$$\hat{M}_1[X(t)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(k\Delta), \quad (3.5)$$

$$\hat{M}_2[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt, \quad (3.6)$$

$$\hat{M}_3[X(t)] = \int_0^t h(\tau) X(t - \tau) d\tau, \quad (3.7)$$

где  $T$  – время измерения (длительности реализации);

$\Delta$  - шаг дискретизации во времени сигнала  $X(t)$ ;  $n = \frac{T}{\Delta}$ .

Оператор усреднения вида (3.5) технически может быть реализован или цифровыми интеграторами, или цифровыми вычислительными машинами. Для определения погрешностей оценки математического ожидания при помощи этого оператора обратимся к формулам (3.2), (3.5). В результате получим

$$\gamma_{cl} = 0, \quad (3.8)$$

$$\gamma_{cl} = \frac{\sigma_x}{|m_x|} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{v=1}^n \rho_x\{(k-v)\Delta\}}, \quad (3.9)$$

здесь  $\sigma_x$  и  $\rho_x(\tau)$  соответственно среднеквадратическое отклонение и нормированная автокорреляционная функция процесса. Так как

$$\sum \sum \rho_x \{(k-v)\Delta\} = \left\{ n \rho_x(0) + 2 \sum_{m=1}^n (n-m) \rho_x(m\Delta) \right\} \leq 2n \sum_{m=0}^{n-1} |\rho_x(m\Delta)| \leq 2n \tau_k,$$

где  $\tau_k = \int |\rho_x(\tau)| d\tau$  - интервал корреляции процесса  $X(t)$ , то из выражения (3.9) с учетом того, что  $n = \frac{T}{\Delta}$ , получим

$$\gamma_{cr1} \leq \sqrt{2} \frac{\sigma_x}{|m_x|} \sqrt{\frac{\tau_k}{T}}. \quad (3.10)$$

При использовании оператора (3.6), который технически может быть реализован аналоговыми интеграторами, погрешности оценки математического ожидания будут следующими:

$$\gamma_{c2} = 0, \quad (3.11)$$

$$\gamma_{cr2} = \frac{\sigma_x}{|m_x|} \sqrt{\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \rho_x(t_1 - t_2) dt_1 dt_2}. \quad (3.12)$$

Для подкоренного выражения справедливо соотношение

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \rho_x(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T-\tau) \rho_x(\tau) d\tau \leq \frac{2}{T^2} \int_0^T |\rho_x(\tau)| d\tau = \frac{\tau_k}{T}.$$

С учетом этого из формулы (3.12) находим

$$\gamma_{cr2} \leq \sqrt{2} \frac{\sigma_x}{|m_x|} \sqrt{\frac{\tau_k}{T}}. \quad (3.13)$$

Из сравнения первых двух операторов видно, что при одинаковой длительности реализации они дают оценки с одинаковыми метрологическими характеристиками. Что касается технической реализации этих операторов, то следует отдать предпочтение первому, поскольку он, при прочих равных условиях, позволит обеспечить аппаратную погрешность.

К недостаткам этих операторов следует отнести невозможность производить непрерывную оценку математического ожидания: результат оценки выдается дискретно, через интервалы времени длительностью менее  $T$ .

Рассмотрим теперь свойства третьего оператора усреднения. Как следует из уравнения (3.7), техническая реализация этого оператора сводится к построению фильтра с импульсной переходной характеристикой  $h(\tau)$ .

Из соотношений (3.7) и (3.3), (3.4) находим, что оценка математического ожидания, определяемая с помощью этого оператора, будет смещена. Величина погрешности от смещенности будет равна

$$\gamma_{сз} = \int_0^t h(\tau) d\tau - 1. \quad (3.14)$$

Таким образом, погрешность о смещенности зависит от вида функции  $h(\tau)$ , а также от времени изменения  $t$ . В установившемся режиме работы фильтра ( $t > \infty$ ) погрешность смещенности будет определяться соотношением

$$\gamma_{сз} = \int_0^t h(\tau) d\tau - 1. \quad (3.15)$$

отсюда видно, что если выбрать импульсную переходную характеристику  $h(\tau)$ , удовлетворяющую условию  $\int_0^t h(\tau) d\tau = 1$ , то погрешность от смещенности в установившемся режиме работы фильтра можно сделать равной нулю. В неустановившемся режиме работы погрешность от смещенности принципиально всегда будет иметь место. Поэтому при использовании оператора (3.7) результат измерения необходимо получать не раньше, чем закончится переходной период. В этом случае погрешностью от смещенности можно пренебречь, а время между началом анализа и моментом получения результата может быть определено из уравнения (3.14).

Наиболее простая техническая реализация оператора (3.7) получается при

$$h(\tau) = \frac{1}{T_0} \exp^{-\frac{\tau}{T_0}}. \quad (3.16)$$

Нетрудно видеть, что фильтр с импульсной переходной характеристикой (3.16) есть фильтр нижних частот первого порядка.

Подставляя  $h(\tau)$  в выражение (3.14), находим

$$\gamma_{сз} = \frac{1}{T_0} \exp^{-\frac{\tau}{T_0}}. \quad (3.17)$$

это соотношение при заданных ограничениях на  $T_0$  позволяет определить время  $t$ , по истечении которого выходной сигнал фильтра принимать в качестве оценки математического ожидания входного сигнала.

Что касается статистической методической погрешности при применении оператора (3.7), то с учетом (3.2), (3.4) и (3.7) в установившемся режиме она будет равна

$$\gamma_{\text{стз}} = \sqrt{2} \frac{\sigma_x}{|m_x|} \sqrt{\int_0^{\infty} h(\tau) \rho_x(\tau) d\tau}.$$

Так как с учетом (3.16)  $\int_0^{\infty} h(\tau) \rho_x(\tau) d\tau \leq \frac{\tau_k}{T_0}$ , то

$$\gamma_{\text{стз}} = \sqrt{2} \frac{\sigma_x}{|m_x|} \sqrt{\frac{\tau_k}{T_0}}. \quad (3.18)$$

Сопоставляя выражение (3.18) с выражением (3.10) и (3.12), приходим к выводу, что если выбрать постоянную времени фильтра нижних частот  $T_0 = \tau_k$ , то все три рассмотренные оценки будут идентичны в смысле обеспечения одинаковых величин погрешности от смещенности математических ожиданий. Но при прочих равных условиях последний оператор требует большего времени анализа. Однако, когда необходимо получать непрерывную оценку математического ожидания, ему часто отдают предпочтение. Затем также, что последний оператор является самым простым в технической реализации.

Теперь, когда рассмотрены способы оценки математического ожидания, т.е. начального момента первого порядка, нетрудно перейти к способам оценки начальных моментов любого порядка.

Напомним, что начальным моментом  $k$ -го порядка стационарного случайного процесса является величина

$$a_k = M[X^k(t)]. \quad (3.19)$$

Эту величину можно интерпретировать как математическое ожидание стационарного случайного процесса  $X^k(t)$ . Но показано, что для оценки математического ожидания стационарного случайного сигнала применим оператор усреднения. Отсюда следует, что в качестве оценки начального момента  $k$ -го порядка можно взять величину

$$\hat{a}_k = \hat{M}[X^k(t)], \quad (3.20)$$

где в качестве оператора усреднения возможно использование любого из операторов (3.5) – (3.7). При этом погрешности от смещенности оценки  $a_k$  будут определяться теми же формулами, что и погрешности от смещенности оценки математического ожидания.

Что касается статистических методических погрешностей, то формулы (3.10), (3.12) и (3.18) можно применить, если в место  $\sigma_x$  и  $m_x$  подставить соответственно среднеквадратическое отклонение и математическое ожидание процесса  $X^k(t)$ . Строго говоря, в этих формулах следовало бы заменить интервал корреляции процесса  $X(t)$  на интервал корреляции процесса  $X^k(t)$ . Но так как процесс  $X^k(t)$  представляет собой нелинейное преобразование процесса  $X(t)$ , то его спектр не может быть уже спектра процесса  $X(t)$ . А поскольку эквивалентная ширина спектра мощности однозначно связана с интервалом корреляции соотношением неопределенности

$$\Delta \omega_c * \tau_k = const,$$

то интервал корреляции процесса  $X^k(t)$  будет не меньше интервала корреляции процесса  $X(t)$ . Поэтому в формулах (3.10), (3.12) и (3.18) сохранить  $\tau_k$ , то неравенства только усилятся.

Другими словами, пользуясь предложенной методикой, эти формулы будут давать завышенные значения статистических методических погрешностей оценок начальных моментов. Но зато такая методика избавляет от необходимости априорного значения двумерной плотности распределения процесса  $X(t)$ .

Техническая реализация алгоритма (3.20) будет требовать применения блока усреднения и функционального преобразователя, возводящего анализируемый процесс  $X(t)$  в степень  $k$ .

К центральным моментным характеристикам относятся величины

$$\mu_k = M[\{X(t) - M[X(t)]\}^k]. \quad (3.21)$$

Формула (3.21) отличается от (3.19) тем, что под знаком математического ожидания вместо процесса  $X(t)$  стоит центрированный процесс

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - M[X(t)].$$

Для получения оценки величины  $\mu_k$  используем то же прием, что и для получения оценки начального момента  $a_k$ , т.е. в выражении (3.21) осуществим формальную замену характеристики  $\mu_k$  на ее оценку и оператора математического ожидания на оператор усреднения. В результате получим

$$\hat{\mu}_k = \hat{M}[\{\overset{\circ}{\hat{X}}(t)\}^k], \quad (3.22)$$

где  $\overset{\circ}{\hat{X}}(t) = X(t) - \hat{M}[X(t)]$ , по смыслу, – оценка центрированного случайного процесса  $X(t)$ .

Оценка центрального момента  $\overset{\circ}{\hat{\mu}}_k$  обладает тем специфическим свойством, что она принципиально всегда смещена. Действительно, если в качестве оператора усреднения взять идеальный оператор, не вызывающий смещенности (например, (3.5) или (3.6)), то будем иметь несмещенную оценку центрального момента  $k$ -го порядка процесса  $\overset{\circ}{\hat{X}}(t)$ . Но так как

$\overset{\circ}{\hat{X}}(t) \neq \overset{\circ}{X}(t)$ , то  $M[\overset{\circ}{\hat{\mu}}_k] \neq \mu_k$ , ибо  $M[\{\overset{\circ}{\hat{X}}(t)\}^k] \neq M[\overset{\circ}{X}^k(t)]$ .

Причиной возникновения погрешности от смещенности оценки  $\overset{\circ}{\hat{\mu}}_k$  является отличие процесса  $\overset{\circ}{\hat{X}}(t)$  от  $\overset{\circ}{X}(t)$  из – за невозможности точного выполнения операции центрирования  $\overset{\circ}{\hat{X}}(t) = X(t) - \hat{M}[X(t)]$  (для точного центрирования необходимо обеспечение условия  $\hat{M}[X(t)] = m_x$ , что принципиально недостижимо вследствие случайного характера величины  $\hat{M}[X(t)]$ ).

Погрешность от смещенности оценки  $\overset{\circ}{\hat{\mu}}_k$  с учетом соотношений (3.22) и (3.3) равна

$$\gamma_c = \frac{M[\{X(t)\hat{M}[X(t)]\}^k] - \mu_k}{\mu_k}. \quad (3.23)$$

Из выражения (3.23) видно, что при прочих равных условиях, для уменьшения погрешности от смещенности необходимо получать как можно более точную оценку  $\hat{M}[X(t)]$  математического ожидания процесса  $X(t)$ .

Что касается статистических методических погрешностей, то они могут быть вычислены по тем же формулам, которые применяются при оценке начальных моментов процесса  $X(t)$  соответствующего порядка.

Техническая реализация алгоритма (3.22) будет отличаться от реализации алгоритма (3.21) лишь добавлением в качестве входного блока соответствующей аппаратуры блока центрирования.

Сложность блока центрирования и возможности его практического использования целиком и полностью будут определяться видом оператора, применяемого для оценки математического ожидания процесса  $X(t)$ .

Наибольшие сложности будут встречаться при использовании операторов вида (3.5) и (3.6). Применение этих операторов для

центрирования, кроме того, будет приводить к существенному увеличению длительности реализации анализируемого процесса. Поэтому, чтобы обеспечить простоту технической реализации и оперативность анализа, целесообразно применить оператор вида (3.7). В этом случае центрирование процесса, как следует из выражений (3.21) и (3.7), сведется к выполнению операции

$$\hat{\overset{\circ}{X}}(t) = \int_0^t \{\delta(\tau) - h(\tau)\} X(t-\tau) d\tau, \quad (3.24)$$

где  $\delta(\tau)$  - дельта - функция.

Видно, что эта операция может быть выполнена фильтром с импульсной характеристикой  $\delta(\tau) - h(\tau)$ , на вход которого подается анализируемый процесс.

Если, например, функция  $h(\tau)$  выбрана в соответствии с выражением (3.16), то такой фильтр будет иметь передаточную функцию  $\frac{Tp}{Tp+1}$ , то есть являться простейшим фильтром верхних частот.

Кроме начальных и центральных моментных характеристик составляющих объекта исследования, иногда ставится задача и определения некоторых функций от них. Эта задача может быть решена путем предварительной оценки необходимых моментных характеристик и дальнейшей их обработки. Рассмотрим, например, такие распространенные характеристики как коэффициент эксцесса

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \quad (3.25)$$

и коэффициент асимметрии

$$K_A = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.26)$$

Способы оценки этих характеристик могут быть получены формальной заменой характеристик их оценками, т.е.

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{\mu}_4}{(\hat{\mu}_2)^2} - 3, \quad (3.27)$$

$$\hat{K}_A = \frac{\hat{\mu}_3}{(\hat{\mu}_2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.28)$$

В заключении отметим, что для получения малых погрешностей от смещенности оценок функций моментных характеристик необходимо стремиться обеспечить малые погрешности от смещенности оценок самих моментных характеристик. То же самое относится и к статическим методическим погрешностям.

При использовании одинаковых операторов усреднения статистическая методическая погрешность оценки функции моментных характеристик будет равна

$$\gamma_{ст} = C \sqrt{\frac{\tau_k}{T_1}},$$

где  $C$  – коэффициент, величина которого зависит от вида оцениваемой характеристики и закона распределения анализируемого процесса.

$T_1 = T$  или  $T_0$  в зависимости от того, какой оператор усреднения применен: (3.5), (3.6) или (3.7).

## 4 Методы оценки корреляционных характеристик

К корреляционным характеристикам составляющей объекта исследования, представляющей собой стационарный случайный процесс, относятся автокорреляционная функция, моменты корреляционной функции различных порядков и т.д.

Исчерпывающей корреляционной характеристикой стационарного случайного процесса, знание которой позволяет определить все остальные, является корреляционная функция.

Существует множество статистических способов оценки корреляционной функции стационарного случайного процесса. Все они отличаются друг от друга оперативностью, сложностью технической реализации, а также способами представления результатов.

### 4.1 Непосредственная оценка корреляционной функции

Наиболее известным и исторически первым является способ, получаемый непосредственно из определения автокорреляционной функции (см. часть 1 настоящего пособия) путем замены оператора математического ожидания на оператор усреднения.

Согласно этому способу, оценка корреляционной функции имеет вид:

$$\hat{R}_x(\tau) = \hat{M}[\hat{X}(t)\hat{X}(t-\tau)]. \quad (4.1)$$

При центрируемом анализируемом процессе в это соотношение вместо  $\dot{X}(t)$  должно быть подставлено  $\hat{X}(t)$ .

Блок-схема аппаратуры, построенная в соответствии с алгоритмом (4.1), показана на рисунке 33. Как видно из этого рисунка, аппаратура состоит из устройства задержки (УЗ), множительного устройства (МУ) и блока усреднения (БУ), реализующего оператор  $\hat{M}[\cdot]$ .

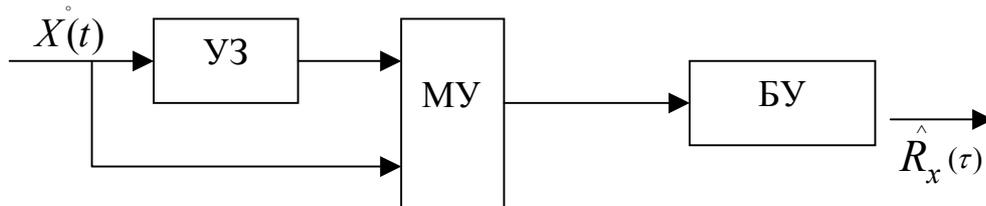


Рисунок 33 – Блок – схема аппаратуры для непосредственной оценки автокорреляционной функции

Погрешность от смещенности  $\hat{R}_x(\tau)$  целиком и полностью будет определяться блоком усреднения, т.е. видом оператора усреднения, поэтому для вычисления можно воспользоваться формулами (3.3), (3.4).

Статистическая методическая погрешность оценки  $\hat{R}_x(\tau)$  по данному способу будет равна

$$\gamma_{ст} = \frac{C}{\rho_x(\tau)} \sqrt{\frac{\tau_k}{T}}, \quad (4.2)$$

где  $C$  – постоянный коэффициент, величина которого зависит от вида закона распределения анализируемого сигнала,  $\rho_x(\tau)$  – нормированная автокорреляционная функция процесса.

Так как  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho_x(\tau) = 0$ , то, как видно из полученной формулы,  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma_{ст} \rightarrow \infty$ . Поэтому оценка значений корреляционной функции при больших  $\tau$  будет осуществляться с большими погрешностями.

Для уменьшения погрешности, как следует из выражения (4.2), необходимо, с одной стороны, уменьшать диапазон измерения  $\tau$ , а с другой – увеличивать постоянную времени  $T$  блока усреднения. Это обстоятельство приводит к тому, что оценка корреляционной функции по рассматриваемому способу будет требовать значительно большей длительности реализации, чем, например оценка математического ожидания и дисперсии.

Корреляционная функция практически отлична от нуля лишь на ограниченном интервале времени, соизмеримом с интервалом корреляции анализируемого процесса. Поэтому именно в этом диапазоне и есть смысл получать оценку корреляционной функции. Рассматриваемый способ может быть реализован в виде одноканальной или многоканальной аппаратуры. Одноканальная аппаратура требует применение регулируемого устройства задержки, являющегося весьма сложным в технической реализации. Другой недостаток одноканальной аппаратуры заключается в том, что с ее помощью осуществляется последовательная оценка значений корреляционной функции  $R_x(\tau_1), \dots, R_x(\tau_n)$ . Это существенно увеличивает время анализа и, следовательно, при помощи одноканальной аппаратуры невозможно осуществить оперативную оценку корреляционной функции.

Многоканальная аппаратура в принципе позволяет осуществить оперативный анализ, так как в ней оценки значений корреляционной функции получаются одновременно. Однако такая аппаратура требует применения в  $n$  раз больше устройств задержки, чем одноканальная ( $n$ -число каналов). Реализация большого числа устройств задержки является трудной технической задачей.

Кроме отмеченного, многоканальной аппаратуре присущ тот существенный недостаток, что оценка корреляционной функции получается в виде совокупности ее значений, что затрудняет ее использование для проведения корреляционного анализа объекта исследования (управления).

