Учебный центр «Резольвента»

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для студентов

Учебное пособие посвящено финансовой математике в условиях определенности и в первую очередь предназначено для студентов, изучающих курсы «Финансовая математика», «Математические методы финансового анализа», «Кредит», «Финансовый менеджмент», «Финансовые вычисления» а также другие курсы с подобными названиями. Пособие также может быть использовано специалистами банковских, финансовых и инвестиционных организаций. Изложение ведется в максимально понятной и лаконичной форме, разбирается большое количество примеров и задач с реальными данными. Предлагаются задачи и примеры для самостоятельного решения. Все они снабжены ответами или указаниями.

Оглавление

Предисловие

В последние годы в России появилось много хороших книг отечественных авторов по классической финансовой математике, т.е. финансовой математике в условиях определенности. В первую очередь здесь необходимо отметить фундаментальные труды Е.М. Четыркина, В.И. Малыхина, Я.С. Мелкумова, В.В. Ковалева, В.А. Уланова и других исследователей.

Однако изучение книг по финансовой математике не является простым занятием для неподготовленного читателя. Еще более сложным оказывается применение полученных теоретических знаний на практике. Даже такое первоначальное понятие, как процент, которое многим представляется совершенно прозрачным, на деле оказывается совсем не очевидным. Чтобы не быть голословным, предлагаю Вам, уважаемый читатель, решить следующую задачу.

Задача. В течение первого месяца с начала продаж цена товара, выпущенного на рынок, увеличилась на 25 %**,** а в течение второго месяца возвратилась до первоначального уровня**.** На сколько процентов уменьшилась цена товара за второй месяц продаж?

Если Вы, чуть-чуть подумав, дали правильный ответ, а я сознательно его здесь не привожу, то я мысленно снимаю перед Вами шляпу, поскольку большинство студентов и специалистов-практиков (в частности, профессиональных бухгалтеров) перед началом изучения курса финансовой математики в процентах ошибаются.

Если же Вы ошиблись, или вовсе не смогли решить эту задачу – не расстраивайтесь, ибо, изучив первый параграф этого пособия, Вы поймете, что подобные и гораздо более трудные задачи на проценты больше не будут представлять для Вас никакой сложности.

Проценты и являются отправной точкой, с которой начинается учебное пособие. Изложение проводится на примерах и задачах, имеющих максимально приближенный к реальности характер. Рассматриваются различные вопросы предоставления и возврата кредитов, конверсия валют, схемы покупки долгов и понятия доходностей финансовых операций.

Именно желание изложить курс финансовой математики максимально понятно и максимально кратко и явилось основной причиной, заставившей меня написать это пособие.

Выражаю искреннюю благодарность доценту Б.А. Белову, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний, которые были учтены в окончательном тексте пособия.

Доктор физико-математических наук,

профессор Самаров К.Л.

1. Схемы предоставления ссуд

1.0. Простейшие сведения о процентах

Определение 1. *Одна сотая доля* числа ***a*** называется *одним процентом* от числа ***a;*** ***k*** *сотых долей* числа ***a*** называются ***k*** *процентами* от числа ***a;*** число ***a*** называется *базой* для нахождения процентов.

По определению 1,

$$\boldsymbol{K\,\%} \text{ от числа } \boldsymbol{a} = \frac{k}{100}a. \qquad (1.0.1.)$$

Пример 1. Даны два числа ***a*** и ***b***. Сколько процентов составляет число ***b*** от числа ***a***?

Решение. Заметим, что в примере 1 *базой* для нахождения процентов является число ***a***, и предположим, что число ***b*** составляет ***x %*** от числа ***a.*** По формуле (1.0.1.)

$$b = \frac{x}{100}a,$$

откуда легко вытекает, что

$$x = \frac{100 \cdot b}{a}. \qquad (1.0.2.)$$

Ответ. Число ***b*** составляет $\frac{100 \cdot b}{a}$ ***%*** от числа ***a.***

Пример 2. Число увеличилось в 3,7 раза. На сколько процентов увеличилось это число?

Решение. Обозначим рассматриваемое число буквой ***a***. При увеличении числа в 3,7 раза (т.е. умножении на 3,7) число ***a*** увеличивается *на* число ***b***, причем

$$b = 3{,}7a - a = 2{,}7a.$$

По формуле (1.0.2.)

$$x = \frac{100 \cdot b}{a} = \frac{100 \cdot 2,7 \cdot a}{a} = 270\,.$$

Ответ. Число ***a*** увеличилось на **270 %.**

Пример 3. Число уменьшилось в 2,5 раза. На сколько процентов уменьшилось это число?

Решение. Обозначим рассматриваемое число буквой ***a***. При уменьшении числа в 2,5 раза (т.е. делении на 2,5) число ***a*** уменьшается на число ***b***, причем

$$b = a - \frac{a}{2,5} = \frac{2,5 \cdot a - a}{2,5} = \frac{1,5 \cdot a}{2,5} = \frac{15 \cdot a}{25} = \frac{3 \cdot a}{5}\,.$$

По формуле (1.0.2.)

$$x = \frac{100 \cdot b}{a} = \frac{100 \cdot 3 \cdot a}{5 \cdot a} = 60.$$

Ответ. Число ***a*** уменьшилось на **60 %.**

Пример 4. Число увеличилось на **5%**. Во сколько раз увеличилось это число?

Решение. Обозначим рассматриваемое число буквой ***c***, а буквой ***d*** –число ***c***, увеличенное на **5%.** Воспользовавшись формулой (1.0.1.), получаем

$$d = c + 0,05 \cdot c = 1,05 \cdot c\,.$$

Ответ. Число ***c*** увеличивается в **1,05** раза**.**

Пример 5. Число ***d*** на **15%** меньше числа ***c***. Какую часть составляет число ***d*** от числа ***c***?

Решение. Важно отметить, что в рассматриваемом примере *базой* для нахождения процентов является число ***c*.** В соответствии с формулой (1.0.1.)

$$d = c - 0,15 \cdot c = 0,85 \cdot c\,.$$

Ответ. Число ***d*** составляет **0,85** числа ***c***.

Пример 6. Налог на добавленную стоимость (НДС) равняется 18% цены товара. Найти цену товара, если товар с учетом НДС стоит 1652 руб.

Решение. Обозначим цену товара *без учета* НДС буквой ***a***. Стоимость товара *с учетом* НДС составляет 100% +18%=118% от ***a*.** Следовательно,

$$a \cdot 1{,}18 = 1652 ,$$

$$a = \frac{1652}{1{,}18} = 1400 (\textit{руб.})$$

Ответ. Цена товара без учета НДС равна 1400 руб.

Пример 7. В течение первого месяца цена товара увеличилась на ***30%,*** а в течение следующего месяца *новая* цена товара уменьшилась на **10%.** На сколько процентов изменилась *первоначальная* цена товара за **2** месяца?

Решение. Обозначим первоначальную цену товара буквой ***a***. Поступая по аналогии с решением примера 4, получаем, что по истечении первого месяца цена товара стала равной ***1,3·a***. По условию задачи за второй месяц новая цена товара, равная ***1,3·a*** (база), уменьшилась на 10% и стала равной

$$1{,}3 \cdot a \cdot 0{,}9 = 1{,}17 \cdot a .$$

Ответ. Первоначальная цена товара за 2 месяца увеличилась на ***17%.***

Пример 8. В течение месяца цена товара увеличилась на ***25%,*** а в течение следующего месяца цена товара возвратилась до первоначального уровня. На сколько процентов уменьшилась *новая* цена товара?

Решение. Обозначим первоначальную цену товара буквой ***c***. Поступая по аналогии с решением примера 4, получаем, что по истечении месяца новая цена товара стала равной **1,25·*c***. Следовательно, для того, чтобы вернуться к первоначальному уровню ***c*,** новая цена товара, равная **1,25·*c*** (база)**,** должна уменьшиться на число **0,25·*c*.** Для завершения решения примера остается определить, сколько процентов составляет число **0,25·*c*** от числа **1,25·*c*** . Воспользовавшись формулой (1.0.2.), получаем

$$x = \frac{100 \cdot b}{a} = \frac{100 \cdot 0,25 \cdot c}{1,25 \cdot c} = 20 .$$

Ответ. Новая цена товара уменьшилась на **20%.**

Пример 9. Банковский вклад, не тронутый в течение года, в конце этого года увеличивается на **10%.** На сколько процентов увеличится вклад, не тронутый в течение трех лет?

Решение. Обозначим первоначальную сумму вклада буквой ***a***. Действуя по аналогии с решением примера 4, получаем, что по истечении первого года вклад станет равным **1,1·*a*.** По истечении второго года вклад станет равным **1,1·*a*·1,1=1,21·*a*,** а по истечении третьего года вклад станет равным **1,21·*a*·1,1=1,331·*a*.** Таким образом, вклад, не тронутый в течение трех лет, увеличивается на число ***b*,** равное **0,331·*a*.** В соответствии с формулой (1.0.2.) первоначальная сумма вклада увеличивается на

$$x = \frac{100 \cdot b}{a} = \frac{100 \cdot 0,331 \cdot a}{a} = 33,1\,(\%) .$$

Ответ. Вклад увеличится на **33,1 %.**

Определение 2. *Месячным темпом инфляции* называется такое *количество процентов*, на которое возрастают цены товаров за месяц, по сравнению *с предыдущим месяцем*.

Пример 10. Месячный темп инфляции равен **5%.** На сколько процентов возрастают цены за год?

Решение. Обозначим цену товара в первый день года буквой ***c***. В соответствии с решением примера 4 через месяц после начала года цена товара будет равна **1,05·*c***. Через два месяца после начала года цена товара будет равна

$$1{,}05\cdot c\cdot 1{,}05=1{,}05^2\cdot c\,.$$

Еще через месяц (т.е. через три месяца после начала года) цена товара будет равна

$$1{,}05^2\cdot 1{,}05\cdot c=1{,}05^3\cdot c,$$

и т.д. Таким образом, через ***n*** месяцев после начала года цена товара станет равной

$$1{,}05^n\cdot c\,, \qquad (1.0.3)$$

где ***n* = 1,2,…,12.** Проводя для ***n* = 12** вычисления на калькуляторе, из формулы (1.0.3) получаем

$$1{,}05^{12}\cdot c=1{,}7959\cdot c\,.$$

Следовательно, с начала года цена товара ***c*** увеличилась на число $0{,}7959\cdot c$, т.е. на $79{,}59\,\%$.

Ответ. Цены вырастают за год на **79,59%.**

Замечание. Расчет по формуле (1.0.3.), а также расчет, проведенный в решении примера 10, являются простейшими примерами расчетов по схеме *сложных процентов*, с которыми мы более подробно познакомимся в дальнейшем.

