ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАМЫШИНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Е. Н. Ломкова, А. А. Эпов

Экономико-математические модели управления производством (теоретические аспекты)

Учебное пособие

РПК «Политехник»

Волгоград

2005

ББК 65 в 6
Л 74

Рецензенты: С. А. Митяев, А. И. Трачук

Е. Н. Ломкова, А. А. Эпов. Экономико-математические модели управления производством (теоретические аспекты): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2005. – 67 с.

ISBN 5-230-04546-9

Содержит описание основных экономико-математических методов и моделей, используемых в коммерческой деятельности и при выработке управленческих решений. Рассматриваются производственные множества и производственные функции; основы теории управления организационными системами, динамическое программирование; модели фирмы-производителя, межотраслевого баланса Леонтьева, управления запасами.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 080507 «Менеджмент организации», 080109 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления», 260704 «Технология текстильных изделий», 140211 «Электроснабжение», 151001 «Технология машиностроения».

Ил. 21. Табл. 19. Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Елена Николаевна Ломкова, Александр Александрович Эпов
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ (ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ) *Учебное пособие*
Редакторы: Попова Л.В., Пчелинцева М. А.
Темплан 2005 г., поз. № 1.
Подписано в печать 05. 09. 2005 г. Формат 60×84 1/16. Гарнитура ”Times“.
Усл. печ. л. 4,19. Усл. авт. л. 4,06.Тираж 100 экз. Заказ

Волгоградский государственный технический университет
400131 Волгоград, просп. им. В. И. Ленина, 28.

РПК «Политехник»
Волгоградского государственного технического университета
400131 Волгоград, ул. Советская, 35.

ISBN 5-230-04546-9

Содержание

Введение

Реальные объекты слишком сложны, поэтому для их изучения создают модели – копии изучаемых реальных объектов. Модели должны быть доступны для изучения. Они не должны быть слишком сложными. Так как выводы полученные при их изучении будут распространяться на реальные объекты (прототипы), то модель должна отражать существенные черты изучаемого объекта. Чем удачнее будет подобрана модель, тем лучше она будет отражать существенные черты реального объекта, тем успешнее будет ее исследование и полезнее вытекающие из этого исследования выводы и рекомендации.

В научном исследовании используются самые различные модели: натуральные (например, в лаборатории строят маленький ручеек и над ним возводят копию ГЭС в масштабе 1:100) и абстрактные – физические (из трансформаторов, сопротивлений, вольтметров и т. п.), математические (из переменных, функций, неравенств и т. п.).

Основным понятием курса является понятие *математической модели*. *Математическая модель* – это система математический уравнений, неравенств, формул и различных математических выражений, описывающих поведение реального объекта, составляющих его характеристики и взаимосвязи между ними. Процесс построения математической модели называется *математическим моделированием*. Моделирование и построение математической модели экономического объекта позволяют свести экономический анализ производственных процессов к математическому анализу и принятию эффективных решений. Для этого в планировании и управлении производством необходимо экономическую сущность исследуемого экономического объекта формализовать экономико-математической моделью, т. е. экономическую задачу представить математически в виде уравнений, неравенств и целевой функции на экстремум (максимум и минимум) при выполнении всех условий на ограничения и переменные.

Моделирование всегда имеет целевую направленность. Цели и методы моделирования могут быть разнообразными. Различают *вербальное*, *геометрическое* (предметное), *физическое* и *информационное* моделирование. Вербальное моделирование – это моделирование на основе использования разговорного языка. Геометрическое моделирование осуществляется на макетах или объектных моделях. Эти модели передают пространственные формы объекта, пропорции и т. п. Физическое моделирование применяется для изучения физико-химических, технологических, биологических, генных процессов, происходящих в оригинале. Такое моделирование называется *аналоговым*. Во всех областях науки информационное моделирование имеет фундаментальное значение, т. к. при помощи него получают схемы, графики, чертежи, формулы, уравнения, неравенства. Огромная, важнейшая роль среди методов информационного моделирования принадлежит логико-математическому моделированию, т. е. моделированию посредством применения математического аппарата.

Для моделирования и решения экономико-математических задач необходим определенный объем информации. Это информация о ресурсах и их наличии, процессах производства, распределения, обмена и потребления продукции. Разнообразие форм воплощения экономической информации в совокупности называют экономическими данными (планы, отчеты, наряды, сведения и др.). Экономическая информация подразделяется на *первичную* и *вторичную*. Носителями первичной информации служат технологические, нормативные и другие документы. Носителями вторичной информации являются результаты обработки первичных документов. Используется как первичная, так и вторичная информация, хотя вторичная информация зачастую применяется чаще.

Важное значение имеет обработка данных для принятия оптимальных решений. В зависимости от исходного массива информации принимается и решение. Поэтому вся экономическая информация должна удовлетворять определенным требованиям. Она должна быть *достоверной*, правильно отражать экономические процессы. Обработку её необходимо производить научными методами и современными средствами, которые изменяют информацию по форме, но не влияют на её содержание и достоверность. Информация должна быть *экономичной* и содержать только необходимые данные. Потребности планирования, управления и экономического анализа должны удовлетворяться в основном за счет вторичной информации. Важным требованием является *оперативность* информации. Она не должна запаздывать. В противном случае (особенно для текущего управления производством) её запаздывание скажется негативно.

Поступающая информация от объекта должна давать максимальные возможности для расчета производственных показателей и характеристик. Частичная информация, не охватывающая всех связей и факторов производства малоэффективна. При обработке информации и использовании её при разработке моделей задач управления производством эффективно используются экспертные методы. Это комплекс логических, математических и статистических операций, направленных на получение от специалистов информации, её анализ и обобщение с целью подготовки и выбора рациональных решений. Такие методы применяют в основном тогда, когда информация не может быть получена на основе точных расчетов, т. е. при разработке современных проблем управления производством при долгосрочном прогнозировании.

Информационное обеспечение строится на принципах «банка данных». Для решения каждой задачи формируются рабочие информационные массивы, данные из которых используются для расчета коэффициентов экономико-математических задач, коэффициентов целевой функции и т. д. Математическое и программное обеспечение включают математические методы, алгоритмы, программы и программные комплексы для проведения расчетов на ЭВМ.

При решении конкретной экономической задачи требуется соответственно и экономическая информация. Характер информации определяется содержанием экономико-математической задачи и математическим методом её решения.

1. Классификация экономико-математических моделей

Экономико-математические модели классифицируют по различным признакам:

1) *целевое назначение*;
2) *масштаб* (величина);
3) *характер зависимости от времени*;
4) *способ отображения времени*;
5) *характер отображения причинно-следственных связей*;
6) *математический инструмент*.

По признаку *целевого назначения* выделяют *теоретические* и *прикладные* модели. *Теоретические* модели предназначены для изучения общих закономерностей и свойств рассматриваемой экономической системы. *Прикладные* модели дают возможность определять и оценивать параметры функционирования конкретных экономических объектов и формулировать рекомендации для принятия практических хозяйственных решений.

По признаку *масштаба* (величины) изучаемого экономического объекта модели делят на *макроэкономические* и *микроэкономические*. *Макроэкономические* модели описывают экономику государства как единое целое, связывая между собой укрупненные (агрегированные) материально-вещественные и финансовые показатели: валовый национальный продукт, национальный доход, совокупный спрос, совокупное потребление, инвестиции, занятость, инфляцию, процентную ставку, количество денег и т. д. *Микроэкономические* модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики либо хозяйственное поведение отдельной такой составляющей (отрасли, региона, фирмы, потребителя и т. п.).

По признаку *характера зависимости от времени* модели делят на *статические* и *динамические*. *Статические* – это модели, в которых значения всех параметров относятся к одному кванту (моменту или периоду) времени. *Динамические* – это модели, у которых параметры изменяются во времени.

По признаку *способа отображения времени* модели делятся на *непрерывные* и *дискретные*. *Непрерывные* – это те, в которых время рассматривается как непрерывный фактор. *Дискретные* – это модели, в которых время квантовано.

По характеру *отображения причинно-следственных связей* различают *детерминированные*, *стохастические* и *теоретико-игровые* модели. *Детерминированные* модели – те, в которых предполагаются жесткие функциональные связи. *Стохастические* модели допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели и используют инструментарий теории вероятностей и математической статистики. *Теоретико-игровые* модели учитывают воздействие факторов, обладающих более высокой степенью неопределенности, нежели стохастическая.

И, наконец, экономико-математические модели классифицируют по *математическому инструменту*, применяемому при моделировании. Наиболее распространенными и эффективными математическими методами, которые нашли как теоретическое, так и практическое приложение в экономических исследованиях, являются: дифференциальное исчисление, математическая статистика, линейная алгебра, математическое программирование, теория графов, теория вероятностей и теория игр.

Порядок построения экономико-математических моделей состоит в следующем: определяется объект исследования (экономика государства в целом, отрасль, предприятие, цех, некоторый социально-экономический процесс, технолого-экономический процесс и т. п.), формулируется цель исследования.

В рассматриваемом экономическом объекте выделяются структурные и функциональные элементы и наиболее существенные качественные характеристики этих элементов, влияющие на достижение поставленной цели. Вводятся символические обозначения для учитываемых характеристик экономического объекта. Определяется, какие из них будут рассматриваться как эндогенные, а какие как экзогенные; какие как зависимые величины, а какие – независимые; какие как неизвестные (искомые), а какие как известные. Формализуются взаимосвязи между определенными параметрами модели, т. е. строится собственно экономико-математическая модель. Проводятся расчеты по модели и анализируются результаты полученных расчетов. Если результаты оказываются неудовлетворительными с точки зрения неадекватности отображения моделируемого процесса или явления, то происходит возврат к одному из предшествующих пунктов и процесс повторяется.

В современной экономике математика выступает в качестве необходимого инструмента, с помощью которого предприниматель может выбрать наилучший вариант действий из многих возможных. Соединение экономики бизнеса с математическими расчетами получило название экономико-математических методов. При этом для построения математической модели решения любой экономической задачи существует свой математический метод (см. табл. 1.1).

Таблица 1.1.

Выбор математического метода для решения экономической задачи

Экономический смысл задачи	Математический метод
Экономические расчеты, связанные с определением долей, процентов, пропорций материальных ресурсов, счетом денег, вычислением прибыли, налогов, рентабельности и т. д.	Арифметика (доли, проценты, пропорции), алгебра (уравнения, функции, графики)
Расчеты задач, содержащих последовательности взаимосвязанных экономических показателей и объектов (например, так называемые «пирамиды»)	Арифметические и геометрические прогрессии
Вычисления, связанные с сочетанием различных экономических объектов, их перестановкой и размещением	Комбинаторика
Расчеты в области пространственных отношений и форм экономических объектов	Геометрия
Оценка экономических ситуаций, связанных определением истинности или ложности информации, необходимостью найти выход из затруднительного положения	Логика
Выбор оптимального варианта решения экономической задачи для случая, когда условия описываются уравнениями 1-й степени	Линейное программирование
Выбор оптимального варианта решения экономической задачи для случая, когда условия описываются уравнениями 2-ой и более степени	Нелинейное программирование
Выбор оптимального плана многоэтапной экономической операции, когда результаты каждого последующего этапа зависят от предыдущего	Динамическое программирование
Экономические расчеты, связанные с явлениями и величинами случайного характера	Теория вероятностей
Сбор, обработка и анализ статистических экономических материалов	Математическая статистика
Расчеты производственно-экономических показателей и выработка необходимых рекомендаций в массовых повторяющихся случайных явлениях	Теория массового обслуживания (теория очередей)
Экономические расчеты, связанные с явлениями и величинами случайного характера, на основе искусственно произведенных статистических материалов	Метод статистических испытаний (Монте-Карло)
Выработка экономических решений в условиях неопределенности ситуации, вызванной сознательными злонамеренными действиями конфликтующей стороны	Теория игр
Выработка экономических решений в условиях неопределенности ситуации, вызванной объективными обстоятельствами	Теория статистических решений
Составление и реализация рациональных планов проведения экономических операций, предусматривающих решение задачи в кратчайший срок и с наилучшими результатами	Сетевое планирование

2. Производственные множества и производственные функции

2.1. Производственные множества и их свойства

Рассмотрим важнейшего участника экономических процессов – отдельного производителя. Производитель реализует свои цели только через потребителя и поэтому должен угадать, понять, что тот хочет, и удовлетворить его потребности. Будем считать, что имеется n различных товаров, количество n-го товара обозначается x_n, тогда некоторый набор товаров обозначается $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Будем рассматривать только неотрицательные количества товаров, так что $x_i \geq 0$ для любого $i = 1, ..., n$ или $X > 0$. Множество всех наборов товаров называется пространством товаров C. Набор товаров можно трактовать как корзину, в которой лежат эти товары в соответствующем количестве.

Пусть экономика работает в пространстве товаров $C = \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n): x_1, \ldots, x_n \geq 0\}$. Пространство товаров состоит из неотрицательных n-мерных векторов. Рассмотрим теперь вектор T размерности n, первые m компонентов которого неположительные: $x_1, \ldots, x_m \leq 0$, а последние (n-m) компонентов неотрицательны: $x_{m+1}, \ldots, x_n \geq 0$. Вектор $X = (x_1,\ldots, x_m)$ назовем *вектором затрат*, а вектор $Y = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ – *вектором выпуска*. Сам же вектор T = (X,Y) назовем *вектором затрат-выпуска, или технологией*.

По своему смыслу технология (X,Y) есть способ переработки ресурсов в готовую продукцию: «смешав» ресурсы в количестве X, получим продукцию в размере Y. Каждый конкретный производитель характеризуется некоторым множеством τ технологий, которое называется *производственным множеством*. Типичное заштрихованное множество представлено на рис. 2.1. Данный производитель затрачивает один товар для выпуска другого.

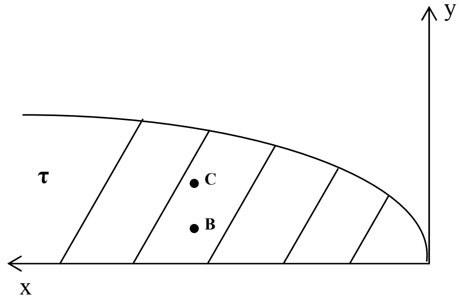


Рис. 2.1. Производственное множество

Производственное множество отражает широту возможностей производителя: *чем оно больше, тем шире его возможности.* Производственное множество должно удовлетворять следующим условиям:

1) оно замкнуто – это означает, что если вектор T затрат-выпуска сколь угодно точно приближается векторами из τ, то и T принадлежит τ

(если все точки вектора T лежат в τ, то $T \in \tau$ см. рис. 2.1 точки C и B);

2) в $\tau \cap (-\tau) = \{0\}$, т. е. если $T \in \tau$, $T \neq 0$, то $-T \notin \tau$ – нельзя поменять местами затраты и выпуск, т. е. производство – необратимый процесс (множество – τ находится в четвертом квадранте, где $y < 0$, $x > 0$);

3) множество выпукло, это предположение ведет к уменьшению отдачи от перерабатываемых ресурсов с ростом объемов производства (к увеличению норм расхода затрат на готовую продукцию). Так, из рис. 2.1 ясно, что $|y/x|$ убывает при $x \to -\infty$. В частности, предположение о выпуклости ведет к уменьшению производительности труда с ростом объема производства.

Часто выпуклости просто бывает недостаточно, и тогда требуют строгой выпуклости производственного множества (или некоторой его части).

2.2. "Кривая" производственных возможностей и вмененные издержки

Рассматриваемое понятие производственного множества отличается высокой степенью абстрактности и в силу чрезвычайной общности малопригодно для экономической теории.

Рассмотрим, например рис. 2.1. Начнем с точек B и C. Затраты по этим технологиям одинаковы, а выпуск разный. Производитель, если он не лишен здравого смысла, никогда не выберет технологию B, раз есть более лучшая технология C. В данном случае (см. рис. 2.1), найдем для каждого $x \leq 0$ самую высокую точку (x, y) в производственном множестве. Очевидно, при затратах x технология (x, y) самая лучшая. Никакая технология (x, b) с $b < y$ не должна выбираться производителем по очевидным причинам. Итак, в данном случае (с двумя товарами) легко получили функцию $y = f(x)$ для $x \leq 0$; она называется *производственной функцией*. Точное определение производственной функции:

$$Y = f(x) \leftrightarrow (x, y) \in \tau, \text{ и если } (x, b) \in \tau \text{ и } b \geq y, \text{ то } b = x.$$

Из рис. 2.1 видно, что для всякого $x \leq 0$ такая точка $y = f(x)$ единственна, что, собственно, и позволяет говорить о производственной функции. Но так просто дело обстоит, если выпускается только один товар. В общем случае для вектора затрат X обозначим множество $M_x = \{Y:(X,Y) \in \tau\}$. Множество M_x – *это множество всех возможных выпусков при затратах* X. В этом множестве рассмотрим "кривую" производственных возможностей $K_x = \{Y \in M_x$: если $Z \in M_x$ и $Z \geq Y$, то $Z = X\}$, т. е. K_x – *это множество лучших выпусков, лучше которых нет*. Если выпускаются два товара, то это кривая, если же выпускается более двух товаров, то это поверхность, тело или множество еще большей размерности.

Итак, для любого вектора затрат X все наилучшие выпуски лежат на кривой (поверхности) производственных возможностей. Поэтому из экономических соображений оттуда и должен выбрать производитель технологию. Для случая выпуска двух товаров y_1, y_2 картина показана на рис. 2.2.

Если оперировать только натуральными показателями (тоннами, метрами и т. д.), то для данного вектора затрат X мы лишь должны выбрать вектор выпуска Y на кривой производственных возможностей, но какой конкретно выпуск надо выбрать, решить еще нельзя. Если само производственное множество τ выпукло, то и M_x выпукло для любого вектора затрат X. В дальнейшем нам понадобится строгая выпуклость множества M_x. В случае выпуска двух товаров это означает, что касательная к кривой производственных возможностей K_x имеет с этой кривой только одну общую точку.

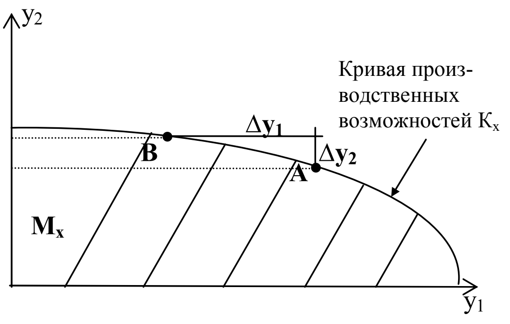


Рис. 2.2. Кривая производственных возможностей

Рассмотрим теперь вопрос о так называемых *вмененных издержках*. Предположим, что выпуск фиксирован в точке $A(y_1, y_2)$, см. рис. 2.2. Теперь возникла необходимость увеличить выпуск 2-го товара на Δy_2, используя, конечно, прежний набор затрат. Сделать это можно, как видно из рис. 2.2, перенеся технологию в точку B, для чего с увеличением выпуска второго товара на Δy_2 придется уменьшить выпуск первого товара на Δy_1.