Таким образом, способ непосредственной оценки корреляционной функции стационарного случайного процесса целесообразно применять лишь тогда, когда полностью отсутствует априорная информация о корреляционных свойствах анализируемого процесса.

В тех же случаях, когда такая информация имеется, больший эффект дает использование аппроксимативных способов оценивания корреляционных функций.

## 4.2 Аппроксимативная оценка корреляционной функции

Основная идея аппроксимативного способа оценки корреляционных функций заключается в выборе модели  $\rho_M(\tau, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N)$  нормированной корреляционной функции  $\rho_X(\tau)$  этого или иного критерия. Другими словами, должна быть решена задача аппроксимации функции  $\rho_X(\tau)$  функцией  $\rho_M = \rho_M(\tau, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N)$ . В зависимости от того, что выбирается в качестве критерия аппроксимации, получаются различные способы оценки корреляционной функции.

Наиболее распространенным на практике является способ, основанный на обеспечении минимума величины квадратической погрешности.

$$\Delta = \int_0^{\infty} [\rho_M(\tau) - \rho_X(\tau)]^2 d\tau. \quad (4.3)$$

Величина погрешности  $\Delta$  является функцией параметров модели  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ . Если величина  $\Delta$  имеет один экстремум в заданном диапазоне изменения параметров  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$  и этот экстремум является минимум, то значения параметров модели могут быть определены из системы уравнений

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_m} = 0 \quad (4.4)$$

$(m = 0, 1, \dots, N)$

Обеспечение одного экстремума (минимума) достигается выбором соответствующего вида модели и диапазона изменения ее параметров.

Подставляя в систему (4.4) величину  $\Delta$  из уравнения (4.3), получим систему уравнений в следующем виде:

$$\int_0^{\infty} \rho_X(\tau) \frac{\partial \rho_M(\tau)}{\partial \beta_X} d\tau - \int_0^{\infty} \rho_M(\tau) \frac{\partial \rho_M(\tau)}{\partial \beta_X} \rho_X(\tau) d\tau = 0 \quad (4.5)$$

$(m = 0, 1, \dots, N)$

Введем обозначение

$$\frac{\partial \rho_M(\tau)}{\partial \beta_X} = h_M(\tau, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N) = h_m(\tau); \quad (4.6)$$

$$\rho_M(\tau) \frac{\partial \rho_M(\tau)}{\partial \beta_X} d\tau = \varphi_m(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N) = \varphi_m. \quad (4.7)$$

Тогда система уравнений (4.4) примет вид

$$\int_0^{\infty} h_m(\tau) \rho_X(\tau) d\tau - \varphi_m = 0 \quad (4.8)$$

$(m = 0, 1, \dots, N)$

Поставив в выражение (4.7)  $\rho_X(\tau) = \frac{M[\dot{X}(t) \dot{X}(t-\tau)]}{M[\dot{X}(t)]^2}$ , после ряда преобразований получим

$$M\left[\dot{X}(t) \left\{ \int_0^{\infty} h_m(\tau) \dot{X}(t-\tau) d\tau - \varphi_m \dot{X}(t) \right\}\right] = 0 \quad (4.9)$$

$(m = 0, 1, \dots, N)$

Соотношение (4.8) может рассматривать как алгоритм для оценки аппроксимативным способом корреляционной функции. Такая аппаратура будет состоять из  $N+1$  идентичных каналов. На рисунке 4.2 в качестве примера показана блок-схема  $m$ -го канала. Этот канал включает в свой состав фильтр с регулируемыми параметрами  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$  с импульсной характеристикой  $h_m(\tau)$  (4.6), линейный преобразователь с коэффициентом преобразования  $\varphi_m$  (4.7), функционально зависящим от параметров фильтра, вычитающее устройство (ВУ), множительное устройство (МУ), блок усреднения (БУ) и нуль – индикатор (НИ).

Процесс оценки параметров модели корреляционной функции осуществляется так. При подаче на вход аппаратуры анализируемого процесса  $\dot{X}(t)$  на выходах блоков усреднения каналов будут действовать сигналы, являющиеся оценками левых частей соответствующих уравнений системы (4.8). Путем вариации параметров фильтров добиваются нулевых значений выходных сигналов блоков усреднения всех каналов. Полученные значения параметров принимаются в качестве оценок параметров корреляционной функции исследуемого процесса.

Различают два типа модели корреляционной функции. Один из типов моделей представляет ряд по той или иной системе функций. Ко второму типу относят модели, представляющие функции заданного вида.

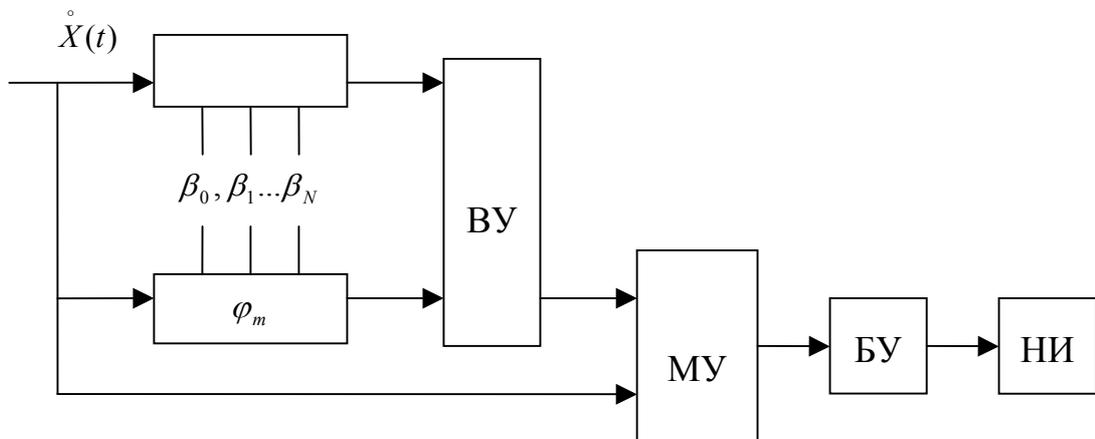


Рисунок 34 – Блок – схема устройства для оценки корреляционной функции по аппроксимативному способу

Последний тип характерен тем, что модель корреляционной функции является нелинейной функцией параметров  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ . Аппаратура, осуществляющая оценку параметров такой модели, имеет взаимосвязанные каналы, что при большом числе параметров приводит к существенному увеличению длительности анализа. Поэтому с целью повышения оперативности оценки параметров модели, представляющих собой функции заданного вида, целесообразно брать модели с небольшим числом параметров, не превышающем двух, трех.

Показано, что такого типа модели могут быть применены лишь тогда, когда достаточно априорной информации о корреляционных свойствах анализируемого процесса.

$$\begin{aligned}\rho_{M1}(\tau) &= \exp^{-\beta_0|\tau|}; \\ \rho_{M2}(\tau) &= \exp^{-\beta_0|\tau|} \cos \beta_1 \tau; \\ \rho_{M3}(\tau) &= \exp^{-\beta_0|\tau|} \left( \cos \beta_1 \tau + \frac{\beta_0}{\beta_1} \sin \beta_1 |\tau| \right); \\ \rho_{M4}(\tau) &= \exp^{-\beta_0|\tau|} \left( \cos \beta_1 \tau - \frac{\beta_0}{\beta_1} \sin \beta_1 |\tau| \right).\end{aligned}$$

Как конкретно проводится синтез аппаратуры, осуществляющей аппроксимацию корреляционной функции функцией заданного вида, рассмотрим на примере.

Пусть на основании каких-то соображений в качестве модели корреляционной функции выбрана следующая:

$$\rho_{M1}(\tau) = \exp^{-\beta_0|\tau|}. \quad (4.10)$$

Эта модель содержит неизвестный параметр  $\beta_0$ , который должен быть определен на основании критерия (4.3).

Для данной модели из соотношений (4.5) и (4.6) находим

$$\begin{aligned}h_0(\tau) &= -\tau \exp^{-\beta_0|\tau|}, \\ \varphi_0 &= -\frac{1}{4\beta_0^2}.\end{aligned}$$

С учетом определенных величин система уравнений (4.9) для данного случая примет вид

$$M\left[\dot{X}(t) \left\{ -\int_0^\infty \tau \exp^{-\beta_0|\tau|} \dot{X}(t-\tau) d\tau + \frac{1}{4\beta_0^2} \dot{X}(t) \right\}\right] = 0$$

или

$$M\left[\dot{X}(t) \left\{ 4 \int_0^\infty \beta_0^2 \tau \exp^{-\beta_0|\tau|} \dot{X}(t-\tau) d\tau - \dot{X}(t) \right\}\right] = 0. \quad (4.11)$$

На рисунке 35 представлена блок – схема аппаратуры для оценки параметра модели  $\beta_0$  синтезированная на основании (4.11).

Эта аппаратура состоит из двух одинаковых фильтров нижних частот с передаточными функциями  $\frac{2}{(1+Tp)}$  с регулируемым постоянным времени

$T = \frac{2}{(1+Tp)}$ , вычитающего устройства (ВУ), множительного устройства (МУ), блока усреднения (БУ) и нуля – индикатора (НИ). Заметим, что в данной аппаратуре отсутствует линейный преобразователь с регулируемым коэффициентом преобразования, что обусловлено видом модели. Процесс оценки вида параметра  $\beta_0$ , может быть легко автоматизирован, если применить устройство, осуществляющее регулировку постоянных времени фильтров на входе в зависимости от величины выходного сигнала блока усреднения.

Параметры других моделей корреляционных функций, приведенных выше, могут быть оценены аналогично.

Модели, представляющие собой ряды по той или иной системе функций, применяются тогда, когда имеется много априорных сведений о корреляционных свойствах анализируемого процесса. Эта модель имеет вид

$$\rho_M(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau). \quad (4.12)$$

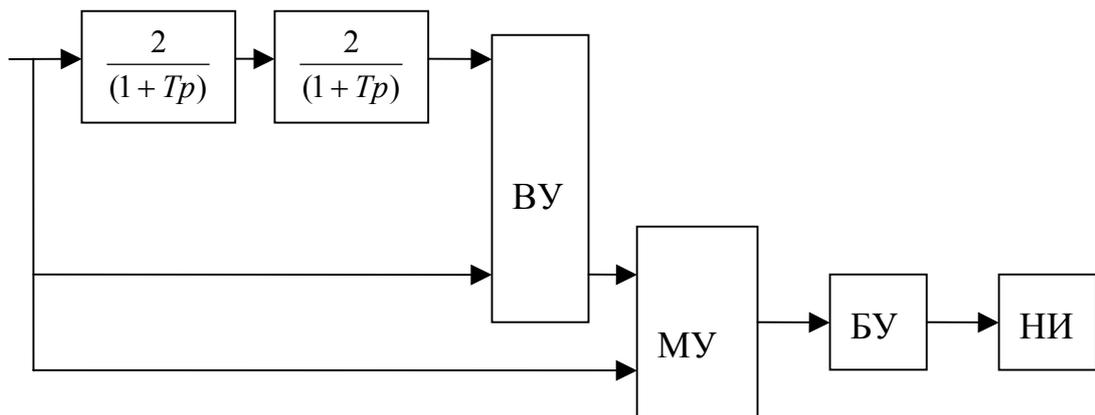


Рисунок 35 – Блок – схема аппаратуры для оценки параметра модели (4.11) корреляционной функции процесса.

Характерной ее особенностью является линейная зависимость от параметров  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ .

Наиболее просто осуществлять оценку параметров модели (4.12) можно, если в качестве функции  $\psi_k(\tau)$  выбрать ортогональные, удовлетворяющие условию

$$\int_0^{\infty} \psi_k(\tau) \psi_m(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \lambda_m, & k = m \end{cases}. \quad (4.13)$$

В этом случае выражения (4.6), (4.7) примут вид

$$h_m(\tau) = \psi_m(\tau), \quad (4.14)$$

$$\varphi_m = \lambda_m \beta_m, \quad (4.15)$$

а система уравнений (4.9) преобразуется к виду

$$M\left[\dot{X}(t) \left\{ \int_0^{\infty} \psi_m(\tau) \dot{X}(t-\tau) d\tau - \lambda_m \beta_m \dot{X}(t) \right\}\right] = 0 \quad (4.16)$$

( $m = 0, 1, \dots, N$ )

Каждое из уравнений этой системы является линейным уравнением с одним неизвестным. В результате решения получим

$$\beta_m = \frac{1}{\lambda_m \sigma_x^2} M\left[\dot{X}(t) \int_0^{\infty} \psi_m(\tau) \dot{X}(t-\tau) d\tau\right]. \quad (4.17)$$

Если анализируемый процесс  $\dot{X}(t)$  предварительно пронормирован по дисперсии то формула (4.17) примет вид

$$\beta_m = \frac{1}{\lambda_m} M\left[\dot{X}_H(t) \int_0^{\infty} \psi_m(\tau) \dot{X}_H(t-\tau) d\tau\right], \quad (4.18)$$

где  $\dot{X}_H(t) = \dot{X}(t) / \sigma_x^2$ .

Блок – схема аппаратуры, реализующей алгоритм (4.18), показана на рисунке 36. Аппаратура состоит из нормализатора (Н), фильтра с импульсной переходной характеристикой  $\psi_m(\tau)$ , множительного устройства (МУ), блока усреднения (БУ) и масштабирующего преобразователя с коэффициентом передачи  $\frac{1}{\lambda_m}$ . Заметим, что если из состава аппаратуры исключить нормализатор, то будет осуществляться оценка параметров модели ненормализованной корреляционной функции  $R_X(\tau)$ . На рисунке 4.4 показана лишь один из каналов. Всего таких каналов должно быть  $N+1$ . Основным элементом каждого канала, определяющим сложность аппаратуры в целом, является фильтр с импульсной характеристикой  $\psi_m(\tau)$ .

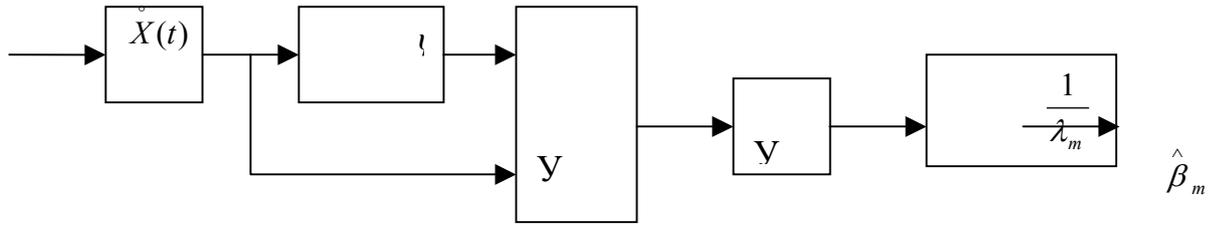


Рисунок 36 – Блок – схема аппаратуры, реализующей алгоритм (4.18)

Для того, чтобы реализовать фильтр с такой импульсной характеристикой, должно быть выполнено условие  $\int \psi_m(\tau) d\tau < \infty$  для любого  $m$ . Это условие необходимо иметь в виду при выборе системы ортогональных функций. Кроме того, для простоты технической реализации аппаратуры желательно выбирать такую систему ортогональных функций, которая приводила бы к канонической структуре фильтров, когда в составе аппаратуры используется лишь один фильтр с импульсной характеристикой  $\psi_N(\tau)$ . Остальные же фильтры оказываются составными частями указанного фильтра. Для получения канонической структуры фильтров должно быть выполнено условие

$$\psi_{m+1}(t) = \int_0^t \psi_m(t - \tau) \varphi_m(\tau) d\tau, \quad (4.19)$$

где  $\varphi_m(\tau)$  - импульсная характеристика элементарного звена фильтра.

Если выбранная система ортогональных функций удовлетворяет условию (4.19), то блок – схема аппаратуры для оценки параметров модели будет иметь вид, показанный на рисунке 4.5. Не поясняя состава блоков аппаратуры, который понятен из рисунка, скажем лишь, что она включает в состав один фильтр с импульсной характеристикой  $\psi_0(\tau)$  и  $N$  одинаковых фильтров с импульсными характеристиками  $\varphi(\tau)$ . Все эти последовательно включенные фильтры образуют фильтр с импульсной характеристикой  $\varphi_N(\tau)$ .

Широкое применение для оперативного анализа корреляционных функций получили модели, представляющие собой ряды по системе ортогональных функций Лагерра ( $\psi_m(\tau) = L(\tau)$ ).

$$L_m(\tau) = \exp\left(-\frac{\alpha\tau}{2}\right) \sum_{q=0}^m (-1)^q C_m^q \frac{1}{q!} (\alpha\tau)^q. \quad (4.20)$$

Для этих функций условие (4.13) имеет вид

$$\int L_m(\tau) L_k(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \frac{1}{\alpha}, & k = m \end{cases}, \quad (4.21)$$

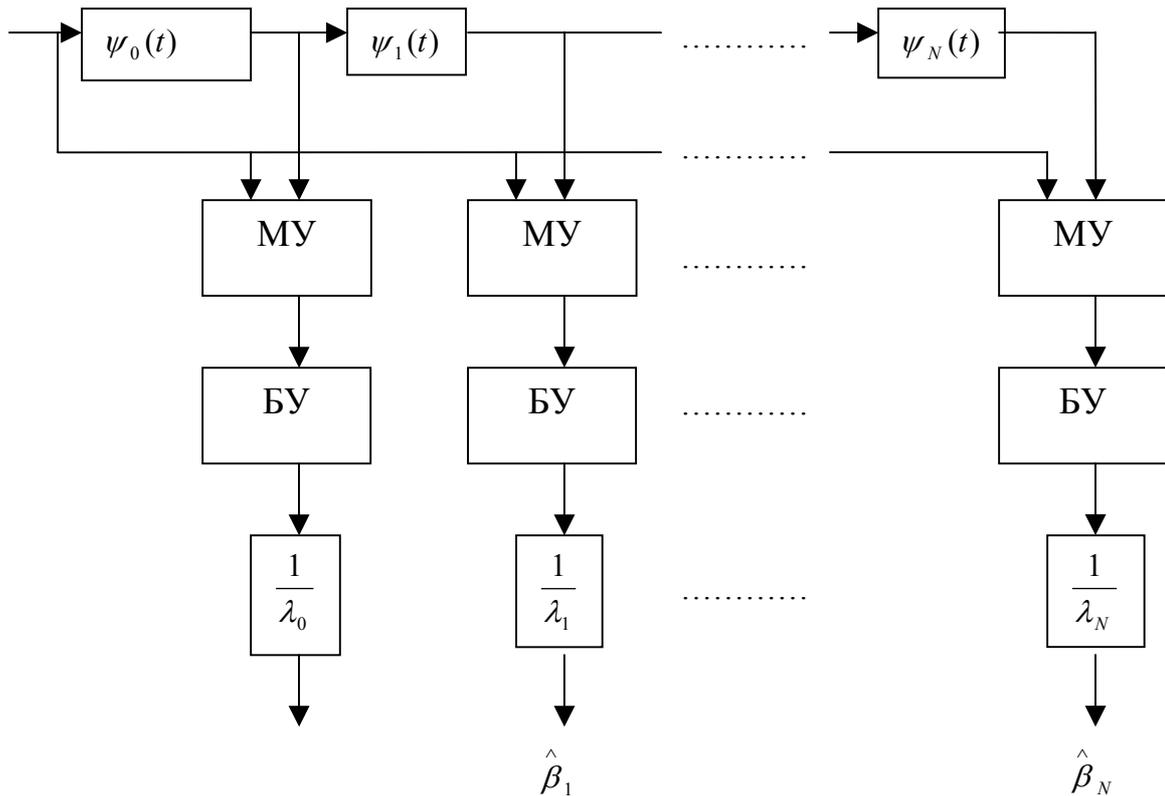


Рисунок 37– Блок – схема аппаратуры для оценки параметров модели корреляционной функции (канонического вида)

а параметры модели, как следует из (4.18) определяются по формуле

$$\beta_m = M[\dot{X}(t) \int_0^{\infty} \alpha L_m(\tau) \dot{X}(t - \tau) d\tau] = \alpha \int_0^{\infty} R_x(\tau) L_m(\tau) d\tau. \quad (4.22)$$

Применение модели для аппроксимативной оценки корреляционных функций позволяет просто реализовать аппаратуру, во – первых, благодаря тому, что выполняется условие (4.13), что приводит к канонической структуре фильтров, а во – вторых, в следствии того, что элементарная ячейка такого фильтра представляет собой простейшее звено с передаточной функцией первого порядка

$$\frac{p - \frac{\alpha}{2}}{p + \frac{\alpha}{2}}.$$

Погрешность аппроксимации корреляционной функции при использовании функции Лагерра, как это следует из выражений (4.3), (4.20) и (4.21), равна

$$\Delta = \int R_x(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^N \beta_m^2. \quad (4.23)$$

Отсюда видно, что при прочих равных условиях величина погрешности аппроксимации  $\Delta$  зависит от величины параметра  $\alpha$  функции Лагерра.