1.1. Предоставление ссуд на срок в 1 год на основе годовых процентных и учетных ставок

С того момента, как на Земле появились деньги, появились и люди, которые стали давать их в долг, извлекая из этого прибыль.

Определение 1. Лицо, *дающее* деньги в долг, называется *кредитором*. Лицо, *берущее* деньги в долг, называется *заёмщиком*.

Предоставление денег в долг происходит в соответствии с кредитным соглашением и осуществляется в различных формах: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, получение векселя, приобретение облигаций и т.д.

При заключении кредитного соглашения кредитор и заемщик договариваются о размере кредита, времени и способе его погашения, а также об уровне вознаграждения кредитора (процентной или учетной ставках).

Определение 2. *Плата за предоставление денег в долг*, т.е. разница между деньгами, возвращаемыми заемщиком кредитору, и деньгами, данными кредитором заемщику в долг, называется *процентными деньгами*.

Будем использовать следующие обозначения:

$\boldsymbol{Z}$ – сумма денег, данных кредитором *заемщику* в долг,

$\boldsymbol{K}$ – сумма денег, возвращаемая заемщиком *кредитору*,

$\boldsymbol{D}$ – процентные деньги.

По определению 2,

$$K = Z + D. \qquad (1.1.1.)$$

В данной главе рассматривается случай, когда долг вместе с процентными деньгами (сумма ***K***) возвращается заемщиком кредитору *одним платежом* в конце срока, установленного кредитным соглашением.

Определение 3. *Годовой процентной ставкой* называется *отношение процентных денег* к деньгам, данным кредитором *заемщику* в долг, при предоставлении ссуды *сроком на* 1 *год*.

Будем обозначать символами ***P*** и ***p*** *процентную* ставку, выраженную в ***процентах*** и ***долях*** соответственно.

В силу определения 1 из параграфа 1.0.,

$$p = P/100,$$

причем, по определению 3,

$$p = D/Z. \qquad (1.1.2.)$$

Следствие 1. *Если известны значения* ***p*** и ***Z***, то, переписывая формулу (1.1.2.) в виде

$$D = pZ, \qquad (1.1.3.)$$

и, воспользовавшись формулой (1.1.1.), получаем соотношение для вычисления суммы ***K***

$$K = Z + D = Z + pZ,$$

из которого следует, что при предоставлении ссуды на *срок в* 1 *год*

$$K = Z(1 + p). \qquad (1.1.4.)$$

Следствие 2. *Если известны значения* ***p*** и ***K,*** то из формулы (1.1.4.) можно найти сумму ***Z***:

$$Z = \frac{K}{1+p}. \qquad (1.1.5.)$$

Определение 4. *Годовой учетной ставкой* называется *отношение процентных денег* к деньгам, возвращаемым заемщиком *кредитору* (с учетом процентных денег), при предоставлении ссуды *сроком на* 1 *год*.

Будем обозначать символами $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{u}$ *учетную* ставку, выраженную в ***процентах*** и ***долях*** соответственно.

В силу определения 1 из параграфа 1.0.,

$$u = U/100,$$

причем, по определению 4,

$$u = D/K. \qquad (1.1.6.)$$

Следствие 3. *Если известны значения* $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{K}$, то, переписывая формулу (1.1.6.) в виде

$$D = uK, \qquad (1.1.7.)$$

и, воспользовавшись формулой (1.1.1.), получаем соотношение для вычисления суммы $\boldsymbol{Z}$

$$Z = K - D = K - uK.$$

Из этого соотношения следует, что при предоставлении ссуды на *срок в* 1 *год*

$$Z = K(1-u). \qquad (1.1.8.)$$

Следствие 4. *Если известны значения* $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{Z}$**,** то из формулы (1.1.8.) можно найти сумму $\boldsymbol{K}$:

$$K = \frac{Z}{1-u}. \qquad (1.1.9.)$$

Пример 1. Предприниматель обратился в банк с просьбой о предоставлении ссуды в размере 1000000 рублей сроком на 1 год. Банк выделил ему эту ссуду с годовой *процентной* ставкой в 20% при условии погашения ссуды одним платежом в конце срока. Какую сумму должен через год возвратить предприниматель банку? Какие процентные деньги получит банк?

Решение. В данном примере известны значения $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{p}$, а найти нужно $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{D}$. Поскольку

$$\boldsymbol{Z=1000000,\ p=0,2\ ,}$$

а предприниматель возвращает банку сумму $\boldsymbol{K}$, равную

$$\boldsymbol{Z + 20\%\ \textit{от}\ Z,}$$

то есть

$$\boldsymbol{120\%\ \ \textit{от}\ \ Z,}$$

то

$$\boldsymbol{K=Z\cdot 1,2=1200000, D=200000.}$$

Ответ. Предприниматель возвращает банку 1200000 рублей, процентные деньги банка равняются 200000 рублей.

Пример 2. Предприниматель обратился в банк с просьбой о предоставлении ссуды в размере 1000000 рублей сроком на 1 год. Банк выделил ему эту ссуду с годовой *учетной* ставкой в 20% при условии погашения ссуды одним платежом в конце срока. Какую сумму должен через год возвратить предприниматель банку? Какие процентные деньги получит банк?

Решение. В данном примере известны значения $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{u}$, а найти нужно $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{D}$. Поскольку

$$\boldsymbol{Z=1000000,\ u=0,2\ ,}$$

то сумма ***Z,*** выплаченная предпринимателю, составляет

$$K - 20\% \text{ от } K,$$

то есть

$$80\% \text{ от } K.$$

Таким образом,

$$Z = 0{,}8 \cdot K,$$

следовательно,

$$K = Z:(0{,}8) = 1250000,\ D = 250000.$$

Ответ. Предприниматель возвращает банку 1250000 рублей, процентные деньги банка равняются 250000 рублей.

Замечание 1. Поскольку в примере 2 заемщик получил от кредитора 1000000 рублей, а возвратил кредитору 1250000 рублей, то

$$Z = 1000000,\ K = 1250000,\ D = 250000,$$

следовательно,

$$p = D : Z = 0{,}25,$$

т.е. это кредитное соглашение можно рассматривать, как соглашение о предоставление ссуды на основе годовой *процентной* ставки в 25%.

Замечание 2. Конечно же, пример 1 можно решить сразу, используя формулу (1.1.4.), а пример 2 – решить, используя формулу (1.1.9.).

1.2. Предоставление ссуд на срок, выражаемый в годах, по схемам простых и сложных процентов на основе процентной ставки

В данном параграфе рассматривается случай, когда срок t возврата долга *выражается в годах*, например,

$$t = \frac{2}{3}\,(\text{года}),\, t = 2\,(\text{года}),\, t = 3{,}4\,(\text{года}) \qquad \text{и т.д.}$$

Нашей целью является описание *двух способов* расчета сумм ***K***, возвращаемых заемщиком кредитору (расчеты по схемам *простых* и *сложных* процентов на основе *процентной* ставки).

Отметим особо, что *значения* ***p*** и ***Z*** *нам известны, а мы вычисляем суммы* ***K.***

Определение 1. Расчет по схеме *простых* процентов на основе годовой *процентной* ставки заключается в том, что кредитор за *каждый год* предоставленного кредита получает *одни и те же процентные деньги*, которые составляют ***P*** процентов от ***суммы долга Z***, выплаченной заемщику.

Рассмотрим сначала случай, когда кредит с расчетом по схеме *простых* процентов предоставляется на *целое число*

$$t = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (1.2.1.)$$

лет и обозначим символами $K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n$ суммы, возвращаемые заемщиком кредитору (с учетом процентных денег) за пользование кредитом в течение (1.2.1.) лет соответственно. В силу определения 1

$$K_1 = Z + p\,Z,$$

$$K_2 = Z + 2\,p\,Z = K_1 + p\,Z,$$

$$\ldots$$

$$K_n = Z + n\,p\,Z = K_{n-1} + p\,Z,$$

откуда вытекает

Следствие 1. Суммы $K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n$**,** возвращаемые заемщиком кредитору (с учетом процентных денег) за пользование кредитом по схеме простых процентов на основе годовой процентной ставки в течение $t = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ лет, определяются соотношением

$$K_m = Z(1 + p\,m), \quad m = 1, 2, \ldots, n \qquad (1.2.0.)$$

и составляют *возрастающую арифметическую прогрессию* с первым членом $Z + pZ$ и разностью pZ.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда кредит с расчетом по схеме *простых* процентов на основе годовой *процентной* ставки предоставляется на произвольное (не обязательно целое) число лет ***t*** (в годах), и, обобщая соотношение (1.2.0.), введем следующее

Определение 2. Если кредитное соглашение предусматривает расчет по схеме *простых процентов* на основе годовой *процентной* ставки, то по прошествии ***t*** лет кредитор получает от заемщика сумму $K = K(t)$, где

$$K(t) = Z\,(1 + p\,t), \tag{1.2.1.}$$

а процентные деньги $D = D(t)$ вычисляются по формуле

$$D(t) = Z(1 + pt) - Z = Zpt. \tag{1.2.2.}$$

Замечание 1. При $t = n$, т.е. в случае, когда кредит предоставляется на целое число лет, расчеты по формулам (1.2.0.) и (1.2.1.) совпадают.

Определение 3. Расчет по схеме *сложных* процентов на основе годовой *процентной* ставки заключается в том, что кредитор за *каждый год* предоставленного кредита получает *процентные деньги*, которые составляют ***P*** процентов от ***всей накопленной к началу этого года суммы долга (с учетом процентных денег)***.

Поступая по аналогии с простыми процентами, рассмотрим сначала случай, когда кредит с расчетом по схеме *сложных* процентов предоставляется на *целое число* $t = 1, 2, \ldots, n$ лет и обозначим символами $K_1, K_2, \ldots, K_n$ суммы, возвращаемые заемщиком кредитору за пользование кредитом в течение $t = 1, 2, \ldots, n$ лет соответственно. В силу определения 3

$$K_1 = Z\,(1+p)\,,$$

$$K_2 = Z\,(1+p)^2 = K_1(1+p)\,,$$

$$\ldots$$

$$K_n = Z\,(1+p)^n = K_{n-1}\,(1+p)\,,$$

откуда вытекает

Следствие 2. Суммы $K_1, K_2, \ldots, K_n$**,** возвращаемые заемщиком кредитору (с учетом процентных денег) за пользование кредитом по схеме *сложных* процентов с годовой *процентной* ставкой в течение $t = 1, 2, \ldots, n$ лет, определяются соотношением

$$K_m = Z\,(1+p)^m, \quad m = 1, 2, \ldots, n \qquad (1.2.3.)$$

и составляют *возрастающую геометрическую прогрессию* с первым членом $Z\,(1+p)$ и знаменателем $(1+p)$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда кредит с расчетом по схеме *сложных* процентов на основе годовой *процентной* ставки предоставляется на произвольное (не обязательно целое) число лет $\boldsymbol{t}$ (в годах), и, обобщая соотношение (1.2.3.), введем следующее

Определение 4. Если кредитное соглашение предусматривает расчет по схеме сложных *процентов* на основе годовой *процентной* ставки, то по прошествии $\boldsymbol{t}$ лет кредитор получает от заемщика сумму $K = K(t)$, где

$$K(t) = Z\,(1+p)^t, \qquad (1.2.4.)$$

а процентные деньги $D = D(t)$ вычисляются по формуле

$$D(t) = Z(1+p)^t - Z\,. \qquad (1.2.5.)$$

Замечание 2. При $t = n$, т.е. в случае, когда кредит предоставляется на целое число лет, расчеты по формулам (1.2.3.) и (1.2.4.) совпадают.