Вмененными издержками первого товара по отношению ко второму в точке A *называется* $\delta_2^1(A) = \lim\limits_{\Delta y_2 \to 0} \left|\Delta y_1 / \Delta y_2\right|$. Если кривая производственных возможностей задана неявным уравнением $F(y_1,y_2) = 0$, то $\delta^1{}_2(A) = (\partial F/\partial y_2)/(\partial F/\partial y_1)$, где частные производные взяты в точке A. Если внимательно вглядеться в рассматриваемый рисунок, то можно обнаружить любопытную закономерность: при движении слева вниз по кривой производственных возможностей вмененные издержки уменьшаются от очень больших величин до очень малых.

2.3. Производственные функции и их свойства

Производственной функцией называется аналитическое соотношение, связывающее переменные величины затрат (факторов, ресурсов) с величиной выпуска продукции. Исторически одними из первых работ по построению и использованию производственных функций были работы по анализу сельскохозяйственного производства в США. В 1909 г. Митчерлих предложил нелинейную производственную функцию: удобрения – урожайность. Независимо от него Спиллман предложил показательное уравнение урожайности. На их основе был построен ряд других агротехнических производственных функций.

Производственные функции предназначены для моделирования процесса производства некоторой хозяйственной единицы: отдельной фирмы, отрасли или всей экономики государства в целом. С помощью производственных функций решаются задачи:

- оценки отдачи ресурсов в производственном процессе;
- прогнозирования экономического роста;
- разработки вариантов плана развития производства;
- оптимизации функционирования хозяйственной единицы при условии заданного критерия и ограничений по ресурсам.

Общий вид производственной функции: $Y = Y(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$, где Y – показатель, характеризующий результаты производства; X – факторный показатель i-го производственного ресурса; n – количество факторных показателей.

Производственные функции определяются двумя группами предположений: математических и экономических. Математически предполагается, что производственная функция должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой. Экономические предположения состоят в следующем: при отсутствии хотя бы одного производственного ресурса производство невозможно, т. е. $Y(0, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n) =$

$$= Y(X_1, 0, \ldots, X_i, \ldots, X_n) = \ldots$$
$$= Y(X_1, X_2, \ldots, 0, \ldots, X_n) = \ldots$$
$$= Y(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, 0) = 0.$$

Однако, только с помощью натуральных показателей определить для данных затрат X единственный выпуск Y удовлетворительно не удается: наш выбор сузился лишь до «кривой» производственных возможностей K_x. В силу этих причин разработана лишь теория производственных функций производителей, выпуск которых можно охарактеризовать одной величиной – либо объемом выпуска, если выпускается один товар, либо суммарной стоимостью всего выпуска.

Пространство затрат m-мерно. Каждой точке пространства затрат $X = (x_1, \ldots, x_m)$ соответствует единственный максимальный выпуск (см. рис. 2.1), произведенный при использовании этих затрат. Эта связь и называется производственной функцией. Однако обычно производственную функцию понимают не столь ограничительно и всякую функциональную связь между затратами и выпуском считают производственной функцией. В дальнейшем будем считать, что производственная функция имеет необходимые производные. Предполагается, что производственная функция f(X) удовлетворяет двум аксиомам. Первая из них утверждает, что существует подмножество пространства затрат, называемое *экономической областью* E, в которой увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска. Таким образом, если X_1, X_2 – две точки этой области, то $X_1 \geq X_2$ влечет $f(X_1) \geq f(X_2)$. В дифференциальной форме это выражается в том, что в этой области все первые частные производные функции неотрицательны: $\partial f/\partial x_1 \geq 0$ (у любой возрастающей функции производная больше нуля). Эти производные называются *предельными продуктами*, а вектор $\partial f/\partial X = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m)$ – *вектором предельных продуктов* (показывает во сколько раз изменится выпуск продукции при изменении затрат).

Вторая аксиома утверждает, что существует выпуклое подмножество S экономической области, для которой подмножества $\{X \in S : f(X) \geq a\}$ выпуклы для всех $a \geq 0$. В этом подмножестве S матрица Гёссе, составленная из вторых производных функции f(X), отрицательно определена, следовательно, $\partial^2 f/\partial x^2_i < 0$ для любого $i = 1, \ldots, m$.

Остановимся на экономическом содержании этих аксиом. Первая аксиома утверждает, что производственная функция не какая-то совершенно абстрактная функция, придуманная теоретиком-математиком. Она, пусть и не на всей своей области определения, а только лишь на ее части, отражает экономически важное, бесспорное и в то же время тривиальное утверждение: *в разумной экономике увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска.* Из второй аксиомы поясним только экономический смысл требования, чтобы производная $\partial^2 f/\partial x^2_i$ была меньше нуля для каждого вида затрат. Это свойство называется в экономике *законом убывающей отдачи или убывающей доходности*: *по мере увеличения затрат, начиная с некоторого момента (при входе в область S!), начинает уменьшаться предельный продукт.* Классическим примером этого закона является добавление все большего и большего количества труда в производство зерна на фиксированном участке земли. В дальнейшем подразумевается, что производственная функция рассматривается на области S, в которой обе аксиомы справедливы.

Составить производственную функцию данного предприятия можно, даже ничего не зная о нем. Надо только поставить у ворот предприятия счетчик (человека или какое-то автоматическое устройство), который будет фиксировать X – ввозимые ресурсы и Y – количество продукции, которую предприятие произвело. Если накопить достаточно много такой статической информации, учесть работу предприятия в различных режимах, то потом можно прогнозировать выпуск продукции, зная только объем ввезенных ресурсов, а это и есть знание производственной функции.

2.4. Производственная функция Кобба-Дугласа

Рассмотрим одну из наиболее распространенных производственных функций – функцию Кобба-Дугласа: $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где A, α, $\beta > 0$ – константы, $\alpha + \beta < 1$; K – объем фондов либо в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве, скажем, число станков; L – объем трудовых ресурсов, также в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве – число рабочих, человеко-дней и т. п. и, наконец, Y – выпуск продукции в стоимостном или натуральном выражении. Проверим, выполняются ли требования к производственным функциям. Положительность предельных продуктов:

$$\partial Y/\partial K = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} > 0,\ \partial Y/\partial L = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} > 0.$$

Отрицательность вторых частных производных, т. е. убывание предельных продуктов: $\partial Y^2/\partial K^2 = A\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\beta} < 0$, $\partial Y^2/\partial L^2 = A\beta(\beta-1)K^{\alpha}L^{\beta-2} > 0$.

Перейдем к основным экономико-математическим характеристикам производственной функции Кобба-Дугласа. *Средняя производительность труда* определяется как $y = Y/L$ – *отношение объема произведенного продукта к количеству затраченного труда*; *средняя фондоотдача* $k = Y/K$ – *отношение объема произведенного продукта к величине фондов*.

Для функции Кобба-Дугласа средняя производительность труда $y = AK^{\alpha}L^{\beta-1}$, и в силу условия $\beta < 1$ является убывающей функцией L, т. е. *с увеличением затрат труда средняя производительность труда падает*. Этот вывод допускает естественное объяснение – поскольку величина второго фактора K остается неизменной, то, значит, вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда (это справедливо и в самом общем случае – на уровне производственных множеств).

Предельная производительность труда $\partial Y/\partial L = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} > 0$, откуда видно, что для функции Кобба-Дугласа предельная производительность труда пропорциональна средней производительности и меньше ее. Аналогично определяются средняя и предельная фондоотдачи. Для них также справедливо указанное соотношение – предельная фондоотдача пропорциональна средней фондоотдаче и меньше ее.

Важное значение имеет такая характеристика, как *фондовооруженность* $f = K/L$, *показывающая объем фондов, приходящийся на одного работника (на одну единицу труда)*.

Найдем теперь эластичность продукции по труду:

$$(\partial Y/\partial L):(Y/L) = (\partial Y/\partial L)L/Y = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}L/(AK^{\alpha}L^{\beta}) = \beta.$$

Таким образом, ясен смысл *параметра* β – это *эластичность (отношение предельной производительности труда к средней производительности труда) продукции по труду*. Эластичность продукции по труду означает, что для увеличения выпуска продукции на 1 % необходимо увеличить объем трудовых ресурсов на β %. Аналогичный смысл имеет *параметр* α *– это эластичность продукции по фондам*.

И еще одно значение представляется интересным. Пусть $\alpha + \beta = 1$. Легко проверить, что $Y = (\partial Y/\partial K)/K + (\partial Y/\partial L)L$ (подставляя уже вычисленные ранее $\partial Y/\partial K$, $\partial Y/\partial L$ в эту формулу). Будем считать, что общество состоит только из рабочих и предпринимателей. Тогда доход Y распадается на две части – доход рабочих и доход предпринимателей. Поскольку при оптимальном размере фирмы величина $\partial Y/\partial L$ – предельный продукт по труду – совпадает с заработной платой (это можно доказать), то $(\partial Y/\partial L)L$ представляет собой доход рабочих. Аналогично величина $\partial Y/\partial K$ есть предельная фондоотдача, экономический смысл которой есть норма прибыли, следовательно, $(\partial Y/\partial K)K$ представляет доход предпринимателей.

Функция Кобба-Дугласа – наиболее известная среди всех производственных функций. На практике при ее построении иногда отказываются от некоторых требований (например, сумма $\alpha + \beta$ может быть больше 1 и т. п.).

Пример 1. Пусть производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на $a = 3$ %, надо увеличить основные фонды на $b = 6$ % или численность работников на $c = 9$ %. В настоящее время один работник за месяц производит продукции на $M = 10^4$ руб., а всего работников $L = 1000$. Основные фонды оцениваются в $K = 10^8$ руб. Найти производственную функцию.

Решение. Найдем коэффициенты α, β: $\alpha = a/b = 3/6 = 1/2$, $\beta = a/c =$ $= 3/9 = 1/3$, следовательно, $Y = AK^{1/2}L^{1/3}$. Для нахождения A подставим в эту формулу значения K, L, M, имея в виду, что $Y = ML = 1000 \cdot 10^4 = 10^7$ – – $10^7 = A(10^8)^{1/2}1000^{1/3}$. Отсюда $A = 100$. Таким образом, производственная функция имеет вид: $Y = 100K^{1/2}L^{1/3}$.

2.5. Теория фирмы

В предыдущем разделе мы, анализируя, моделируя поведение производителя, использовали только натуральные показатели и обошлись без цен, однако не смогли окончательно решить задачу производителя, т. е. указать единственный способ действий для него в сложившихся условиях. Теперь введем в рассмотрение цены. Пусть P – вектор цен. Если $T = (X,Y)$ – технология, т. е. вектор «затраты-выпуск», X – затраты, Y – выпуск, то скалярное произведение $PT = PX + PY$ есть прибыль от использования технологии T (затраты – отрицательные количества). Теперь сформулируем математическую формализацию аксиомы, описывающей поведение производителя.

Задача производителя: производитель выбирает технологию из своего производственного множества, стремясь максимизировать прибыль.

Итак, производитель решает следующую задачу: $PT \to \max$, $T \in \tau$. Эта аксиома резко упрощает ситуацию выбора. Так, если цены положительны, что естественно, то компонента «выпуск» решения этой задачи автоматически будет лежать на кривой производственных возможностей. Действительно, пусть $T = (X,Y)$ – какое-нибудь решение задачи производителя. Тогда существует $Z \in K_x$, $Z \geq Y$, следовательно, $P(X, Z) \geq P(X, Y)$, значит, точка (X, Z) также есть решение задачи производителя.

Для случая двух видов продуктов задачу можно решить графически (рис. 2.3). Для этого надо «двигать» прямую линию, перпендикулярную вектору P, в направлении, куда он показывает; тогда последняя точка, когда эта прямая линия еще пересекает производственное множество, и будет решением (на рис. 2.3. это точка T). Как легко видеть, строгая выпуклость нужной части производственного множества во втором квадранте гарантирует единственность решения. Такие же рассуждения действуют и в общем случае, для большего числа видов затрат и выпуска. Однако мы не пойдем по этому пути, а используем аппарат производственных функций и производителя назовем фирмой. Итак, выпуск фирмы можно охарактеризовать одной величиной – либо объемом выпуска, если выпускается один товар, либо суммарной стоимостью всего выпуска. Пространство затрат m-мерно, вектор затрат $X = (x_1, \ldots, x_m)$. Затраты однозначно определяют выпуск Y, а эта связь и есть производственная функция $Y = f(X)$.

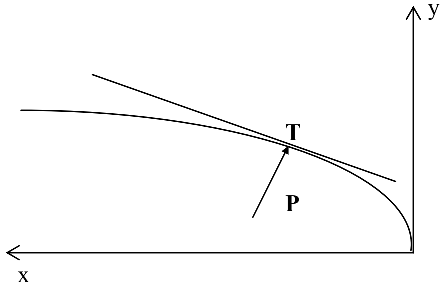


Рис. 2.3. Решение задачи производителя

В данной ситуации обозначим через P вектор цен на товары-затраты и пусть v – цена единицы выпускаемого товара. Следовательно, прибыль W, являющаяся в итоге функцией X (и цен, но они считаются постоянными), есть $W(X) = vf(X) - PX \to \max$, $X \geq 0$. Приравнивая частные производные функции W к нулю, получим:

$$v(\partial f/\partial x_j) = p_j \text{ для } j = 1, \ldots, m \text{ или } v(\partial f/\partial X) = P \qquad (2.1)$$

Будем предполагать, что все затраты строго положительны (нулевые можно просто исключить из рассмотрения). Тогда точка, даваемая соотношением (2.1), оказывается внутренней, т. е. точкой экстремума. И поскольку еще предполагается отрицательная определенность матрицы Гёссе производственной функции f(X) (исходя из требований к производственным функциям), то это точка максимума.

Итак, при естественных предположениях на производственные функции (эти предположения выполняются для производителя со здравым смыслом и в разумной экономике) соотношение (2.1) дает решение задачи фирмы, т. е. определяет объем X^* перерабатываемых ресурсов, в результате чего получается выпуск $Y^* = f(X^*)$ Точку X^*, или $(X^*,f(X^*))$ назовем оптимальным решением фирмы. Остановимся на экономическом смысле соотношения (2.1). Как говорилось, $(\partial f/\partial X) = (\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_m)$ называется *предельным вектором-продуктом, или вектором предельных продуктов*, а $\partial f/\partial x_i$ называется i-м *предельным продуктом*, *или откликом выпуска на изменение* i-*го товара затрат*. Следовательно, $v\partial f/\partial x_i dx_i$ – это *стоимость* i-*го предельного продукта, дополнительно полученного из* dx_i *единиц* i-*го ресурса*. Однако стоимость dx_i единиц i-го ресурса равна $p_i dx_i$, т. е. получилось равновесие: можно вовлечь в производство дополнительно dx_i единиц i-го ресурса, потратив на его закупку $p_i dx_i$, но выигрыша не будет, т. к. получим после переработки продукции ровно на такую же сумму, сколько затратили. Соответственно, оптимальная точка, даваемая соотношением (2.1), является точкой равновесия – уже невозможно выжать из товаров-ресурсов больше, чем затрачено на их покупку.

Очевидно, наращивание выпуска фирмы происходило постепенно: сначала стоимость предельных продуктов была меньше покупной цены потребных для их производства товаров-ресурсов. Наращивание объемов производства идет до тех пор, пока не начнет выполняться соотношение (2.1): *равенство стоимости предельных продуктов и покупной цены, потребных для их производства товаров-ресурсов.*

Предположим, что в задаче фирмы $W(X) = vf(X) - PX \to \max$, $X \ge 0$, решение X^* единственное для $v > 0$ и $P > 0$. Таким образом, получается вектор-функция $X^* = X^*(v, P)$, или функции $x^*_I = x^*_i(v, p_1, p_m)$ для $i = 1, \dots, m$. Эти m функций называются *функциями спроса на ресурсы* при данных ценах на продукцию и ресурсы. Содержательно эти функции означают, что, если сложились цены P на ресурсы и цена v на выпускаемый товар, данный производитель (характеризующийся данной производственной функцией) определяет объем перерабатываемых ресурсов по функциям $x^*_I = x^*_i(v, p_1, p_m)$ и спрашивает эти объемы на рынке. Зная объемы перерабатываемых ресурсов и подставляя их в производственную функцию, получим выпуск как функцию цен; обозначим эту функцию через $q^* = q^*(v,P) = f(X(v,P)) = Y^*$. Она называется *функцией предложения продукции* в зависимости от цены v на продукцию и цен P на ресурсы.

По определению, *ресурс i-го вида* называется *малоценным*, *если и только если,* $\partial x^*_i/\partial v < 0$, *т. е. при повышении цены на продукцию спрос на малоценный ресурс уменьшается*. Удается доказать важное соотношение:

$\partial q^*/\partial P = -\partial X^*/\partial v$ или $\partial q^*/\partial p_i = -\partial x^*_i/\partial v$, для $i = 1, \ldots, m$. Следовательно, возрастание цены продукции приводит к повышению (понижению) спроса на определенный вид ресурсов, если и только если увеличении платы за этот ресурс приводит к сокращению (возрастанию) оптимального выпуска. Отсюда видно основное свойство малоценных ресурсов: *увеличение платы за них ведет к увеличению выпуска продукции! Однако можно строго доказать наличие таких ресурсов, возрастание платы за которые приводит к уменьшению выпуска продукции (т.е. все ресурсы не могут быть малоценными)*.

Удается доказать также, что $\partial x^*_i/\partial p_i < 0$ для $i = 1, \ldots, m$, т. е. повышение платы за ресурс всегда приводит к сокращению спроса на этот ресурс. Поэтому кривые спроса на ресурсы-затраты всегда убывающие. Доказывается также, что $\partial x^*_i/\partial p_j = \partial x^*_j/\partial p_i$ для любых $i, j = 1, \ldots, m$, так что влияние изменения платы за j-й ресурс на спрос на i-й ресурс точно такое, как и влияние изменения платы за i-й ресурс на спрос за j-й ресурс. По определению, i-й и j-й ресурсы называются *взаимодополняемыми*, если $\partial x^*_i/\partial p_j < 0$, и *взаимозаменяемыми*, если $\partial x^*_i/\partial p_j > 0$. То есть, для взаимодополняемых ресурсов повышение цены на один из них приводит к падению спроса на другой, а для взаимозаменяемых ресурсов повышение цены на один из них приводит к увеличению спроса на другой. Примеры взаимодополняемых ресурсов: компьютер и его составляющие, мебель и дерево, шампунь и кондиционер к нему. Примеры взаимозаменяемых ресурсов: сахар и заменители сахара (например, сорбит), арбузы и дыни, майонез и сметана, масло и маргарин и т. д.

Пример 2. Для фирмы с производственной функцией $Y = 100K^{1/2}L^{1/3}$ (из примера 1) найти оптимальный размер, если период амортизации основных фондов N=12 месяцев, зарплата работника в месяц a = 1000 руб.