Принимая во внимание формулы (4.20) и (4.22), можно показать, что при  $\alpha=0$  и при  $\alpha=\infty$  величина  $\Delta=\infty$ , т.е. существует оптимальное значение  $\alpha$ , при котором  $\Delta$  минимальна.

Найдем это оптимальное значение. Рассматривая  $\Delta$  как функцию  $\alpha$ , получим следующее условие минимума величины  $\Delta$ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha^2} > 0 \end{array} \right\}. \quad (4.24)$$

Из уравнения (4.23) находим

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=0}^N \beta_m^2 - \frac{2}{\alpha} \sum_{m=0}^N \beta_m \frac{\partial \beta_m}{\partial \alpha}. \quad (4.25)$$

Из выражений (4.22) и (4.20) имеем

$$\frac{\partial \beta_m}{\partial \alpha} = -\frac{m}{2\alpha} \beta_{m-1} + \frac{1}{2\alpha} \beta_m + \frac{m+1}{2\alpha} \beta_{m+1}. \quad (4.26)$$

Подставив  $\frac{\partial \beta_m}{\partial \alpha}$  из уравнения (4.26) в уравнение (4.25), получим

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -\frac{N+1}{\alpha^2} \beta_N + \beta_{N+1}. \quad (4.27)$$

Отсюда видно, что оптимальное значение параметра  $\alpha$  должно находиться из уравнения

$$\beta_{N+1} = 0. \quad (4.28)$$

При этом должно быть выбрано такое решение уравнения, при котором  $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha^2} > 0$ . Последнее условие с учетом (4.26) – (4.28), примет вид

$$(N+1)\beta_N > (N+2)\beta_{N+2}. \quad (4.29)$$

В техническом аспекте задача выбора оптимального значения параметра функции Лагерра сводится к оптимальной подстройке постоянной времени фильтра Лагерра. Эта подстройка должна осуществляться в соответствии с алгоритмами (4.28), (4.29).

При аппроксимации корреляционной функции могут быть использованы и другие системы корреляционных функций. Достаточно подробно рассмотренные вопросы, связанные с аппроксимацией корреляционных функций функциями Лагерра, дают представление, с каких типов задачами приходится сталкиваться при использовании для анализа любой другой системы ортогональных функций.

### 4.3 Оценка моментов корреляционной функции

Корреляционная функция всесторонне характеризует корреляционные свойства анализируемого процесса. Однако во многих случаях достаточно ограничиться частичными сведениями о корреляционных свойствах сигнала. Неполными, но достаточно информативными корреляционными характеристиками, являются моменты корреляционной функции. В принципе можно ставить задачу построения модели корреляционной функции по этим характеристикам.

Моментом корреляционной функции порядка  $K$  называется величина

$$\nu_k = \int_0^{\infty} \tau^k R_x(\tau) d\tau. \quad (4.30)$$

Применяются также и нормированные моменты

$$\nu_{n,k} = \int_0^{\infty} \tau^k \rho_x(\tau) d\tau. \quad (4.31)$$

Отличие последней характеристики от предыдущей состоит лишь в том, что она определяется через нормированную корреляционную функцию. При этом, так как  $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau)$ , то  $\nu_k = \sigma_x^2 \nu_{n,k}$ .

Как видно из формулы (4.30), определение величины  $\nu_k$  требует знания корреляционной функции анализируемого процесса. В то же время эти характеристики применяются именно для того, чтобы описать процесс без знания корреляционной функции. Отсюда возникает необходимость поиска, с целью повышения оперативности анализа, таких способов оценки моментных характеристик корреляционных функций, которые не требовали бы предварительной оценки корреляционной функции.

Способы оценки моментов корреляционной функции основаны на соотношении (4.30). Так, если в выражение (4.30) корреляционную функцию  $R_x(\tau)$  заменить на ее оценку  $\hat{R}_x(\tau)$ , получим

$$\mathfrak{K}_k = \int_0^{\infty} \tau^k \hat{K}_x(\tau) d\tau. \quad (4.32)$$

Используя соотношение (4.32), можно получить несколько способов оценки момента  $\nu_k$ . Среди них наиболее эффективным является следующий: пусть в качестве оценки корреляционной функции используется модель, представляющая собой ряд по системе ортогональных функций вида (4.12)

$$\hat{K}_x(\tau) = R_M(\tau) = \sum_{k=0}^N \beta_k \psi_k(\tau).$$

Подставляя это значение оценки в выражение (4.32), будем иметь

$$\mathfrak{K}_k = \sum_{m=0}^N \beta_m \int_0^{\infty} \tau^k \psi_m(\tau) d\tau = \sum_{m=0}^N \beta_m A_m, \quad (4.33)$$

где  $A_m = \int_0^{\infty} \tau^k \psi_m(\tau) d\tau$  - величина, зависящая от выбора системы ортогональных функций. Оценка величины  $\mathfrak{K}_k$  по соотношению (4.33) требует знания параметров модели корреляционной функции  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ .

Однако, если в уравнение (4.33) подставить  $\beta_k$ , полученное из формулы (4.18) заменой оператора  $M[\cdot]$  на оператор усреднения  $\mathfrak{M}[\cdot]$ , то оценка величины  $\mathfrak{K}_k$  будет равна

$$\mathfrak{K}_k = \mathfrak{M}[X(t) \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^N \frac{A_m}{\lambda_m} \psi_m(\tau) X(t-\tau) d\tau \right\}]. \quad (4.34)$$

Соотношение (4.34) дает алгоритм построения аппаратуры для оценки величины момента корреляционной функции  $\nu_k$ . Блок – схема такой аппаратуры приведена на рисунке 37. Эта схема включает в себя фильтр, состоящий из  $N+1$  элементарных фильтров с импульсными характеристиками  $\psi_0(\tau), \psi_1(\tau), \dots, \psi_N(\tau)$ ,  $N+1$  масштабирующего преобразователя, сумматора, множительное устройство (МУ) и блок усреднения (БУ).

Заметим, что эта аппаратура предназначена для оценки моментной характеристики корреляционной функции любого порядка. При изменении порядка необходимо изменить лишь масштабирующие коэффициенты. Эта же аппаратура может быть применена и для одновременной оценки различных моментов корреляционной функции. При этом добавятся лишь сумматоры с масштабирующими преобразователями, множительные устройства и блоки усреднения.

Способ оценки момента корреляционной функции по соотношению (4.34) существенно проще способа этой оценки по соотношению (4.33), который требовал бы применения в  $(N+1)$  раз больше множительных устройств и блоков усреднения. Техническая реализация способа (4.30) существенно упрощается, если ортогональные функции удовлетворяют условию (4.19).

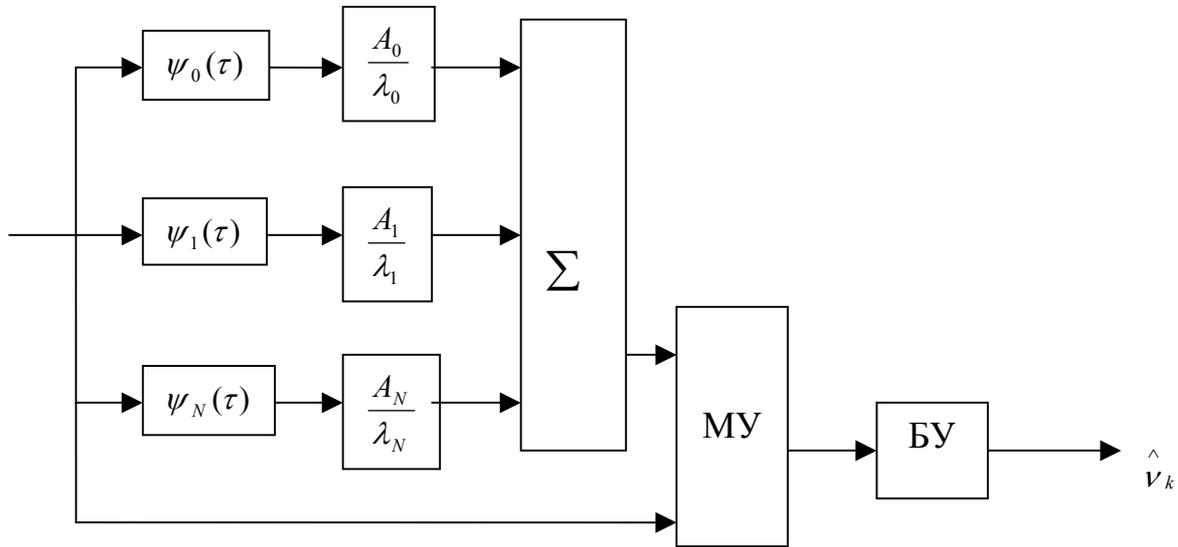


Рисунок 38 – Блок – схема аппаратуры для оценки величины момента корреляционной функции

Погрешность оценки момента  $v_k$  корреляционной функции рассматриваемым способом в основном будет определяться выбранной системой ортогональных функций.

Так, например, если в качестве ортогональных функций выбраны функции Лагерра (4.20), то при прочих равных условиях свойства оценки будут зависеть от величины  $N$  и значения параметра  $\alpha$  функции Лагерра. Для уменьшения погрешности от смещенности необходимо выбрать оптимальное значение  $\alpha$ , о котором говорилось ранее, и увеличивать число членов модели  $N$ . При выбранной же величине  $\alpha$  для уменьшения статистической методической погрешности нужно число членов модели уменьшать. Это говорит о том, что необходимо выбирать оптимальное число членов модели.

Чтобы правильно определить метрологические характеристики оценки, рекомендуется установить погрешность от смещенности оценки момента нулевого порядка рассматриваемым способом корреляционной функции  $R_x(\tau) = \exp^{-\alpha_0|\tau|}$ , если используются ортогональные функции Лагерра и значение их параметра  $\alpha$  находится из уравнения  $\beta_0 = 1$ .

Другой способ оценки момента корреляционной функции порядка  $K$  может быть получен при условии, если в формуле (4.30) сделать замену  $R_x(\tau) = M[\dot{X}(t)X(t-\tau)]$  и затем от оператора  $M[.]$  формально перейти к оператору усреднения  $\bar{M}[.]$ . В результате этих преобразований будем иметь

$$\hat{\epsilon}_k = \mathbb{M}[X_0(t) \int_0^{\infty} \tau^k \dot{X}(t-\tau) d\tau], \quad (4.35)$$

Блок – схема соответствующей аппаратуры приведена на рисунке 4.7.

Эта аппаратура состоит из фильтра с импульсной характеристикой  $h(\tau)$ , множительного устройства (МУ) и блока усреднения (БУ). Основным ее элементом является фильтр. Заметим, что формально эта блок-схема и блок-схема, приведенная на рисунке 38., идентичны. Отличие лишь в типе применяемого фильтра.

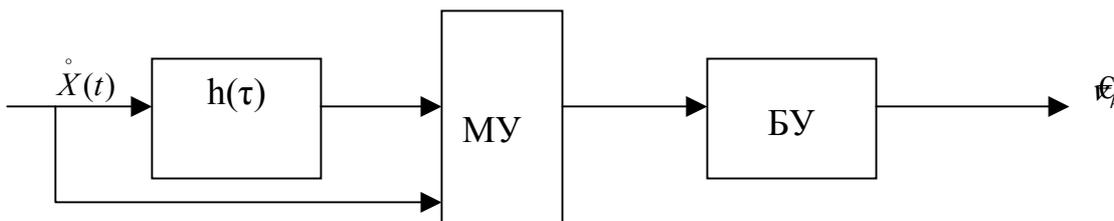


Рисунок 39 – Блок – схема аппаратуры для оценки момента корреляционной функции по соотношению (4.35)

При рассматриваемом способе фильтр на входе должен иметь импульсную характеристику  $h(\tau) = \tau^k$ , которая не является абсолютно интегрируемой функцией, т.е.  $\int_0^{\infty} |\tau^k| d\tau = \infty$ . Поэтому такой фильтр физически не реализуем и следовательно, бессмысленно ставить задачу его технической реализации. Отсюда следует вывод, что получение несмещенных оценок моментных характеристик корреляционных функций принципиально невозможно. Позволительно лишь ставить задачу получить искомые оценки со сколь угодно малыми погрешностями от смещенности.

Таким образом, для того чтобы технически реализовать способ (4.35), необходимо, во-первых, в аппаратуре применять фильтр с абсолютно интегрируемой импульсной характеристикой  $h(\tau)$ , а во-вторых, обеспечить сколь угодно малую погрешность от смещенности.

Эту задачу можно решить различными способами. Для примера рассмотрим следующий: применим в аппаратуре фильтр с импульсной характеристикой

$$h(\tau) = \tau^k H(\tau). \quad (4.36)$$

Здесь  $H(\tau)$  – такая функция, которая обеспечивает, во – первых, условие  $\int_0^{\infty} |\tau^k| d\tau < \infty$  и во – вторых, сколь угодно малую погрешность от смещенности оценки.

Проанализируем влияние вида функции  $H(\tau)$  на погрешность от смещенности. Оценка (4.35) с учетом того, что применен фильтр с импульсной характеристикой (4.36) примет вид

$$\epsilon_k = M[\hat{X}(t) \int_0^{\infty} \tau^k H(\tau) \hat{X}(t-\tau) d\tau].$$

Абсолютное значение погрешности от смещенности этой оценки будет равно

$$\Delta_C = M[\epsilon_k] - \nu_k = \int_0^{\infty} \tau^k \{H(\tau) - 1\} R_x(\tau) d\tau. \quad (4.37)$$

Из выражения (4.37) видно, что погрешность от смещенности будет меньше, чем функция  $H(\tau)$  отличается от единицы. Вполне понятно, что обеспечить близость функции  $H(\tau)$  к единице на всем интервале ( $0 \leq \tau < \infty$ ) невозможно. Но в этом и нет необходимости, так как корреляционная функция анализируемого процесса существенно отличается от нуля лишь на ограниченном интервале времени, соизмеримом с интервалом корреляции анализируемого процесса.

Поэтому надо стремиться к тому, чтобы обеспечить близость функции  $H(\tau)$  к единице лишь на ограниченном интервале времени, на котором функция корреляции исследуемого процесса существенно отлична от нуля.

При этом, так как значения  $R_x(\tau)$  наиболее весом при малых  $\tau$  ( $\tau < \tau_k$ ), то именно при малых  $\tau$  и является целесообразным обеспечивать близость функции  $H(\tau)$  к единице. При малых  $\tau$  функция  $H(\tau)$  может быть представлена в виде ряда Маклорена:

$$H(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} H^{(k)}(0) \frac{1}{k!} \tau^k, \quad (4.38)$$

где

$$H^{(k)}(0) = \begin{cases} H(0) = 0 \\ \frac{d^k H(\tau)}{d\tau^k} \tau > 0 \end{cases}.$$

Из формулы (4.38) следует понимать, что если выполнить условие

$$H(0) = 1, \quad H^{(k)} = 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.39)$$

то чем больше величина  $N$ , тем при прочих равных условиях функция  $H(\tau)$  будет меньше отличаться от единицы при малых  $\tau$ .

Итак, функцию  $H(\tau)$  надо выбирать в соответствии с условием (4.39). Одним из вариантов решения этой задачи является следующий.

Для того, чтобы импульсная переходная характеристика была абсолютно интегрируемой функцией, выберем функцию  $H(\tau)$  вида

$$H(\tau) = \exp \frac{\tau}{T} \sum_{k=0}^N \beta_k \left(\frac{\tau}{T}\right)^k,$$

а коэффициенты  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$  определили из системы уравнений (4.39). В результате получим  $\beta_k = \frac{1}{k!}$  и

$$H(\tau) = \exp \frac{\tau}{T} \sum_{k=0}^N \beta_k \left(\frac{\tau}{T}\right)^k. \quad (4.40)$$

Из уравнения (4.40) следует, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} H(\tau) = 1$ ,  $\lim_{T \rightarrow \infty} H(\tau) = 1$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} H(\tau) = 1$ .

В силу этого, как видно из выражения (4.37) при выборе функции  $H(\tau)$  вида (4.37)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_C = 0$ ,  $\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta_C = 0$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} \Delta_C = 0$ . Другими словами, погрешность от

смещенности оценки  $\hat{\nu}_k$  в рассматриваемом случае может быть сделана сколь угодно малой соответствующим выбором величин  $T$  и  $N$ . Например, если  $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp \frac{|\tau|}{\tau_k}$ , где  $\tau_k$  - интервал корреляции, то относительное значение погрешности от смещенности оценки момента нулевого порядка  $\nu_0$  этой корреляционной функции рассматриваемым способом будет равно (4.37)

$$\gamma_C = \frac{\Delta_C}{\nu_0} = \frac{\left(\frac{\tau_k}{T}\right)^{N+1}}{\left(1 + \frac{\tau_k}{T}\right)^{N+1}}.$$

Из полученной формулы видно, как эффективен рассматриваемый способ с точки зрения обеспечения малых погрешностей от смещенности.

Действительно, если, например, величина  $E$  выбрана так, что  $\frac{\tau_k}{T} = 0.1$ , то при  $N=0$   $|\gamma_C| \leq 0.1$ , при  $N=1$   $|\gamma_C| \leq 0.01$ , а при  $N=2$   $|\gamma_C| \leq 0.001$ .