Сложные проценты наглядно проявляются в следующей ситуации. Предположим, что клиент банка на основании соглашения с банком поместил в начале года на депозитный счет сумму ***Z*** сроком на 1 год при условии начисления *простых* процентов с годовой *процентной* ставкой ***p***. В соответствии с формулой (1.1.4.) по истечении года на счете образуется сумма ***Z(1+p),*** которую клиент снимает со счета и снова помещает на депозит с теми же условиями (*реинвестирует* сумму вместе с процентными деньгами). Тогда по истечении второго года на счете образуется сумма $\boldsymbol{Z(1+p)^2}$, по истечении третьего года – сумма $\boldsymbol{Z(1+p)^3}$ и т.д.

Таким образом, при реинвестировании (капитализации) происходит наращение суммы депозита по схеме сложных процентов.

Схема начисления сложных процентов и была введена для того, чтобы не усложнять жизнь клиентов и работу банков процедурой регулярного снятия с депозитного счета и размещения на депозитном счете одной и той же денежной суммы.

Замечание 3. В случае, когда деньги берутся в долг на срок в 1 год ***(t = 1)***, расчеты по схемам простых и сложных процентов (формулы (1.2.1.) и (1.2.4.)) приводят к одному и тому же результату (формула (1.1.4))

$$K = Z(1 + p).$$

Если же срок возврата долга отличен от одного года, то результаты расчетов по формулам (1.2.1.) и (1.2.4.) будут разными.

Замечание 4. В случае, когда деньги берутся в долг на срок, меньший 1 года ***(t < 1)***, выполняется неравенство

$$Z\ (1\ +\ p)^t\ <\ Z\ (1\ +\ p\ t),$$

то есть *расчет по схеме сложных процентов более выгоден заемщику*.

Замечание 5. В случае, когда деньги берутся в долг на срок, больший 1 года ***(t > 1)***, выполняется неравенство

$$Z\ (1\ +\ p)^t\ >\ Z\ (1\ +\ p\ t),$$

то есть *расчет по схеме сложных процентов более выгоден кредитору*.

Пример 1. Пусть

$$Z = 1000000,\ p = 0{,}12,\ t = 0{,}5\,.$$

В каком случае плата за кредит меньше: при расчете по схеме простых процентов или при расчете по схеме сложных процентов?

Решение. Произведем расчет по схеме простых процентов:

$$K\ =\ Z\ (1\ +\ p\ t) = 1000000 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 0{,}5) = 1060000\,.$$

При расчете по схеме сложных процентов получаем

$$K\ =\ Z\ (1\ +\ p)^t = 1000000 \cdot 1{,}12^{0{,}5} = 1058300{,}52\,.$$

Ответ. При расчете по схеме сложных процентов плата за кредит меньше, чем при расчете по схеме простых процентов.

Пример 2. Пусть

$$Z = 1000000,\ p = 0{,}12,\ t = 1{,}5\,.$$

В каком случае плата за кредит больше: при расчете по схеме простых процентов или при расчете по схеме сложных процентов?

Решение. Произведем расчет по схеме простых процентов:

$$K\ =\ Z\ (1\ +\ p\ t) = 1000000 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 1{,}5) = 1180000\,.$$

При расчете по схеме сложных процентов получаем

$$K = Z\,(1+p)^t = 1000000 \cdot 1{,}12^{1{,}5} = 1185296{,}59\,.$$

Ответ. При расчете по схеме сложных процентов плата за кредит больше, чем при расчете по схеме простых процентов.

Замечание 6. При предоставлении кредитов на срок, меньший 1-го года, расчеты, как правило, проводятся по схеме простых процентов. При предоставлении кредитов на срок, больший 1-го года, возможны три случая:

1. Расчет по схеме простых процентов.
2. Расчет по схеме сложных процентов.
3. Расчет по смешанной схеме.

В случае *нецелого числа лет* расчет по *смешанной схеме* производится следующим образом. Сначала с помощью наращения *сложных процентов на сумму Z* вычисляются процентные деньги за пользование кредитом в течение *целого числа лет*, а затем при помощи наращения *простых процентов на накопленную к этому моменту сумму долга* вычисляются процентные деньги за *оставшуюся неполную часть года*.

Пример 3. Пусть

$$Z = 3000000,\ p = 0{,}16,\ t = 3{,}4\,.$$

Найти сумму, возвращаемую кредитору в случае расчета по смешанной схеме.

Решение. «Нарастим» сначала на сумму Z сложные проценты за 3 года

$$K_1 = Z\,(1+p)^t = 3000000 \cdot 1{,}16^3 = 4682688\,.$$

«Нарастим» теперь на полученную сумму K_1 простые проценты за оставшиеся 0,4 года

$$K_2 = K_1\,(1+p\,t) = 4682688 \cdot (1+0{,}16 \cdot 0{,}4) = 4982380{,}03\,.$$

Ответ. При расчете по смешанной схеме заемщик через 3,4 года возвращает кредитору 4982380,03 (денежных единиц).

В следующих двух примерах рассматривается случай *изменяющихся (плавающих)* процентных ставок.

Пример 4. Заемщик получил ссуду в 1000000 руб., которую должен погасить одним платежом через 0,75 года. Расчет производится по схеме простых процентов, причем первые 0,25 года годовая *процентная* ставка равна 12%, а в оставшееся время годовая *процентная* ставка равна 16%. Найти сумму, возвращаемую кредитору, и процентные деньги.

Решение. Поскольку при расчетах по схеме *простых* процентов на основе *процентной* ставки процентные деньги начисляются на сумму ***Z*** (определение 1), то

$$K = Z(1 + p_1 t_1 + p_2 t_2),$$

где $p_1 = 0{,}12, \quad t_1 = 0{,}25, \quad p_2 = 0{,}16, \quad t_2 = 0{,}5.$ Таким образом,

$$K = 1000000(1 + 0{,}12 \cdot 0{,}25 + 0{,}16 \cdot 0{,}5) = 1110000,$$

$$D = K - Z = 1100000 - 1000000 = 100000.$$

Ответ. Заемщик возвращает кредитору 1110000 руб., процентные деньги равны 100000 руб.

Пример 5. Заемщик получил ссуду в 1000000 руб., которую должен погасить одним платежом через 5 лет. Расчет производится по схеме *сложных* процентов, причем первые 2 года годовая *процентная* ставка равна 12%, а в оставшееся время годовая *процентная* ставка равна 16%. Найти сумму, возвращаемую кредитору, и процентные деньги.

Решение. Поскольку при расчетах по схеме *сложных* процентов на основе *процентной* ставки процентные деньги за каждый год начисляются на сумму всю накопленную к этому моменту сумму долга (определение 3), то

$$K = Z(1 + p_1)^{t_1}(1 + p_2)^{t_2},$$

где $p_1 = 0{,}12,\quad t_1 = 2,\quad p_2 = 0{,}16,\quad t_2 = 3.$ Таким образом,

$$K = 1000000(1 + 0{,}12)^2(1 + 0{,}16)^3 = 1957987{,}94,$$

$$D = K - Z = 1957987{,}94 - 1000000 = 957987{,}94.$$

Ответ. Заемщик возвращает кредитору 1957987,94 руб., процентные деньги равны 957987,94 руб.

1.3. Предоставление ссуд на срок, выражаемый в годах, по схемам простых и сложных процентов на основе учетной ставки

В данном параграфе, также как и в параграфе 1.2., рассматривается случай, когда срок ***t*** возврата долга *выражается в годах*.

Нашей целью является описание *двух способов* расчета сумм ***Z***, предоставляемых в долг заемщику (расчеты по схемам *простых* и *сложных* процентов на основе *учетной* ставки). Такие расчеты используются при банковском учете векселей, предоставлении ломбардных кредитов и т.д.

Отметим особо, что *значения* ***u*** и ***K*** *нам известны, а мы вычисляем суммы* ***Z.***

Определение 1. Расчет по схеме *простых* процентов на основе годовой *учетной* ставки заключается в том, что кредитор за *каждый год* предоставленного кредита получает *одни и те же процентные деньги*, которые составляют ***U*** процентов от ***возвращаемой кредитору суммы K***.

Рассмотрим сначала случай, когда кредит с расчетом по схеме *простых* процентов на основе *учетной* ставки предоставляется на *целое число* $t = 1, 2, \dots, n$ лет и обозначим символами $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ суммы, которые получил бы в долг заемщик, для того, чтобы пользоваться кредитом в течение $t = 1, 2, \dots, n$ лет соответственно, при условии, что за пользование кредитом он возвращает кредитору (с учетом процентных денег) сумму ***K***. В силу определения 1

$$Z_1 = K - uK,$$

$$Z_2 = K - 2uK = Z_1 - uK,$$

$$\dots$$

$$Z_n = K - nuK = Z_{n-1} - uK,$$

откуда вытекает

Следствие 1. Суммы $\boldsymbol{Z_1, Z_2, \dots, Z_n}$, предоставляемые заемщику в долг на $t = 1, 2, \dots, n$ лет соответственно, при условии, что за пользование кредитом он возвращает кредитору (с учетом процентных денег) сумму ***K***, определяются соотношением

$$Z_m = K(1 - mu), \qquad m = 1, 2, \dots, n \tag{1.3.1.}$$

и составляют *убывающую арифметическую* прогрессию с первым членом $K - uK$ и разностью $(-uK)$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда кредит с расчетом по схеме *простых* процентов на основе годовой *учетной* ставки предоставляется на произвольное (не обязательно целое) число лет ***t*** (в годах) и, обобщая соотношение (1.3.1.), введем следующее

Определение 2. Если кредитное соглашение предусматривает расчет по схеме *простых* процентов на основе годовой *учетной* ставки, то заемщик, для того, чтобы пользоваться кредитом в течение ***t*** лет, получает от кредитора сумму $Z = Z(t)$, где

$$Z(t) = K(1 - tu), \qquad (1.3.2.)$$

а процентные деньги $D = D(t)$ вычисляются по формуле

$$D = K - Z = K - K(1 - ut) = Kut\,. \qquad (1.3.3.)$$

Замечание 1. При $t = n$, т.е. в случае, когда кредит предоставляется на целое число лет, расчеты по формулам (1.3.1.) и (1.3.2.) совпадают.