Решение. Оптимальный размер выпуска или объема производства находится из соотношения (2.1). В данном случае выпуск продукции измеряется в денежном выражении, так что v = 1. Стоимость месячного содержания одного рубля фондов 1/N, т. е. получаем систему уравнений $\begin{cases} \partial Y/\partial K = 1/N \\ \partial Y/\partial L = a \end{cases}$, решая которую находим ответ: $\begin{cases} AL^{1/3}/(2K^{1/2}) = 1/12 \\ AK^{1/2}/(3L^{2/3}) = 10^3 \end{cases}$,
$L = 8 \cdot 10^3$, $K = 144 \cdot 10^6$.

2.6. Задачи

1. Пусть производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 1 %, надо увеличить основные фонды на b = 4 % или численность работников на c = 3 %. В настоящее время один работник за месяц производит продукции на $M = 10^5$ руб., а всего работников $L = 10^4$. Основные фонды оцениваются в $K = 10^6$ руб.

Найдите производственную функцию, среднюю фондоотдачу, среднюю производительность труда, фондовооруженность.

2. Группа «челноков» в количестве E решила объединиться с N продавцами. Прибыль от дня работы (выручка минус расходы, но не зарплата) выражается формулой $Y = 600(EN)^{1/3}$. Зарплата «челнока» 120 руб. в день, продавца – 80 руб. в день. Найдите оптимальный состав группы из «челноков» и продавцов, т. е. сколько должно быть «челноков» и сколько продавцов.

3. Бизнесмен решил основать небольшое автотранспортное предприятие. Ознакомившись со статистикой, он увидел, что примерная зависимость ежедневной выручки от числа автомашин A и числа N выражается формулой $Y = 900A^{1/2}N^{1/4}$. Амортизационные и другие ежедневные расходы на одну машину равны 400 руб., ежедневная зарплата рабочего 100 руб. Найдите оптимальную численность рабочих и автомашин.

4. Бизнесмен задумал открыть пивной бар. Предположим, что зависимость выручки Y (за вычетом стоимости пива и закусок) от числа столиков M и числа официантов F выражается формулой $Y = 200M^{2/3}F^{1/4}$. Расходы на один столик составляют 50 руб., зарплата официанта – 100 руб. Найдите оптимальный размер бара, т. е. число официантов и столиков.

3. Модель межотраслевого баланса Леонтьева

3.1. Описание модели межотраслевого баланса

Межотраслевой баланс в экономике – это метод анализа взаимосвязей между различными секторами экономической системы.

Предположим, что исследуемую экономическую систему можно разделить на несколько отраслей (секторов), производящих определенные товары и услуги (например: сельское хозяйство, промышленность, транспорт, энергетика и т. п.). При производстве товаров и услуг в каждом секторе расходуются ресурсы в виде сырья, рабочей силы, оборудования и др., которые производятся как в других секторах хозяйства, так и в данном секторе. Это означает, что каждый сектор экономики выступает в системе межотраслевых связей одновременно производителем и потребителем.

Цель балансового анализа – определить, сколько продукции должен произвести каждый сектор для того, чтобы удовлетворить все потребности экономической системы в его продукции.

Рассмотрим упрощенную модель межотраслевого баланса – баланс экономики, состоящей из трех отраслей – сельского хозяйства, промышленности и домашних хозяйств. В качестве единицы измерения объемов товаров и услуг каждого сектора выберем их стоимость. Предположим, что вся продукция сельского хозяйства составляет 200 денежных единиц, из них 50 единиц потребляется внутри самой отрасли, 40 единиц – в промышленности и 110 единиц – в домашних хозяйствах. Продукция промышленности составляет 250 единиц, из них 70 единиц потребляются в сельском хозяйстве, 30 единиц – в промышленности и 150 – в домашних хозяйствах. Домашние хозяйства производят 300 единиц продукции, из них 80 единиц потребляются в сельском хозяйстве, 180 – в промышленности и 40 – внутри самого сектора. Эти данные можно свести в таблицу межотраслевого баланса.

Таблица 3.1.

Таблица межотраслевых связей

	Сельское хозяйство	Промышленность	Домашние хозяйства	Общий выпуск
Сельское хозяйство	50	40	110	200
Промышленность	70	30	150	250
Домашние хозяйства	80	180	40	300
Затраты	200	250	300	

Данной таблицей представлена экономическая система, в которой все отрасли являются производящими, вся произведенная продукция потребляется этими же производящими отраслями. Такая модель межотраслевых связей называется *замкнутой*. В замкнутой модели объем затрат каждого сектора (сумма элементов в столбце таблицы) равен объему произведенной продукции (сумма элементов в соответствующей строке).

Таблицы межотраслевого баланса описывают потоки товаров и услуг между отраслями экономики в течение фиксированного промежутка времени, например в течение года.

Обозначим через $B = \{b_{i,j}\}$, где $I = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, матрицу, элемент которой $b_{i,j}$ – это количество товаров и услуг i-ой отрасли экономики $A = \{a_{i,j}\}$, потребляемое в j-ой отрасли. В замкнутой экономической системе баланс между совокупным выпуском и затратами каждой отрасли можно описать равенствами: $\sum_{j=1}^{n} b_{k,j} = \sum_{i=1}^{n} b_{i,k}$, где $k = 1, \ldots, n$. Матрица B называется матрицей межотраслевого баланса, или матрицей Леонтьева.

Рассмотрим *открытую* систему межотраслевых связей, в которой вся произведенная продукция (совокупный продукт) разделяется на две части: одна часть продукции (промежуточный продукт) идет на потребление в производящих секторах, а другая часть (конечный продукт) потребляется вне сферы материального производства – в секторе конечного спроса.

Обозначим:

x_j – объем выпуска i-й отрасли;

$b_{i,j}$ – объем продукции i-ой отрасли, потребляемой в j-ой отрасли;

c_i – конечный продукт, т. е. объем потребления продукции i-ой отрасли в непроизводственной сфере;

$a_{i,j} = \dfrac{b_{i,j}}{x_j}$ – количество продукции i-ой отрасли, которое расходуется на производство одной единицы продукции j-ой отрасли. Числа $a_{i,j}$ называются коэффициентами прямых затрат j-ой отрасли и характеризуют технологию этой отрасли.

Межотраслевой баланс – это равенство объема выпуска каждой производящей отрасли суммарному объему ее продукции, потребляемой производственными отраслями и отраслью конечного спроса, т. е.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} + c_i \text{ или } x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} V_j + c_i \text{ или } x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} V_j = c_i,\ i = 1 \ldots n.$$

Последние равенства описывают технологию производства и структуру экономических связей и означают, что в отрасль конечного спроса поступает та часть произведенной продукции, которая осталась после того, как обеспечены потребности производящих отраслей.

Для дальнейшего рассмотрения модели Леонтьева сделаем два важных предположения:

1. Сложившуюся технологию производства считаем неизменной, таким образом матрица $A = \{a_{i,j}\}$ постоянна.

2. Для выпуска j-ой отраслью продукции объема x_j надо ресурсов в количестве $x_i \sum_i a_{i,j}$. Это требование означает, что каждая отрасль способна произвести любой объем своей продукции, при условии, что ей будут обеспечены ресурсы в необходимом количестве. На самом деле это не так, ибо производственные возможности каждой отрасли ограничены имеющимся объемом трудовых ресурсов и основных фондов.

Пусть $X = \{x_i\}$ – вектор объемов производства в отраслях, тогда $A \cdot X$ – потребляемые объемы продукции этих отраслей, таким образом, вне производственной сферы – на потребление остается только $X - A \cdot X$. Назовем экономику высокоэффективной, если $A \cdot X \leq C$, т. е. в производственной сфере тратится меньше, чем в сфере потребления.

3.2. Продуктивность модели Леонтьева

Пусть потребность непроизводственной сферы выражается вектором спроса, т. е. вектором C, вектор выпуска – вектором X, структурная матрица экономики, т. е. матрица, элементами которой являются коэффициенты прямых затрат, – матрицей A, то соотношение баланса в матричной форме будет иметь вид: $C = X - A \cdot X$ или $C = (E - A) \cdot X$, где E – единичная матрица.

Одна из основных задач межотраслевого баланса – найти при заданной структурной матрице экономической системы в условиях баланса совокупный выпуск, необходимый для удовлетворения заданного спроса. То есть необходимо найти вектор производства, удовлетворяющий уравнению баланса, при этом, учитывая экономическую интерпретацию, этот вектор производства должен быть неотрицательным. Поэтому говорят, что модель Леонтьева продуктивна, если уравнение $X - AX = C$ имеет неотрицательное решение для любого $C \geq 0$, т. е. матрица A позволяет произвести любой неотрицательный вектор потребления.

Теорема. Модель Леонтьева с матрицей A продуктивна, если и только если существует неотрицательная матрица, обратная к $E - A$.

В самом деле, пусть $E - A$ имеет обратную матрицу и эта матрица $(E - A)^{-1}$ неотрицательна, тогда $X = (E - A)^{-1}C$ и, поскольку $C \geq 0$, то и $X \geq 0$.

Рассмотрим еще один критерий продуктивности. Пусть модель Леонтьева задана матрицей размерами $n \times n$. Обозначим через N множество $\{1, \ldots, n\}$. Пусть $S \subseteq N$ (S – подмножество N). Говорят, что подмножество S изолировано, если $a_{ij} = 0$, всякий раз, когда $j \in S$, $i \in N \setminus S$ (N без S, т. е. N-S). Понятие изолированности подмножества S допускает прозрачную экономическую интерпретацию: отрасли, номера которых принадлежат S, не используют товары, производимые в отраслях с номерами, не принадлежащими S.

Матрица называется неразложимой, если в ней нет изолированных подмножеств, кроме S = N или S = Ø (пустое множество). Понятие неразложимости также имеет прозрачный экономический смысл: любая отрасль использует, хотя бы косвенно, продукцию всех отраслей. Ведь если $a_{ij} \neq 0$, то j-я отрасль непосредственно использует продукцию i-й отрасли. Но если даже $a_{ij} = 0$, т. е. j-я отрасль не использует продукцию i-й отрасли непосредственно, все равно при неразложимой матрице от данной отрасли до любой другой можно найти цепочку отраслей, использующих продукцию друг друга.

Для неразложимых матриц условие продуктивности выглядит так: если сумма элементов каждой строки не больше единицы и хотя бы для одной строки строго меньше единицы, то модель Леонтьева с этой матрицей продуктивна.

Для продуктивности действительно есть основания: продукции каждой отрасли хватает для нужд самого производства, более того, есть отрасль, продукция которой даже остается на потребление, а неразложимость, т. е. взаимосвязанность всех отраслей, позволяет надеяться на то, что этот остаток может преобразоваться в остатки на потребление и продукции других отраслей.

Для матрицы A число λ называется собственным числом, если найдется ненулевой вектор Y, такой, что $AY = \lambda Y$. Такой вектор также называется собственным вектором, отвечающим данному собственному числу λ (вектор Y не определяется по λ однозначно – всякий вектор, ему пропорциональный, также будет собственным вектором, отвечающим этому же собственному числу λ).

Модель Леонтьева с матрицей A продуктивна, если и только если матрица имеет собственное число $\lambda_A<1$, которое к тому же является наибольшим по модулю из всех собственных чисел матрицы.

3.3. Прямые и полные затраты в модели Леонтьева

Напомним, что модель задается матрицей A прямых затрат. В этой матрице a_{ij} – количество единиц продукции, расходуемой на изготовление, производство одной единицы продукции j-й отрасли. Числа a_{ij} называются коэффициентами прямых затрат j-й отрасли и характеризуют технологию этой отрасли. Пусть $X = (x_j)$ обозначает вектор валового производства, тогда AX есть израсходованные в процессе производства ресурсы и для непроизводственной сферы остается $C = X – AX$.

Обозначим $D = (E – A)^{-1}$. Запишем выражение компонент вектора X через компоненты вектора конечного спроса C:

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}c_1 + d_{12}c_2 + ... + d_{1n}c_n \\ x_2 = d_{21}c_1 + d_{22}c_2 + ... + d_{2n}c_n \\ ... \\ x_n = d_{n1}c_1 + d_{n2}c_2 + ... + d_{nn}c_n \end{cases},$$

тогда становится понятным, что элемент d_{ij} матрицы $(E–A)^{-1}$ показывает, на сколько нужно увеличить выпуск i-й отрасли x_i при увеличении на единицу конечного спроса c_j на продукцию j-й отрасли.

Матрица $D = (E–A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат.

В экономической системе с заданной структурной матрицей A спрос всегда удовлетворяется, если для любого вектора спроса C существует вектор выпуска.

3.4. Цены в системе межотраслевых связей

Цены в открытой системе межотраслевых связей определяются из системы уравнений, каждое из которых устанавливает, что цена единицы продукции производящего сектора должна быть равна совокупным издержкам производства в расчете на единицу выпущенной в этом секторе продукции. В издержки входят не только плата за ресурсы, приобретенные в данной отрасли и других отраслях, но и добавленная стоимость (зарплата, прибыль предпринимателей, правительственные налоги и др.).

Обозначим:

v_i – суммарные платежи за одну единицу произведенной i-м сектором продукции;

p_j – цена единицы продукции j-го сектора;

$b_{i,j}$ – объем товаров и услуг i-го сектора, потребляемых при производстве продукции в j-м секторе.

Тогда $x_i p_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} + v_i x_i$, но поскольку $b_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, то $x_i p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_i p_j + v_i x_i$.

Разделив на ненулевые x_i, получим для искомых цен систему уравнений:

$$\begin{cases} (1 - a_{11})p_1 - a_{21}p_2 - ... - a_{n1}p_n = v_1 \\ -a_{12}p_1 + (1 - a_{22})p_2 - ... - a_{n2}p_n = v_2 \\ ... \\ -a_{1n}p_1 - a_{2n}p_2 - ... + (1 - a_{nn})p_n = v_n \end{cases}.$$

В матричной форме система уравнений для цен имеет вид: $(E–A)^T \cdot P = V$, где A – структурная матрица экономики; V – заданный вектор платежей; P – искомый вектор цен. Тогда цены P можно найти по формуле $P = ((E–A)^T)^{-1}V$, или, что то же самое $P = ((E–A)^{-1})^T V$. Аналитические выражения цены P через платежи имеют вид:

$$\begin{cases} p_1 = d_{11}v_1 + d_{21}v_2 + \ldots + d_{n1}v_n \\ p_2 = d_{12}v_1 + d_{22}v_2 + \ldots + d_{n2}v_n \\ \ldots \\ p_n = d_{1n}v_1 + d_{2n}v_2 + \ldots + d_{nn}c_n \end{cases}.$$

Из приведенных равенств видно, что элемент d_{ij} матрицы $(E–A)^{-1} = D$ показывает, как изменится цена p_i единицы продукции i-го сектора при изменении на единицу платежа v_j в j-м секторе.

Поскольку $X^TV = X^T(E–A)^TP = ((E–A)X)^T = C^TP$, то для рассмотренной модели межотраслевого баланса справедливо тождество:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i .$$

Левая часть этого тождества равна общей сумме добавленных стоимостей, выплачиваемых в сектор конечного спроса, а правая часть – суммарная стоимость продукции, поставленной производственными секторами в сектор конечного спроса. Другими словами, приведенное тождество подтверждает совпадение произведенного и использованного национального дохода.

3.5. Простейшая модель экспорта-импорта модели Леонтьева

Рассмотрим открытую систему межотраслевых связей на государственном уровне. Если экономика государства перестает быть самообеспечивающейся и государство начинает импортировать и экспортировать продукцию производственных секторов, в то время как сектор конечного спроса потребляет то же количество продукции производственных секторов, то устанавливается новый баланс между затратами и выпуском. Структурная матрица экономики A, а следовательно, и матрица $D = (E–A)^{-1}$ остаются прежними, изменяется конечный спрос. К величине платежей в сектор конечного спроса каждого сектора нужно добавить объем экспорта и вычесть из него объем импорта: $C'_к = C_к + EI_к$, к = 1, …, n. Здесь $C'_к$ – объем конечного продукта к-го сектора при наличии экспорта импорта, $C_к$ – неизменившийся конечный спрос на продукцию к-го сектора, $EI_к$ – объем экспорта ($EI_к > 0$) или импорта ($EI_к < 0$) продукции к-го сектора. Таким образом, в таблице межотраслевого баланса (табл. 3.2) столбец сектора конечного спроса разбивается на три столбца: столбец заданного конечного спроса, столбец экспорта-импорта и столбец конечного продукта, причем каждый элемент последнего из этих столбцов равен сумме соответствующих чисел в предыдущих двух.

Таблица 3.2.

Таблица межотраслевых связей с учетом экспорта-импорта

	Конечный спрос	Экспорт-импорт	Конечный продукт
Сельское хозяйство	60	–20	60 – 20 = 40
Промышленность	100	40	100 + 40 = 140
Транспорт	80	0	80 + 0 = 80

Выпуск X вычисляется по формуле $X = (E–A)^{-1}C'$, где $C' = C + EI$, C – неизменившийся конечный спрос, EI – объем экспорта-импорта, A – структурная матрица экономики. Вычислив вектор выпуска X, можно найти по формуле $b_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ элементы матрицы нового межотраслевого баланса B.

3.6. Задачи

1. Пусть экономическая система разбита на три отрасли. Использование продукции этих отраслей в них таково: $B = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 80 \\ 80 & 100 & 110 \\ 40 & 60 & 90 \end{pmatrix}$. Выпуск отраслей задан вектором $X = \begin{pmatrix} 250 \\ 400 \\ 270 \end{pmatrix}$. Найти размеры непроизводственного потребления. Составить матрицу коэффициентов прямых затрат.

2. Пусть модель Леонтьева задана матрицей $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}$. Найти объем производства, обеспечивающий вектор потребления $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Выяснить, является ли экономика высокоэффективной.

3. Пусть модель Леонтьева задана матрицей $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$, валовый выпуск: $X = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$. Выяснить, продуктивна ли данная модель. Найти вектор непроизводственного потребления C.

4. Управление запасами

Фирмы часто делают различные запасы. Хранятся сырье, заготовки, готовая продукция, предназначенная для продажи. Запасов не должно быть ни слишком много, ни слишком мало. В первом случае возникает необходимость неоправданных затрат на хранение, на амортизацию товара. Во втором случае может оказаться так, что на складе не будет нужного товара. Кроме того, малое количество запасов подразумевает их частое пополнение, что также требует затрат.

Задача управления запасами состоит в том, чтобы избежать обеих крайностей и сделать общие затраты по возможности меньше. Отметим, что в целом эта область науки управления развита довольно хорошо, разработаны многочисленные модели с применением различных математических методов. Мы рассмотрим несколько простейших детерминированных моделей управления запасами.

4.1. Основная модель

Важнейшую роль в наших рассмотрениях будет играть функция изменения запаса. Это связь между количеством единиц товара на складе (обозначим его через Q) и временем t. Будем считать, что имеется один вид товара. Если на товар есть спрос, то функция изменения запаса $Q = Q(t)$ убывает. Если товар, наоборот, завозят на склад, то эта функция возрастает. Мы будем считать возможным мгновенное пополнение запаса. Затраты, связанные с запасами, можно разделить на три части.