Таким образом, даже при очень небольшом  $N$  возможно получить весьма малые значения погрешностей от смещенности. При выборе функции  $H(\tau)$  вида (4.40) фильтр с импульсной характеристикой  $H(\tau)$  будет иметь структуру, показанную на рисунке хх.хх. Этот фильтр включает в свой состав  $(N+k+1)$  одинаковых фильтров нижних частот с передаточными функциями  $1/(1+T\omega)$  и блок суммирования.

Сравнивая два рассмотренных способа оценки величин момента  $k$ -го порядка корреляционной функции, приходим к тому, что, во – первых, последний способ существенно проще технической реализации, в следствии использования фильтров с нерегулируемыми параметрами. Во – вторых, что является весьма важным, при одинаковом числе фильтров последний способ обеспечивает погрешности от смещенности оценки несравнимо меньшие, чем первый.

Таким образом, именно последнему способу следует отдать предпочтение при оценивании моментов корреляционной функции анализируемого процесса.

#### 4.4 Оценка интервала корреляции

Под интервалом корреляции  $\tau_k$  случайного процесса  $X(t)$  понимается тот интервал времени, на котором корреляционная функция этого процесса практически отлична от нуля.

Знание интервала корреляции позволяет правильно выбирать шаг дискретизации во времени, параметры аппаратуры для оперативного анализа характеристик этого процесса, обеспечивает возможность адаптации алгоритмов обработки к свойствам анализируемого процесса и помогает решению других важных технических задач.

Выше (в первой части настоящего пособия) было показано, что существует несколько формул для определения величины интервала корреляции. Так, одной из них является следующая:

$$\tau_{k1} = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau.$$

Величина  $\tau_{k1}$  есть не что иное как нормированный момент нулевого порядка  $\tau_{n0}$  корреляционной функции. Поэтому для оценки величины  $\tau_{k1}$  может применен любой из рассмотренных способов оценки величины момента  $\tau_{n0}$ .

Другой формулой, применяемой для определения интервала корреляции, является следующая:

$$\tau_{k2} = \frac{\int_0^{\infty} \tau \rho_x(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau} = \frac{\nu_1}{\nu_0}.$$

Таким образом, для получения оценки  $\tau_{k2}$  необходимо определить уже рассмотренными способами моменты корреляционной функции первого и нулевого порядков.

Более широкое распространение получил интервал корреляции, определяемый по формуле

$$\tau_{k3} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau.$$

При оперативной оценке величины  $\tau_{k3}$  приходится сталкиваться с большими трудностями, чем при оценке величин  $\tau_{k1}$  и  $\tau_{k2}$ .

Заслуживают внимания два способа оценки этой величины. Первый способ, который назовем аппроксимативным, основан на вычислении величины  $\tau_{k3}$  по модели корреляционной функции  $\rho_x(\tau)$ :

$$\epsilon_{k3} = \int_0^{\infty} \rho_m^2(\tau) d\tau. \quad (4.41)$$

Техническая реализация алгоритма оценки (4.41) будет определяться видом модели  $\rho_m(\tau)$  корреляционной функции. Наиболее эффективным при этом является использование моделей вида (4.12), представляющих собой ряды по системе ортогональных функций.

Подставляя в выражение (4.41)  $\rho_m(\tau)$  из уравнения (4.12) и принимая во внимание формулу (4.13), получим

$$\epsilon_{k3} = \sum_{m=0}^N \lambda_m \beta_m^2. \quad (4.42)$$

Таким образом, оценка  $\tau_{k3}$  по формуле (4.42) сводится к суммированию с соответствующими весами квадратов величин параметров модели. Погрешность от смещенности оценки таким образом будет равна величине квадратичной погрешности аппроксимации функции  $\rho_x(\tau)$  функцией  $\rho_m(\tau)$ . Достоинством рассматриваемого способа является инвариантность к виду закона распределения анализируемого процесса. К недостаткам же следует отнести относительную сложность аппаратуры.

Наиболее простая техническая реализация аппаратуры возможна тогда, когда известен заранее закон распределения исследуемого процесса  $X(t)$ . Именно для этого случая разработано наибольшее число способов оценки  $\tau_{k3}$ .

Так, если закон распределения процесса  $X(t)$  можно свести к оценке величины  $\tau_{k1}$  процесса  $\overset{\circ}{X}(t)$ , так как нормированная корреляционная функция последнего с точностью до постоянного коэффициента равна квадрату нормированной корреляционной функции процесса  $X(t)$ .

Для определения интервала корреляции применяется также формула

$$\tau_{k4} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau,$$

или в качестве интервала корреляции  $\tau_{k5}$  принимается наименьшее  $\tau$ , начиная с которого выполняется условие  $|\rho_x(\tau)| \leq \delta$ , где величина  $\delta$  выбирается исходя из конкретных практических соображений.

Способы оценки величин  $\tau_{k4}$  и  $\tau_{k5}$  требуют, как правило, предварительной оценки корреляционной функции. С точки зрения оперативности оценки этих величин целесообразно применять в качестве оценок корреляционных функций те или иные их модели.

## 5 Методы оценки спектральных характеристик составляющих объекта исследования

Исчерпывающей спектральной характеристикой стационарного процесса является спектральная плотность мощности  $S_x(\omega)$  (СПМ). Эта характеристика связана с корреляционной функцией процесса  $X(t)$  соотношением

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (5.1)$$

быть получен из соотношения (5.1) если заменить корреляционную функцию  $R_x(\tau)$  ее оценкой  $\hat{R}_x(\tau)$

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_x(\tau) \exp^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (5.2)$$

Оперативность оценки спектральной плотности по алгоритму (5.2) будет целиком и полностью определяться оперативностью оценки корреляционной функции. Выше было показано, что наиболее оперативными являются аппроксимативные способы оценки корреляционной функции, когда в качестве оценки корреляционной функции берется некоторая модель  $R_M(\tau)$ . Как следует из (5.2), оценкой спектральной плотности мощности будет являться также некоторая модель

$$S_M(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_M(\tau) \exp^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (5.3)$$

Найдем квадратическую погрешность аппроксимации спектральной плотности  $S_x(\omega)$  и моделью  $S_M(\omega)$

$$\Delta_s = \int_{-\infty}^{\infty} [S_x(\omega) - S_M(\omega)]^2 d\omega.$$

Подставив в эту формулу  $S_x(\omega)$  из уравнения (5.1) и  $S_M(\omega)$  из выражения (5.3), получим

$$\Delta_s = \frac{1}{2\pi} \int [R_x(\tau) - R_m(\tau)]^2 d\tau. \quad (5.4)$$

Сопоставляя выражения (5.4) и (5.3), приходим к выводу, что  $\Delta_s = \frac{\Delta}{\pi}$ , где  $\Delta$  – квадратическая погрешность аппроксимации корреляционной функции  $R_x(\tau)$  моделью  $R_m(\tau)$ . Так как обеспечивается минимум величины  $\Delta$ , то будет минимальной величина  $\Delta_s$ .

Таким образом, способ оценки спектральной области по соотношению (5.3) является оптимальным в том смысле, что будет обеспечен и минимум величины  $\Delta_s$ .

Из приведенных соотношений видно, что задача аппроксимации спектральной плотности  $S_x(\omega)$  процесса  $X(t)$  функцией  $S_m(\omega)$  по минимуму квадратической погрешности сводится к задаче аппроксимации корреляционной функции  $R_x(\tau)$  этого же процесса функцией

$R_m(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\omega) \exp^{j\omega\tau} d\omega$  также по минимуму квадратической погрешности. Но

решение этой задачи уже подробно рассмотрено. На практике во многих случаях возникает необходимость в выявлении специфических свойств спектра анализируемого сигнала. Это может быть задача выявления экстремальных значений спектральной плотности и частот соответствующих им, сюда же можно отнести задачу определения эффективной ширины спектра мощности и др. Причем эти задачи должны решаться в условиях отсутствия информации о свойствах спектра. В этих случаях аппроксимативный способ оценки спектральной плотности может потребовать слишком сложных моделей, а следовательно, вызовет и большие трудности при технической реализации.

Для более эффективного решения поставленных задач целесообразно применять специальные способы оценки спектральных характеристик.

Для примера рассмотрим способы решения трех поставленных задач.

Пусть необходимо выявить экстремумы спектральной плотности мощности  $S_x(\omega)$ , идентифицировать минимумы и максимумы и определить их конкретные значения и те частоты, которые им соответствуют.

Условие экстремума  $S_x(\omega)$  является

$$\frac{\partial S_x(\omega)}{\partial \omega} = 0. \quad (5.5)$$

Из решения этого уравнения могут быть найдены частоты, соответствующие экстремуму. Для идентификации экстремумов необходимо знание знака второй производной  $\frac{\partial^2 S_x(\omega)}{\partial \omega^2}$ .

Для того, чтобы определить величины экстремумов, необходимо вычислить значения спектральной плотности при частотах, удовлетворяющих условию (5.5).

Итак, для решения поставленной задачи необходимо иметь три характеристики – спектральную плотность и две ее первые производные.

Способы оценки этих характеристик могут быть получены из соотношения (5.1), которое для удобства перепишем в виде

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (5.6)$$

Из выражения (5.6) находим

$$\frac{\partial S_x(\omega)}{\partial \omega} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau \sin(\omega\tau) R_x(\tau) d\tau, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^2 S_x(\omega)}{\partial \omega^2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau \cos(\omega\tau) R_x(\tau) d\tau. \quad (5.8)$$

Сделав в выражениях (5.6) – (5.8) замену  $R_x(\tau) = M[\dot{X}(t)\dot{X}(t-\tau)]$  и затем перейдя от оператора  $M[.]$  к оператору  $\mathcal{M}[.]$ , получим следующие оценки характеристик:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_x(\omega) &= \mathcal{M}[\dot{X}(t) \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \cos(\omega\tau) \dot{X}(t-\tau) d\tau]; \\ \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}_x(\omega)}{\partial \omega} \right\} &= \mathcal{M}[\dot{X}(t) \int_0^{\infty} -\frac{1}{\pi} \tau \sin(\omega\tau) \dot{X}(t-\tau) d\tau]; \\ \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{F}_x(\omega)}{\partial \omega^2} \right\} &= \mathcal{M}[\dot{X}(t) \int_0^{\infty} -\frac{1}{\pi} \tau^2 \cos(\omega\tau) \dot{X}(t-\tau) d\tau]. \end{aligned} \right\}. \quad (5.9)$$

Соотношения (5.9) дают алгоритм построения аппаратуры, блок – схема которой приведена на рисунке 39.

Как видно из рисунка, аппаратура состоит из трех идентичных по структуре каналов, каждый из которых включает в себя фильтр с регулируемым параметром  $\omega$ , множительное устройство (МУ) и блок усреднения (БУ). При этом импульсные характеристики фильтров, стоящих в соответствующих каналах, должны быть равны:

$$\left. \begin{aligned} h_0(\tau) &= \frac{1}{\pi} \cos \omega\tau \\ h_1(\tau) &= -\frac{1}{\pi} \tau \sin \omega\tau \\ h_2(\tau) &= -\frac{1}{\pi} \tau^2 \cos \omega\tau \end{aligned} \right\}. \quad (5.10)$$

Эти импульсные характеристики не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости и, следовательно, технически нереализуемы соответствующие им фильтры. Отсюда следует вывод, что не может быть решена задача получения несмещенных оценок спектральной плотности мощности и ее производных.

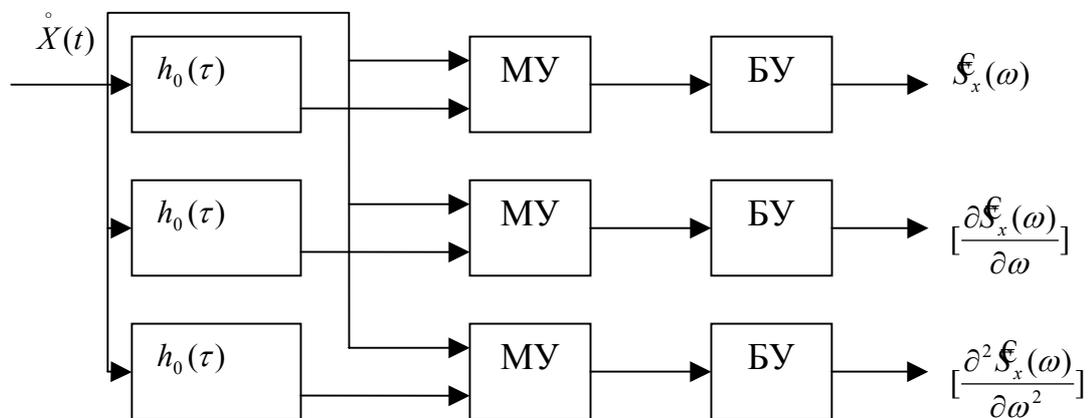


Рисунок 40 – Блок-схема аппаратуры для оценки спектральных характеристик

Для обеспечения возможности технического решения задач и получения сколь угодно малых погрешностей от смещенности оценок поступим так же, как и при оценке моментов корреляционной функции, т.е. будем реализовывать фильтры с импульсными характеристиками вида

$$\left. \begin{aligned} h_0(\tau) &= \frac{1}{\pi} \cos \omega\tau H(\tau) \\ h_1(\tau) &= -\frac{1}{\pi} \tau \sin \omega\tau H(\tau) \\ h_2(\tau) &= -\frac{1}{\pi} \tau^2 \cos \omega\tau H(\tau) \end{aligned} \right\}.$$

Здесь функция  $H(\tau)$ , как и ранее, определяется соотношением (4.40).

С помощью аппаратуры, блок – схема которой представлена на рисунке 39, поставленная задача решается следующим образом. На вход аппаратуры подается анализируемый случайный процесс, а параметр фильтров, стоящих в разных каналах, изменяются от минимального значения до максимального.

В моменты, соответствующие равенству нули оценки первой производной спектральной плотности, фиксируется оценка спектральной плотности, знака второй производной и величина параметра фильтров  $\omega$ .

Аналогичным образом может быть получен и способ оценки эквивалентной ширины спектра мощности процесса:

$$\Delta\omega_s = \frac{\sigma_x^2}{2S_{xm}}, \quad (5.11)$$

где  $S_{xm}$  - максимальное значение спектральной плотности.

Как видно из выражения (5.11), для оценки эквивалентной ширины спектра должны быть предварительно определены дисперсия процесса  $\sigma_x^2$  и максимальное значение спектральной плотности. Способы оценки дисперсии рассмотрены выше, а для оценки величины  $S$  может быть применен только, что рассмотренный способ. Аналогичные же подходы могут быть использованы и для оценки других спектральных характеристик.

Рассмотрим оценивание спектральной плотности мощности методом фильтрации.

Допустим, имеем стационарный случайный процесс и необходимо определить его спектральную плотность при частоте  $\omega = \omega_0$ .

$$S_x(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\delta(\omega - \omega_0)d\omega, \quad (5.12)$$

$\delta(t)$  - четная функция, и тогда СПМ может быть определена при помощи структуры, изображенной на рисунке 40.

Схема включает в себя два блока – фильтр с частотной характеристикой  $W(j\omega)$  и устройство измерения дисперсии (УИД).

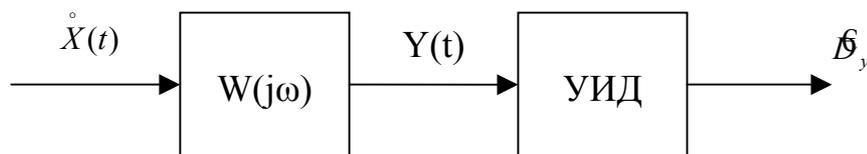


Рисунок 41 – Схема устройства для оценивания спектральной плотности мощности по методу фильтрации

Определим дисперсию выходного сигнала фильтра  $Y(t)$ :

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega)d\omega. \quad (5.13)$$

Необходимо, чтобы  $D_y$  равнялась значению спектральной плотности на частоте  $\omega_0$   $S_x(\omega_0)$ , для этого нужно, чтобы выполнялось условие

$$|W(j\omega)|^2 = \delta(\omega - \omega_0).$$

Это и есть идея метода фильтрации. Рассмотрим, что должен представлять собой такой фильтр.

На рисунке 41 показан график зависимости квадрата модуля частотной характеристики фильтра от частоты.

Такой идеальный фильтр технически реализовать не представляется возможным, и вместо идеального фильтра с частотной характеристикой  $W(j\omega)$  используем реальный, с частотной характеристикой  $W_p(j\omega)$ , но тогда оценка будет принципиально меньше, чем уже полоса пропускания

$$\gamma_{CM} = C \frac{\Delta\omega_\phi}{\Delta}; \Delta\omega_\phi \rightarrow 0; \gamma_{CM} \rightarrow 0; \gamma_{CM} = C_1 \Delta\omega_\phi.$$

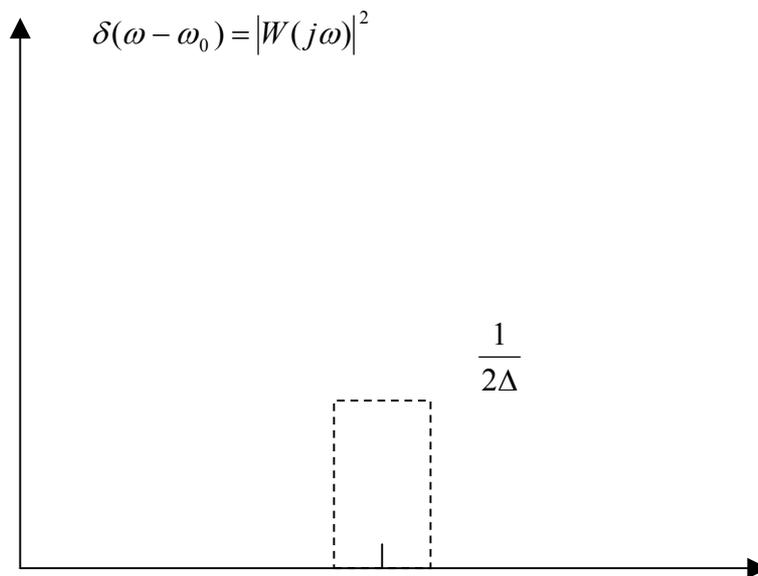


Рисунок 42– График амплитудно – частотной характеристики фильтра для оценки СПМ по методу фильтрации

Статистическая методическая погрешность оценки спектральной плотности мощности будет определяться такой же погрешностью оценки дисперсии:

$$\gamma_{CT} = \gamma_{CT}(D_y).$$

Было показано, что статистическая методическая погрешность  $\gamma_{CT}$  оценки  $D_y$  пропорциональна отношению  $\frac{\tau_{ky}}{T}$ , т.е.

$$\gamma_{CT} = \gamma_{CT}(D_y) = C \sqrt{\frac{\tau_{ky}}{T}}.$$

С другой стороны,  $\tau_{ky} \Delta \omega_{cy} = const$ ,  $\tau_{ky} = \frac{const}{\Delta \omega_{cy}}$ .