Определение 3. Если кредитное соглашение предусматривает расчет по схеме *сложных* процентов на основе годовой *учетной* ставки, то заемщик за пользование кредитом возвращает кредитору (с учетом процентных денег) сумму ***K***, а процентные деньги за *текущий год* предоставленного кредита составляют ***U*** процентов от ***суммы долга за предыдущий год пользования кредитом (без учета процентных денег).***

Поступая по аналогии с простыми процентами, рассмотрим сначала случай, когда кредит по схеме сложных процентов предоставляется на *целое число* $t = 1, 2, \ldots, n$ лет и обозначим символами $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ суммы, которые получил бы в долг заемщик, для того, чтобы пользоваться кредитом в течение $t = 1, 2, \ldots, n$ лет соответственно. В силу определения 3, *долг* за текущий год составляет $(100 - U)$ процентов от долга за предыдущий год, значит

$$Z_1 = K(1 - u),$$

$$Z_2 = K(1 - u)^2 = Z_1(1 - u),$$

$$\ldots$$

$$Z_n = K\ (1 - u)^n = Z_{n-1}(1 - u),$$

откуда вытекает

Следствие 2. В случае расчетов по схеме *сложных* процентов на основе *учетной* ставки суммы $\boldsymbol{Z_1}$ **,** $\boldsymbol{Z_2}$ **, … ,** $\boldsymbol{Z_n}$ определяются соотношением

$$Z_m = K(1 - u)^m, \quad m = 1, 2, ..., n \qquad (1.3.4.)$$

и составляют *убывающую геометрическую* прогрессию с первым членом $K(1-u)$ и знаменателем $(1 - u)$.

Перейдем теперь к случаю, когда кредит с расчетом по схеме сложных процентов предоставляется на произвольное (не обязательно целое) число лет $\boldsymbol{t}$ (в годах), и, обобщая соотношение (1.3.4.), введем следующее

Определение 4. Если кредитное соглашение предусматривает расчет по схеме *сложных процентов* на основе годовой *учетной* ставки, то за пользование кредитом в течение $\boldsymbol{t}$ лет заемщик получит от кредитора сумму $Z = Z(t)$**,** где

$$Z = K\ (1 - u)^t, \qquad (1.3.5.)$$

а процентные деньги вычисляются по формуле

$$D = K - Z = K - K(1-u)^t. \qquad (1.3.6.)$$

Замечание 2. При $t = n$, т.е. в случае, когда кредит предоставляется на целое число лет, расчеты по формулам (1.3.4.) и (1.3.5.) совпадают.

Замечание 3. При $\boldsymbol{t = 1}$, то есть тогда, когда деньги берутся в долг на срок в 1 год, расчеты по формулам (1.3.2.) и (1.3.5.) приводит к одному и тому же результату (формула (1.1.8.))

$$Z = K\ (1 - u).$$

Если же срок возврата долга отличен от одного года, то результаты расчетов по формулам (1.3.2.) и (1.3.5.) будут разными.

Замечание 4. В случае, когда деньги берутся в долг на срок, меньший 1 года ***(t* < 1*)***, выполняется неравенство

$$K(1-u)^t < K\ (1-ut)\,,$$

то есть *расчет по схеме сложных процентов более выгоден кредитору*.

Замечание 5. В случае, когда деньги берутся в долг на срок, больший 1 года ***(t* > 1*)***, выполняется неравенство

$$K(1-u)^t > K\ (1-ut)\,,$$

то есть *расчет по схеме сложных процентов более выгоден заемщику*.

Пример 1. Пусть

$$K = 1000000,\, u = 0{,}12,\ t = 0{,}5\,.$$

В каком случае плата за кредит больше: при расчете по схеме простых процентов или при расчете по схеме сложных процентов?

Решение. Произведем расчет по схеме простых процентов:

$$Z\ =\ K\ (1\ -\ u\ t) = 1000000 \cdot (1 - 0{,}12 \cdot 0{,}5) = 940000\,.$$

При расчете по схеме сложных процентов получаем

$$Z\ =\ K\ (1\ -\ u)^t = 1000000 \cdot 0{,}88^{0{,}5} = 938083{,}15\,.$$

Ответ. При расчете по схеме сложных процентов плата за кредит (процентные деньги) больше и заемщик получает «на руки» меньше, чем при расчете по схеме простых процентов.

Пример 2. Пусть

$$K = 1000000,\, u = 0{,}12,\ t = 1{,}5\,,$$

В каком случае плата за кредит меньше: при расчете по схеме простых процентов или при расчете по схеме сложных процентов?

Решение. Произведем расчет по схеме простых процентов:

$$Z = K(1 - u\,t) = 1000000 \cdot (1 - 0{,}12 \cdot 1{,}5) = 820000.$$

При расчете по схеме сложных процентов получаем

$$Z = K\,(1-u)^t = 1000000 \cdot 0{,}88^{1,5} = 825513{,}17\ .$$

Ответ. При расчете по схеме сложных процентов плата за кредит меньше и заемщик получает «на руки» больше, чем при расчете по схеме простых процентов.

1.4. Способы определения срока возврата ссуд в годах для ссуд, выданных на срок, исчисляемый в днях

В мировой практике существует несколько способов определения срока возврата ссуд ***t*** (в годах) для ссуд, выданных на срок, который исчисляется в днях. В каждом из этих способов срок возврата ссуды ***t*** (в годах) вычисляется по формуле

$$t = \frac{s}{g}, \tag{1.4.1.}$$

где числа s и g определяются следующим образом:

a. Число s равно точному числу дней ссуды минус один день (день выдачи и день погашения ссуды считаются одним днем), число g равно точному числу дней в году (365 или 366). Этот способ называется английским и часто упоминается, как способ 365/365 или ACT/ACT.

b. Число s равно точному числу дней ссуды минус один день (день выдачи и день погашения ссуды считаются одним днем), число g равно 360 (в году 12 месяцев по 30 дней). Этот способ называется французским и часто упоминается, как способ 365/360 или ACT/360.

c. Число g равно 360 (в году 12 месяцев по 30 дней), число s состоит из полного числа месяцев (по 30 дней) плюс точное число дней в оставшемся неполном месяце минус один день (день выдачи и день погашения ссуды считаются одним днем). Этот способ называется немецким и часто упоминается, как способ 360/360.

Пример. Заемщик получил 01.02.2004 ссуду в 500000 долларов, возвратить которую необходимо 16.10.2004, а расчет производится по схеме простых процентов с 10% -ой годовой процентной ставкой. Какую сумму должен возвратить заемщик кредитору в каждом из описанных выше способов a, b, c?

Решение. Поскольку в 2004-ом году 366 дней, то, воспользовавшись калькулятором и формулами (1.4.1.) и (1.2.1.), получаем:

a. $$t = \frac{s}{g} = \frac{257}{366} = 0,70218579,$$

$$K = 500000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 0,70218579) = 535109,29;$$

b. $$t = \frac{s}{g} = \frac{257}{360} = 0,71388889,$$

$$K = 500000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 0,71388889) = 535694,44;$$

c. $$t = \frac{s}{g} = \frac{255}{360} = 0,70833333,$$

$$K = 500000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 0,70833333) = 535416,67.$$

Ответ. При расчетах по английскому, французскому и немецкому способам заемщик возвращает кредитору $535109,29, $535694,44 и $535416,67 соответственно.

1.5. Ссуды, обеспеченные залогом (ломбардные кредиты)

Для получения *ломбардного* кредита заемщик должен передать кредитору *в качестве залога* материальные ценности или ценные бумаги. Получив залог, кредитор производит оценку его текущей рыночной стоимости и предоставляет заемщику ссуду по схеме *простых* процентов на основе *учетной* ставки, причем кредитное соглашение заключается таким образом, чтобы возвращаемая заемщиком кредитору долговая сумма (с учетом процентных денег и расходов кредитора по обслуживанию долга) *не превышала 50% – 85%* стоимости залога.

Ломбардный кредит обычно выдается на срок в *3 месяца*, а для погашения существует несколько вариантов, например:

1) заемщик может погасить весь долг вовремя;
2) заемщик может продлить срок погашения долга на следующие 3 месяца;
3) заемщик может погасить вовремя лишь часть долга, а оставшуюся часть погашать в течение следующих 3-х месяцев.

При расчетах процентных денег учитывается *точное число дней в каждом месяце*, а год принимается равным *360 дням*. *День выдачи и день погашения* ломбардного кредита считаются *одним днем*.

Если заемщик не погасит долг вовремя, то он, как правило, должен за время просрочки платежа рассчитаться с кредитором по увеличенной (штрафной) ставке.

В случае, если заемщик не может (или не хочет) полностью рассчитаться с кредитором, кредитор реализует залог в установленном законом порядке.

Задача 1. Клиент обратился в банк за получением ломбардного кредита и передал в залог 150 акций. Банк согласился предоставить кредит на срок в 3 месяца, исходя из 80% курсовой стоимости акций. Годовая учетная ставка равна 18%, а затраты банка по обслуживанию долга в течение 3-х месяцев – 200 руб. На какой размер кредита может рассчитывать клиент банка, если текущий курс его акций составляет 300 руб. за акцию, а кредит выдается с 16.03.2004 по 16.06.2004?

Решение. Совокупная стоимость ценных бумаг заемщика равна

$$300\,руб.\cdot 150 = 45000\,руб.,$$

следовательно, заемщик должен *возвратить* банку

$$K = 45000\cdot 0{,}8 = 36000\ (руб.). \qquad (1.5.1.)$$

Найдем теперь время t пользования кредитом в годах. В соответствии с формулой (1.4.1.) при пользовании кредитом с 16.03.2004 по 16.06.2004 время t можно рассчитать по формуле

$$t = \frac{s}{g} = \frac{91}{360} = 0{,}2528,$$

где s=91 – срок кредита в днях, а g=360 – длительность года в днях.

Применяя формулу (1.3.2.), получим (u – учетная ставка)

$$D = Kut = 36000\cdot 0{,}18\cdot 0{,}2528 = 1638\ (руб.).$$

Теперь найдем сумму, которую получит «на руки» заемщик. Для этого нужно из суммы K отнять процентные деньги и затраты банка по обслуживанию долга

$$Z = K - D - 200 = 36000 - 1638 - 200 = 34162.$$

Ответ. Заемщик 16.03.2004 получает 34162 руб. и должен возвратить 16.06.2004 банку 36000 руб.