1. Стоимость товара.
2. Организационные издержки. Это расходы, связанные с оформлением товара, его доставкой, разгрузкой и т. д.
3. Издержки на хранение товара. Это затраты на аренду склада, амортизацию в процессе хранения и т. д.

Рассмотрим основные величины и предположения относительно них, принятые в рамках основной модели. Мы будем в основном использовать в качестве единицы измерения денежных средств условные единицы (у. е.), это могут быть рубли, доллары и т. п.; в качестве единицы измерения времени – год, хотя можно было бы взять месяц, квартал и т. п.

1. Цена единицы товара – c у. е. Цена постоянна, рассматривается один вид товара.

2. Интенсивность спроса – d единиц товара в год. Будем считать, что спрос постоянный и непрерывный.

3. Организационные издержки – s у. е. за одну партию товара. Будем считать, что организационные издержки не зависят от размера поставки, т. е. от количества единиц товара в одной партии.

4. Издержки на хранение запаса – h у. е. на единицу товара в год. Бу-

дем считать эти издержки постоянными.

5. Размер одной партии товара постоянен – q единиц. Партия поступает мгновенно в тот момент, когда возникает дефицит, т. е. когда запас на складе становится равным нулю.

При сделанных предположениях график функции изменения запаса будет таким, как показано на рис. 4.1: он состоит из повторяющихся циклов запаса между двумя соседними дефицитами. Вертикальные отрезки отвечают мгновенному пополнению запаса.

Параметры c, d, s, h считаются заданными. Задача управления запасами состоит в выборе параметра q таким образом, чтобы минимизировать годовые затраты. Для решения сформулированной задачи надо прежде всего выразить эти затраты через параметры c, d, s, h, q.

1. Поскольку годовая интенсивность спроса равна d, а цена единицы товара – c, то общая стоимость товара в год равна cd.

2. Поскольку в одной партии q единиц товара, а годовой спрос равен d, то число поставок равно $\frac{d}{q}$. В течение года организационные издержки равны: $\frac{d}{q} \cdot s$.

3. Средний уровень запаса равен отношению площади под графиком за цикл к продолжительности цикла. Этот средний уровень равен q/2 (на рис. 4.1 обозначен пунктиром). Поскольку годовые издержки на хранение единицы товара равны h, то общие издержки на хранение составляю: $\frac{q}{2} \cdot h$.

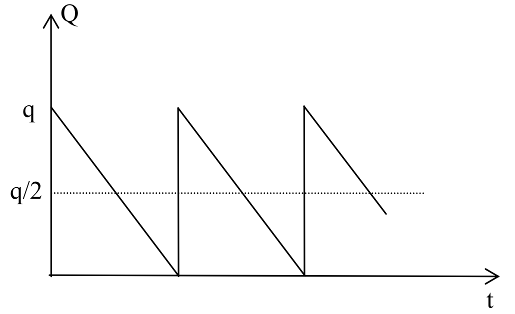


Рис. 4.1. График функции изменения запаса основной модели

Таким образом, общие издержки C вычисляются по формуле:

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}.$$

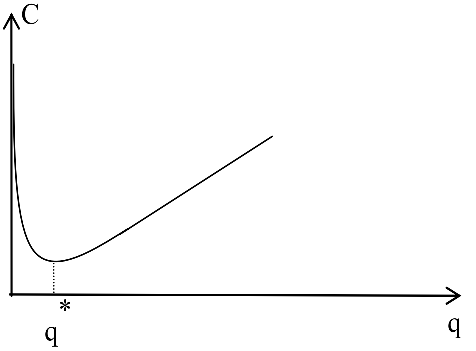


Рис. 4.2. График функции общих издержек

Еще раз напомним, что в рамках модели параметры c, d, s, h считаются заданными и требуется найти такое число q*, чтобы функция C = C(q) принимала наименьшее значение на множестве q > 0 именно в точке q*.

График функции C = C(q) показан на рис. 4.2.

Для нахождения точки q* минимума функции C = C(q) найдем ее производную (c, d, s, h – фиксированные числа):

$$C'(q) = (cd)' + \left(\frac{sd}{q}\right)' + \left(\frac{qh}{2}\right)' = -\frac{sd}{q^2} + \frac{h}{2}.$$

Приравнивая C'(q) к нулю, получаем: $-\frac{sd}{q^2} + \frac{h}{2} = 0$.

Отсюда можно найти q*: $q^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}}$.

Полученная формула называется формулой оптимального запаса, или формулой Харриса (Harris).

Пример 1. Пусть интенсивность равномерного спроса составляет 1000 единиц товара в год. Организационные издержки равны 10 УЕ, издержки на хранение – 4 УЕ на единицу товара в год, цена товара – 5 УЕ. Определить оптимальный размер партии в предположении, что система подчиняется основной модели.

Решение. Имеем: d = 1000, s = 10, h = 4, c = 5.

Общие затраты равны: $C(q) = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2} = 5000 + \frac{10000}{q} + 2q$.

Тогда $C'(q) = -\frac{10000}{q^2} + 2$, а оптимальный размер поставки q* является решением уравнения $-\frac{10000}{q^2} + 2 = 0$, т. е. $q^* = \sqrt{5000} \approx 71$.

Замечание. Найдя оптимальный размер заказа, можно определить оптимальное число поставок за год n* и соответствующую продолжительность цикла изменения запаса t*: $n^* = \frac{d}{q^*} = \frac{1000}{71} \approx 14$, $t^* = \frac{365}{n^*} = \frac{365}{14} \approx 26$ дней.

4.2. Модель производственных поставок

В основной модели предполагалось, что поступление товаров на склад происходит мгновенно. Это предположение достаточно хорошо отражает ситуацию, когда товар поставляется в течение одного дня (или ночи). Если товары поставляются с работающей производственной линии, необходимо модифицировать основную модель. В этом случае к параметрам c, d, s и h добавляется еще один – производительность производственной линии p (количество единиц товара в год). Будем считать ее заданной и постоянной.

Эта новая модель называется моделью производственных поставок. Величина q по-прежнему обозначает размер партии. В начале каждого цикла происходит "подключение" к производственной линии, которое продолжается до накопления q единиц товара. После этого пополнения запасов не происходит до тех пор, пока не возник дефицит.

График функции изменения запаса имеет вид, изображенный на рис. 4.3.

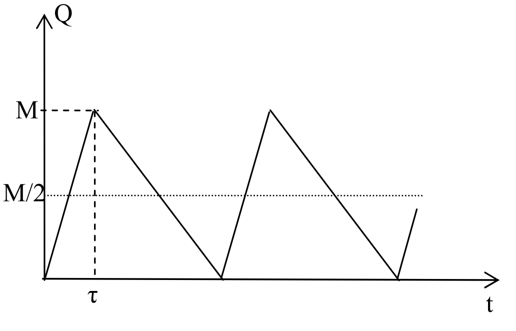


Рис. 4.3. График функции изменения запаса модели производственных поставок

Общие издержки C(q), как и в основной модели, состоят из трех частей.

1. Общая стоимость товара в год равна: cd.
2. Годовые организационные издержки равны: $\frac{sd}{q}$.
3. Издержки на хранение вычисляются следующим образом.

Пусть τ – время поставки (рис. 4.3). В течение этого времени происходит как пополнение (с интенсивностью p), так и расходование (с интенсивностью d) запаса. Увеличение запаса происходит со скоростью p–d. Поэтому достигнутый к концу периода пополнения запаса максимальный его уровень M вычисляется по формуле $M = (p-d)\cdot\tau$ (заметим, что $M < q$). Однако, $p\cdot\tau = q$ (за время τ при интенсивности производства p произведено q единиц товара). Из последних двух равенств следует, что $M = (p - d)\cdot\frac{q}{p}$.

Средний уровень запаса, как и в основной модели, равен половине максимального, т. е. $\frac{M}{2}$. Таким образом, издержки на хранение запаса равны: $\frac{(p-d)qh}{2p}$.

Общие издержки вычисляются по формуле: $C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{(p-d)qh}{2p}$.

Оптимальный размер поставок q* получаем из уравнения:

$$C'(q) = -\frac{sd}{q^2} + \frac{(p-d)h}{2p} = 0. \text{ Имеем: } q^* = \sqrt{\frac{2psd}{(p-d)h}}.$$

Пример 2. Интенсивность равномерного спроса составляет 1 тыс. единиц товара в год. Товар поставляется с конвейера, производительность которого составляет 5 тыс. единиц в год. Организационные издержки равны 10 у. е., издержки на хранение – 2 у. е., цена единицы товара – 5 у. е. Чему равен оптимальный размер партии?

Решение. Имеем: $d = 1000$, $p = 5000$, $s = 10$, $h = 2$, $c = 5$.

$$C(q) = cd + \frac{sd}{q} + \frac{(p-d)qh}{2p} = 5000 + \frac{10000}{q} + \frac{4}{5}q, \quad C'(q) = -\frac{10000}{q^2} + \frac{4}{5}.$$

В итоге получаем $q^* = \sqrt{10000 \cdot (5/4)} \approx 112$.

Замечание. Найдя оптимальный размер заказа, можно определить оптимальное число поставок за год n* и соответствующие продолжительность поставки τ* и продолжительность цикла пополнения запаса t*:

$$n^* = \frac{d}{q^*} = \frac{1000}{112} \approx 9, \quad \tau^* = \frac{q^*}{p} = \frac{112}{5000} \cdot 365 \approx 10 \text{ дней}, \quad t^* = \frac{365}{n^*} = \frac{365}{9} \approx 41 \text{ день}.$$

4.3. Модель поставок со скидкой

Рассмотрим ситуацию, описываемую в целом основной моделью, но с одной особенностью, которая состоит в том, что товар можно поставлять по льготной цене (со скидкой), если размер партии достаточно велик. Иными словами, если размер партии q не менее заданного числа q_0, товар поставляется по цене c_0, где $c_0 < c$.

Функция общих издержек C(q) задается в таком случае следующим образом:

$$C(q) = \begin{cases} cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}, \text{если } q < q_0, \\ c_0 d + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}, \text{если } q \ge q_0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция C(q) в точке $q = q_0$ разрывна. Обе функции $f(q) = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}$ и $f_0(q) = c_0 d + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}$ имеют минимум в точке, где $f'(q) = f_0'(q) = 0$, т. е. в точке $\overline{q} = \sqrt{\frac{2sd}{h}}$.

Для выяснения вопроса о том, какой размер партии оптимален, следует сравнить значения функции C(q) в точках q и q_0, и та точка, где функция C(q) принимает меньшее значение, будет оптимальным размером партии q* в модели поставок со скидкой (см. рис. 4.4, 4.5).

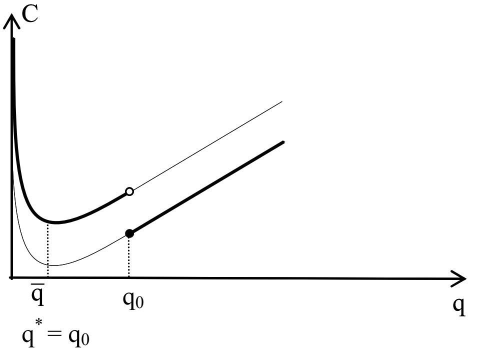


Рис. 4.4. График функции общих издержек модели поставок со скидкой. Случай $q^*=q^0$

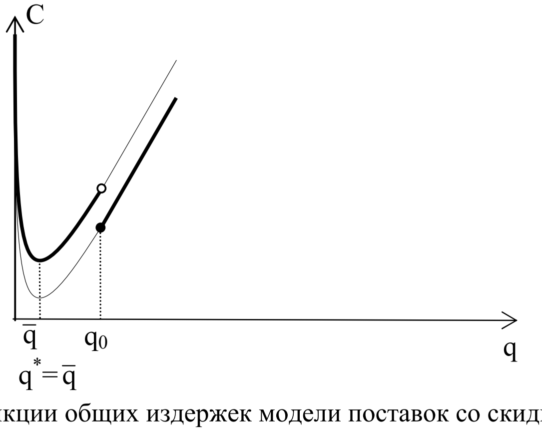


Рис. 4.5. График функции общих издержек модели поставок со скидкой. Случай $q^*= \overline{q}$

Замечание. Может случиться так, что C(q) = C(q_0), тогда, разумеется, $q^* = q = q_0$.

Пример 3. Предположим, что интенсивность равномерного спроса составляет 1000 единиц товара в год. Организационные издержки равны 10 у. е., издержки на хранение – 4 у. е. Цена единицы товара равна 5 у. е., однако, если размер партии не менее 500 единиц, цена снижается до 4 у. е. Найти оптимальный размер партии.

Решение. Здесь d = 1000, s = 10, h = 4, c = 5, q_0 = 500, c_0 = 4.

Общие издержки определяются функцией C(q):

$$C(q)=\begin{cases} f(q)=5000+\dfrac{10000}{q}+2q, \text{ при } q<500,\\ f_0(q)=4000+\dfrac{10000}{q}+2q, \text{если } q\ge 500. \end{cases}$$

Найдем точку локального минимума. Имеем:
$f'(q)=f_0'(q)=-\dfrac{10000}{q^2}+2=0$, откуда $\overline{q}=\sqrt{5000}\approx 71$. Поскольку q < 500, то

$C(\overline{q})=f(\overline{q})=f(71)\approx 5000+\dfrac{10000}{71}+2\cdot 71\approx 5283$. В точке $q = q_0$ получаем

$C(q_0)=f_0(q_0)=f_0(500)\approx 4000+\dfrac{10000}{500}+2\cdot 500\approx 5020$. Таким образом, $q^*=500$.

4.4. Задачи

1. Система управления запасами некоторого вида товара подчиняется условиям основной модели. Каждый год с постоянной интенсивностью поступает спрос на 15 тыс. единиц товара, издержки на организацию поставки составляют 10 у. е. за одну партию, цена единицы товара – 3 у. е., а издержки на ее хранение – 0,75 у. е. в год. Найдите оптимальный размер партии. (Ответ: 632).

2. Каковы будут продолжительность цикла и число поставок за год, если стратегия управления запасами в предыдущей задаче является оптимальной? (Ответ: 15 дней, 24).

3. Система управления запасами описывается моделью производственных поставок и имеет следующие значения параметров. Спрос равен 1,5 тыс. единиц в год, цена – 2 у. е., издержки хранения единицы товара в течение года – 0,2 у. е., организационные издержки – 10 у. е. В течение года может быть произведено 4,5 тыс. единиц товара при полной загрузке производственной линии. Вычислите оптимальный размер партии, продолжительность поставки и средний уровень запасов. (Ответ: 474, 38 дней, 116 дней, 158).

4. Интенсивность спроса в модели производственных поставок составляет четверть скорости производства, которая равна 20 тыс. единиц товара в год. Организационные издержки для одной партии равны 150 у. е., а издержки хранения единицы товара в течение года – 0,3 у. е. Определите оптимальный размер партии, продолжительность поставки и средний уровень запасов. (Ответ: 2582).

5. Мебельной фирме требуется 1000 штук дверных ручек в год, расходуемых с постоянной интенсивностью. Организационные издержки составляют 30 у. е. за партию, издержки на хранение одной ручки оценены в 1 у. е. Цена дверной ручки составляет 2 у. е., а при закупке партиями объемом не менее 750 штук – 1,9 у. е. за штуку. Определите оптимальный

размер партии, продолжительность поставки и продолжительность цикла пополнения запаса. (Ответ: 245).

6. Торговец имеет стабильный спрос на некоторый товар в количестве 500 единиц в год. Товар он покупает у поставщика по цене 6 у. е. за штуку, причем издержки на оформление поставки и другие подготовительные операции составляют в каждом случае 10 у. е. Если торговец покупает сразу партию в количестве 150 единиц товара или более, цена сбавляется до 5 у. е. за штуку. Каков оптимальный размер партии, если годовые затраты на хранение единицы товара равны 1 у. е.? (Ответ: 150).

5. Распределение ресурсов

5.1. Постановка задачи распределения ресурсов

Организационная система (оргсистема, организация) – это система, включающая технику и коллективы людей, интересы которых существенно связаны с ее функционированием. Примерами здесь могут служить семья, фирма, университет, город, страна. Каждая оргсистема состоит из элементов (которые в свою очередь тоже могут представлять собой системы).

Существенными являются следующие два обстоятельства. С одной стороны, система существует для достижения каких-либо определенных целей, т. е. можно говорить об интересах системы в целом. С другой стороны, элементы системы зачастую преследуют собственные интересы, вообще говоря, не совпадающие с интересами системы в целом. Все это дает основание формализовать некоторые аспекты функционирования оргсистем в терминах теории игр.

В данном разделе мы будем рассматривать простейшую двухуровневую модельную оргсистему, состоящую из *Центра* и некоторого числа однотипных *Элементов.* Управление такой системой мы рассмотрим на примере задачи распределения ресурсов. Суть этой задачи состоит в следующем. Элементы (в дальнейшем мы будем называть их *Потребителями)* представляют Центру заявки на получение некоторого ресурса (для простоты рассматривается один вид ресурса). Центр на основании этих заявок распределяет имеющийся в его распоряжении ресурс (который предполагается делимым).

Если все заявки могут быть полностью удовлетворены, то Центру, по-видимому, так и следует поступить – выделить каждому Потребителю столько, сколько он просит.

Существенно сложнее ситуация *дефицита,* когда суммарный объем заявок превосходит имеющийся в распоряжении Центра ресурс. В этом случае задача распределения ресурса становится нетривиальной. Универсальных рекомендаций здесь не существует. Ниже будут рассмотрены некоторые способы, или *механизмы,* распределения ресурсов, каждый из которых обладает определенными достоинствами и недостатками.

Проведем формализацию вышеописанной задачи. Имеется n Потребителей, каждый из которых сообщает Центру число s_i ($i = 1, 2,..., n$) – заявку (рис. 5.1), а также, быть может, еще некоторую информацию (на рис. 5.1 обозначено пунктирной стрелкой). Далее Центр на основании заявок Потребителей, имеющегося в его распоряжении ресурса R и дополнительной информации о Потребителях вычисляет по некоторому правилу числа x_i ($i = 1, 2, ..., n$) – объем ресурса, выделяемый i-му Потребителю.

В случае $\sum_{i=1}^{n} s_i \le R$ (отсутствие дефицита) естественным решением Центра является следующее: $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, …, $x_n = s_n$ (каждый Потребитель получает столько, сколько просил).

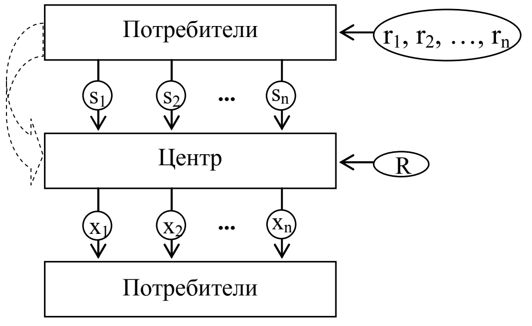


Рис. 5.1. Двухуровневая организационная система

В дальнейшем мы будем считать выполненным неравенство: $\sum_{i=1}^{n} s_i > R$ (суммарная заявка Потребителей превосходит ресурс Центра).