Так как фильтр узкополосный, то

$$\tau_{ky} = \frac{const}{\Delta \omega_{\phi}}, \text{ тогда } \gamma_{CT} = C_2 \sqrt{\frac{1}{\Delta \omega_{\phi} T}},$$

где  $T$  – постоянная времени фильтра.

Чем больше  $T$ , тем меньше методическая статистическая погрешность. При уменьшении полосы пропускания  $\Delta \omega_{\phi}$  уменьшается погрешность от смещенности, но увеличивается статистическая методическая погрешность. Поэтому для выбора характеристик фильтра лучше использовать среднеквадратическую погрешность

$$\gamma_{кв} = \gamma_{CM}^2 + \gamma_{CT}^2 = C_1^2 \left( \frac{\Delta \omega_{\phi}}{\Delta \omega_c} \right)^2 + C_2^2 \frac{1}{\Delta \omega_{\phi} T}. \quad (5.14)$$

Т.е. существует некоторая оптимальная полоса пропускания  $\Delta \omega_{\phi}$ , значение которой можно выбирать, исходя из заданной квадратической погрешности, а значение  $T$  определяют исходя из заданной погрешности от смещенности.

Другим способом оценки спектральной плотности мощности является так называемый косвенный способ (по имеющейся оценке автокорреляционной функции) или метод Блекмана-Тьюки.

Пусть имеем оценку автокорреляционной функции  $\hat{R}_x(\tau)$ , требуется получить оценку спектральной плотности  $\hat{S}_x(\omega)$ .

Можно записать

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (5.15)$$

Оценку  $\hat{R}_x(\tau)$  получаем как последовательность отсчетов  $\hat{R}_x(0), \hat{R}_x(\Delta), \dots, \hat{R}_x((N-1)\Delta)$ , т.е. имеется принципиально конечное число отсчетов оценки АКФ. Интеграл приближенно можно переписать

$$S_x(\omega) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{N-1} R_x(m\Delta) \cos m\omega\Delta. \quad (5.16)$$

Сделав замену  $R_x(m\Delta)$  на  $\hat{R}_x(m\Delta)$ , получаем:

$$\hat{S}_x(\omega) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{R}_x(m\Delta) \cos m\omega\Delta, \text{ или точнее}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_x(\omega) \approx \frac{\Delta}{2\pi} \left\{ 2 \sum_{m=0}^{N-1} \hat{R}_x(m\Delta) \cos m\omega\Delta - \hat{R}_0 \right\}. \quad (5.17)$$

Тогда оценка спектральной плотности мощности примет вид:

$$\hat{\mathcal{S}}_x(\omega) \approx \frac{\Delta}{2\pi} \left\{ 2 \sum_{m=0}^{N-1} h(m\Delta) \hat{R}_x(m\Delta) \cos m\omega\Delta - \hat{R}_0 \right\}, \quad (5.18)$$

где  $h(m)$  определяют, исходя из обеспечения минимума среднеквадратической погрешности

$$\delta = M[\{\hat{\mathcal{S}}(\omega) - S(\omega)\}^2] = \min$$

Следующим подходом к получению эффективных оценок спектральной плотности мощности является аппроксимативный способ.

Априорно выбирается та или иная модель СПМ.

$$S_M(\omega) = S_M(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N, \omega).$$

Выбирается тот или иной критерий адекватности: моментов, производных или квадратический.

Рассмотрим последний из них:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [S_M(\omega) - S_X(\omega)]^2 d\omega;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_M(\omega) S_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_M(\tau) \cos \omega\tau S_X(\omega) d\tau d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_M(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega \right] d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_M(\tau) R_X(\tau) d\tau;$$

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_M^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_M(\tau) R_X(\tau) d\tau +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X^2(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} R_M(\tau) - R_X(\tau) \right]^2 d\tau. \quad (5.19)$$

Если здесь ввести погрешность аппроксимации автокорреляционной функции, тогда шаг дискретизации  $\Delta$  определится соотношением  $\Delta = \frac{1}{2\pi} \delta$ .

При построении модели необходимо выбрать базис (лучше ортогональный), причем необходимо отдавать себе отчет в том, что с какого типа сигналом мы имеем дело: с широкополосным (с монотонной АКФ) или узкополосным (с колебательной АКФ).

### 5.1 Современные методы оценивания спектральной плотности мощности

Все методы получения оценок СПМ, которые будут рассматриваться в данном разделе, относятся к цифровым методам спектрального оценивания на неограниченных выборках временных последовательностей. Оценки СПМ, получаемые на авторегрессионных (АР) моделях со скользящим средним (СС) и АРСС – моделей, нелинейных относительно параметров модели, вычисляемых в ходе спектрального анализа, в силу чего перечисленные модели обладают всеми недостатками, присущими нелинейным методам получения оценок вероятностных характеристик (в частности, очень затруднительным представляется определение метрологических свойств оценок и, естественно, сравнение этих оценок по точностным критериям со всеми другими оценками).

Основное преимущество этих методов перед традиционными заключается в том, что последние используют значения АКФ или реализации процесса (в случае метода периодограмм Шустера) лишь на ограниченной выборке временной последовательности, а это ведет к образованию боковых лепестков в спектральных оценках, возникновению ложных максимумов в спектральных оценках, эффекту «маскировки» или слабых сигналов, в то время как у методов, использующих моделирование входного временного ряда, этот недостаток отсутствует. Но с другой стороны, применение этих методов требует довольно большой априорной информации о процессе, которую получить удается не всегда.

Спектральный анализ с использованием методов с моделированием входного ряда разбивается на три этапа /5/:

- 1) выбор модели временного ряда;
- 2) оценивание параметров модели;
- 3) получение оценки СПМ подстановкой оценок параметров модели в расчетное выражение для спектральной оценки.

Кроме того, задача спектрального оценивания в случае применения моделей входных последовательностей осложняется необходимостью выбирать порядок модели.

Наиболее часто в спектральном анализе используются следующие нетрадиционные методы /5/:

- АР – моделирование;
- СС – моделирование;
- АРСС – моделирование;
- метод максимальной энтропии;
- метод гармонического разложения Писаренко;
- метод максимального правдоподобия Кейпона;
- анализ с комбинированным временным и корреляционным взвешиванием;
- анализ со взвешенным средним с пересекающимися сегментами.

Рассмотрим подробнее метод СА, основанный на АР – моделировании входной последовательности.

Пусть входная  $\{U_n\}$  и выходная последовательность связаны выражением

$$X_n = \sum_{l=0}^q b_l U_{n-l} - \sum_{k=1}^p a_k X_{n-k} . \quad (5.20)$$

Как видно из (5.20), это – общая авторегрессионная модель со скользящим средним (АРСС - модель) . Ей соответствует системная функция

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} . \quad (5.21)$$

z-преобразования АР- и СС-частей процесса задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{m=0}^p a_m z^{-m} ; \\ B(z) &= \sum_{m=0}^q a_m z^{-m} . \end{aligned} \quad (5.22)$$

Пусть входной процесс – белый шум с СПМ.

$$S(\omega) = \sigma^2 \Delta t ,$$

тогда спектральная плотность выходного сигнала

$$\mathfrak{S}(\omega) = \sigma^2 \Delta t \left| \frac{B\{\exp(j\omega\Delta t)\}}{A\{\exp(j\omega\Delta t)\}} \right|^2 . \quad (5.23)$$

Как видно из (5.23) для того, чтобы оценить СПМ сигнала  $\{X_n\}$  необходимо определить значения коэффициентов авторегрессии  $\{a_k\}$  к нулю и положить  $a_0=1$  и  $b_0=1$ , то процесс (5.20) сводится к СС – процессу порядка  $q$ :

$$X_n = \sum_{l=0}^q b_l U_{n-l}, \quad (5.24)$$

СПМ которого определяется выражением

$$\mathcal{F}(\omega) = \sigma^2 \Delta t \left| \frac{1}{2\pi} A\{\exp(j\omega\Delta t)\} \right|^2. \quad (5.25)$$

(5.20) можно свести к АР – процессу порядка  $p$ , устремив к нулю все коэффициенты  $\{b_k\}$  в этом случае соотношение примет вид

$$X_n = -\sum_{k=1}^p a_k X_{n-k} + U_n, \quad (5.26)$$

его спектральная плотность:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| \frac{1}{2\pi} B\{\exp(j\omega\Delta t)\} \right|^2}. \quad (5.27)$$

Оценивание АР –коэффициентов связано с решением линейных уравнений и в этом заключается основное преимущество АР – моделей по сравнению с СС – и АРСС – моделями.

В этом случае (5.27) можно представить в виде

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p a_k (-j\omega\Delta t) \right|^2}. \quad (5.28)$$

При вычислении оценки СПМ необходимо определить соотношение между параметрами модели и АКФ, которая может оцениваться или являться неизвестной. Эти соотношения задают уравнения Юла – Уокера /5/, которые могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} R_x(0), R_x(-1) \dots R_x[(-p-1)] \\ R_x(1), R_x(0) \dots R_x[(-p-1)] \\ \dots \\ R_x(p-1), R_x(p-2) \dots R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x(1) \\ R_x(2) \\ \dots \\ R_x(p) \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

При помощи (5.29) определяются коэффициенты авторегрессии. Для нахождения дисперсии систему (5.29) необходимо преобразовать

$$\begin{bmatrix} R_x(0), R_x(-1) \dots R_x[(-p)] \\ R_x(1), R_x(0) \dots R_x[(-p-1)] \\ \dots \\ R_x(p), R_x(p-1) \dots R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Система (5.30) решается с использованием алгоритмов Левинсона – Дербина и Берба и их модификаций.

Спектральное оценивание по методу максимальной энтропии основано на экстраполяции интервала значений корреляционной функции на значение аргумента, где ее вид неизвестен. Действуя таким образом, можно добиться исчезновения размытия оценки СПМ из-за усеченности оценки АКФ. При известных значениях корреляционной функции на сегменте  $[0, \vec{p}]$  обеспечивается положительная полуопределенность ее в точках вне пределов этого сегмента  $\{R_x(p+1), R_x(p+2), \dots\}$ , т.е. осуществляется некоторая экстраполяция АКФ. Способов проведения экстраполяции много и, в частности, существует и такой, при котором временной ряд имеет максимальную энтропию и, соответственно, наиболее плоский спектр. Критерий максимальной энтропии показывает наименьшее число ограничений на модель исследуемого процесса, хотя оценка  $\hat{S}_x(\omega)$  СПМ оказывается принципиально смещенной. Если закон распределения случайного процесса предположить нормальным, то энтропия на один отсчет определяется соотношением

$$H_n = \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \ln S(\omega) d\omega. \quad (5.31)$$

Спектральная плотность  $S_x(\omega)$  определяется отысканием глобального максимума функции, заданной выражением (5.31).

Если известно  $(p+1)$  значений АКФ, то на  $n - m$  отсчете  $R_x(n)$  определяется выражением

$$R_x(n) = \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} S(\omega) \exp(j\omega n \Delta t) d\omega. \quad (5.32)$$

Решение относительно  $S(\omega)$  находится методом множителей

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p a_{pk} (-j\omega \Delta t) \right|^2}, \quad (5.33)$$

где  $\{a_{p1}, a_{p2}, \dots\}$  - параметры устройства предсказания  $p$  - го порядка. Выражение для оценки СПМ может быть записано и другим образом:

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_x(n) \exp(-j\omega n \Delta t), \quad (5.34)$$

$$\text{где } r_x(n) = \begin{cases} R_x(n), & |n| \leq p \\ -\sum a_{pk} r_x(n-k), & |n| > p \end{cases} \quad (5.35)$$

Как видно из (5.34) и (5.35), спектральная оценка сохраняет известные значения АКФ и рекурсивно продолжает их за пределами окна. Т.е. спектр в данном случае не имеет боковых лепестков, обусловленных конечным значением ширины окна.

Параметры АР – модели могут оцениваться различными способами: по имеющейся оценке АКФ (в этом случае оценки АКФ подставляются в уравнение Юла – Уокера вместо значений корреляционной функции) или по отсчетам данных (при этом обычно используют оценку по максимуму правдоподобия ССМП). Однако, в обоих случаях точность оценки СПМ невелика (особенно в случаях коротких записях данных) и во многом зависит от наличия априорной информации о процессе. Как уже указывалось выше, проведение метрологического анализа АР – оценок весьма затруднено самим процессом получения их из временного ряда и коэффициентов авторегрессии. К числу других значительных недостатков авторегрессионного СА следует отнести необходимость определения порядка модели, возможное расщепление спектральных линий [5], искажение спектра из –за неявного взвешивания, невысокое разрешение.

Спектральные оценки на основе СС – моделей синтезируются следующим образом.

Как указывалось выше, процесс скользящего среднего (5.24) представляет собой случайный процесс на выходе фильтра, передаточная функция которого содержит одни нули, а на вход подается белый шум  $\{n_n\}$

Спектральные оценки на основе СС - моделей синтезируются следующим образом.

Как указывалось выше, процесс скользящего среднего (5.24) представляет собой случайный процесс на выходе фильтра, передаточная функция которого содержит одни нули, а на вход подаются белый шум  $\{n_n\}$

$$X_n = \sum_{l=1}^q b_l n_{n-l}$$

математическое ожидание, которого равно нулю, а дисперсия

$$M[n_{n+1}n_n] = \sigma^2 \delta_1,$$

где  $\delta_1=1$ , при  $l=1$  и  $\delta=0$  во всех остальных случаях.

Автокорреляционная функция СС- порядка  $q$  определяется соотношением

$$R_x(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{l=0}^{q-k} b_{l+k} \dots b_l = \overline{0.q} & k \leq q \\ 0, k > q \end{cases} \quad (5.36)$$

Если известны  $(q+1)$  значений АКФ, то параметры СС-процесса можно определить методом моментов, но для спектрального анализа это не является необходимым, так как вполне достаточно определить АКФ, так как на основании теоремы Винера – Хинчина

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-q}^q R_x(m) \exp(-j\omega m \Delta t). \quad (5.37)$$

Из (5.37) видно, что эта спектральная оценка идентична оценке по методу Блэкмана-Тьюки [2].

В данном случае метод моментов для оценки параметров СС- процесса применять невозможно. Если же для отыскания параметров использовать метод наименьших квадратов, то она будут соответствовать оценке АКФ, так как с помощью (5.36) задается однозначное преобразование.

Параметры СС – процесса удобно рассматривать как промежуточный этап оцениванию спектра. Но такой подход не используется, так как оценка СС – параметров в сильной степени нелинейна.

Более того, даже в случае узкополосных спектров представляется необходимым оценивать слишком большое количество коэффициентов для моделирования СС- процесса, это приводит ухудшению спектральных оценок. К числу недостатков этого метода следует отнести низкое разрешение по частоте, необходимость определять порядок модели (что само по себе представляет довольно трудную задачу), а также присутствие боковых лепестков, что в значительной степени снижает любые достоинства его по сравнению с традиционными методами.

Несколько лучшие результаты дает оценивание на основе авто регрессии и скользящего среднего. Рассмотрим этот метод.

В АРСС – модели предполагается, что временной ряд  $\{X_n\}$  можно рассматривать как процесс на выходе фильтра с  $p$  полюсами и  $q$  нулями, на вход которого подается белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ .

$$X_n = \sum_{k=0}^q b_k X_{n-k} - \sum_{k=1}^p a_k X_{n-k}. \quad (5.38)$$

Если параметры АРСС ( $p, q$ ) – модели определены, то

$$S(\omega) = |H[\exp(j\omega\Delta t)]|^2 S(\omega) = \frac{\sigma^2 \Delta t \left| 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^q b_k \exp(-j\omega k \Delta t) \right|^2}{\left| 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p a_k \exp(-j\omega k \Delta t) \right|^2}. \quad (5.39)$$

Соотношение между АРСС – параметрами и АКФ определяется выражением

$$R_x(m) = \sum_{k=0}^q b_k R_{nx}(m-k) - \sum_{k=1}^p a_k R_{nx}(m-k), \quad (5.40)$$

где:  $R_{xn}(k) = M[n_n X_{n-k}]$  – взаимнокорреляционная функция процессов  $\{n\}$  и  $\{X\}$  или

$$R_{xn}(l) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k R_{xn}(l-k) + \sum_{k=0}^q b_k R_{nx}(l-k), \dots, l = \overline{0, q}, \\ -\sum_{k=1}^p a_k R_{xn}(l-k), \dots, l = \overline{q+1, \infty}. \end{cases} \quad (5.41)$$

Уравнения (5.41) аналогичны уравнениям Юла-Уоркера. Основную трудность при рассматриваемом методе анализа составляет определение АРСС-параметров, которое требует очень большого количества вычислительных процедур и поэтому накладывает большие ограничения на обработку в реальном масштабе времени. Для уменьшения вычислительной нагрузки в настоящее время разработаны субоптимальные методы [1], в которых используется среднеквадратический критерий, и решаются линейные уравнения. Недостаток указанных методов заключается в том, что они обеспечивают только отдельную оценку АР – и СС – параметров. Кроме того, при их использовании необходимо определять порядок АР – и СС – частей процесса, что является само по себе серьезной и трудной задачей.

Следующим методом, подлежащим рассмотрению, является метод гармонического разложения Писаренко.

Основная идея этого метода состоит в моделировании случайного сигнала, состоящего из синусоид и белого шума, как частного случая АРСС-процесса.

Детерминированная часть сигнала, состоящая из  $p$  синусоид описывается разностным уравнением 2-го порядка с вещественными коэффициентами

$$X_n = -\sum_{m=1}^{2p} a_m X_{n-m} \quad (5.42)$$

Аддитивная смесь процесса (5.42) с белым шумом описывается выражением

$$y_n = X_n + \omega_n = -\sum_{m=1}^{2p} a_m y_{n-m}, \quad (5.43)$$

$$M[\omega_n \omega_{n+k}] = \sigma^2 \omega_k, \dots, M[\omega_n] = 0,$$

т.е. белый шум не коррелирован с синусоидами.

Но  $X_{n-m} = y_{n-m} - \omega_{n-m}$ , следовательно

$$\sum_{m=0}^{2p} a_m y_{n-m} = \sum_{m=0}^{2p} a_m \omega_{n-m} \quad (5.44)$$

или в матричной форме /5/

$$Y^T A = W^T A, \quad (5.45)$$

где

$$Y^T = [y_n y_{n-1} \dots y_{n-2p}],$$

$$A^T = [1 a_1 \dots a_{2p-1} a_{2p}],$$

$$W^T = [\omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_{n-2p}].$$

Уравнение процесса при этом запишется в виде

$$R_y A = \sigma^2 \omega A \quad (5.46)$$

$$R_y = \begin{bmatrix} R_y(0) \dots R_y(-2p) \\ \dots \dots \dots \\ R_y(2p) \dots R_x(0) \end{bmatrix}.$$

Дисперсия  $\sigma^2$  – собственное значение автокорреляционной матрицы, а вектор АРСС – параметров А – собственный вектор, про масштабированный так, чтобы первый элемент соответствующей ему матрицы был равен 1.

Уравнение (5.46) представляет собой основу гармонического разложения Писаренко.