Задача 2. Продолжая предыдущую задачу, предположим, что заемщик выплатил 16.06.2004 банку только часть долга – 6000 руб. и попросил продлить срок погашения долга еще на 3 месяца. Банк согласился продлить срок погашения, увеличив учетную ставку до 20%. Сколько должен будет заплатить заемщик банку 16.09.2004?

Решение. Сначала найдем остаток долга на 16.06.2004

$$Z_1 = 36000 - 6000 = 30000.$$

Воспользовавшись формулой (1.3.1.), найдем возвращаемую заемщиком сумму K_1 за 91 день пользования кредитом в 30000 руб. в период с 16.06.2004 по 16.09.2004 (u=0,2 – учетная ставка)

$$K_1 = \frac{Z_1}{1-ut} = \frac{30000}{1-0,2\cdot\dfrac{91}{360}} = 31597,43.$$

Таким образом, с учетом расходов банка по обслуживанию долга, заемщик должен 16.09.2004 заплатить банку

31597,43 + 200 = 31797,43 (руб.).

Ответ. 16.09.2004 заемщик должен заплатить банку 31797,43 руб.

1.6. Сравнение денежных сумм, выплаченных в различные моменты времени

Прежде, чем переходить к описанию способов сравнения денежных сумм, выплаченных в различные моменты времени, сформулируем основные результаты параграфов 1.2 и 1.3, в форме следующих утверждений.

Утверждение 1. Расчет по схеме *простых* процентов на основе годовой *процентной* ставки ***p.***

a. Если сейчас внести на депозитный счет в банке сумму ***Z***, то через время ***t*** (в годах) на счете образуется сумма

$$K = Z(1+pt)\,.$$

b. Для того, чтобы через время ***t*** (в годах) на депозитном счете образовалась сумма ***K,*** сейчас на счет должна быть внесена сумма

$$Z = \frac{K}{1+pt}\,.$$

Воспользовавшись утверждением 1, введем

Определение 1. Денежные суммы S_1 и S_2, выплаченные соответственно в моменты времени t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$, называются *эквивалентными по простой процентной ставке* **p,** если положенная на депозитный счет сумма S_1 через время $t = t_2 - t_1$ превращается в сумму S_2.

В силу утверждения 1 денежные суммы S_1 и S_2 *эквивалентны по простой процентной ставке* **p** тогда и только тогда, когда

$$S_2 = S_1(1+p(t_2 - t_1))\,. \tag{1.6.1.}$$

Утверждение 2. Расчет по схеме *сложных* процентов на основе годовой *процентной* ставки ***p.***

a. Если сейчас внести на депозитный счет в банке сумму ***Z***, то через время ***t*** (в годах) на счете образуется сумма

$$K = Z(1+p)^t\,.$$

b. Для того, чтобы через время ***t*** (в годах) на депозитном счете образовалась сумма ***K,*** сейчас на счет должна быть внесена сумма

$$Z = \frac{K}{(1+p)^t}.$$

Воспользовавшись утверждением 2, введем

Определение 2. Денежные суммы S_1 и S_2, выплаченные соответственно в моменты времени t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$, называются *эквивалентными по сложной процентной ставке* ***p,*** если положенная на депозитный счет сумма S_1 через время $t = t_2 - t_1$ превращается в сумму S_2.

В силу утверждения 2 денежные суммы S_1 и S_2 *эквивалентны по сложной процентной ставке* ***p*** тогда и только тогда, когда

$$S_2 = S_1 (1+p)^{t_2 - t_1}. \qquad (1.6.2.)$$

Утверждение 3. Расчет по схеме *простых* процентов на основе годовой *учетной* ставки ***u.***

a. Если сейчас внести на депозитный счет в банке сумму ***Z***, то через время ***t*** (в годах) на счете образуется сумма

$$K = \frac{Z}{1 - ut}.$$

b. Для того, чтобы через время ***t*** (в годах) на депозитном счете образовалась сумма ***K,*** сейчас на счет должна быть внесена сумма

$$Z = K(1 - ut).$$

Воспользовавшись утверждением 3, введем

Определение 3. Денежные суммы S_1 и S_2, выплаченные соответственно в моменты времени t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$, называются *эквивалентными по простой учетной ставке* ***u*,** если положенная на депозитный счет сумма S_1 через время $t = t_2 - t_1$ превращается в сумму S_2.

В силу утверждения 3 денежные суммы S_1 и S_2 *эквивалентны по простой учетной ставке* ***u*** тогда и только тогда, когда

$$S_1 = S_2(1 - u(t_2 - t_1)) . \qquad (1.6.3.)$$

Утверждение 4. Расчет по схеме *сложных* процентов на основе годовой *учетной* ставки ***u*.**

a. Если сейчас внести на депозитный счет в банке сумму ***Z***, то через время ***t*** (в годах) на счете образуется сумма

$$K = \frac{Z}{(1-u)^t}$$

b. Для того, чтобы через время ***t*** (в годах) на депозитном счете образовалась сумма ***K*,** сейчас на счет должна быть внесена сумма

$$Z = K(1-u)^t .$$

Воспользовавшись утверждением 4, введем

Определение 4. Денежные суммы S_1 и S_2, выплаченные соответственно в моменты времени t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$, называются *эквивалентными по сложной учетной ставке* ***u*,** если положенная на депозитный счет сумма S_1 через время $t = t_2 - t_1$ превращается в сумму S_2.

В силу утверждения 4 денежные суммы S_1 и S_2 *эквивалентны по сложной учетной ставке* ***u*** тогда и только тогда, когда

$$S_1 = S_2(1-u)^{t_2 - t_1} . \qquad (1.6.4.)$$

Перейдем теперь к сравнению денежных сумм, выплаченных в различные моменты времени. С этой целью сформулируем

Принцип сравнения денежных сумм. Для того, чтобы сравнить сумму ***A***, выплаченную в момент времени t_1, с суммой ***B***, выплаченной в момент времени t_2, по

- простой процентной ставке,
- сложной процентной ставке,
- простой учетной ставке,
- сложной учетной ставке

соответственно, нужно сравнить сумму ***A*** с суммой, эквивалентной сумме ***B*** в момент времени t_1, или сравнить сумму ***B*** с суммой, эквивалентной сумме ***A*** в момент времени t_2.

Пример 1. *Простая процентная* ставка равна *6%*. Какая из сумм больше: $1500 сейчас $(t_1 = 0)$ или $1550 через 0,5 года?

Решение. Будем сравнивать $1550 с суммой, эквивалентной $1500 через 0,5 года. Для этого, обозначив сумму в $1500 символом S_1, найдем с помощью формулы (1.6.1.) эквивалентную ей через 0,5 года по простой процентной ставке 0,06 сумму S_2:

$$S_2 = S_1(1 + p(t_2 - t_1)) = 1500(1 + 0,06 \cdot 0,5) = 1545 .$$

Поскольку 1550>1545, получаем

Ответ. Сумма в $1550, выплаченная через 0,5 года, больше.

Замечание. Пример можно было решить и по-другому, сравнивая $1500 с суммой, эквивалентной $ 1550 в момент времени $t_1 = 0$

Пример 2. *Сложная процентная* ставка равна 6%. Какая из сумм больше: $1500 сейчас или $1540 через 0,5 года?

Решение. Обозначим сумму в $1500 символом S_1. С помощью формулы (1.6.2.) найдем эквивалентную ей через 0,5 года сумму S_2 по сложной процентной ставке 0,06:

$$S_2 = S_1(1+p)^{t_2-t_1} = 1500(1+0,06)^{0,5} = 1544,34.$$

Поскольку 1544,34>1540, получаем

Ответ. Сумма в $1500, выплаченная сейчас, больше.

Пример 3. *Простая учетная* ставка равна 6%. Какая из сумм больше: $1500 сейчас или $1540 через 0,5 года?

Решение. Обозначим сумму в $1500 символом S_1. С помощью формулы (1.6.3.) найдем эквивалентную ей через 0,5 года сумму S_2 по простой учетной ставке 0,06:

$$S_2 = \frac{S_1}{1-u(t_2-t_1)} = \frac{1500}{1-0,06\cdot 0,5} = 1546,39.$$

Поскольку 1546,39>1540, получаем

Ответ. Сумма в $1500, выплаченная сейчас, больше.

Пример 4. *Сложная учетная* ставка равна 6%. Какая из сумм больше: $1500 сейчас или $1550 через 0,5 года?

Решение. Обозначим сумму в $1500 символом S_1. С помощью формулы (1.6.3.) найдем эквивалентную ей через 0,5 года сумму S_2 по сложной учетной ставке 0,06:

$$S_2 = \frac{S_1}{(1-u)^{t_2-t_1}} = \frac{1500}{(1-0,06)^{0,5}} = 1547,13.$$

Поскольку 1547,13<1550, получаем

Ответ. Сумма в $1500, выплаченная сейчас, меньше.

Сформулируем следующее определение, которое мы будем часто использовать в дальнейшем.

Определение 5. *Современной величиной* или *приведенным значением* суммы, выплаченной в будущем, называется величина суммы, эквивалентной ей в момент времени $t = 0$.

1.7. Предоставление ссуд по схеме непрерывных процентов на основе процентной ставки

Понятие непрерывных процентов возникает в следующей ситуации.

Предположим, что клиент заключил с банком договор о размещении на депозитном счете суммы ***Z*** на срок в $1/m$ – ю часть года с условием наращения *простых* процентов с годовой *процентной* ставкой ***p***. В соответствии с формулой (1.2.1.) по истечении этого срока на депозитном счете образуется сумма

$$K = Z\left(1 + \frac{p}{m}\right), \qquad (1.7.1.)$$

которую клиент снимает со счета и сразу же снова помещает на счет (реинвестирует сумму с процентами). В результате этой операции по истечении «второй» $1/m$ – й части года на счете образуется сумма

$$K = Z\left(1 + \frac{p}{m}\right)^2,$$

которую клиент так же по истечении срока снимает со счета и сразу же снова помещает на счет. Описанная процедура проводится в течение года ***m*** раз, и в конце года на счете клиента образуется сумма

$$K = Z\left(1 + \frac{p}{m}\right)^m. \qquad (1.7.2.)$$

При ***m = 12*** реинвестирование процентных денег происходит ежемесячно, при ***m = 365*** ежедневно, при ***m = 365·24=8760*** ежечасно. Теоретически можно рассматривать ежеминутное, ежесекундное, и, в предельном случае при $m \to \infty$, ***непрерывное*** реинвестирование процентов. Поэтому, если в формуле (1.7.2.) перейти к пределу при $m \to \infty$, то получается соотношение

$$K = \lim_{m\to\infty} Z\left(1+\frac{p}{m}\right)^m = Ze^p, \tag{1.7.3.}$$

которое и представляет собой формулу наращения *непрерывных* процентов на основе годовой *процентной* ставки ***p*** в случае, когда срок депозита равняется *одному* году.