Отметим следующее важное обстоятельство. Потребители формируют свои заявки на основании собственных реальных потребностей r_i, которые им известны, но неизвестны Центру. Можно сказать, что числа s_i являются *стратегиями* Потребителей как участников иерархической игры. В свою очередь, стратегией Центра являются числа x_i.

5.2. Механизм прямых приоритетов

Механизм прямых приоритетов относится к числу так называемых приоритетных механизмов, отличительной чертой которых является приписывание каждому Потребителю некоторого приоритета. Итак, наряду с размерами заявок s_i ($i = 1, 2, ..., n$) Центр учитывает приоритет каждого Потребителя, который определяется числом A_i, ($i = 1, 2, ..., n$).

В соответствии с механизмом прямых приоритетов распределение ресурса осуществляется по правилу:

$$x_I = \min\{s_i, \gamma A_i s_i\}, (i = 1, 2, ..., n), \tag{5.1}$$

где γ – общий для всех Потребителей параметр – определяется из условия:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = R \tag{5.2}$$

(весь ресурс распределяется без остатка).

Особенно простой вид формула (5.1) приобретает в случае "равенства" Потребителей с точки зрения Центра, т. е. при $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 1$ (это условие не ограничивает общности, но упрощает дальнейшие выкладки). Тогда $x_i = \min\{s_i, \gamma s_i\}$, ($i = 1, 2, ..., n$) (случай $x_i = s_i$, невозможен, так как при этом каждый Потребитель получает столько, сколько просил, а это противоречит предположению о наличии дефицита). Из условия (5.2) получаем $\sum_{i=1}^{n}\gamma s_i = R$, откуда $\gamma = \dfrac{R}{\sum_{i=1}^{n} s_i}$.

Описанный механизм распределения ресурсов является, пожалуй, самым простым. Смысл его состоит в том, что все заявки пропорционально "урезаются" путем умножения на число γ.

Пример 1. Пусть пять Потребителей подали заявки в размере 5, 8, 12, 7 и 8. Имеющийся в распоряжении Центра ресурс составляет 32. Как должен быть распределен этот ресурс в соответствии с механизмом прямых приоритетов?

Решение. Имеем: $s_1 = 5$, $s_2 = 8$, $s_3 = 12$, $s_4 = 7$, $s_5 = 8$, $R = 32$

Поскольку $\sum_{i=1}^{5} s_i = 5 + 8 + 12 + 7 + 8 = 40 > 32 = R$ – налицо дефицит.

Определяем коэффициент γ: $\gamma = \dfrac{32}{40} = 0{,}8$.

На это число и умножаются заявки. В итоге получаем $x_1 = 0{,}8*5 = 4$, $x_2 = 0{,}8*8 = 6{,}4$, $x_3 = 0{,}8*12 = 9{,}6$, $x_4 = 0{,}8*7 = 5{,}6$, $x_5 = 0{,}8*8 = 6{,}4$.

Ответ: $x_1 = 4$; $x_2 = 6{,}4$; $x_3 = 9{,}6$; $x_4 = 5{,}6$; $x_5 = 6{,}4$.

Достоинства механизма прямых приоритетов очевидны. Отметим два недостатка. Во-первых, каждый Потребитель получает меньше, чем просит. Между тем нетрудно представить себе ситуацию, когда Потребителю требуется на осуществление какого-либо проекта именно s_i единиц ресурса, а $\gamma_i s_i$ уже не хватает. Во-вторых, данный механизм "толкает" Потребителей к завышению заявок в условиях дефицита. Действительно, поскольку, чем больше Потребитель просит, тем больше получает, он может, завышая свои потребности, попытаться приблизить итоговое решение Центра x_i к своим реальным потребностям r_i. Тем самым дефицит еще более возрастает, причем Центр даже не имеет возможности узнать реальные запросы Потребителей r_i, поскольку они сообщают заявки $s_i > r_i$.

5.3. Механизм обратных приоритетов

Механизм обратных приоритетов основывается на предположении, что, чем меньше требуется Потребителю ресурса, тем больше эффективность его использования. В соответствии с этим распределение ресурса осуществляется по правилу

$$x_i = \min\{s_i, \gamma A_i/s_i\}, \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{5.3}$$

где число γ определяется, как и в механизме прямых приоритетов, из условия $\sum_{i=1}^{n} x_i = R$. Из формулы (5.3) видно, что, подавая очень малую либо очень большую заявку s_i, Потребитель получает малый ресурс x_i. Найдем, какую же заявку s_i, должен подавать i-й Потребитель, чтобы получить максимальный ресурс x_i, (в условиях дефицита такая цель Потребителя представляется вполне понятной). На рис. 5.2 изображен график функции $x_i = x_i(s_i)$. Видно, что максимум достигается в точке s_i^*, являющейся решением уравнения $s_i^* = \gamma \frac{A_i}{s_i^*}$. Преобразуя последнее равенство, получаем $s_i^* = \sqrt{\gamma A_i}$. Таким образом, *равновесным* является набор стратегий Потребителей $s_1^* = \sqrt{\gamma A_1}$, $s_2^* = \sqrt{\gamma A_2}$, ..., $s_n^* = \sqrt{\gamma A_n}$, при этом $x_1 = s_1^*$, $x_2 = s_2^*$, ..., $x_n = s_n^*$.

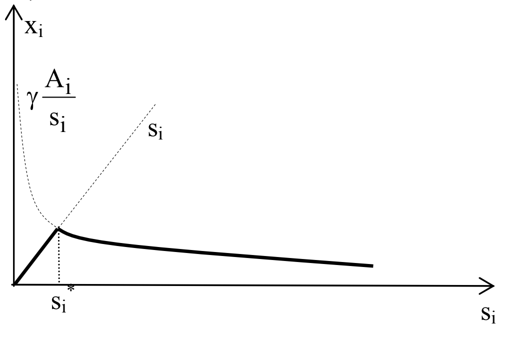


Рис. 5.2. График функции $x_i = x_i(s_i)$

Выбирая вместо s_i^* любую другую стратегию s_i, i-й Потребитель лишь уменьшает выделяемый ему ресурс x_i.

Осталось вычислить константу γ. Имеем:

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} s_i^* = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\gamma A_i} = \sqrt{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i}, \text{ откуда } \sqrt{\gamma} = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i}}.$$

Замечание. Еще раз отметим, что набор стратегий s_i^* (i = 1, 2, ..., n*)* является равновесным, т. е., подавая любую заявку $s_i \neq s_i^*$, i-й Потребитель лишь уменьшает выделяемый ему ресурс x_i. Можно доказать, что каждая из стратегий s_i^* является также гарантирующей, т. е. в случае применения i-м Потребителем этой стратегии он в любом случае (т. е. при любых заявках остальных Потребителей) получает не меньше, чем $x_i = s_i^*$.

Пример 2. Пусть имеется пять Потребителей, приоритеты которых определяются числами 8, 6, 12, 15, 11. Ресурс Центра составляет 60. Определить равновесные стратегии (заявки) Потребителей, если ресурс распределяется в соответствии с механизмом обратных приоритетов.

Решение. Имеем: $A_1 = 8$, $A_2 = 6$, $A_3 = 12$, $A_4 = 15$, $A_5 = 11$, $R = 60$.

Вычислим константу $\sqrt{\gamma}$: $\sqrt{\gamma} = \frac{60}{\sqrt{8}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{15}+\sqrt{11}} \approx 3{,}77$.

Определять γ необязательно, поскольку в формулы для s_i^* можно подставить сразу $\sqrt{\gamma}$: $s_1^* = 3{,}77 * \sqrt{8} \approx 10{,}7$; $s_2^* = 3{,}77 * \sqrt{6} \approx 9{,}2$;

$s_3^* = 3{,}77 * \sqrt{12} \approx 13{,}1$; $s_4^* = 3{,}77 * \sqrt{15} \approx 14{,}6$; $s_5^* = 3{,}77 * \sqrt{11} \approx 12{,}5$.

Ответ: $s_1^* = 10{,}7$; $s_2^* = 9{,}2$; $s_3^* = 13{,}1$; $s_4^* = 14{,}6$; $s_5^* = 12{,}5$.

Замечание 1. Из-за ошибок округления сумма заявок немного отличается от $R = 60$.

Замечание 2. На самом деле мы рассмотрели случай, когда $s_i^* < r_i$, для всех r_i, т. е. когда каждый из Потребителей вынужден, подавая заявку, занижать свою реальную потребность. Может быть и так, что для некоторых Потребителей $s_i^* \geq r_i$. Тогда эти Потребители подают заявку на ресурс $s_i^* = r_i$ и столько же получают.

Механизм обратных приоритетов обладает рядом достоинств. В частности, не происходит неоправданного завышения заявок, т. е. не возникает ситуации $s_i^* > r_i$. Кроме того, при условии разумного поведения Потребителей (т. е. при использовании каждым из них равновесной стратегии s_i^*) они получают столько, сколько просят. Недостатком является то, что числа s_i^* скорее всего оказываются меньше реальных потребностей r_i. Вследствие этого Центр не получает достоверной информации о реальном дефиците $(\sum_{i=1}^{n} r_i) - R$.

5.4. Конкурсный механизм

Конкурсный механизм применяется в тех случаях, когда нецелесообразно "урезать" заявки, поскольку Потребителям ресурс нужен на реализацию каких-либо конкретных проектов, на которые меньшего ресурса не хватит. В этих условиях Центр проводит конкурс заявок. Те, кто побеждают в конкурсе, полностью получают требуемый ресурс, а проигравшие не получают ничего. Реализация этого происходит следующим образом. Потребители сообщают Центру свои заявки s_i, а также величины w_i, характеризующие *эффект,* который они намереваются получить. На основании этих данных Центр вычисляет для каждого Потребителя показатель *эффективности*: $e_i = \frac{w_i}{s_i}$, $i = 1, 2, \dots n$.

После этого ресурс распределяется следующим образом. Сначала рассматривается Потребитель с наибольшей эффективностью. Ему выделяется столько, сколько он просит (если у Центра хватает ресурса). Затем берется второй по эффективности и т. д. В какой-то момент оказывается, что на удовлетворение очередной заявки оставшегося у Центра ресурса не хватает. Тогда этот потребитель, равно как и все оставшиеся, ничего не получает.

Пример 3. Имеется шесть Потребителей, подавших заявки в размере 14, 18, 10, 15, 8, 14 и сообщивших Центру соответственно следующие показатели эффекта: 36, 38, 25, 42, 28, 29. Каким должно быть распределение ресурса объемом 60 в соответствии с конкурсным механизмом?

Решение. По условию имеем $s_1 = 14$, $s_2 = 18$, $s_3 = 10$, $s_4 = 15$, $s_5 = 8$, $s_6 = 14$,

$w_1 = 36$, $w_2 = 38$, $w_3 = 25$, $w_4 = 42$, $w_5 = 28$, $w_6 = 29$, $R = 60$.

Вычислим показатели эффективности для каждого Потребителя:

$$e_1 = \frac{36}{14} \approx 2{,}57, \; e_2 = \frac{38}{18} \approx 2{,}11, \; e_3 = \frac{25}{10} \approx 2{,}5,$$

$$e_4 = \frac{42}{15} \approx 2{,}8, \; e_5 = \frac{28}{8} \approx 3{,}5, \; e_6 = \frac{29}{14} \approx 2{,}07.$$

Расположим эти числа в порядке убывания: $e_5 > e_4 > e_1 > e_3 > e_2 > e_6$. Распределение ресурса начнем с 5-го Потребителя: $x_5 = 8$. Ресурса осталось $60 - 8 = 52$. Дальше в порядке убывания показателей эффективности следует 4-й Потребитель: $x_4 = 15$. Ресурса осталось $52 - 15 = 37$. Далее: $x_1 = 14$. Ресурса осталось $37 - 14 = 23$. Далее: $x_3 = 10$. Ресурса осталось $23 - 10 = 13$. Следующему, 2-му Потребителю требуется 18 единиц ресурса, а у Центра осталось лишь 15. Поэтому 2-й, а также 6-й Потребители ничего не получают: $x_2 = x_6 = 0$.

Ответ: $x_1 = 14$; $x_2 = 0$; $x_3 = 10$; $x_4 = 15$; $x_5 = 8$; $x_6 = 0$.

Замечание. В эффективности описанного механизма могут возникнуть сомнения. Ведь Потребители могут пообещать большой эффект, получить ресурс, а затем не выполнить обещанного. Поэтому при реальном применении конкурсного механизма необходима действенная система контроля (возможно, поэтапный контроль для проектов с длительным временем реализации).

5.5. Механизм открытого управления

Во всех рассмотренных выше механизмах распределения ресурсов Потребители могут добиться лучшего для себя решения Центра путем искажения информации. Таким образом, Центр не получает достоверных данных о запросах Потребителей.

Возможность эффективно управлять на основании недостоверной информации представляется, вообще говоря, сомнительной. Поэтому интересны механизмы открытого управления, идея которых заключается в создании для Потребителей стимулов к сообщению в заявке своих реальных потребностей.

Опишем один из возможных механизмов открытого управления. Распределение ресурсов проводится в несколько этапов. На первом этапе ресурс разделяется поровну между всеми Потребителями, т. е. по R/n каждому. Если заявки каких-либо Потребителей оказались не больше чем R/n, то они полностью удовлетворяются. Тем самым число Потребителей уменьшается до n_1, уменьшается и ресурс Центра – до R_1. На втором этапе ресурс разделяется поровну между оставшимися n_1 Потребителями и т. д.

На каком-то этапе оказывается, что, разделив ресурс поровну между оставшимися Потребителями, не удается удовлетворить ни одной заявки. Тогда все эти Потребители получают поровну.

Пример 4. Восемь Потребителей подали Центру свои заявки. Они таковы: 12, 3, 6, 1, 5, 7, 10, 2. Центр обладает ресурсом $R = 40$. Требуется распределить этот ресурс в соответствии с вышеописанным механизмом.

Решение. В данном случае на первом этапе получается следующее: $R/n = 5$. $s_1 = 12$, $s_2 = 3$, $s_3 = 6$, $s_4 = 1$, $s_5 = 5$, $s_6 = 7$, $s_7 = 10$, $s_8 = 2$, $R = 40$.

Видно, что можно удовлетворить заявки второго, четвертого, пятого и восьмого Потребителей: $x_2 = 3$; $x_4 = 1$; $x_5 = 5$; $x_8 = 2$. При этом $R1 = 40 – 3 – 1 – 5 – 2 = 29$, $n1 = 4$.

На втором этапе имеем $R_1/n_1 = 7{,}25$. Можно удовлетворить заявки третьего и шестого Потребителей: $x_3 = 6$; $x_6 = 7$. При этом $R2 = 29 – 6 – 7 = 16$, $n2 = 4$.

На третьем этапе имеем $R2/n2 = 8$. Обе оставшиеся заявки превышают 8, поэтому первый и седьмой Потребители получают по 8 единиц ресурса: $x_1 = 8$; $x_7 = 8$.

Ответ: $x_1 = 8$; $x_2 = 3$; $x_3 = 6$; $x_4 = 1$; $x_5 = 5$; $x_6 = 7$; $x_7 = 8$; $x = 2$.

Описанный механизм является механизмом открытого управления. Действительно, в конечном счете, все Потребители делятся на приоритетных (которые получили столько, сколько просили) и неприоритетных (к последним в приведенном примере относятся первый и восьмой Потребители). Приоритетные получают столько, сколько просят, поэтому им не имеет смысла искажать свои реальные потребности. Неприоритетные же, как нетрудно видеть, не могут увеличить выделенный им ресурс ни повышая, ни понижая свою заявку. Таким образом, при распределении ресурсов в соответствии с описанным механизмом Центр получает достоверную информацию о реальных запросах Потребителей.

5.6. Открытое управление и экспертный опрос

Если требуется определить объем финансирования крупного проекта, то часто прибегают к проведению экспертного опроса. Рассмотрим следующую процедуру опроса. Каждому из n экспертов предлагается сообщить число s из отрезка [d; D], после чего на основании экспертных оценок определяется итоговое решение x. Задача состоит как раз в том, чтобы определить число x, исходя из заданных s_i, ($i = 1, 2, ..., n$).

На первый взгляд кажется, что наилучшее решение здесь – взять в качестве итогового решения среднее арифметическое мнений экспертов:

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i \qquad (5.4)$$

Однако у такого решения есть существенный недостаток. Дело состоит в следующем. У каждого эксперта есть мнение r_i относительно объема финансирования. И если эксперт каким-либо образом заинтересован в том, чтобы итоговая оценка x совпала с его мнением r_i, то он может попытаться добиться этого совпадения, сообщая оценку $s_i \neq r_i$.

Пример 5. Пусть три эксперта имеют следующие мнения: $r_1 = 10$, $r_2 = 10$, $r_3 = 40$.
Если каждый из них сообщит свое мнение без искажений, то при принятии решения по способу (5.4) результат будет таким: $x = \frac{10+10+40}{3} = 20$.

Однако третий эксперт может (имея представление о мнениях остальных двух экспертов) сообщить оценку $s_3 = 100$. Тогда итоговый результат $x = \frac{10+10+100}{3} = 40$ как раз совпадет с его истинным мнением r_3.

Замечание. В теории коллективного принятия решений такой способ действий называется *манипулированием.* В свою очередь, если механизм коллективного принятия решений допускает манипулирование с чьей-либо стороны, то он называется *манипулируемым.* Рассмотренный только что пример показал, что механизм (5.4) является манипулируемым: искажая свои истинные предпочтения, можно приблизить итоговое коллективное решение к собственному истинному предпочтению.

Вернемся к экспертному опросу. Говоря более строго, i-й эксперт решает задачу $|x - r_i| \to \min\limits_{s_i}$, т. е. пытается минимизировать разность между итоговым решением x и своим истинным мнением r_i, путем надлежащего выбора сообщаемой оценки s_i. Опишем механизм выработки решения x*, являющийся механизмом открытого управления (т. е. неманипулируемым механизмом). Напомним, что эксперты сообщают свои оценки $s_i \in [d, D]$, i = 1, 2 ,…, n. Будем считать, не ограничивая общности, что оценки экспертов расположены по неубыванию: $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$ (этого всегда можно добиться перенумерацией экспертов). Вычисляются n вспомогательных чисел $v_i = D - (i-1)\frac{D-d}{n}$, I = 1, 2, …, n (эти числа делят отрезок [d, D] на n равных частей). После этого для каждого i берется меньшее из двух чисел s_i и v_i: $\min\{ s_i, v_i\}$. И, наконец, из всех этих минимумов выбирается наибольший, который и является итоговым решением: $x^* = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \min\{s_i, v_i\}$.

Пример 6. Пусть 6 экспертов сообщили следующие оценки и промежутки [30,90]: 65, 90, 45, 80, 75, 90. Определить итоговое решение в соответствии с описанным механизмом.