При использовании рассматриваемого метода необходимо знать число синусоид и параметры модели (либо значения АКФ). Если же число синусоид неизвестно, то их количество следует определять при помощи нелинейных процедур (S). Следует отметить, что в настоящее время не существует рекурсивных методов решения уравнения (5.46), что приводит к значительным вычислительным затратам при технической реализации метода гармонического разложения. Кроме того, получаемые спектральные оценки очень чувствительны к шумам и обладают плохим разрешением. В обобщенном методе Прони модель случайного процесса представляет собой набор экспонент с произвольными амплитудами, фазами и коэффициентами затухания. Функция дискретного времени

$$\hat{x}_n = \sum_{m=1}^p b_m z_m^n \quad (5.47)$$

аппроксимирует измеренные значения  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ . В выражении (5.47)

$$\begin{aligned} b_m &= A_m \exp(j\theta_m); \\ z_m &= \exp(\alpha_m + j\omega_m \Delta t), \end{aligned} \quad (5.48)$$

где  $A_m$  – амплитуда,  $\theta_m$  – коэффициент затухания,  $\omega_m$  – частота,  $\Delta t$  – интервал дискретизации.

Определение параметров  $\{A_m, \theta_m, \omega_m, \Delta t\}$  и р имитирующих ошибку

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - \hat{x}_n|^2 \quad (5.49)$$

представляет собой сложную нелинейную задачу. Существует и субоптимальное решение, которое не обеспечивает минимума (5.49), но все же дает удовлетворительные результаты. Это решение основано на методе Прони, где на промежуточном этапе проводится отыскание корней полинома (что устраняет проблему нелинейности), а затем определяются необходимые коэффициенты.

Этот полином

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^p (z - z_k) = \sum_{i=0}^p a_i z^{p-i}, a_0 = 1 \quad (5.50)$$

состоит из  $p$  экспонент, определяемых выражением (5.48). которые используются в качестве его корней и коэффициентов. Путем преобразований выражения (5.50) с учетом (5.47) получаем рекурсивное разностное уравнение

$$\epsilon_n = -\sum_{m=1}^p a_m \epsilon_{n-m}, \quad (5.51)$$

сходное с аналогичным, используемым в методе гармонического разложения Писаренко. Если  $e_n$  - ошибка аппроксимации, то

$$x_n = \epsilon_n + e_n \quad (5.52)$$

и (5.51) примет вид

$$\epsilon_n = -\sum_{m=1}^p a_m \epsilon_{n-m} + e_n = -\sum_{m=1}^p a_m e_{n-m} + \sum_{m=1}^p a_m l_{n-m} \quad (5.53)$$

То есть, моделью суммы экспонент и аддитивного шума является АРСС – модель с одинаковыми АР и СС – параметрами, возбуждаемая шумом. Задача определения этих параметров остается такой же .

Для процесса, определяемого суммой  $p$  вещественных синусоид и шума ( $\alpha=0$ ), справедливо соотношение

$$\epsilon_n = \sum_{m=1}^p [b_m z_m^n + b_m^* z_m^*] = \sum_{m=1}^p A_m \cos(\omega_m n \Delta t + \theta_m), \quad (5.54)$$

где  $b_m = \frac{A_m \exp(j\theta_m)}{2}; \dots Z_m = \exp(j\omega_m \Delta t),$

$Z_m$  – корни единичного модуля с частотами в виде комплексно – сопряженных пар, которые появляются до тех пор, пока  $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \neq 0$  или  $\frac{1}{2\Delta t}$ .

Таким образом, необходимо решить уравнение (5.50) для нахождения корней полинома

$$\Psi(z) = \prod_{i=1}^p (z - z_i)(z - z_i^*) = \sum_{k=0}^{2p} a_k z^{2p-k}, \quad (5.55)$$

Спектр сигнала представляется набором  $\delta$ -функций, то есть  $|z_i|=1$  и затухающих экспонент.

По сравнению с гармоническим разложением Писаренко метод Прони обладает некоторыми преимуществами:

- 1) не требуется знать оценки АКФ;
- 2) ложных спектральных линий меньше;
- 3) смещение оценок частоты и мощности меньше, чем при разложении Писаренко.

Но тем не менее, оценивание СПМ по этому методу носит резко не линейный характер, коэффициенты процесса определяются через корни полинома методом наименьших квадратов, необходимо определить порядок модели, а зависимость от уровня помех высока /5/.

Спектральное оценивание с помощью метода максимального правдоподобия Кейпона (ММП) осуществляется измерением мощности на выходе узкополосных фильтров /2/.

Различие между ММП и методом Блэкмана – Тьюки заключается в том, что форма частотной характеристики при ММП для каждой частоты различна, в то время как в методе Блэкмана – Тьюки она остается неизменной.

Фильтры, реализующие алгоритмы спектрального оценивания по ММП, относятся к фильтрам с конечной импульсной характеристикой (КИХ) и имеют  $p$  весовых коэффициентов

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]. \quad (5.56)$$

Коэффициенты фильтра выбираются так, чтобы на частоте анализа  $\omega_0$  его реакция ровнялась бы единице, а дисперсия была минимальна.

То есть необходимо минимизировать дисперсию  $\sigma^2$  выходного процесса

$$\sigma^2 A^H R_x A \quad (5.57)$$

при единичной отклике фильтра на частоте  $\omega_0$  (то есть синусоида с частотой  $\omega_0$  проходит через фильтр без искажений)

$$E^H A = 1, \quad (5.58)$$

где  $R_x$  - ковариационная матрица  $X_n$ ,  $E$  - вектор, определяемый соотношением

$$E = [1 \cdot \exp(j\omega_0 \Delta t) \dots \exp[j(p-1)\omega_0 \Delta t]],$$

а индекс Н – означает транспонированную, комплексно – сопряженную матрицу.

Минимальная дисперсия равна:

$$\sigma^2_{\min} = \frac{1}{E^H R_x^{-1} E} \quad (5.59)$$

Оценка СПМ при этом

$$S(\omega_0) = \frac{\Delta t}{E^H R_x E} \cdot \quad (5.60)$$

Но для вычисления этой спектральной оценки необходимо знать: оценку автокорреляционной матрицы, что само по себе затруднительно. Кроме того, оценки по ММП обладают худшей разрешающей способностью, чем остальные, а погрешности оценивания все методов, рассмотренных в данном подразделе сопоставлять не представляется возможным в силу погрешности методов.

Несмотря на обилие разновидностей и известны преимущества (например, хорошая разрешающая способность в ряде случаев), рассмотренных методов СА, последние не нашли практического применения для спектрального анализа особенно в ходе научного эксперимента при испытаниях. Все существующие в настоящее время приборы и измерительные системы СА используют методы периодограмм Шустера и Блэкмана-Тьюки, причем предпочтение отдается последнему.

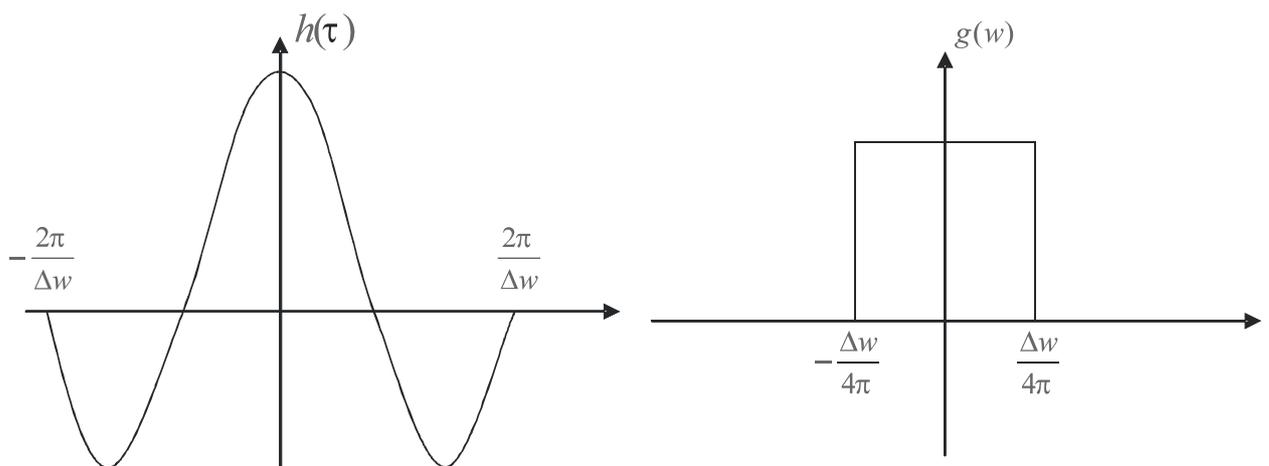


Рисунок 43 – Спектральное и корреляционное окна Пугачева – Даниэля

## 5.2 Спектральное оценивание по методу Блэкмана – Тьюки

Методы Шустера и Блэкмана-Тьюки основаны на применении формул

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} M \left\{ \frac{1}{2T} \cdot \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T x(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 \right\}, \quad (5.61)$$

где  $T$  – интервал наблюдения,  
 $\omega$  – частота анализа

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (5.62)$$

как основ для получения спектральных оценок. Для устранения статистической несостоятельности в указанных оценках используется метод, предложенный Барлеттом и Тьюки /4/, который предлагает проведение дополнительного сглаживания спектральных оценок вида

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi^2 T} M \left[ |A(\omega)|^2 \right] \quad (5.63)$$

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \hat{R}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (5.64)$$

на ограниченных временных (частотных) отрезках при аналоговом оценивании или ограниченных выборках временных последовательностей при синтезе дискретных оценок СПМ.

В цифровой форме оценки (5.63) и (5.64) принимают вид соответственно

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{\Delta t}{\pi N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(i\Delta t) \cdot x(k\Delta t) \exp[-j\omega(i-k)\Delta t], \quad (5.65)$$

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \left\{ 2 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} R(k\Delta t) \cos(k\omega\Delta t) - \hat{R}(0) \right\}. \quad (5.66)$$

Согласно принятой классификации традиционные методы спектрального оценивания могут быть охарактеризованы следующим образом:

- оценки СПМ могут быть как аналоговыми, так и цифровыми;
- оценки строятся по реализации исследуемого процесса без предварительного его моделирования;
- оценки линейны относительно своих параметров;

- спектральные оценки получаются на ограниченных интервалах времени;
- оценивание СПМ может производиться как по имеющейся оценке АКФ

процесса, так и непосредственно по его реализации.

Упомянутая выше процедура дополнительного сглаживания оценки /4/ эквивалентна умножению в преобразовании Фурье на некоторую весовую функцию – спектрального  $g(\omega)$  или корреляционного  $h(\tau)$  окна.

Приведенная характеристика оценок СПМ, получаемых традиционными методами, будет в дальнейшем продолжена путем рассмотрения метрологических характеристик спектральных оценок, получаемых с помощью разного вида окон. Для обеспечения единства подхода в качестве критерия отличия получаемых оценок от истинностных значений СПМ, с помощью которого будут сравниваться различные оценки СПМ, станем использовать один и тот же среднеквадратический критерий

$$\delta^2(\omega) = M\left[\{\mathcal{F}(\omega) - S(\omega)\}^2\right] = \Delta^2_{cv} + D[\mathcal{F}(\omega)] = \min. \quad (5.67)$$

Относительная среднеквадратическая погрешность при этом определяется следующим образом

$$\gamma^2(\omega) = \frac{\Delta^2_{cv}}{S^2(\omega)} + \frac{D[\mathcal{F}(\omega)]}{S^2(\omega)}. \quad (5.68)$$

С учетом дополнительного сглаживания (использования корреляционных окон) соотношения (5.65) и (5.66) примут вид соответственно:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot \mathcal{R}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (5.69)$$

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \left\{ 2 \sum_{k=0}^{N-1} h(k\Delta t) \cdot \mathcal{R}(k\Delta t) \cos(k\omega\Delta t) - h(0)\mathcal{R}(0) \right\}. \quad (5.70)$$

При этом оценки с верху относительной дисперсии оценки СПМ и относительной ошибки от смещенности будут определяться соотношениями вида

$$\frac{D[\mathcal{F}(\omega)]}{S^2(\omega)} \approx \frac{1}{T} \int_0^{\infty} h(0) d\tau, \quad (5.71)$$

$$\gamma_{cv} = M[\mathcal{F}(\omega) - S(\omega)] \approx \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{S(\omega)} \int_0^{\infty} [h(\tau) - 1] R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (5.72)$$

Погрешности оценивания, как видно из (5.71) и (5.72), определяются видом весовой функции  $h(\tau)$  (корреляционного окна).

К настоящему времени предложено много различных корреляционных окон, среди которых наибольшее распространение получили окна: Пугачева – Даниэля, Бартлетта, Хемминга, Тьюки, Парзена /4/.

Приведем краткий сравнительный анализ спектральных оценок с использованием перечисленных окон.

Окно Пугачева – Даниэля представляет собой прямоугольник в частотной области и определяется выражением

$$g(w) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\Delta w}, & |w| \leq \frac{\Delta w}{4\pi} \\ 0, & |w| > \frac{\Delta w}{4\pi} \end{cases}, \quad (5.73)$$

соответствующее корреляционное окно имеет вид

$$h(\tau) = \frac{\sin\left(\frac{\Delta w}{2}\tau\right)}{\frac{\Delta w}{2}\tau}. \quad (5.74)$$

На рисунке 23 изображены графики функций ( 5.73 ) и (5.74 )

Очевидно, что использование этого окна эквивалентно полосовой фильтрации и требует большого объема вычислительных процедур.

Оценка СПМ при этом имеет вид

$$\hat{S}(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau} \hat{R}(\tau) \frac{\sin\left(\frac{\Delta w}{2}\tau\right)}{\frac{\Delta w}{2}\tau} \cos w \tau d\tau. \quad (5.75)$$

Погрешности оценивания в этом случае довольно велики, особенно для процессов с АКФ, обладающих низкой колебательностью.

Оценка сверху относительной среднеквадратической погрешности оценки Пугачева - Даниэля определяется выражением

$$\gamma^2 = \frac{\tau_m}{T} + \gamma_{cm}^2 = \frac{\tau_m}{T} + \frac{\Delta_{cm}^2}{S^2(w)} \quad (5.76)$$

или

$$\tau^2 = \frac{\tau_m}{T} + \left\{ \frac{1}{S(w)} \cdot \frac{\pi}{3\tau_m^2} \int_0^{\infty} \tau^2 R(\tau) \cos(w\tau) d\tau \right\}^2. \quad (5.77)$$

Для случайного сигнала с АКФ

$$R(w) = e^{-\alpha | \tau |} \cos w_0 \tau \quad (5.78)$$

и СПМ:

$$S(w) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (w + w_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (w - w_0)^2} \right] \quad (5.79)$$

выражение (5.77) имеет вид

$$\gamma^2 = \frac{\tau_m}{T} + \frac{\pi^2}{9\tau_m^4 \alpha^4} C^2 \quad (5.80)$$

где

$$C = \frac{1 - 3(\eta + x)^2}{[1 + (\eta + x)^2]^2} + \frac{1 - 3(\eta - x)^2}{|1 + (\eta - x)^2|} \quad (5.81)$$

$$\text{здесь } \eta = \frac{\omega}{\alpha}; \quad x = \frac{\omega_0}{\alpha}.$$

Из (5.80) видно, что для уменьшения дисперсии оценки (5.75) необходимо уменьшать ширину корреляционного окна  $\tau_m = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ , но при этом растет смещение. Зависимость (5.68) носит параболический характер и, следовательно, имеет единственный экстремум – минимум. Среднеквадратические погрешности оценок СПМ для других окон определяются аналогичными соотношениями. Дженкинс Ваттс /4/ показали, что измеряя ширину окна можно получать одинаковые метрологические характеристики для оценок, полученных с помощью различных окон. По этому для удобства сравнения вычисляют оценки СПМ, соответствующие окнам с оптимальной в смысле среднеквадратической ошибки шириной  $\tau_m^0$ .

Оптимальная ширина корреляционного окна (5.74) находится из условия существования экстремума следующим образом:

$$\frac{\partial \gamma^2}{\partial \tau_m} = 0; \dots \tau_m^0 = \sqrt[5]{\frac{4\pi^4 C^2 T}{3\alpha^4}}, \quad (5.82)$$

где  $\tau_m^0$  - оптимальное, в смысле среднеквадратического критерия, значение ширины окна.

Погрешность оптимизированной оценки Пугачева – Даниэля имеет вид

$$\gamma^2_0 \approx (2.1 + 0.49) \frac{1}{(\alpha T)^{4/5}} C^{2/5}. \quad (5.83)$$

Окно Барлетта представляет собой треугольник во временной области

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_m}; \dots |\tau| \leq \tau_m \\ 0; \dots |\tau| > \tau_m \end{cases} \quad (5.84)$$

Соответствующее спектральное окно имеет вид:

$$g(\omega) = \tau_m \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau_m}{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 \tau_m^2} \quad (5.85)$$

а спектральная оценка:

$$\hat{F}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau_m} R(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{\tau_m}\right) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (5.86)$$

Графики функций (5.84) и (5.85) показаны на рисунке 43.

Как видно из (5.85) и рисунка 43, спектральная оценка имеет выраженные боковые лепестки, что крайне не желательно при спектральном анализе. Это объясняется тем, что спектр исследуемого сигнала, и особенно его слабые составляющие искажаются, так как боковые максимумы лепестков «маскируют» пики слабых гармоник обрабатываемого сигнала.

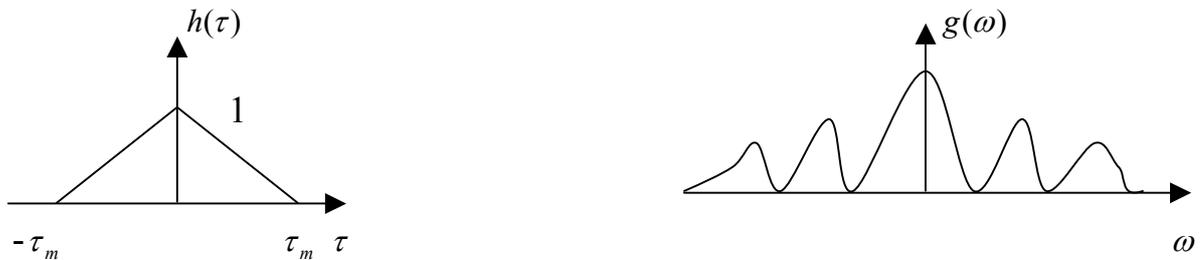


Рисунок 44 – Корреляционное и спектральное окна Барлетта

Среднеквадратическая погрешность  $\gamma^2$  оценки определяется выражением:

$$\gamma^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_m}{T} + \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau_m} \tau R(\omega) \cos(\omega\tau) d\tau \right]^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_m}{T} + \frac{4}{\alpha^2 \tau_m} C^2. \quad (5.87)$$

Оптимальная ширина окна  $\tau_m^0$  определяется соотношением:

$$\tau_m^0 = \sqrt[3]{\frac{8TC^2}{0.667\alpha^2}} \text{ и с учетом этого}$$

$$\gamma_0^2 = (1.61 + 0.67) \cdot \frac{1}{(\alpha T)_{2/3}} C_{2/3}. \quad (5.88)$$

Не смотря на простоту технической реализации, окно Барлетта довольно редко используется в современном спектральном анализе из-за явно выраженных боковых лепестков и сравнительно низких метрологических характеристиках.