В случае, когда срок депозита равняется ***t*** годам, формула наращения *непрерывных* процентов на основе годовой *процентной* ставки ***p*** имеет вид

$$K = Z\,e^{pt}\,. \tag{1.7.4.}$$

Замечание. Формулу наращения непрерывных процентов можно получить и другим способом, воспользовавшись дифференциальными уравнениями.

С этой целью рассмотрим следующий пример.

Пример. Скорость роста банковского вклада пропорциональна размеру вклада с коэффициентом пропорциональности 0,03. Найти закон изменения вклада со временем и сумму на счете через **2** года, если первоначальная сумма вклада составляет 9000 (денежных единиц).

Решение. Пусть $Z = Z(t)$ – размер вклада в момент времени t. Поскольку первоначальная сумма вклада равна 9000, а скорость роста вклада есть производная $\frac{dZ}{dt}$ от размера вклада по времени, то закон изменения вклада со временем является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dZ}{dt} = 0,03 \cdot Z \qquad (1.7.5.)$$

с начальным условием

$$Z(t = 0) = 9000. \qquad (1.7.6.)$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что решение задачи Коши (1.7.5.), (1.7.6.) имеет вид

$$Z(t) = 9000 \cdot e^{0,03 \cdot t}, \qquad (1.7.7.)$$

следовательно,

$$Z(2) = 9000 \cdot e^{0,03 \cdot 2} = 9000 \cdot e^{0,06} = 9556,38.$$

Ответ. Закон изменения вклада со временем имеет вид

$$Z(t) = 9000 \cdot e^{0,03 \cdot t},$$

через 2 сумма на счете будет равна 9556,38 (денежных единиц).

1.8. Консолидация ссуд

Задача 1. Кредитор *в одно и то же время* предоставил заемщику $\boldsymbol{n}$ ссуд величиной $\boldsymbol{Z_1, Z_2, \dots, Z_n}$ на сроки $\boldsymbol{t_1, t_2, \dots, t_n}$ (в годах) с годовыми процентными ставками *простых* процентов $\boldsymbol{p_1, p_2, \dots, p_n}$ соответственно. Заемщик захотел выплатить все долги *одним платежом* (*консолидировать ссуды*). В какой момент времени заемщик может выплатить все долги *одним платежом*, чтобы ни он, ни кредитор не потерпели убытков?

Решение. Предположим, что все ссуды можно заменить одной ссудой величины $\boldsymbol{Z}$ с годовой процентной ставкой *простых* процентов $\boldsymbol{p}$, выданной на срок $\boldsymbol{t}$ (в годах), и введем следующее

Определение. Срок ***t*** называется *сроком консолидированной ссуды*.

Для того, чтобы найти значения ***Z, p*** и ***t***, заметим, что при совершении консолидированного платежа заемщик должен:

1) погасить все долговые суммы;

2) погасить процентные деньги за пользование каждой из ссуд.

Таким образом, должно быть выполнено два соотношения:

$$Z_1 + Z_2 + ... + Z_n = Z\,, \qquad (1.8.1.)$$

$$Z_1 p_1 t_1 + Z_2 p_2 t_2 + ... + Z_n p_n t_n = Zpt\,. \qquad (1.8.2.)$$

Если теперь в формулу (1.8.2.) подставить выражение для ***Z*** из формулы (1.8.1.), то получается соотношение

$$Z_1 p_1 t_1 + Z_2 p_2 t_2 + ... + Z_n p_n t_n = (Z_1 + Z_2 + ... + Z_n)\,pt\,, \qquad (1.8.3.)$$

из которого следует

Ответ. Срок консолидированной ссуды

$$t = \frac{Z_1 \cdot p_1 \cdot t_1 + Z_2 \cdot p_2 \cdot t_2 + ... + Z_n \cdot p_n \cdot t_n}{(Z_1 + Z_2 + ... + Z_n) \cdot p}\,. \qquad (1.8.4.)$$

Рассмотрим два простейших случая применения формулы (1.8.4.).

Случай 1. *Все ссуды имеют одинаковую величину* ***Z*** *и выданы с одинаковыми процентными ставками* ***p***.

Тогда из формулы (1.8.4.) вытекает соотношение

$$t = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_n}{n}\,. \qquad (1.8.5.)$$

Случай 2. *Ссуды выданы на разные сроки, имеют различные величины, но процентные ставки одинаковы и равны* ***p***.

В этом случае из формулы (1.8.4.) получаем

$$t = \frac{Z_1 \cdot t_1 + Z_2 \cdot t_2 + \ldots + Z_n \cdot t_n}{Z_1 + Z_n + \ldots + Z_n}. \qquad (1.8.6.)$$

Задача 2. Кредитор предоставил одному заемщику 3 ссуды по схеме простых процентов с годовой *процентной* ставкой в 16%, параметры которых указаны в следующей таблице 1.

Таблица 1 – Сведения о ссудах.

Номер ссуды	1	2	3
Величина ссуды (руб.)	100000	200000	700000
День выдачи	11.06.2004	20.07.2004	07.08.2004
День погашения	10.09.2004	19.10.2004	06.12.2004

После получения третьей ссуды заемщик захотел консолидировать все ссуды. Найти *дату* консолидированного платежа и определить, какую сумму денег заемщик должен выплатить кредитору в этот день?

Решение. Поскольку ссуды выданы *в различные моменты времени*, то сразу воспользоваться для решения задачи формулой (1.8.6.) нельзя, сначала нужно привести все выплаты к одному и тому же моменту времени. В соответствии с формулами (1.6.1.) и (1.4.1.) сумма в 100000 рублей (ссуда №1), выплаченная 11.06.2004, *эквивалентна по простой процентной ставке в* 16% сумме

$$100000 \cdot (1 + 0{,}16 \cdot \frac{57}{366}) = 102491{,}8 \text{ (руб.)},$$

выплаченной 07.08.2004 (в 2004 г. 366 дней). Кроме того, в соответствии с (1.6.1.) и (1.4.1.) сумма в 200000 рублей (ссуда №2), выплаченная 20.07.2004, *эквивалентна по простой процентной ставке в* 16% сумме

$$200000 \cdot (1 + 0{,}16 \cdot \frac{19}{366}) = 201661{,}2 \text{ (руб.)},$$

выплаченной 07.08.2004. Таким образом, на 07.08.2004 ситуация с долгами заемщика выглядит так (таблица 2).

Таблица 2 – Долги на 07.08.2004.

Номер ссуды	1	2	3
Величина ссуды (руб.)	102491,8	201661,2	700000
День выдачи	**07.08.2004**	**07.08.2004**	**07.08.2004**
День погашения	10.09.2004	19.10.2004	06.12.2004

В соответствии с материалом, изложенным в параграфе 1.4., находим, что с 07.08.2004 ссуды выданы на сроки s_1= 33 дня, s_2= 41 день и s_3= 120 дней соответственно. Поэтому

$$t = \frac{s}{366}, t_1 = \frac{33}{366}, t_2 = \frac{41}{366}, t_3 = \frac{120}{366}, \qquad (1.8.7.)$$

где через s обозначен срок консолидированной ссуды *в днях*. Подставляя выражения (1.8.7.) в формулу (1.8.6.), получаем

$$t = \frac{102491{,}8 \cdot \frac{33}{366} + 201661{,}2 \cdot \frac{41}{366} + 700000 \cdot \frac{120}{366}}{102491{,}8 + 201661{,}2 + 700000} = \frac{95}{366} = \frac{s}{366} \text{ (дней)}.$$

Следовательно, s=95 (дней). Теперь можно найти *дату* консолидированного платежа: 07.08.2004 + 95(дней)=10.10.2004.

Ответ. 10.10.2004 г. заемщик должен выплатить кредитору основную сумму долга (100000+200000+700000=1000000 руб.) плюс процентные деньги, начисленные за пользование каждой из ссуд в течение *полного срока*

$$(100000 \cdot \frac{90}{366} + 200000 \cdot \frac{90}{366} + 700000 \cdot \frac{120}{366}) \cdot 0{,}16 = 48524{,}59 \text{ (руб.)}.$$

В целом это составляет 1048524, 59 рублей.

1.9. Простейшие сведения о конверсии валют

Определение 1. *Девизами* называются платежные и кредитные документы (банкноты, векселя, чеки, переводы, аккредитивы и т.д.), предназначенные для международных расчетов. *Номинал* девиз обычно выражается в иностранной валюте по отношению к стране-резиденции держателя девизы. Оплата девиз осуществляется по действующему на момент оплаты обменному курсу.

Определение 2. *Прямым обменным курсом* называется число, показывающее, сколько единиц *национальной* валюты надо заплатить за единицу *иностранной*. Например, 29,22 рубля за 1 доллар США.

Определение 3. *Косвенным обменным курсом* называется число, показывающее, сколько единиц *иностранной* валюты надо заплатить за единицу *национальной*. Например, 0,0342 доллара США за 1 рубль.

Определение 4. *Арбитражем* девиз называется *выбор наиболее выгодной девизы* или *наиболее выгодного рынка девиз* для погашения долга.

Замечание. Очевидно, что для *заемщика* наиболее выгодным является способ *погашения* долга, использующий *наименьшее* количество валюты для оплаты *одной единицы долга*. Для *кредитора* наиболее выгодным является способ *получения* долга, при котором *за одну единицу выставленных требований* он получает *наибольшее* количество валюты.

Пример 1. Заемщик в Москве договорился с кредитором в Нью-Йорке о покупке девизы в 5000000 рублей. В Москве 1 доллар стоит 29,22 руб., а в Нью-Йорке – 29,68 руб. Какой из способов *предоставления* и *возврата долга* (в Москве или Нью-Йорке) кредитору наиболее выгоден?

Решение. Найдем стоимость девизы в Нью-Йорке и в Москве, выраженную в долларах. При покупке девизы в Нью-Йорке заемщик выплачивает кредитору

$$5000000 / 29{,}68 = 168463{,}61 \text{ (долл.)}$$

Если же заемщик покупает девизу в Москве, то он выплачивает кредитору

$$5000000/29{,}22 = 171115{,}67 \text{ (долл.)}$$

Ответ. Для кредитора выгодно, чтобы заемщик купил девизу в Нью-Йорке, возврат долга кредитору выгоден в Москве.