Решение. Выпишем числа v_i (здесь $\frac{D-d}{n}=\frac{90-30}{3}=10$):
$v_1 = 90$, $v_2 = 90 - 10 = 80$, $v_3 = 90 - 20 = 70$, $v_4 = 90 - 30 = 60$, $v_5 = 90 - 40 = 50$, $v_6 = 90 - 50 = 40$.
Дальнейшее удобно изобразить в виде таблицы, в первой строке которой записаны упорядоченные по неубыванию оценки экспертов:

s_i:	45	65	75	80	90	90
v_i:	90	80	70	60	50	40
$\min\{s_i, v_i\}$:	45	65	$\boxed{70}$	60	50	40

В качестве итогового решения берется максимальное число в последней строке: $x^* = 70$.

Замечание. Во всех предыдущих рассуждениях квалификация экспертов предполагается одинаковой. Можно в случае необходимости вводить коэффициенты, позволяющие учитывать мнение разных экспертов различным образом – принципиально это ничего не меняет, лишь несколько усложняется вычисление итогового результата x^*.

5.7. Задачи

1. Восемь Потребителей подали Центру заявки в размере 9, 18, 15, 14, 10, 13, 7, 14. Имеющийся в распоряжении Центра ресурс составляет 70. Как должен быть распределен этот ресурс в соответствии с механизмом прямых приоритетов? (Ответ: 6,3; 12,6; 10,5; 9,8; 7; 9,1; 4,9; 9,8).

2. Распределение ресурса производится в соответствии с механизмом обратных приоритетов. Приоритеты четырех Потребителей определяются числами 26, 18, 24, 20. Какими являются равновесные стратегии (заявки) Потребителей, если имеющийся в распоряжении Центра ресурс составляет 50? (Ответ: 13,6; 11,3; 13,1; 11,9).

3. Распределение ресурса осуществляется в соответствии с конкурсным механизмом. Пять Потребителей сообщили Центру свои заявки: 5, 8, 6, 9, 8 и показатели эффекта: 12, 21, 18, 23, 23 соответственно. Как должен быть распределен между Потребителями ресурс объемом 25? (Ответ: 0; 8; 6; 0; 8).

4. Восемь Потребителей подали Центру заявки 13, 10, 16, 19, 9, 12, 14, 11. Центр располагает ресурсом объемом 100. Как должен быть распределен этот ресурс в соответствии с механизмом открытого управления? (Ответ: 13; 10; 15,5; 15,5; 9; 12; 14; 11).

5. Восьми экспертам было предложено сообщить оценку объема финансирования из промежутка [0,80]. Эксперты сообщили следующие оценки: 45, 10, 35, 80, 65, 35, 60, 55. Определите итоговое решение при помощи механизма открытого управления. (Ответ: 45).

6. Модели динамического программирования

Динамическое программирование связано с возможностью представления процесса управления в виде цепочки последовательных действий, или шагов, развернутых во времени и ведущих к цели. Таким образом, процесс управления можно разделить на части и представить его в виде динамической последовательности и интерпретировать в виде пошаговой программы, развернутой во времени. Это позволяет спланировать программу будущих действий. Поскольку вариантов возможных планов–программ множество, то необходимо из них выбрать лучший, оптимальный по какому-либо критерию в соответствии с поставленной целью.

6.1. Предмет динамического программирования

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, который подходит к решению некоторого класса задач путем их разложения на части, небольшие и менее сложные задачи. При этом отличительной особенностью является решение задач по этапам, через фиксированные интервалы, промежутки времени, что и определило появление термина *динамическое программирование*. Следует заметить, что методы динамического программирования успешно применяются и при решении задач, в которых фактор времени не учитывается. В целом математический аппарат можно представить как пошаговое или поэтапное программирование. Решение задач методами динамического программирования проводится на основе сформулированного Р. Э. Беллманом принципа оптимальности: оптимальное поведение обладает тем свойством, что каким бы ни было первоначальное состояние системы и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Из этого следует, что планирование каждого шага должно проводиться с учетом общей выгоды, получаемой по завершении всего процесса, что и позволяет оптимизировать конечный результат по выбранному критерию.

Таким образом, динамическое программирование в широком смысле представляет собой оптимальное управление процессом, посредством изменения управляемых параметров на каждом шаге, и, следовательно, воздействуя на ход процесса, изменяя на каждом шаге состояние системы.

В целом динамическое программирование представляет собой стройную теорию для восприятия и достаточно простую для применения в коммерческой деятельности при решении как линейных, так и нелинейных задач.

Динамическое программирование (ДП) является одним из разделов оптимального программирования. Для него характерны специфические методы и приемы, применительные к операциям, в которых процесс принятия решения разбит на этапы (шаги). Методами ДП решаются вариантные оптимизационные задачи с заданными критериями оптимальности, с определенными связями между переменными и целевой функцией, выраженными системой уравнений или неравенств. При этом, как и в задачах, решаемых методами линейного программирования, ограничения могут быть даны в виде равенств или неравенств. Однако если в задачах линейного программирования зависимости между критериальной функцией и переменными обязательно линейны, то в задачах ДП эти зависимости могут иметь еще и нелинейный характер. ДП можно использовать как для решения задач, связанных с динамикой процесса или системы, так и для статических задач, связанных, например, с распределением ресурсов. Это значительно расширяет область применения ДП для решения задач управления. А возможность упрощения процесса решения, которая достигается за счет ограничения области и количества, исследуемых при переходе к очередному этапу вариантов, увеличивает достоинства этого комплекса методов.

Вместе с тем ДП свойственны и недостатки. Прежде всего, в нем нет единого универсального метода решения. Практически каждая задача, решаемая этим методом, характеризуется своими особенностями и требует проведения поиска наиболее приемлемой совокупности методов для ее решения. Кроме того, большие объемы и трудоемкость решения многошаговых задач, имеющих множество состояний, приводят к необходимости отбора задач малой размерности либо использования сжатой информации. Последнее достигается с помощью методов анализа вариантов и переработки списка состояний.

Для процессов с непрерывным временем ДП рассматривается как предельный вариант дискретной схемы решения. Получаемые при этом результаты практически совпадают с теми, которые получаются методами максимума Л. С. Понтрягина или Гамильтона-Якоби-Беллмана.

ДП применяется для решения задач, в которых поиск оптимума возможен при поэтапном подходе, например, распределение дефицитных капитальных вложений между новыми направлениями их использования; разработка правил управления спросом или запасами, устанавливающими момент пополнения запаса и размер пополняющего заказа; разработка принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; составление календарных планов текущего и капитального ремонтов оборудования и его замены; поиск кратчайших расстояний на транспортной сети; формирование последовательности развития коммерческой операции и т. д.

6.2. Постановка задачи динамического программирования

Постановку задачи динамического программирования рассмотрим на примере инвестирования, связанного с распределением средств между предприятиями. В результате управления инвестициями система последовательно переводится из начального состояния S_0 в конечное S_n. Предположим, что управление можно разбить на n шагов и решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление представляет собой совокупность n пошаговых управлений. На каждом шаге необходимо определить два типа переменных: переменную состояния системы S_k и переменную управления x_k. Переменная S_k определяет, в каких состояниях может оказаться система на рассматриваемом k-м шаге. В зависимости от состояния S на этом шаге можно применить некоторые управления, которые характеризуются переменной x_k, которые удовлетворяют определенным ограничениям и называются допустимыми.

Допустим, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ – управление, переводящее систему из состояния S_0 в состояние S_n, а S_k – есть состояние системы на k-м шаге управления. Тогда последовательность состояний системы можно представить в виде графа, изображенного на рис. 6.1.

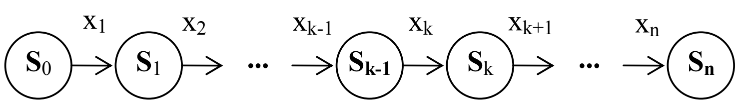


Рис. 6.1. Граф состояний системы

Применение управляющего воздействия x_k на каждом шаге переводит систему в новое состояние $S^1(S, x_k)$ и приносит некоторый результат $W_k(S, x_k)$. Для каждого возможного состояния на каждом шаге среди всех возможных управлений выбирается оптимальное управление x^*_k, такое, чтобы результат, который достигается за шаги с k-го по последний n-й, оказался бы оптимальным. Числовая характеристика этого результата называется функцией Беллмана $F_k(S)$ и зависит от номера шага k и состояния системы S.

Задача динамического программирования формулируется следующим образом: требуется определить такое управление X*, переводящее систему из начального состояния S_0 в конечное состояние S_n, при котором целевая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение $F(S_0, X^*) \to \text{extr}$.

Особенности математической модели динамического программирования заключаются в следующем:

1) задача оптимизации формулируется как конечный многошаговый процесс управления;

2) целевая функция (выигрыш) является аддитивной и равна сумме

целевых функций каждого шага: $F = \sum_{k=1}^{n} F_k (S_{k-1,} x_k) \to \text{extremum}$;

3) выбор управления x_k на каждом шаге зависит только от состояния системы к этому шагу S_k, и не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи);

4) состояние системы S_k после каждого шага управления зависит только от предшествующего состояния системы S_{k-1} и этого управляющего воздействия x_k (отсутствие последействия) и может быть записано в виде уравнения состояния: $S_k = f(S_{k-1}, x_k)$, $k = 1, n$;

5) на каждом шаге управление x_k зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние системы S_k зависит от конечного числа параметров;

6) оптимальное управление представляет собой вектор X*, определяемый последовательностью оптимальных пошаговых управлений: $X^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_k, \ldots, x^*_n)$, число которых и определяет количество шагов задачи.

6.3. Принцип оптимальности и математическое описание динамического процесса управления

В основе метода ДП лежит принцип оптимальности, впервые сформулированный в 1953 г. американским математиком Р. Э. Беллманом: каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге. При решении задачи на каждом шаге выбирается управление, которое должно привести к оптимальному выигрышу. Если считать все шаги независимыми, тогда оптимальным управлением будет то управление, которое обеспечит максимальный выигрыш именно на данном шаге. Однако, например, при покупке новой техники взамен устаревшей на ее приобретение затрачиваются определенные средства, поэтому доход от ее эксплуатации в начале может быть небольшой, а в следующие годы новая техника будет приносить больший доход. И наоборот, если принято решение оставить старую технику для получения дохода в текущем году, то в дальнейшем это приведет к значительным убыткам. Этот пример демонстрирует следующий факт: в многошаговых процессах управление на каждом конкретном шаге надо выбирать с учетом его будущих воздействий на весь процесс.

Кроме того, при выборе управления на данном шаге следует учитывать возможные варианты состояния предыдущего шага. Например, при определении количества средств, вкладываемых в предприятие в 1-м году, необходимо знать, сколько средств осталось в наличии к этому году и какой доход получен в предыдущем (i-1)-м году. Таким образом, при выборе шагового управления необходимо учитывать следующие требования:

1) возможные исходы предыдущего шага S_{k-1};
2) влияние управления x_k на все оставшиеся до конца процесса шаги (n - k).

В задачах динамического программирования первое требование учитывают, делая на каждом шаге условные предположения о возможных вариантах окончания предыдущего шага и проводя для каждого из вариантов условную оптимизацию. Выполнение второго требования обеспечивается тем, что в этих задачах условная оптимизация проводится от конца процесса к началу.

Условная оптимизация. На первом этапе решения задачи, называемом условной оптимизацией, определяются функция Беллмана и оптимальные управления для всех возможных состояний на каждом шаге, начиная с последнего в соответствии с алгоритмом обратной прогонки. На последнем, n-м шаге, оптимальное управление x^*_n определяется функцией Беллмана: $F(S) = \max\{W_n(S,x_n)\}$, в соответствии с которой максимум выбирается из всех возможных значений x_n, причем $x_n \in X$.

Дальнейшие вычисления производятся согласно рекуррентному соотношению, связывающему функцию Беллмана на каждом шаге с этой же функцией, но вычисленной на предыдущем шаге. В общем виде это уравнение имеет вид:

$$F_n(S) = \max\{W_n(S, x_n) + F_{k+1}(S^1(S, x_k))\}, \; x_k \in X.$$

Этот максимум (или минимум) определяется по всем возможным для k и S значениям переменной управления X.

Безусловная оптимизация. После того, как функция Беллмана и соответствующие оптимальные управления найдены для всех шагов с n-го по первый, осуществляется второй этап решения задачи, называемый безусловной оптимизацией. Пользуясь тем, что на первом шаге (k = 1) состояние системы известно – это ее начальное состояние S_0, можно найти оптимальный результат за все n шагов и оптимальное управление на первом шаге x_1, которое этот результат доставляет. После применения этого управления система перейдет в другое состояние $S_1(S,x^*_1)$, зная которое, можно, пользуясь результатами условной оптимизации, найти оптимальное управление на втором шаге x^*_1, и так далее до последнего n-го шага.

Вычислительную схему динамического программирования можно строить на сетевых моделях, а также по алгоритмам прямой прогонки (от начала) и обратной прогонки (от конца к началу). Рассмотрим примеры решения различных по своей природе задач, содержание которых требует выбора переменных состояния и управления.

6.4. Оптимальное распределение инвестиций

Требуется распределить имеющиеся B единиц средств среди n предприятий, доход $g_i(x_i)$ от которых, в зависимости от количества вложенных средств x_i, определяется матрицей (nxn), приведенной в табл. 6.1, так, чтобы суммарный доход со всех предприятий был бы максимальным.

Таблица 6.1

x \ g_i	g_1	g_2	…	g_i	…	g_n
x_1	$g_1(x_1)$	$g_2(x_1)$		$g_i(x_1)$		$g_n(x_1)$
x_2	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2)$		$g_i(x_2)$		$g_n(x_2)$
x_i	$g_1(x_i)$	$g_2(x_i)$		$g_i(x_i)$		$g_n(x_i)$
x_n	$g_1(x_n)$	$g_2(x_n)$		$g_i(x_n)$		$g_n(x_n)$

Запишем математическую модель задачи.

Определить $X^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_k, \ldots, x^*_n)$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = B & (6.1) \\ x_i \geq 0, i = 1,\ldots,n & (6.2) \end{cases}$$

и обеспечивающий максимум целевой функции

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_i) \to \max \qquad (6.3)$$

Очевидно, эта задача может быть решена простым перебором всех возможных вариантов распределения B единиц средств по n предприятиям, например на сетевой модели. Однако решим ее более эффективным методом, который заключается в замене сложной многовариантной задачи многократным решением простых задач с малым количеством исследуемых вариантов.

С этой целью разобьем процесс оптимизации на n шагов и будем на каждом k-м шаге оптимизировать инвестирование не всех предприятий, а только предприятий с k-го по n-е. При этом естественно считать, что в остальные предприятия (с первого по (k–1)-е тоже вкладываются средства, и поэтому на инвестирование предприятий с k-го по n-е остаются не все средства, а некоторая меньшая сумма $C_k \leq B$. Эта величина и будет являться переменной состояния системы. Переменной управления на k-м шаге назовем величину x_k средств, вкладываемых в k-е предприятие. В качестве функции Беллмана $F_k(C_k)$ на k-м шаге можно выбрать максимально возможный доход, который можно получить с предприятий с k-го по n-е при условии, что на их инвестирование осталось C_k средств. Очевидно, что при вложении в k-е предприятие x_k средств будет получена прибыль $g_k(x_k)$, а система к (k+1)-му шагу перейдет в состояние S_{k+1} и, следовательно, на инвестирование предприятий с (k+1)-го до n-го останется $C_{k+1} = (C_k - x_k)$ средств.

Таким образом, на первом шаге условной оптимизации при k = n функция Беллмана представляет собой прибыль только с n-го предприятия. При этом на его инвестирование может остаться количество средств C_n, $0 \le C_n \le B$. Чтобы получить максимум прибыли с этого предприятия, можно вложить в него все эти средства, т. е. $F_n(C_n) = g_n(C_n)$ и $x_n = C_n$.

На каждом последующем шаге для вычисления функции Беллмана необходимо использовать результаты предыдущего шага. Пусть на k-м шаге для инвестирования предприятий с k-го по n-е осталось C_k средств ($0 \le C_k \le B$). Тогда от вложения в k-е предприятие x_k средств будет получена прибыль $g_k(C_k)$, а на инвестирование остальных предприятий (с k-го по n-е) останется $C_{k+1} = (C_k - x_k)$ средств. Максимально возможный доход, который может быть получен с предприятий (с k-го по n-е), будет равен:

$$F_k(C_k) = \max_{x_k \le C_k} \{g_k(x_k) + F_{k+1}(C_k - x_k)\}, \; k = 1, \ldots, n \qquad (6.4)$$

Максимум выражения (6.4) достигается на некотором значении x^*_k, которое является оптимальным управлением на k-м шаге для состояния системы S_k. Действуя таким образом, можно определить функции Беллмана и оптимальные управления до шага $k = 1$.

Значение функции Беллмана $F_1(c_1)$ представляет собой максимально возможный доход со всех предприятий, а значение x^*_1, на котором достигается максимум дохода, является оптимальным количеством средств, вложенных в первое предприятие. Далее на этапе безусловной оптимизации для всех последующих шагов вычисляется величина $C_k = (C_{k-1} - x_{k-1})$ оптимальным управлением на k-м шаге является то значение x_k, которое обеспечивает максимум дохода при соответствующем состоянии системы S_k.

Пример 1. На развитие трех предприятий выделено 5 млн. руб. Известна эффективность капитальных вложений в каждое предприятие, заданная значением нелинейной функции $g_i(x_i)$, представленной в табл. 6.2. Необходимо распределить выделенные средства между предприятиями таким образом, чтобы получить максимальный суммарный доход.

Для упрощения расчетов предполагаем, что распределение средств осуществляется в целых числах $x_i = \{0,1,2,3,4,5\}$ млн. руб.

Таблица 6.2

x	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0
1	2,2	2	2,8
2	3	3,2	5.4
3	4,1	4,8	6,4
4	5,2	6,2	6,6
5	5,9	6,4	6,9

Решение.

I этап. Условная оптимизация.

1-й шаг: $k = 3$. Предположим, что все средства в количестве $x_3 = 5$ млн. руб. отданы третьему предприятию. В этом случае максимальный доход, как это видно из табл. 6.3, составит $g_3(x_3) = 6{,}9$ тыс. руб., следовательно:

$F_3(C_3) = g_3(x_3)$.

Таблица 6.3

C_3 \ x_3	0	1	2	3	4	5	$F_3(C_3)$	x^*_3
0	0						0	0
1		2,8					2,8	1
2			5,4				5,4	2
3				6,4			6,4	3
4					6,6		6,6	4
5						6,9	6,9	5

2-й шаг: k = 2. Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между вторым и третьим предприятиями. При этом рекуррентное соотношение Беллмана имеет вид:

$F_2(C_2) = \max\limits_{x_2 \le C_2} \{g_2(x_2) + F_3(C_2 - x_2)\}$, на основе которого составлена табл. 6.4.