Окно Хэмминга описывается во временной во временной и частотной областях уравнениями

$$h(\tau) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi|\tau|}{\tau_m}\right), & |\tau| \leq \tau_m \\ 0, & |\tau| > \tau_m \end{cases} \quad (5.89)$$

$$g(\omega) = 1.08 \frac{\sin(\omega\tau_m)}{\omega\tau_m} + 0.46 \frac{\sin(\omega\tau_m - \pi)}{(\omega\tau_m + \pi)} + 0.46 \frac{\sin(\omega\tau_m - \pi)}{(\omega\tau_m - \pi)}. \quad (5.90)$$

Графики корреляционного и спектрального окон Хэмминга изображены на рисунке 44:

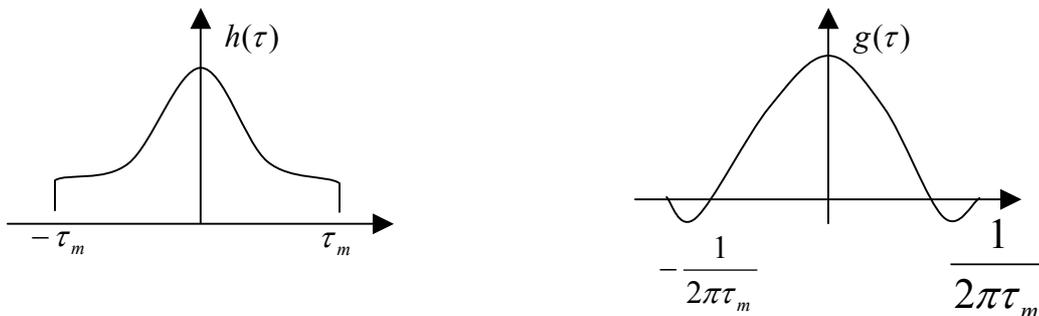


Рисунок 45 – Корреляционное и спектральные окна Хэмминга

Погрешность  $\gamma^2$  определяется выражением:

$$\gamma^2 = 0.8 \frac{\tau_m}{T} + \left[ \frac{2\pi}{4.35\tau_m^2 S(\omega)} \int_0^\infty \tau^2 R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \right]^2, \quad (5.91)$$

$$\gamma^2 = (0.8 + 0.5) \frac{1}{(\alpha T)_{4/5}} C_{2/5}. \quad (5.92)$$

Оценка, получаемая при помощи окна Тьюки, дает результаты несколько лучше, чем оценка Хэмминга. Окна Тьюки во временной и частотных областях описываются следующими соотношениями:

$$h(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi |\tau|}{\tau_m} \right) \right); & |\tau| \leq \tau_m \\ 0; & |\tau| > \tau_m \end{cases}, \quad (5.93)$$

$$g(\omega) = \tau_m \frac{\sin(\tau_m)}{\omega \tau_m} + \frac{\tau_m}{2} \frac{\sin(\omega \tau_m + \pi)}{(\omega \tau_m + \pi)} + \frac{\tau_m}{2} \frac{\sin(\omega \tau_m - \pi)}{(\omega \tau_m - \pi)} \quad (5.94)$$

а оценка СПМ:

$$\mathfrak{F}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau_m} R(\tau) \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi \tau}{\tau_m} \right) \right) \cos(\omega \tau) d\tau. \quad (5.95)$$

Графики функций (5.93) и (5.94) приведены на рисунке 45. Боковые экстремумы здесь того же порядка, что и у оценки Хэмминга, хотя погрешности оценивания меньше.

$$\gamma^2 = 0.75 \frac{\tau_m}{T} + \left[ \frac{\pi}{2\tau_m^2} \int_0^{\tau_m} \tau^2 R(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau \right]^2, \quad (5.96)$$

$$\gamma^2 = (0.95 + 0.25) \frac{1}{(\alpha T)^{4/5}} C_{2/5}^{2/5}.$$

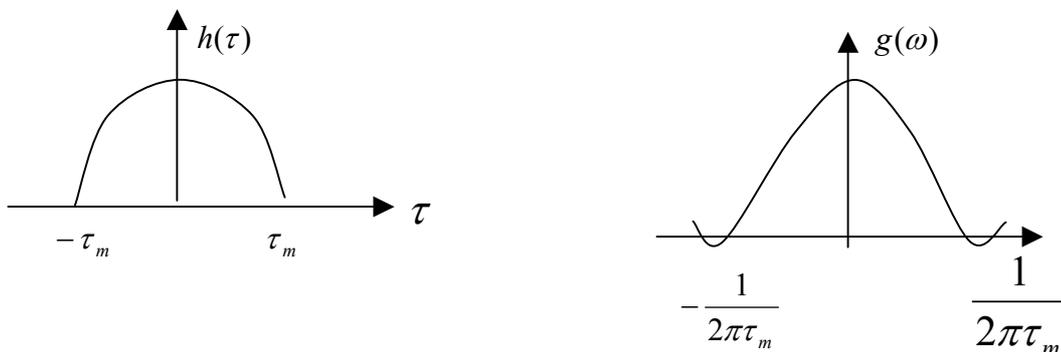


Рисунок 46 – Корреляционное и спектральное окна Тьюки

Окно Парзена [4] во временной и частотных областях определяется соотношениями:

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{\tau}{\tau_m}\right)^2 + 6\left(\frac{|\tau|}{\tau_m}\right)^3, & \left|\tau\right| \leq \frac{\tau_m}{2} \\ 2\left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_m}\right)^2, & \frac{\tau_m}{2} < |\tau| \leq \tau_m, \\ 0, & |\tau| > \tau_m \end{cases}$$

$$g(\omega) = \frac{3}{4}\tau_m \left(\frac{\sin \frac{\tau_m}{4}\omega}{\frac{\tau_m}{4}\omega}\right)^4. \quad (5.97)$$

С помощью этого окна синтезируется спектральная оценка с наименьшими боковыми максимумами (менее 0.2 % основного экстремума), хотя по своим метрологическим характеристикам она и уступает оценки Тьюки.

Спектральные оценки без боковых лепестков и более высокими метрологическими показателями по сравнению с рассмотренными могут быть получены при использовании корреляционного окна /7/

$$h(\tau) = \sum_{k=0}^q A_k Q_k(\tau), \quad (5.98)$$

где  $A_k$  – параметры окна (коэффициенты разложения);

$q$  – порядок окна;

$Q_k(\tau)$  – базисные функции.

В качестве базисных функций, отвечающих требованиям:

- отсутствие «отсечки» во временной области, типичных для всех рассмотренных выше окон и неизбежно ведущей к появлению боковых максимумов;

- каноническая структура, в силу которой организация окна более высокого порядка производится простым добавлением к имеющемуся окну необходимого количества членов суммы.

В качестве таких функций в /7/ предложены следующие:

$$Q_k(\tau) = e^{-\beta\tau} \frac{\beta\tau^k}{k!} \quad (5.99)$$

$$Q_k(\tau) = e^{-(k+1)\beta\tau} \quad (5.100)$$

$$Q_k(\tau) = e^{-\frac{\beta\tau}{k+1}}. \quad (5.101)$$

Параметры  $A_k$  корреляционного окна выбираются в ходе процедуры оптимизации [7], который может производиться на основании одного из следующих критериев:

- минимума среднеквадратической погрешности оценивания;
- минимума интегральной среднеквадратической погрешности;
- абсолютной безлепестковости получаемых оценок СПМ.

## 6 Методы оценки законов распределения составляющих объекта исследования

Знание закона распределения составляющих объекта исследования необходимо, с одной стороны, для его информационного описания, а с другой – для обоснования и правильного выбора динамического диапазона первичных измерительных преобразователей информационно-измерительных систем и измерительно-вычислительных комплексов.

Заранее договоримся, что законы распределения выше первого порядка практически экспериментально не оцениваются. Рассмотрим некоторые способы оценивания функции распределения и плотности вероятности.

Основное применение получили:

- непосредственная оценка;
- аппроксимативные способы оценивания.

### 6.1 Непосредственный способ оценки функции распределения

Пусть имеем случайный стационарный процесс  $X(t)$ , необходимо оценить его функцию распределения  $F(x_0)$  (в точке  $x_0$ ).

$$F(x_0) = P\{X(t) \leq x_0\}$$

или для простоты,

$$F(x_0) = P\{X \leq x_0\}$$

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f(x) dx, \quad (6.1)$$

здесь  $\psi(x)$  изменяет пределы интегрирования:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x \leq x_0 \\ 0, & x > x_0 \end{cases},$$

или

$$\psi(x) = 1(-\infty < x \leq x_0),$$

$$F(x_0) = M[\psi(t)]; \quad \psi\{X(t)\} = Z(t),$$

где  $Z(t)$  – выходной сигнал измерительного устройства.

Далее заменяем оператор математического ожидания на оператор усреднения:

$$\hat{F}(x_0) = \hat{M}[Z(t)] = \hat{M}[\psi\{X(t)\}] \quad (6.2)$$

Соотношение (6.2) будем использовать как алгоритм для синтеза измерительного устройства, структурная схема которого приведена на рисунке 46.

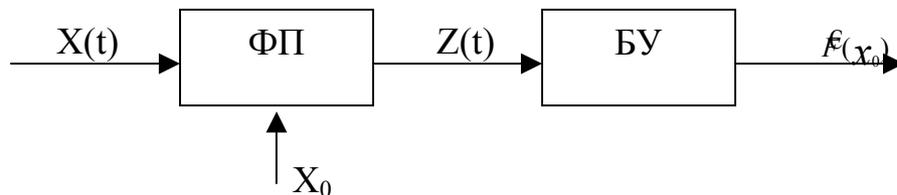


Рисунок 47 – Структурная схема устройства для оценки функции распределения

На рисунке 46 ФП – функциональный преобразователь, БУ – блок усреднения. График функции  $\Psi(x)$  изображен на рисунке 47.

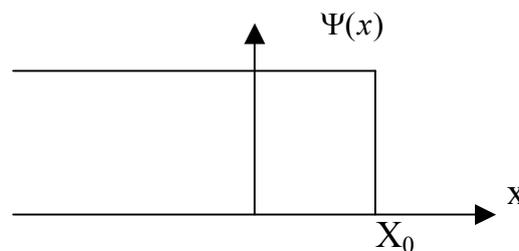


Рисунок 48 – График функции преобразования ФП

График, показывающий преобразование случайного входного сигнала преобразователем, представлен на рисунке 48.

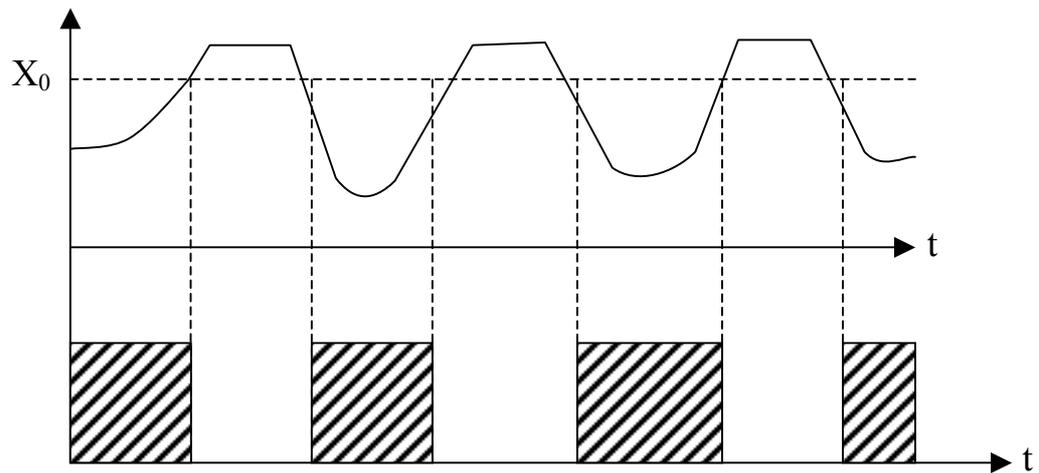


Рисунок 49 – График преобразования случайного входного сигнала преобразователем

Оценка может быть несмещенной, ее методическая статистическая погрешность определяется величиной:

$$\gamma_{cm} = c \sqrt{\frac{\tau_{kz}}{T}},$$

функциональный преобразователь ФП осуществляет нелинейное преобразование, поэтому спектр сигнала на его выходе расширяется по сравнению со спектром входного сигнала, а интервал корреляции – уменьшается. Поэтому  $\tau_{kz} \leq \tau_{kx}$ , тогда

$$\gamma_{cm} \leq c \sqrt{\frac{\tau_{kx}}{T}}.$$

На выходе функционального преобразователя имеем последовательность прямоугольных импульсов с постоянной амплитудой, случайной длительностью и случайным моментом возникновения. Функциональный преобразователь ФП представляет собой пороговое устройство с порогом  $X$ .

До сих пор мы рассматривали задачу оценивания только одного значения  $F(x)$  при  $x=x_0$ , нам же необходимо оценить функцию распределения  $F(x)$  в диапазоне значений  $X$ .

Один из способов такой оценки заключается в замене  $F(x)$  совокупностью ее значения, взятые через равные интервалы  $\Delta x$ .

Для грубой оценки берут 20-30 значений  $F(x)$ , для точной 200-300. Анализ функции распределения может быть последовательным или параллельным.

При последовательном анализе аппаратура одноканальная, последовательно изменяя  $x_0$ , (см. рисунок 50) оцениваем  $F(x)$  в диапазоне. Сложность технической реализации аппаратуры определяется числом каналов  $C$ , здесь же  $C=1$ , но длительность анализа при этом максимальна:

если для оценки одного значения требуется время  $T$ , то для оценивания  $N$  значений будет необходимо затратить время  $T_3=NT$

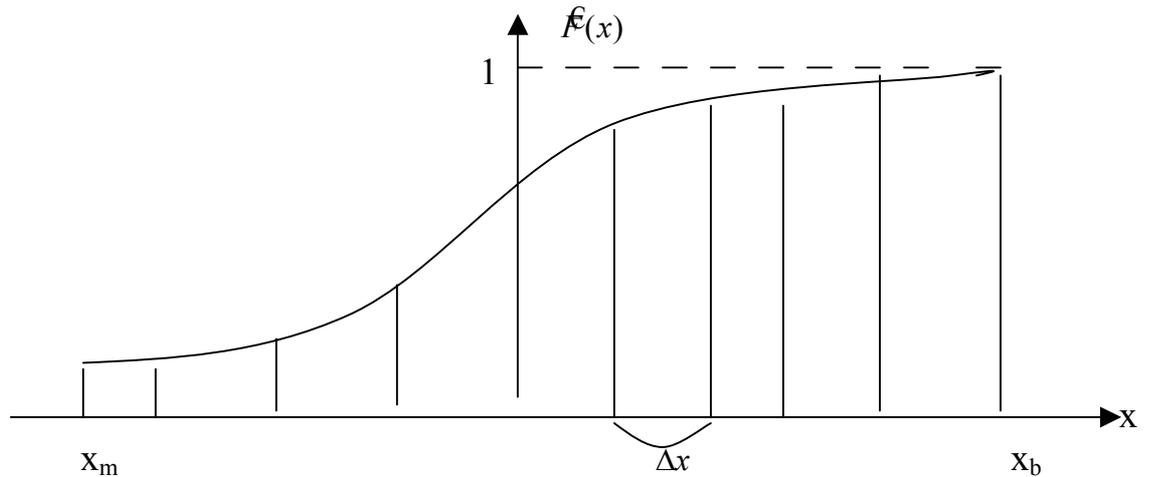


Рисунок 50 – Оценивание функции распределения  $F(x)$  в диапазоне.

При параллельном анализе аппаратура многоканальна, все значения  $F(x)$  оцениваются одновременно(см.рисунок 51).

Сложность технической реализации здесь наибольшая:  $C=N$ , зато время минимально:  $T_3 = T$ .

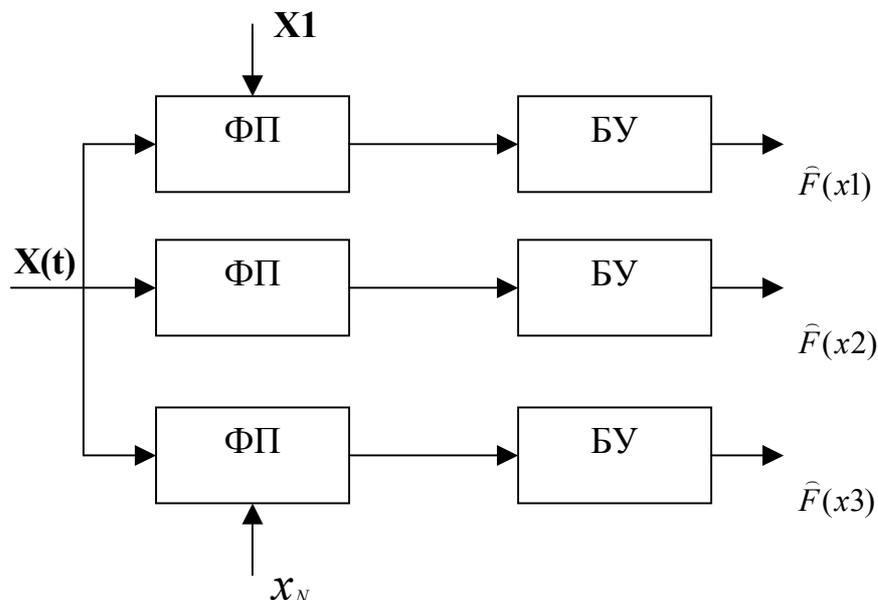


Рисунок 51 – Параллельный анализ функции распределения. Схема аппаратуры.

## 6.2 Непосредственный способ оценки плотности вероятности

Для того, чтобы оценить плотность вероятности случайного процесса  $f(x)$  попытаемся представить ее в виде математического ожидания некоторого сигнала. И так, имеем стационарный случайный процесс  $X(t)$ , нужно определить  $f(x)$  при некотором конкретном значении  $x=x_0$

Функция распределения:  $F(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)f(x)dx;$

$$f(x_0) = F(x_0) = \frac{\partial F}{\partial x_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_0} f(x)dx = M \left[ \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_0} \right]. \quad (6.3)$$

Оценку получим заменой в соотношении (6.3) оператора математического ожидания на оператор усреднения:

$$\hat{f}(x_0) = M \left[ \frac{\partial \Psi\{X(t)\}}{\partial x_0} \right]. \quad (6.4)$$

Структура устройства для определения оценки плотности вероятности показана на рисунке 51.