Пример 2. Заемщик в Москве должен возвратить кредитору в Париже долг в 200000 евро. Курсы обмена валют в четырех странах приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Курсы обмена валют.

Страна	**Курсы обмена валют**	
	Рубль	**Евро**
Россия, 100 руб.	100	2,91
Франция, 100 евро	3440	100
Великобритания, 100 ф. ст.	5138	145
США, 100 дол.	2906	84

Какой девизой (*в какой валюте*) заемщику выгоднее всего оплатить долг?

Решение. Поскольку долг заемщика выражается в евро, то, составляя простейшие пропорции, выразим цену *в рублях* суммы в *200000 евро* в каждой из рассматриваемых стран, пересчитывая таблицу 3 в таблицу 4.

Таблица 4 – Цена 200000 евро в рублях.

Страна	**Курсы обмена валют**	
	Рубль	**Евро**
Россия	6872860	200000
Франция	6880000	200000
Великобритания.	7086900	200000
США	6919040	200000

Ответ. Долг выгоднее всего оплатить в России. Для этого потребуется 6872860 рублей.

2. Схемы погашения ссуд

В главе 1 рассматривался случай, когда долг вместе с процентными деньгами возвращался заемщиком кредитору *одним платежом* в конце срока, установленного кредитным соглашением.

В данной главе рассматривается случай, когда ссуда выделяется заемщику целиком, а возвращается (погашается) при помощи *нескольких платежей*, величина которых может быть постоянной или изменяющейся, например, по арифметической или геометрической прогрессии.

В некоторых случаях для заемщика выгодно погашение ссуды одинаковыми платежами, так как это позволяет равномерно распределить тяжесть задолженности на весь срок ссуды. В других случаях для заемщика может быть не выгодно погашать ссуду одинаковыми платежами, так как в первое время после начала инвестирования финансовые поступления могут быть слишком малы для возврата долга.

2.1. Погашение ссуд одинаковыми платежами (потребительские кредиты)

Определение 1. *Потребительским кредитом* называется ссуда величины $\boldsymbol{Z}$ с годовой процентной ставкой $\boldsymbol{p}$, предоставленная на срок $\boldsymbol{t}$ (в годах) и предусматривающая погашение долговой суммы (с учетом процентных денег) при помощи $\boldsymbol{n}$ одинаковых платежей, осуществляемых через *равные* периоды времени, причем в случае *простых* процентов величина каждого погашающего платежа равна

$$A = \frac{Z}{n} \cdot (1 + pt), \tag{2.1.1.}$$

а в случае *сложных* процентов величина каждого погашающего платежа равна

$$A = \frac{Z}{n} \cdot (1 + p)^t. \tag{2.1.2.}$$

Определение 2. Платежи, осуществляемые в начале периодов времени, называются платежами *пренумерандо*, в конце периодов – платежами *постнумерандо*.

Пример 1. Покупатель обратился в банк с просьбой о предоставлении кредита на покупку телевизора, стоимостью 9000 рублей. Банк предоставил покупателю *потребительский кредит* на срок в 1,5 года с расчетом по схеме *простых* процентов на основе годовой процентной ставки в 12% с *ежемесячными* погашениями *постнумерандо*. Какую сумму денег покупатель должен ежемесячно перечислять банку?

Решение. Поскольку $n = 18;\quad p = 0{,}12;\quad t = 1{,}5;\quad Z = 9000,$ то, воспользовавшись формулой (2.1.1.), получаем

$$A = \frac{1}{18} \cdot 9000 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 1{,}5) = 590.$$

Ответ. Покупатель должен ежемесячно перечислять банку 590 руб.

Пример 2. Покупатель обратился в банк с просьбой о предоставлении кредита на покупку автомобиля, стоимостью $18000. Банк предоставил покупателю *потребительский кредит* на срок в 3 года с расчетом по схеме *сложных* процентов на основе годовой процентной ставки в 9% с *ежемесячными* погашениями *постнумерандо*. Какую сумму денег покупатель должен ежемесячно перечислять банку?

Решение. Поскольку $n = 36; \quad p = 0,09; \quad t = 3; \quad Z = 18000,$ то, воспользовавшись формулой (2.1.2.), получаем

$$A = \frac{1}{36} \cdot 18000 \cdot (1 + 0,09)^3 = 647,51.$$

Ответ. Покупатель должен ежемесячно перечислять банку $647,51.

Замечание. Потребительский кредит является очень привлекательным для кредитора и крайне несправедливым по отношению к заемщику. Конечно же, в случае потребительского кредита кредитор получает от заемщика *те же самые процентные деньги*, как и в случае ссуды, возвращаемой *одним платежом* в конце срока. Но в отличие от такой ссуды, в случае потребительского кредита кредитор начинает получать от заемщика погашающие платежи *заранее* и приобретает возможность *совершенно бесплатно* пустить их в дело, предоставив, например, потребительский кредит другому клиенту. В результате кредитор получает такую плату за кредит, которая значительно превышает сумму процентных денег, выплаченных заемщиком.

Покажем это на следующих примерах.

Рассмотрим сначала случай потребительского кредита с расчетом по схеме *простых* процентов.

Пример 3. Произведем расчет платы за кредит, описанный в примере 1, с точки зрения кредитора.

Решение. До момента внесения заемщиком последнего платежа (конец 18-го месяца) кредитор пользуется в течение 17-и месяцев платежом в 590 рублей, выплаченным заемщиком в конце 1-го месяца. Сумма в 590 рублей, полученная кредитором в конце 1-го месяца, эквивалентна по простой процентной ставке в 12% сумме

$$590 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot \frac{17}{12}) = 690{,}3 \text{ (руб.)},$$

полученной в конце 18-го месяца (формула (1.6.1.)). Также до момента внесения заемщиком последнего платежа кредитор пользуется в течение 16-и месяцев платежом в размере 590 рублей, выплаченным заемщиком в конце 2-го месяца. Сумма в 590 рублей, полученная кредитором в конце 2-го месяца, эквивалентна по простой процентной ставке в 12% сумме

$$590 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot \frac{16}{12}) = 684{,}4 \text{ (руб.)},$$

полученной в конце 18-го месяца. Рассуждая совершенно аналогично, получаем, что третий платеж эквивалентен сумме

$$590 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot \frac{15}{12}) = 678{,}5 \text{ (руб.)},$$

и т.д. Возникает *убывающая арифметическая прогрессия* $\{a_n\}$, содержащая 18 членов

$$a_1 = 690{,}3;\ a_2 = 684{,}4;\ a_3 = 678{,}5; ...;\ a_{18} = 590,$$

разность $\boldsymbol{d}$ которой равна

$$d = 590 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot \frac{16}{12}) - 590 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot \frac{17}{12}) = -590 \cdot (0{,}12 \cdot \frac{1}{12}) = -5{,}9\,.$$

Найдем сумму этой арифметической прогрессии:

$$a_1 + a_2 + ... + a_{18} = \frac{a_1 + a_{18}}{2} \cdot 18 = \frac{690{,}3 + 590}{2} \cdot 18 = 11522{,}7\,.$$

Отсюда следует, что «в действительности» плата за кредит равняется 11522,7–9000=2522,7 (рублям). Для сравнения подсчитаем процентные деньги в условиях примера 1:

$$D = Zpt = 9000 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{18}{12} = 1620\,.$$

Таким образом, «в действительности» кредитор получает на 2522,7–1620=902,7 (рублей) больше, чем указано в кредитном соглашении.

Ответ. «В действительности» кредитор получает на 902,7 рублей больше, чем указано в кредитном соглашении.

Перейдем теперь к случаю потребительского кредита с расчетом по схеме *сложных* процентов.

Пример 4. Произведем расчет платы за кредит, описанный в примере 2, с точки зрения кредитора.

Решение. До момента внесения заемщиком последнего платежа (конец 36-го месяца) кредитор пользуется в течение 35-и месяцев платежом в размере $647,51, выплаченным заемщиком в конце 1-го месяца. Сумма в $647,51, полученная кредитором в конце 1-го месяца, эквивалентна по сложной процентной ставке в 9% сумме

$$647{,}51 \cdot (1 + 0{,}09)^{\frac{35}{12}} = 832{,}54\,,$$

полученной в конце 36-го месяца (формула (1.6.2.)). Также до момента внесения заемщиком последнего платежа кредитор пользуется в течение 34-х месяцев платежом в размере $647,51, выплаченным заемщиком в конце 2-го месяца. Сумма в $647,51, полученная кредитором в конце 2-го месяца, эквивалентна по сложной процентной ставке в 9% сумме

$$647,51\cdot(1+0,09)^{\frac{34}{12}}=826,55,$$

полученной в конце 36-го месяца. Рассуждая совершенно аналогично, получаем, что третий платеж эквивалентен сумме

$$647,51\cdot(1+0,09)^{\frac{33}{12}}=820,6,$$

и т.д. Возникает *убывающая геометрическая прогрессия* $\{b_n\}$, содержащая 36 членов

$$b_1=832,54;\ b_2=826,55;\ b_3=820,6;...;b_{36}=647,51,$$

знаменатель которой

$$q=1,09^{-\frac{1}{12}}=0,9928.$$

Найдем сумму этой геометрической прогрессии:

$$b_1+b_2+...+b_{36}=\frac{b_1-b_1\cdot q^{36}}{1-q}=\frac{832,54\cdot(1-0,9928^{36})}{1-0,9928}=26345,83.$$

Отсюда следует, что «в действительности» плата за кредит равняется 26345,83–18000=8345,83 (дол.). Для сравнения подсчитаем процентные деньги в условиях примера 2:

$$D=Z(1+p)^t-Z=18000\cdot((1+0,09)^3-1)=5310,36.$$

Таким образом, «в действительности» кредитор получает на 8345,83–5310,36=3035,47 (дол.) больше, чем указано в кредитном соглашении.

Ответ. «В действительности» кредитор получает на 3035,47 долларов больше, чем указано в кредитном соглашении.

Вопрос. За счет чего кредитор получает дополнительную плату за кредит, описанную в примерах 3 и 4?

Ответ. За счет того, что он *длительное время бесплатно пользуется деньгами заемщика*, поступившими к нему в качестве погашающих платежей.

2.2. Погашение ссуд одинаковыми платежами, на которые начисляются процентные деньги

Данный параграф, так же, как и § 2.1., посвящен изложению метода погашения ссуд при помощи одинаковых платежей, осуществляемых через равные периоды времени. Однако в отличие от § 2.1., в счет погашения ссуды идут не только погашающие платежи, но и *начисленные на них процентные деньги*, что является гораздо более справедливым по отношению к заемщику.

Определение. Платежи, осуществляемые ежегодно, называются *аннуитетами*.