Таблица 6.4

C_2 \ x_2	0	1	2	3	4	5	$F_2(C_2)$	x^*_2
0	0 + 0						0	0
1	0 + 2,8	2 + 0					2,8	0
2	0 + 5,4	2 + 2,8	3,2 + 0				5,4	0
3	0 + 6,4	2 + 5,4	3,2 + 2,8	4,8 + 0			7,4	1
4	0 + 6,6	2 + 6,4	3,2 + 5,4	4,8 + 2,8	6,2 + 0		8,6	2
5	0 + 6,9	2 + 6,6	3,2 + 6,4	4,8 + 5,4	6,2 + 2,8	6,4 + 0	10,2	3

3-й шаг: k = 1. Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между первым и двумя другими предприятиями, используя следующую формулу для расчета суммарного дохода:

$F_1(C_1) = \max\limits_{x_1 \le C_1} \{g_1(x_1) + F_2(C_1 - x_1)\}$, на основе которого составлена табл. 6.5.

Таблица 6.5

C_1 \ x_1	0	1	2	3	4	5	$F_1(C_1)$	x^*_1
0	0 + 0						0	0
1	0 + 2,8	2,2 + 0					2,8	0
2	0 + 5,4	2,2 + 2,8	3 + 0				5,4	0
3	0 + 7,4	2,2 + 5,4	3 + 2,8	4,1 + 0			7,6	1
4	0 + 8,6	2,2 + 7,4	3 + 5,4	4,1 + 2,8	5,2 +0		9,6	1
5	0 + 10,2	2,2 + 8,6	3 + 7 ,4	4,1 + 5,4	5,2 + 2,8	5,9 + 0	10,8	1

II этап. Безусловная оптимизация.

Определяем компоненты оптимальной стратегии.

1-й шаг. По данным из табл. 6.5 максимальный доход при распределении 5 млн. руб. между тремя предприятиями составляет: $C_1 = 5$, $F_1(5) = 10,8$.

При этом первому предприятию нужно выделить $x^*_1 = 1$ млн. руб.

2-й шаг. Определяем величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю второго и третьего предприятий: $C_2 = C_1 - x^*_1 = 5 - 1 = 4$ млн. руб.

По данным табл. 6.4 находим, что оптимальный вариант распределения денежных средств размером 4 млн. руб. между вторым и третьим предприятиями составляет: $F_2(4) = 8{,}6$ при выделении второму предприятию $x^*_2 = 2$ млн. руб.

3-й шаг. Определяем величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю третьего предприятия: $C_3 = C_2 - x^*_2 = 4 - 2 = 2$ млн. руб.

По данным табл. 6.3 находим: $F_3(2) = 5{,}4$ и $x^*_3 = 2$ млн. руб.

Таким образом, оптимальный план инвестирования предприятий: $X^* = (1,2,2)$, который обеспечит максимальный доход, равный

$$F(5) = g_1(1) + g_2(2) + g_3(2) = 2{,}2 + 3{,}2 + 5{,}4 = 10{,}8 \text{ млн. руб.}$$

6.5. Выбор оптимальной стратегии обновления оборудования

Важной экономической проблемой является своевременное обновление оборудования: автомобилей, станков, телевизоров, магнитол и т. п. Старение оборудования включает физический и моральный износ, в результате чего растут затраты на ремонт и обслуживание, снижается производительность труда и ликвидная стоимость. Задача заключается в определении оптимальных сроков замены старого оборудования. Критерием оптимальности являются доход от эксплуатации оборудования (задача максимизации) либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение планируемого периода (задача минимизации).

Предположим, что планируется эксплуатация оборудования в течение некоторого периода времени продолжительностью n лет. Оборудование имеет тенденцию с течением времени стареть и приносить все меньший доход $r(t)$ (t – возраст оборудования). При этом есть возможность в начале любого года продать устаревшее оборудование за цену $S(t)$, которая также зависит от возраста t, и купить новое оборудование за цену P. Под возрастом оборудования понимается период эксплуатации оборудования после последней замены, определенный в годах. Требуется найти оптимальный план замены оборудования с тем, чтобы суммарный доход за все n лет был бы максимальным, учитывая, что к началу эксплуатации возраст оборудования составлял t_0 лет.

Исходными данными в задаче являются доход $r(t)$ от эксплуатации в течение одного года оборудования возраста t лет, остаточная стоимость $S(t)$, цена нового оборудования P и начальный возраст оборудования t_0.

t	0	1	…	n
r	r(0)	r(1)	…	r(n)
S	S(0)	S(1)	…	S(n)

При составлении динамической модели выбора оптимальной стратегии обновления оборудования процесс замены рассматривается как n-шаговый, т. е. период эксплуатации разбивается на n шагов.

Выберем в качестве шага оптимизацию плана замены оборудования с k-го по n-ый годы. Очевидно, что доход от эксплуатации оборудования за эти годы будет зависеть от возраста оборудования к началу рассматриваемого шага, т. е. k-го года.

Поскольку процесс оптимизации ведется с последнего шага (k = n), то на k-ом шаге неизвестно, в какие годы с первого по (k-1)-й должна осуществляться замена и, соответственно, неизвестен возраст оборудования к началу k-го года. Возраст оборудования, который определяет состояние системы, обозначим t. На величину t накладывается следующее ограничение:

$$1 \le t \le t_0 + k - 1 \tag{6.5}$$

Выражение 6.5 свидетельствует о том, что t не может превышать возраст оборудования за (k–1)-й год его эксплуатации с учетом возраста к началу первого года, который составляет t_0 лет; и не может быть меньше единицы (этот возраст оборудование будет иметь к началу k-го года, если замена его произошла в начале предыдущего (k–1)-го года).

Таким образом, переменная t в данной задаче является переменной состояния системы на k-ом шаге. Переменной управления на k-ом шаге является логическая переменная, которая может принимать одно из двух значений: сохранить (С) или заменить (З) оборудование в начале k-го года:

$$x_k(t) = \begin{cases} \text{С, если оборудование сохраняется} \\ \text{З, если оборудование заменяется} \end{cases}$$

Функцию Беллмана $F_k(t)$ определяют как максимально возможный доход от эксплуатации оборудования за годы с k-го по n-ый, если к началу k-го возраст оборудования составлял t лет. Применяя то или иное управление, система переходит в новое состояние. Так, например, если в начале k-го года оборудование сохраняется, то к началу (k + 1)-го года его возраст увеличится на единицу (состояние системы станет t + 1), в случае замены старого оборудования новое достигнет к началу (k + 1)-го года возраста t = 1 год.

На этой основе можно записать уравнение, которое позволяет рекуррентно вычислить функции Беллмана, опираясь на результаты предыдущего шага. Для каждого варианта управления доход определяется как сумма двух слагаемых: непосредственного результата управления и его последствий.

Если в начале каждого года сохраняется оборудование, возраст которого t лет, то доход за этот год составит r(t). К началу (k + 1)-го года возраст оборудования достигнет (t + 1) и максимально возможный доход за оставшиеся годы (с (k + 1)-го по n-й) составит $F_{k+1}(t + 1)$. Если в начале k-го года принято решение о замене оборудования, то продается старое оборудование возраста t лет по цене S(t), приобретается новое за P единиц, а эксплуатация его в течение k-го года нового оборудования принесет прибыль r(0). К началу следующего года возраст оборудования составит 1 год и за все оставшиеся годы с (k + 1)-го по n-й максимально возможный доход будет $F_{k+1}(1)$. Из двух возможных вариантов управления выбирается тот, который приносит максимальный доход. Таким образом, уравнение Беллмана на каждом шаге управления имеет вид:

$$F_k(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1) & (С) \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1) & (З) \end{cases} \tag{6.6}$$

Функция $F_k(t)$ вычисляется на каждом шаге управления для всех $1 \le t \le t_0 + k - 1$. Управление при котором достигается максимум дохода, является оптимальным.

Для первого шага условной оптимизации при k = n функция представляет собой доход за последний n-ый год:

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t) & (С) \\ S(t) - P + r(0) & (З) \end{cases} \tag{6.7}$$

Значения функции $F_n(t)$, определяемые $F_{n-1}(t)$, $F_{n-2}(t)$ вплоть до $F_1(t)$. $F_1(t_0)$ представляют собой возможные доходы за все годы. Максимум дохода достигается при некотором управлении, применяя которое на первом году, мы определяем возраст оборудования к началу второго года. Для данного возраста оборудования выбирается управление, при котором достигается максимум дохода за годы со второго по n-й и так далее. В результате на этапе безусловной оптимизации определяются годы, в начале которых следует произвести замену оборудования.

Пример 2. Найти оптимальную стратегию эксплуатации оборудования на период продолжительностью 6 лет, если годовой доход r(t) и остаточная стоимость S(t) в зависимости от возраста заданы в табл. 6.6, стоимость нового оборудования равна P = 13, а возраст оборудования к началу эксплуатационного периода составляет 1 год.

Таблица 6.6

t	0	1	2	3	4	5	6
r(t)	8	7	7	6	6	5	5
S(t)	12	10	8	8	7	6	4

Решение.

I этап. Условная оптимизация.

1-й шаг: k = 6. Для него возможные состояния системы t = 1,2, …, 6. Функциональное уравнение имеет вид (6.7):

$$F_6(t) = \max\begin{cases} r(t), & (С) \\ S(t) - P + r(0), & (З) \end{cases}$$

$$F_6(1) = \max\begin{cases} 7 \\ 10-13+8 \end{cases} = 7 \qquad (C);$$

$$F_6(2) = \max\begin{cases} 7 \\ 8-13+8 \end{cases} = 7 \qquad (C);$$

$$F_6(3) = \max\begin{cases} 6 \\ 8-13+8 \end{cases} = 6 \qquad (C);$$

$$F_6(4) = \max\begin{cases} 6 \\ 7-13+8 \end{cases} = 6 \qquad (C);$$

$$F_6(5) = \max\begin{cases} 5 \\ 6-13+8 \end{cases} = 5 \qquad (C);$$

$$F_6(6) = \max\begin{cases} 5 \\ 4-13+8 \end{cases} = 5 \qquad (C).$$

2-й шаг: $k = 5$. Для него шага возможные состояния системы $t = 1,2, \ldots, 5$. Функциональное уравнение имеет вид:

$$F_5(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_6(t+1), & (C) \\ S(t) - P + r(0) + F_6(1), & (З) \end{cases} \quad 1 \le t \le 5.$$

$$F_5(1) = \max\begin{cases} 7+7 \\ 10-13+8+7 \end{cases} = 14 \qquad (C);$$

$$F_5(2) = \max\begin{cases} 7+6 \\ 8-13+8+7 \end{cases} = 13 \qquad (C);$$

$$F_5(3) = \max\begin{cases} 6+6 \\ 8-13+8+7 \end{cases} = 12 \qquad (C);$$

$$F_5(4) = \max\begin{cases} 6+5 \\ 7-13+8+7 \end{cases} = 11 \qquad (C);$$

$$F_5(5) = \max\begin{cases} 5+5 \\ 6-13+8+7 \end{cases} = 11 \qquad (C).$$

3-й шаг: $k = 4$.

$$F_4(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_5(t+1), & (C) \\ S(t) - P + r(0) + F_5(1), & (З) \end{cases} \quad 1 \le t \le 4.$$

$$F_4(1) = \max\begin{cases} 7+13 \\ 10-13+8+14 \end{cases} = 20 \qquad (C);$$

$$F_4(2) = \max\begin{cases} 7+12 \\ 8-13+8+14 \end{cases} = 19 \qquad (C);$$

$$F_4(3) = \max\begin{cases} 6+11 \\ 8-13+8+14 \end{cases} = 17 \qquad (С/З);$$

$$F_4(4) = \max\begin{cases} 6+10 \\ 7-13+8+14 \end{cases} = 16 \qquad (С/З).$$

4-й шаг: k = 3.

$$F_3(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_4(t+1), & (С) \\ S(t) - P + r(0) + F_4(1), & (З) \end{cases} \quad 1 \le t \le 3.$$

$$F_3(1) = \max\begin{cases} 7+19 \\ 10-13+8+20 \end{cases} = 26 \qquad (С);$$

$$F_3(2) = \max\begin{cases} 7+17 \\ 8-13+8+20 \end{cases} = 24 \qquad (С);$$

$$F_3(3) = \max\begin{cases} 6+16 \\ 8-13+8+20 \end{cases} = 23 \qquad (З).$$

5-й шаг: k = 2.

$$F_2(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_3(t+1), & (С) \\ S(t) - P + r(0) + F_3(1), & (З) \end{cases} \quad 1 \le t \le 2.$$

$$F_2(1) = \max\begin{cases} 7+24 \\ 10-13+8+26 \end{cases} = 31 \qquad (С/З);$$

$$F_2(2) = \max\begin{cases} 7+23 \\ 8-13+8+26 \end{cases} = 30 \qquad (С).$$

6-й шаг: k = 1.

$$F_1(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_2(t+1), & (С) \\ S(t) - P + r(0) + F_2(1), & (З) \end{cases} \quad 1 \le t.$$

$$F_1(1) = \max\begin{cases} 7+30 \\ 10-13+8+31 \end{cases} = 37 \qquad (С).$$

Результаты вычислений Беллмана $F_k(t)$ приведены в табл. 6.7, в которой k – год эксплуатации, t – возраст оборудования.

Таблица 6.7

k \ t	1	2	3	4	5	6
1	37					
2	31	30				
3	26	24	$\boxed{23}$			
4	20	19	17	16		
5	14	13	12	11	10	
6	7	7	6	6	5	5

В табл. 6.7 выделено значение функции, соответствующее состоянию «З» – замена оборудования.

II этап. Безусловная оптимизация.

Безусловная оптимизация начинается с шага при $k = 1$. Максимально возможный доход от эксплуатации оборудования за годы с 1-го по 6-й составляет $F_1(1) = 37$. Этот оптимальный выигрыш достигается, если на первом году не производить замены оборудования. Тогда к началу второго года возраст оборудования увеличится на единицу и составит: $t_2 = t_1 + 1 = 2$. Безусловное оптимальное управление при $k = 2$, $x_2(2) = C$, т.е. максимум дохода за годы со 2-го по 6-й достигается, если оборудование не заменяется. К началу третьего года возраст оборудования увеличится на единицу и составит: $t_3 = t_2 + 1 = 2$. Безусловное оптимальное управление $x_3(3) = З$, т. е. для получения максимума прибыли за оставшиеся годы необходимо произвести замену оборудования. К началу четвертого года при $k = 4$ возраст оборудования станет равен $t_4 = 1$. Безусловное оптимальное управление $x_4(1) = C$. Далее соответственно:

$$k = 5, \quad t_5 = t_4 + 1 = 2, \quad x_5(2) = C.$$
$$k = 6, \quad t_6 = t_5 + 1 = 3, \quad x_6(3) = C.$$

Таким образом, за 6 лет эксплуатации оборудования замену надо произвести один раз – в начале третьего года эксплуатации.

6.6. Выбор оптимального маршрута перевозки грузов

Математический аппарат ДП, основанный на методологии пошаговой оптимизации, может быть использован при нахождении кратчайших расстояний, например, на географической карте, представленной в виде сети. Решение задачи по определению кратчайших расстояний между пунктами отправления и пунктами получения продукции по существующей транспортной сети является исходным этапом при решении таких экономических задач, как оптимальное прикрепление потребителей за поставщиками, повышение производительности транспорта за счет сокращения непроизводительного пробега и др.

Пусть транспортная сеть состоит из 10 узлов, часть из которых соединены магистралями. На рис. 6.2 показаны сеть дорог и стоимости перевозки единицы груза между отдельными пунктами сети, которые проставлены у соответствующих ребер. Необходимо определить маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10, обеспечивающий наименьшие транспортные расходы.

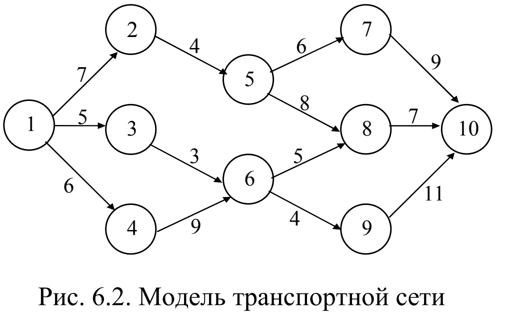


Рис. 6.2. Модель транспортной сети

В задаче имеется ограничение – двигаться по изображенным на схеме маршрутам можно только слева на право, т. е. попав, например, в пункт 8, мы имеем право переместиться только в пункт 10 и не можем возвратиться обратно в 5-й или 6-й. Эта особенность транспортной сети дает право отнести каждый из десяти пунктов к одному из поясов. Будем считать, что пункт принадлежит k-му поясу, если из него попасть в конечный пункт ровно за k шагов, т. е. с заездом ровно в (k – 1)-й промежуточный пункт. Таким образом, пункты 7, 8 и 9 принадлежат к первому поясу, 5 и 6 – ко второму, 2, 3 и 4 – к третьему и 1 – к четвертому. Тогда на k-м шаге будем находить оптимальные маршруты перевозки груза из пунктов k-го пояса до конечного пункта. Оптимизацию будем производить с конца процесса, и потому, дойдя до k-го шага, неизвестно, в каком из пунктов k-го пояса окажется груз, перевозимый из первого пункта.

Введем обозначения:

k – номер шага (k = 1, 2, 3, 4);

i – пункт, из которого осуществляются перевозки (i = 1, 2, ..., 9);

j – пункт, в который доставляется груз (j = 2, 3 , .., 10);

$c_{i,j}$ – стоимость перевозки груза из пункта i в пункт j.

$F_k(i)$ – минимальные затраты на перевозку груза на k-м шаге решения задачи из пункта i до конечного пункта.

Очевидно, что минимум затрат на перевозку груза из пунктов k-го пояса до пункта 10 будет зависеть от того, в каком пункте этого пояса мы оказались. Номер i пункта, принадлежащего k-му поясу, будет являться переменной состояния системы на k-м шаге. Поскольку оптимизация осуществляется с конца процесса, то, находясь в некотором пункте i k-го пояса, принимается решение о перемещении груза в один из пунктов (k – 1)-го пояса, а направление дальнейшего движения известно из предыдущих шагов. Номер j пункта (k – 1)-го пояса будет переменной управления на k-м шаге.

Для первого шага управления (k = 1) функция Беллмана представляет собой минимальные затраты на перевозку груза из пунктов 1-го пояса в конечный пункт, т. е. $F_1(i) = C_{i,10}$. Для последующих шагов затраты складываются из двух слагаемых – стоимости перевозки груза $C_{i,j}$ из пункта i k-го пояса в пункт y (k – 1)-го пояса и минимально возможных затрат на перевозку из пункта j до конечного пункта, т. е. $F_{k-1}(j)$. Таким образом, функциональное уравнение Беллмана будет иметь вид:

$$F_k(i) = \min_j \{C_{i,j} + F_{k-1}(j)\} \qquad (6.8)$$

Минимум затрат достигается на некотором значении j^*, которое является оптимальным направлением движения из пункта i в конечный пункт.

На четвертом шаге попадаем на 4-й пояс и состояние системы становится определенным i = 1. Функция $F_4(l)$ представляет собой минимально возможные затраты по перемещению груза из 1-го пункта в 10-й. Оптимальный маршрут определяется в результате анализа всех шагов в обратном порядке, а выбор некоторого управления y на k-м шаге приводит к тому, что состояние системы на (k – 1)-м шаге становится определенным.