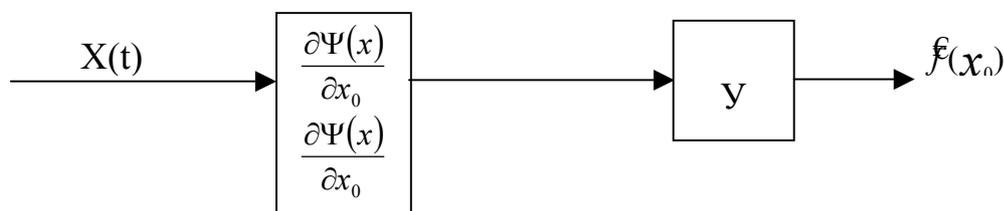


Рисунок 52 – Структурная схема устройства для измерения плотности вероятности по алгоритму (64)

Однако, в точке  $x_0$  производная  $\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} = \infty$ , то есть функция преобразования представляет собой дельта-функцию, что технически не реализуемо. Надо искать какой-то другой функциональный преобразователь ФП, но при этом возникает погрешность от смещенности.

Плотность вероятности – это такая вероятностная характеристика, оценка которой всегда принципиально смещена из-за нереализуемости алгоритма.

Представим значение плотности вероятности в точке  $x=x_0$  в виде

$$f(x_0) = F(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - F\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}, \quad (6.5)$$

$$\lambda(x_0) = \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lambda(x_0) = f(x_0). \quad (6.6)$$

То есть, если оценивать  $\lambda(x_0)$  и брать достаточно малую  $\Delta x$ , то можно получить оценку плотности распределения  $\hat{f}(x_0)$  с достаточно высокими метрологическими характеристиками.

График функций  $\Psi(x_0)$  и  $\Psi(x_0 + \Delta x) - \Psi(x_0)$  изображены на рисунке 52.

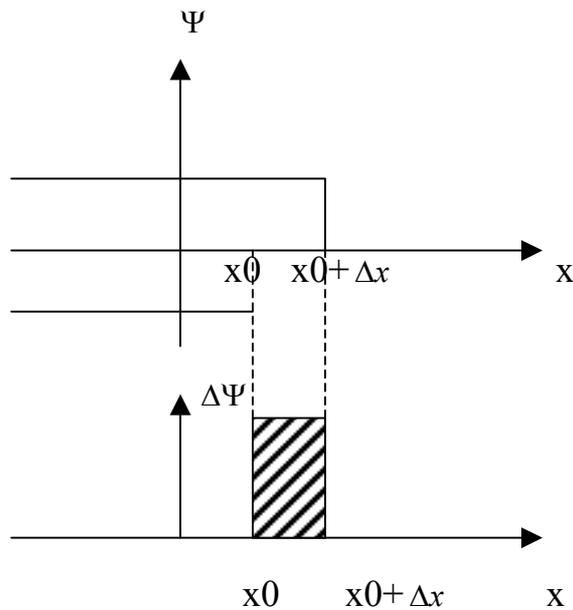


Рисунок 53 - График функции преобразования ФП для синтеза технически реализуемого фильтра X

В качестве оценки плотности вероятности будем брать оценку величины  $\lambda$ :  $\hat{\lambda}(x_0) = \hat{f}(x_0)$ .

$$\hat{f}(x_0) = \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{M[1(-\infty < x \leq x_0 + \Delta x)]}{\Delta x} - \frac{M[1(-\infty < x \leq x_0)]}{\Delta x} = \frac{M[1(-\infty < x \leq x_0 + \Delta x) - 1(-\infty < x \leq x_0)]}{\Delta x}, \quad (6.7)$$

$$\hat{f}(x_0) = \hat{\lambda}(x_0) \frac{M[1(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x)]}{\Delta x}. \quad (6.8)$$

Если говорить о метрологических свойствах оценки  $\hat{f}(x_0)$ , то выбором  $\Delta x$  можно сделать величину погрешности от смещенности  $\gamma_{см}$  сколь угодно малой. Статистическая методическая погрешность определяется знакомым выражением:

$$\gamma_{см} \leq C \sqrt{\frac{\tau_k}{T}}$$

### 6.3 Аппроксимативные способы оценки плотности вероятности

Здесь задача состоит в построение модели плотности распределения. Для этого необходимо выбрать критерий адекватности и построить модель. При этом имеют место три этапа:

- 1) выбирается вид модели;

$$f_M(x, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N),$$

где  $\beta_i$ -параметры модели,

причем, чем больше объем априорной информации о  $f(x)$ , тем точнее будет вид модели;

- 2) выбирается критерий адекватности, который ставит в соответствие модель и саму плотность вероятности

$$\{f_m(x), f(x)\};$$

- 3) производится планирование и организация эксперимента по определению параметров модели  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ , обеспечивающих оптимум критерия адекватности.

В настоящее время при аппроксимативном оценивании  $\hat{f}(x)$  в основном используются три критерия адекватности:

- 1) критерий моментов;
- 2) критерий производных;
- 3) квадратический критерий.

Рассмотрим кратко особенности построения оценок  $f(x)$  по каждому из них.

### 6.3.1 Аппроксимативное оценивание плотности вероятности по критерию моментов

Сущность критерия моментов состоит в следующем. Модель признается адекватной объекту (в данном случае - истинной плотности вероятности, если моменты сигнала, имеющего плотность распределения равную модели, равны соответствующим моментам исследуемого сигнала).

Количество моментов должно быть равно числу неизвестных параметров модели.

Возьмем начальные моменты

$$\alpha_{kx}[X] = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} X^k f(x) dx$$

Нужно найти (N+1) моментов сигнала и модели. Начальный момент k-го порядка модели определится равенством

$$\alpha_{km}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_m(x) dx = \Psi_k(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N) \quad (6.9)$$

Итак, критерий моментов состоит в том, чтобы

$$\alpha_{km} = \alpha_{kx}, \quad \left( k = 0, \overset{\rightarrow}{N} \right) \quad (6.10)$$

Чем больше  $N$ , тем более адекватной будет модель. Необходимо получить оценки начальных моментов (их  $N+1$ ). Для этого заменим  $X$  оператор математического ожидания  $M$  оператор усреднения:

$$\mathcal{E}_{km} = M[X^k] \quad (6.11)$$

и получаем случайную величину, которая, тем не менее, несет информацию о  $k$ -ом начальном моменте  $a_k$  и связана с ним. Эта случайная величина представляет собой функцию от оценок параметров модели  $\Psi_k(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N)$ . Оценки параметров должны удовлетворять всем требованиям, предъявляемым к статистическим оценкам (они должны быть состоятельными, несмещенными, эффективными).

Свойства параметров модели будут полностью определяться видом оператора усреднения.

Алгоритм функционирования одного канала информационно - измерительной системы (ИИС) для оценивания  $f(x)$  имеет вид

$$\Psi_k(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_N) = \hat{M}[X_k] \quad (6.12)$$

во всей ИИС таких каналов будет  $N+1$ .

Техническая реализация канала определяется структурной схемой изображенной на рисунке 53.

Здесь: СУ - сравнивающее устройство, НИ - нуль индикатор.

В результате оценки  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_N$  получаются уравновешиванием всех каналов, то есть, имеют место совокупные измерения.

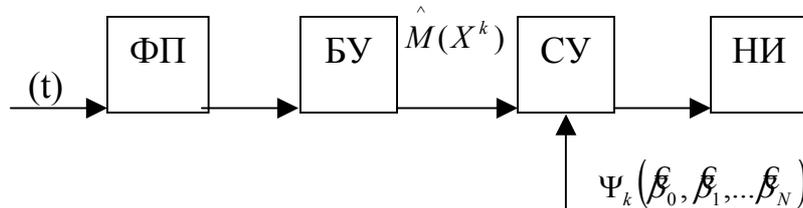


Рисунок 54 – Структура  $k$ -го канала ИИС для аппроксимативного оценивания плотности вероятности по методу моментов

Здесь имеется существенный недостаток: величины  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_N$  будут влиять на другие каналы, что вызовет ухудшение сходимости. Поэтому этот метод применяется тогда, когда число каналов невелико (2-3).

### 6.3.2 Аппроксимативное оценивание плотности распределения по методу производных

Согласно данному критерию модель считается адекватной истинной плотности вероятности, если соответствующие производные ее равны производным плотности  $f(x)$ .

Пусть плотность распределения интересующего нас случайного процесса  $(t)$  имеет вид, изображенный на рисунке 54.

На этом рисунке  $X_0$  - это точка, в которой плотность вероятности имеет максимум, тогда наиболее важным представляется ее описание в области  $X_0$ , то есть найти значение производных в разложении  $f(x)$  в ряд Тейлора в точки  $X = X_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad (6.13)$$

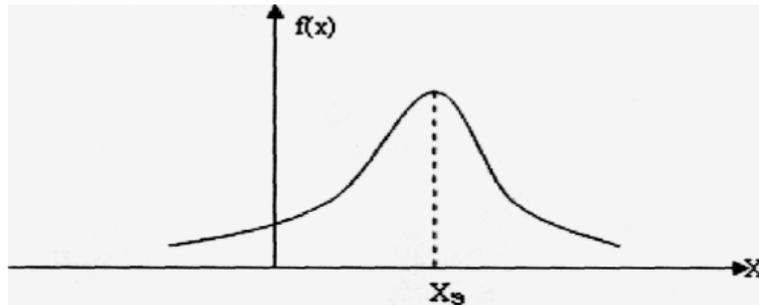


Рисунок 55 - Примерный вид плотности вероятности случайного сигнала

Сам критерий производных, как говорилось выше, состоит в приравнивании соответствующих производных модели и производных истинной плотности распределения

$$f_m^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad \left( k = 0, \overset{\rightarrow}{N} \right). \quad (6.14)$$

Если  $N \rightarrow \infty$ , то сходимость абсолютная.

Вместо  $f^{(k)}(x_0)$  придется брать их оценки, по при этом правая часть станет случайной, а в левой части вместо параметров будем получать их оценки. В правой части

$$\hat{f}(x_0) = \frac{\hat{f}(x_0 + \Delta x) - \hat{f}(x_0)}{\Delta x} = \hat{f}_{x_0}^{(1)}. \quad (6.15)$$

Можно воспользоваться рекуррентным соотношением:

$$\{\hat{f}^{(k)}(x_0)\} = \frac{\{\hat{f}^{(k-1)}(x_0 + \Delta x) - \hat{f}^{(k-1)}(x_0)\}}{\Delta x}, \quad (6.16)$$

$\Delta x$  - ширина дифференциальной коридора.

Правую часть можно представить как математическое ожидание некоторого сигнала, как это показывалось выше.

### 6.3.3 Использование квадратического критерия для аппроксиматического оценивания плотности вероятности

Квадратическая погрешность аппроксимации выбранной модели  $f_m(x)$  определяется выражением

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} [f_M(x) - f(x)]^2 dx \quad (6.17)$$

Параметры модели определяются из условия  $\delta = \min$ . Пусть модель имеет вид

$$f_M(x) = f_M(x, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N),$$

тогда условие минимума определится соотношением

$$\frac{\partial \delta}{\partial \beta_m} = 0, \quad m = \vec{0}, \vec{N}, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \beta_m} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [f_M(x) - f(x)] \frac{\partial f_m(x)}{\partial \beta_m} dx = 0. \quad (6.19)$$

Получаем систему уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_m(x) - f(x)] \frac{\partial f_m(x)}{\partial \beta_m} dx = 0 \quad \left( m = \vec{0}, \vec{N} \right) \quad (6.20)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) \frac{\partial f_m(x)}{\partial \beta_m} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_m(x)}{\partial \beta_m} f(x) dx. \quad (6.21)$$

В левой части все функции известны, этот интеграл равен некоторой функции  $\Psi_M(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N)$ , а второй интеграл представляет собой математическое ожидание функции случайного аргумента, тогда

$$\Psi_M(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N) = M \left[ \frac{\partial f_m(x)}{\partial \beta_m} \right] = 0. \quad (6.22)$$

Как обычно, меняем оператор математического ожидания на оператор усреднения:

$$\Psi_M(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N) = \overline{M \left[ \frac{\partial f_m(x)}{\partial \beta_m} \right]}. \quad (6.23)$$

Это соотношение может быть использовано как алгоритм для синтеза измерительной аппаратуры. В ИИС должно быть  $(N+1)$  каналов, структурная схема одного из них приведена на рисунке 55.

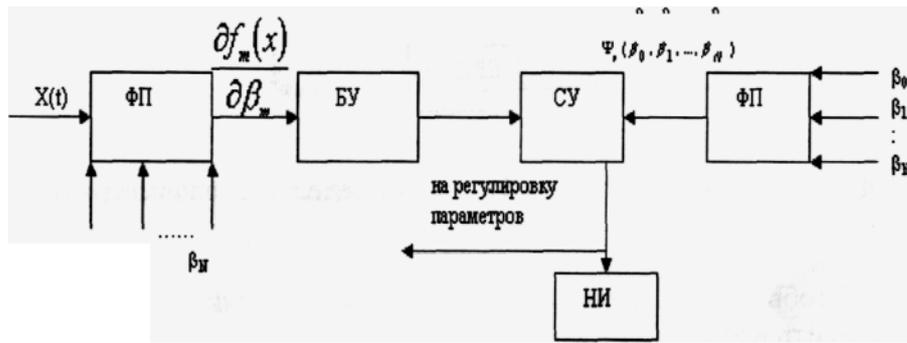


Рисунок 56 - Структура  $k$ -го канала ИИС для оценивания плотности вероятности по квадратическому критерию

Измерения ведутся до тех пор, пока все нуль-индикаторы не покажут "0". Необходимо иметь в виду, что такая ИИС имеет очень плохую сходимость. Поэтому такую ИИС можно использовать для аппроксимативной оценки  $f(x)$  моделью с числом параметров более, чем 2-3.

*Пример 6.1.*

Случайный сигнал имеет плотность вероятности, близкую к экспоненциальной. Тогда в качестве модели плотности распределения можно взять функцию

$$f_m(x, \beta) = \beta \cdot e^{-\beta x} \quad (0 \leq x < \infty). \quad (6.24)$$

Необходимо найти функцию преобразования

$$\frac{\partial f_m(x, \beta)}{\partial \beta} = e^{-\beta x} - \beta \cdot x \cdot e^{-\beta x} = (1 - \beta x) e^{-\beta x}. \quad (6.25)$$

$$\text{Найдем } \Psi_M(\beta) = \beta \int_0^{\infty} e^{-2\beta x} (1 - \beta x) dx = \frac{1}{4}. \quad (6.26)$$

На рисунке 56 представлена структурная схема ИИС для определения параметра  $\beta$ .

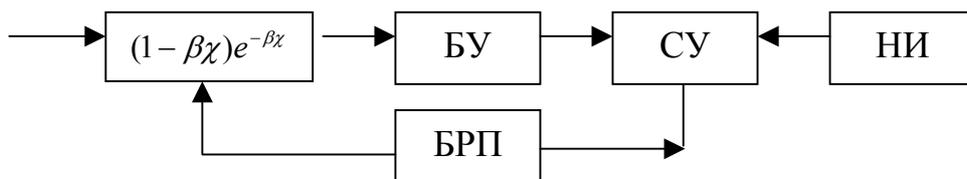


Рисунок 57 - Структура ИИС для определения параметра  $\beta$  (пример 6.1)

Чтобы повысить эффективность модели, ее нужно представить в виде:

$$f_M(x) = \sum_{k=0}^N \beta_k \Psi_k(x), \quad (6.27)$$

где  $\beta_k$  - параметры модели;

$\Psi_k(x)$  - базисные функции, которые желательно выбрать ортогональным, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_M(x) \Psi_M(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \lambda_k, & k = m. \end{cases} \quad (6.28)$$

Здесь модель представляется линейной функцией от неизвестных параметров, решение системы  $(N+1)$  уравнений с  $(N+1)$  неизвестными сводится к решению совокупности  $(N+1)$  уравнений, каждое из которых имеет единственное неизвестное.

$$\frac{\partial f_M(x)}{\partial \beta_M} = \Psi_M(x), \quad (6.29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_M(x) \frac{\partial f_M(x)}{\partial \beta_M} dx = \sum_{k=0}^N \beta_k \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_M(x) \Psi_M(x) dx = \beta_M \lambda_M. \quad (6.30)$$

Тогда

$$\beta_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m(x) f(x) dx = M \left[ \frac{1}{\lambda_m} \Psi(x) \right]. \quad (6.31)$$

То есть, параметр модели определяется как математическое ожидание некоторой функции, воспользуемся стандартной заменой оператора математического ожидания на оператор усреднения и получим:

$$\beta_m = M \left[ \frac{1}{\lambda_m} \Psi_m(x) \right], \quad (6.32)$$

каждый из каналов строится по этому алгоритму, причем все каналы в этом случае взаимонезависимы.

Статистическая методическая погрешность определяется знакомым выражением:

$$\gamma_{CT} \leq \epsilon \sqrt{\frac{\tau_k}{T}}.$$

Остается вопрос, как выбирать  $N$  и базисные функции? Вычисляем погрешность  $\delta$ , она зависит от упомянутых характеристик:

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx. \quad (6.33)$$

Определим слагаемые:

$$f_m^2(x) = \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \beta_k \beta_m \Psi_k(x) \Psi_m(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m^2(x) dx = \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \beta_k \beta_m \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(x) \Psi_m(x) dx = \sum_{k=0}^N \beta_k^2 \lambda_k \quad (6.34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^N \beta_k \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(x) f(x) dx = \sum_{K=0}^N \beta_k^2 \lambda_k \quad (6.35)$$

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx - \sum_{K=0}^N \beta_k^2 \lambda_k. \quad (6.36)$$

С ростом  $N$  погрешность уменьшается, и существует такое свойство:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta = 0,$$

но чем больше  $N$ , тем сложнее аппаратура, и значение  $N$  выбирается из конкретных условий эксперимента.

Простейшая модель получается при  $N=0$ :

$$f_m(x) = \beta_0 \Psi_0(x), \quad \delta_0 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - \beta_0 \Psi_0(x)]^2 dx \quad (6.37)$$

чтобы  $\delta = 0$ , нужно, чтобы  $\beta_0 \Psi_0(x) = f(x)$  то есть базовую функцию 0-го порядка необходимо выбрать как можно ближе к истинной плотности вероятности. Для плотностей, близких к нормальным, в качестве таких моделей используют функции Эрмитта, а для близких к экспоненциальным - функции Дирихле или Лагерра.

## Список использованных источников

- 1 Бендат Дж., Пирсол Л.- Измерение и анализ случайных процессов. Перевод с английского/предисловие Г.Я.Мирского/ -М.Мир, 1974-464с.
- 2 Бендат Дж., Пирсол Л.- Прикладной анализ случайных данных. М. Мир, 1989-527с.
- 3 Бриллинджер. Анализ временных рядов.- М. Мир, 1978-635с.
- 4 Дженкинс Дж. Ваттс Д, Спектральный анализ и его приложения. –М. Мир, 1971
- 5 Марпл С. Цифровой спектральный анализ и его приложения- М. Мир, 1990-577с.
- 6 Пугачев В.С. Введение в теорию случайных функций.-М. Физматгиз, 1972-883с.
- 7 Пивоваров Ю.Н. Методы и информационно-измерительные системы спектрального анализа стационарных случайных процессов при исследовании гидрофизических полей океана. Дисс. канд. техн. наук, Куйбышев, 1987-234с.