Пример. Решим сформулированную выше задачу, исходные данные которой приведены на рис. 6.2.

I этап. Условная оптимизация.

1-й шаг. $k = 1$. $F_1(i) = c_{i,10}$.

На первом шаге в пункт 10 груз может быть доставлен из пунктов 7, 8 или 9.

Таблица 6.8

i \ *j*	10	$F_1(i)$	J^*
7	9	9	10
8	7	7	10
9	11	11	10

2-й шаг. $k = 2$.

Функциональное уравнение на втором шаге принимает вид:

$$F_2(i) = \min_j \{C_{i,j} + F_1(j)\}.$$

Все возможные перемещения груза на втором шаге и результаты расчета приведены в табл. 6.9.

Таблица 6.9

i \ *j*	7	8	9	$F_2(i)$	J^*
5	6 + 9	8 + 7	–	15	7; 8
6	–	5+7	4 + 11	12	8

3-й шаг. $k = 3$. $F_3(i) = \min_j \{C_{i,j} + F_2(j)\}$.

Таблица 6.10

i \ *j*	5	6	$F_3(i)$	j^*
2	4 +15	–	19	5
3	–	3 +12	15	6
4	–	9 +12	21	6

4-й шаг. $k = 4$. $F_4(i) = \min_j \{C_{i,j} + F_3(j)\}$.

Таблица 6.11

i \ *j*	2	3	4	$F_a(i)$	j^*
1	7 + 19	5 + 15	6 + 21	20	3

II этап. Безусловная оптимизация.

На этапе условной оптимизации получено, что минимальные затраты на перевозку груза из пункта 1 в пункт 10 составляют F4(l) = 20. Данный результат достигается при движении груза из 1-го пункта в 3-й. По данным табл. 6.10, из пункта 3 необходимо двигаться в пункт 6, затем – в пункт 8 (табл. 6.9) и из него – в конечный пункт (табл. 6.8). Таким образом, оптимальный маршрут доставки груза: $1 \to 3 \to 6 \to 8 \to 10$. (На рис. 6.3 он показан жирными стрелками).

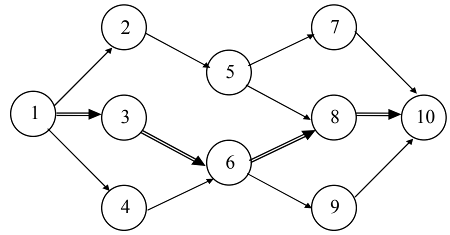


Рис. 6.3. Транспортная сеть с оптимальным маршрутом

6.7. Построение оптимальной последовательности операций в коммерческой деятельности

Пусть на оптовую базу прибыло n машин с товаром для разгрузки и m машин для загрузки товаров, направляемых в магазины. Материально ответственное лицо оптовой базы осуществляет оформление документов по операциям разгрузки или загрузки для одной машины, а затем переходит к обслуживанию другой машины. Издержки от операций обусловлены простоем транспорта, типом операции (прием или отправка товара) и не зависят от конкретной машины. Необходимо спланировать последовательность операций обоих видов таким образом, чтобы суммарные издержки по приему и отправке товаров для всех машин были минимальными.

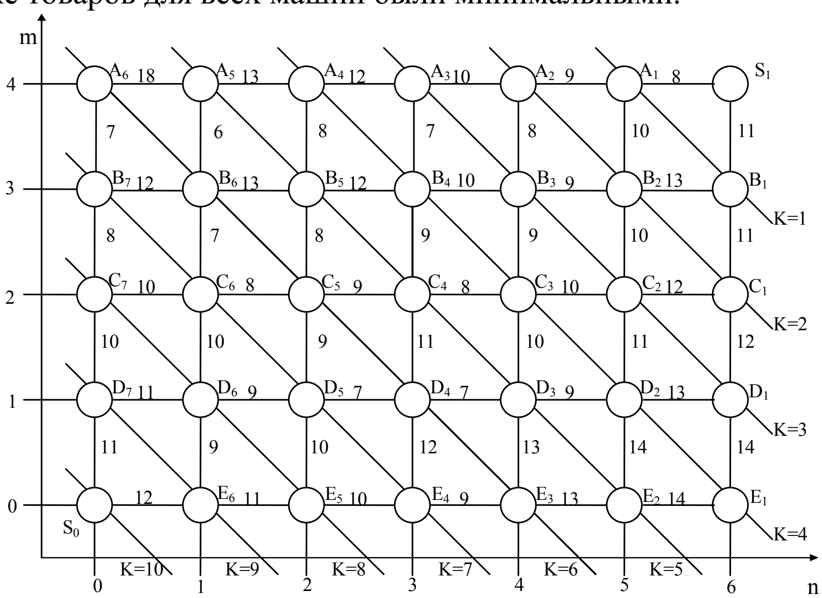


Рис. 6.4. Графическая схема связи операций

Из условия следует, что состояние экономической системы характеризуется двумя параметрами: количеством принятых и оформленных машин по разгрузке товара и количеством машин, отправленных с товаром в магазины. Поэтому решение будем искать на плоскости X0Y, на ограниченном прямыми прямоугольнике, который является областью допустимых состояний системы. Если по оси X отложить число (n) разгруженных машин, а по оси Y – число (m) загруженных товаром машин, то можно построить на плоскости граф состояний процесса, в котором каждая вершина характеризует состояние операции приема и отгрузки товара на оптовой базе. Ребра этого графа означают выполнение работы по приему или отправке товара на очередной машине. Каждому ребру можно сопоставить издержки, связанные с выполнением операции по разгрузке или загрузке машины.

Пример. Пусть n = 6, m = 4. Известны затраты по выполнению каждой операции, которые показаны на ребрах графа (рис. 6.4). Точка S_o определяет начало процесса, а S_1 – конечное состояние, соответствующее приему и отправке всех машин. Оптимизацию процесса будем производить с конечного состояния S_1. Весь процесс разобьем на шаги, их количество k = n + m = 6 + 4 = 10. Каждый шаг представляет собой сечение графа состояний, проходящее через вершины (на рис. 6.4 сечения показаны косыми линиями).

I этап. Условная оптимизация.

1-й шаг. k = 1. На первом шаге, с задаваемым сечением A_1, B_1, из состояний A_1 и B_1 возможен только один вариант перехода в конечное состояние S_1. Поэтому в вершинах A_1 и B_1 записываем соответственно издержки 8 и 11. Ребра A_1S_1 и B_1S_1 обозначаем стрелкой, направленной в вершину S_1, как показано на рис. 6.5.

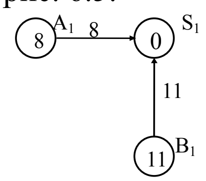


Рис. 6.5. Сетевая модель операции, шаг 1

2-й шаг. k = 2. Второй шаг оптимизации задается сечением по вершинам A_2, B_2, C_1. Из состояний A_2 и C_1 возможен единственный переход в вершины A_1 и B_1 соответственно, поэтому в вершинах A_2 и C_1 записываем суммарные издержки 17 и 22 на первых двух шагах перехода в конечное состояние S_1. Из вершины B_2 возможны два варианта перехода: в вершину A_1 или вершину B_1. При переходе $B_2 \to A_1$ сумма издержек составляет 10 + 8 = 18, на переходе $B_2 \to B_1$ сумма составляет 13 + 11 = 24. Из двух вариантов суммарных издержек выбираем наименьшую (18) и обозначаем стрелкой условно оптимальный переход $B_2 \to A_1$, как показано на рис. 6.6.

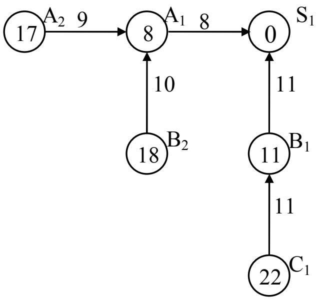


Рис. 6.6. Сетевая модель операции, шаг 2

3-й шаг. k = 3. На третьем шаге сечение проходит через вершины A_3, B_3, C_2, D_1. Из вершин A_3 и D_l возможен единственный переход в вершины A_2 и C_1 соответственно. Суммарные издержки для состояния D_1 равны 22 + 12 = 34. Из вершины B_3 возможны два варианта перехода: в вершину A_2 издержки равны 17 + 8 = 25; в вершину B_2 – 18 + 9 = 27. Для вершины C_2 возможен переход в вершину B_2 (18 + 10 = 28) и в вершину C_1 (22 + 12 = 34). Выбираем для вершин B_3 и C_2 наименьшие суммарные издержки и обозначаем стрелкой условно оптимальный переход, как показано на рис. 6.7.

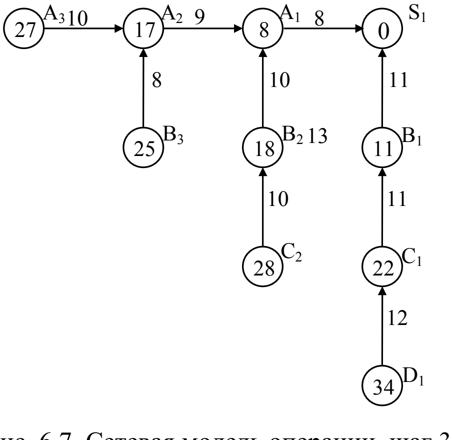


Рис. 6.7. Сетевая модель операции, шаг 3

Продолжая процесс аналогичным образом для оставшихся шагов, приходим в точку S_o. В результате получим сетевой граф условно оптимальных переходов, представленный на рис. 6.8.

Минимально возможные суммарные издержки по обслуживанию всех 10 машин на оптовой базе составляют 88 усл. ед.

II этап. Безусловная оптимизация.

Определяем оптимальную траекторию на исходном сетевом графе, просматривая результаты всех шагов в обратном порядке, учитывая, что выбор некоторого управления на k-м шаге приводит к тому, что состояние на (k-1)-м шаге становится определенным.

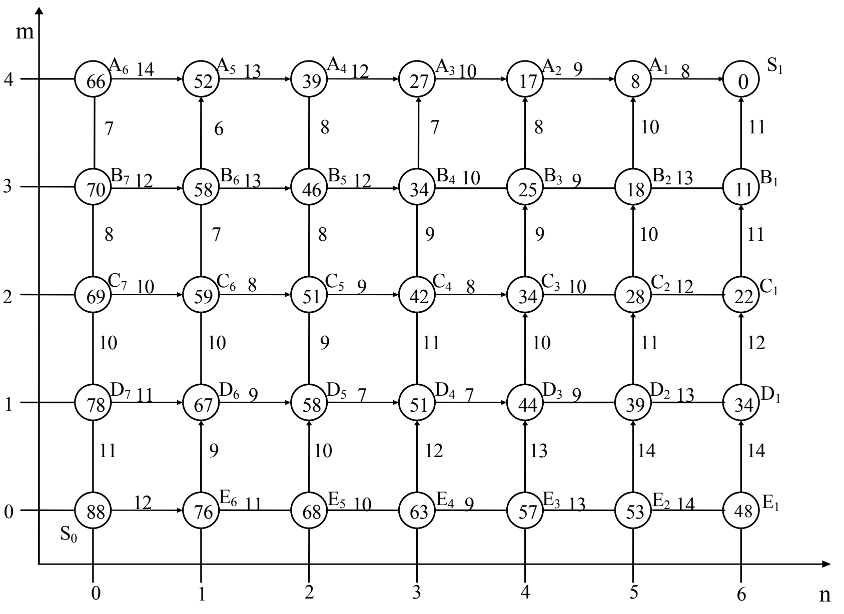


Рис 6.8. Сетевая модель связи расходов операций

В результате строим ориентированный граф от состояния S_o к состоянию S_1, представленный на рис. 6.9, на каждом шаге безусловной оптимизации переход почти всегда единствен и совпадает с построенными условно оптимальными переходами.

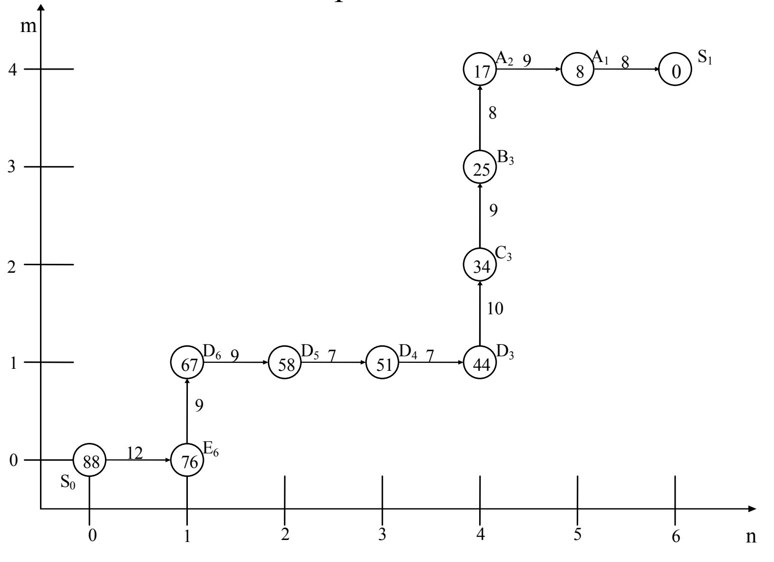


Рис 6.9. Оптимальная последовательность операций

Минимальные издержки F_{min} соответствуют следующему оптимальному пути на графе:($S_0 \rightarrow E_6 \rightarrow D_6 \rightarrow D_5 \rightarrow D_4 \rightarrow D_3 \rightarrow C_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow S_1$) и равны: $F_{min} = 12 + 9 + 9 + 7 + 7 + 10 + 9 + 8 + 9 + 8 = 88$ усл. ед.

Таким образом, в соответствии с решением оптимальное управление процессом разгрузки и загрузки машин товаром состоит в следующем: на первом шаге следует оформить документы по разгрузке одной машины, на втором – по загрузке одной машины, далее обслуживать три машины по разгрузке товара, три машины по загрузке и на последних двух шагах оформить документы по разгрузке двух машин.

6.8. Задачи

1. Распределить оптимальным образом денежные средства инвестора величиной X между четырьмя предприятиями. От выделенной суммы зависит прирост выпуска продукции на предприятиях, значения которых приведены в таблице.

Денежные средства, X	Прирост выпуска продукции на предприятиях			
	1	2	3	4
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

2. Найти оптимальный план замены оборудования на период продолжительностью 6 лет, если годовой доход r(t) и остаточная стоимость S(t) в зависимости от возраста заданы в таблице, стоимость нового оборудования равна P = 7, а возраст оборудования к началу эксплуатационного периода составляет 1 год.

t	0	1	2	3	4	5	6
r(t)	9	8	7	7	7	6	6
S(t)	7	6	5	4	4	3	2

3. Предприниматель закупил и установил за 40 млн. руб. новую деревообрабатывающую линию станков для производства стройматериалов. Динамика объемов продаж стройматериалов, затраты на эксплуатацию станков и их остаточная стоимость по годам приведены в таблице.

Показатели	Время эксплуатации				
	0	1	2	3	4
Объемы продаж, млн. руб.	100	80	70	60	55
Затраты на эксплуатацию, млн. руб.	20	25	30	35	45
Остаточная стоимость, млн. руб.	38	36	30	20	15

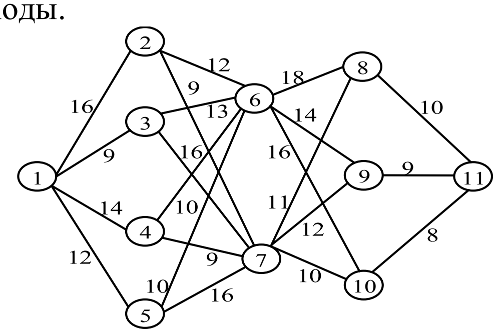
Определить оптимальный план замены станков, обеспечивающий максимальный объем продажи стройматериалов.

4. Определить оптимальный срок эксплуатации и продажи нового легкового автомобиля ВАЗ 2106 и соответственно замены его на другой. Динамика изменения ликвидационной стоимости и затрат на ремонт в

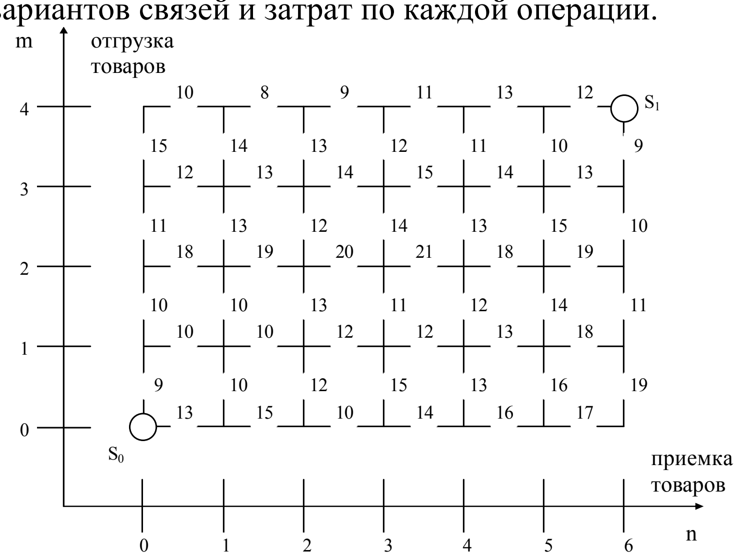
относительных единицах к цене нового автомобиля, а также величина ежегодного пробега приведены в таблице.

Показатели	Время эксплуатации автомобиля, лет						
	0	1	2	3	4	5	6
Ликвидационная стоимость, Ц(t)/Ц0	1	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
Затраты на ремонт, З(t)/Ц0	0,1	0,06	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25
Пробег, тыс. км.	1	20	20	20	20	20	20

5. На заданной сети дорог имеется несколько маршрутов по доставке груза из пункта 1 в пункт 11 (см. граф на рис. ниже). Стоимость перевозки единицы груза между отдельными пунктами сети проставлена у соответствующих ребер. Необходимо определить оптимальный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 11, который обеспечил бы минимальные транспортные расходы.



6. Определить оптимальную последовательность операций по приемке и отпуску товаров на предприятии оптовой торговли, позволяющую минимизировать суммарные издержки при условиях, приведенных в виде матрицы вариантов связей и затрат по каждой операции.



Список используемой литературы

1. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие / Холод Н. И., Кузнецов А. В., Жихар Я. Н. и др.; Под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Мн.: БГЭУ, 2000. – 412 с.

2. Шикин Е. В., Чхартищвили А. Г., Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие. – 2-е издание, испр. – М.: Дело, 2002. – 440 с.

3. Фомин Г. П., Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 554 с.

4. Малыхин В. И. Математическое моделирование экономики: Учебно-практическое пособие. – М.: Изд-во УРАО, 1998. – 160 с.

5. Абчук В. А. Экономико-математические методы и модели: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. – СПб.: – Союз, 1999. – 320 с.