Задача 1. Заем величиной в $150000, предоставленный на срок в 4 года с расчетом *по схеме простых процентов* с годовой *процентной* ставкой в 10%, погашается одинаковыми аннуитетами постнумерандо. Кредитор *по такой же схеме* рассчитывает процентные деньги за пользование каждым аннуитетом с момента его получения и до срока окончания займа, которые идут в счет погашения займа. Найти величину аннуитетов.

Решение. По условию задачи $\boldsymbol{Z=150000}$, $\boldsymbol{p=0{,}1}$, $\boldsymbol{t=n=4}$. Получим сначала формулу, позволяющую найти величину $\boldsymbol{A}$ аннуитетов для произвольных значений $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{n}$, а затем подставим в эту формулу числовые данные решаемой задачи. Поскольку кредитор пользуется первым аннуитетом в течение $(n-1)$ года, вторым аннуитетом – в течение $(n-2)$ лет и т.д., то, воспользовавшись для расчета процентных денег формулой *простых* процентов (1.2.1.), составим следующее уравнение

$$A\cdot(1+(n-1)\cdot p)+A\cdot(1+(n-2)\cdot p)+\ldots+A=Z\cdot(1+n\cdot p). \quad (2.2.1.)$$

Из уравнения (2.2.1.) легко находится величина аннуитетов

$$A=\frac{Z\cdot(1+n\cdot p)}{(1+(n-1)\cdot p)+(1+(n-2)\cdot p)+\ldots+1}. \quad (2.2.2.)$$

С помощью формулы для суммы арифметической прогрессии

$$(1+(n-1)\cdot p)+(1+(n-2)\cdot p)+\ldots+1=\frac{2+(n-1)\cdot p}{2}\cdot n$$

соотношение (2.2.2.) преобразуется к виду

$$A=\frac{Z\cdot(1+n\cdot p)\cdot 2}{(2+(n-1)\cdot p)\cdot n}. \quad (2.2.3.)$$

Подставляя в формулу (2.2.3.) числовые данные из условия задачи, находим величину аннуитетов:

$$A=\frac{150000\cdot(1+4\cdot 0{,}1)\cdot 2}{(2+3\cdot 0{,}1)\cdot 4}=45652{,}17. \quad (2.2.4.)$$

Для сравнения подсчитаем величину аннуитетов по формуле (2.1.1.), т.е. в том случае, когда на аннуитеты *не начисляются* процентные деньги:

$$A=\frac{Z}{n}\cdot(1+n\cdot p)=\frac{150000}{4}\cdot(1+4\cdot 0{,}1)=52500. \quad (2.2.5.)$$

Очевидно, что величина погашающего платежа в $45652,17, полученная по формуле (2.2.4.), гораздо предпочтительнее для заемщика, чем величина погашающего платежа в $52500, полученная по формуле (2.2.5.).

Ответ. Аннуитет равен $45652,17.

Перейдем к случаю *сложных* процентов.

Задача 2. Заем величиной в $200000, предоставленный на срок в 5 лет с расчетом *по схеме сложных процентов* с годовой *процентной* ставкой в 6%, погашается одинаковыми аннуитетами постнумерандо. Кредитор *по такой же схеме* рассчитывает процентные деньги за пользование каждым аннуитетом с момента его получения и до срока окончания займа, которые идут в счет погашения займа. Найти величину аннуитетов.

Решение. По условию задачи $\boldsymbol{Z}$**=200000,** $\boldsymbol{p}$**=0,06,** $\boldsymbol{t}$**=**$\boldsymbol{n}$**=5.** Получим сначала формулу, позволяющую найти величину $\boldsymbol{A}$ аннуитетов для произвольных значений $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{n}$, а затем подставим в эту формулу числовые данные решаемой задачи. Поскольку кредитор пользуется первым аннуитетом в течение *(n – 1)* года, вторым аннуитетом – в течение *(n - 2)* лет и т.д., то, воспользовавшись для расчета процентных денег формулой *сложных* процентов (1.2.4.), составим следующее уравнение:

$$A\cdot(1+p)^{n-1}+A\cdot(1+p)^{n-2}+\ldots+A=Z\cdot(1+p)^{n}. \qquad (2.2.6.)$$

Из уравнения (2.2.6.) легко находится величина аннуитетов:

$$A=\frac{Z\cdot(1+p)^{n}}{(1+p)^{n-1}+(1+p)^{n-2}+\ldots+1}. \qquad (2.2.7.)$$

С помощью формулы для суммы конечной геометрической прогрессии

$$(1+p)^{n-1}+(1+p)^{n-2}+\ldots+1=\frac{(1+p)^n-1}{1+p-1}=\frac{(1+p)^n-1}{p}$$

соотношение (2.2.7.) преобразуется к виду

$$A=\frac{Z\cdot(1+p)^n\cdot p}{(1+p)^n-1}\,. \qquad (2.2.8.)$$

Подставляя в формулу (2.2.8.) числовые данные из условия задачи, находим величину аннуитетов:

$$A=\frac{200000\cdot(1+0,06)^5\cdot 0,06}{(1+0,06)^5-1}=47479,28\,. \qquad (2.2.9.)$$

Для сравнения подсчитаем величину аннуитетов по формуле (2.1.2), т.е. в том случае, когда на аннуитеты *не начисляются* процентные деньги:

$$A=\frac{Z}{n}\cdot(1+p)^n=\frac{200000}{5}\cdot(1,06)^5=53529,02\,. \qquad (2.2.10.)$$

Очевидно, что величина погашающего платежа в \$47479,28, полученная по формуле (2.2.9.), гораздо предпочтительнее для заемщика, чем величина погашающего платежа в \$53529,02, полученная по формуле (2.2.10.).

Ответ. Аннуитет равен \$47479,28.

2.3. Погашение ссуд одинаковыми платежами в случае, когда процентные деньги погашаются в зависимости от остатка долга

Замечание. Разделение погашающих платежей на две части, отвечающие за погашение долга и погашение процентных денег, *принципиально важно*, поскольку от этого зависят *уплачиваемые налоги*.

Целью данного параграфа является изложение *метода* погашения ссуд, предоставленных по схеме *простых* или *сложных* процентов с годовой процентной ставкой в ***p*%**, при котором часть каждого погашающего платежа, идущая на погашение процентных денег, *равняется* ***p***% *от существующего в момент совершения погашающего платежа остатка долга (без учета процентных денег)*.

Рассмотрим применение этого метода на примере решения следующей задачи, которая является продолжением задачи 2 из § 2.2.

Задача. Заем величиной в $200000, предоставленный на срок в 5 лет с расчетом *по схеме сложных* процентов с годовой *процентной* ставкой в 6%, погашается аннуитетами величины $47479,28 постнумерандо. Часть каждого аннуитета, идущая на погашение процентных денег, составляет 6% от существующего в момент совершения погашающего платежа остатка долга (без учета процентных денег). Составить план погашения займа.

Решение. Введем следующие обозначения:

D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 – *процентные платежи* за 1-й, 2-й, 3-й, 4-й, 5-й годы соответственно (части аннуитетов, идущие на погашение процентных денег),

B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 – *выплаты долга* за 1-й, 2-й, 3-й, 4-й, 5-й годы соответственно (части аннуитетов, идущие на погашение долга),

Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 – *остатки долга после* внесения 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го аннуитетов соответственно,

A = 47479,28 – величина каждого аннуитета.

Таким образом,

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5,$$

$$Z = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5.$$

Найдем величину первого процентного платежа D_1:

$$D_1 = 200000 \cdot 0,06 = 12000.$$

Первая выплата по погашению долга представляет собой разность между аннуитетом и процентным платежом:

$$B_1 = A - D_1 = 47479,28 - 12000 = 35479,28.$$

Следовательно, после первого погашения долг сокращается на \$35479,28 и оказывается равным

$$Z_1 = Z - B_1 = 200000 - 35479,28 = 164520,72.$$

Вычислим теперь процентный платеж на остаток долга:

$$D_2 = 164520,72 \cdot 0,06 = 9871,24.$$

Вторая выплата долга

$$B_2 = A - D_2 = 47479,28 - 9871,24 = 37608,04.$$

Далее, по аналогии находим:

$$Z_2 = Z_1 - B_2 = 164\,520,72 - 37\,608,04 = 126\,912,68,$$

$$D_3 = 126912 \cdot 0,06 = 7614,76,$$

$$B_3 = 47479,28 - 7614,76 = 39864,51,$$

$$Z_3 = 126912,68 - 39864,51 = 87048,16,$$

$$D_4 = 87\,048,16 \cdot 0,06 = 5222,88,$$

$$B_4 = 47479,28 - 5222,88 = 42256,4,$$

$$Z_4 = 87048,16 - 42256,4 = 44791,76,$$

$$D_5 = 4479,76 \cdot 0,06 = 2687,52,$$

$$B_5 = 47479,28 - 2687,52 = 44791,76.$$

Если из остатка долга вычесть последнюю выплату, получим

$$Z_5 = Z_4 - B_5 = 44791,76 - 44791,76 = 0.$$

Ответ. Представим план погашения займа в форме таблицы 5.

Таблица 5 – План погашения займа

Год	Аннуитет	Остаток долга	Процентный платеж	Выплата долга
1	47479,28	200000	12000	35479,28
2	47479,28	164520,72	9871,24	37608,04
3	47479,28	126912,68	7614,76	39864,52
4	47479,28	87048,16	5222,88	42256,40
5	47479,28	44791,76	2687,52	44791,76
Итог	**237396,40**	**0**	**37396,40**	**200000**

2.4. Погашение ссуд платежами, содержащими одинаковые выплаты долга, в случае, когда процентные деньги погашаются в зависимости от остатка долга

Задача. Заем величиной \$150000, предоставленный на срок в 5 лет с расчетом *по схеме сложных* процентов с годовой *процентной* ставкой в 5%, погашается аннуитетами постнумерандо с одинаковыми выплатами долга. Процентные деньги на аннуитеты не начисляются. Часть каждого аннуитета, идущая на погашение процентных денег, составляет 5% от существующего в момент совершения погашающего платежа остатка долга (без учета процентных денег). Составить план погашения займа.

Решение. Обозначим символами A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – аннуитеты за 1-й, 2-й, 3-й, 4-й, 5-й годы соответственно (в рассматриваемой задаче они различны). Так как Z = 150000, p = 0,05, n = 5, то ежегодные выплаты долга

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = Z/5 = 150000/5 = 30000.$$

Первый процентный платеж

$$D_1 = Z \cdot p = 150000 \cdot 0{,}05 = 7500,$$

следовательно, аннуитет

$$A_1 = B_1 + D_1 = 30000 + 7500 = 37500.$$

Поскольку после первой выплаты долг уменьшается на сумму B_1, то и процентный платеж, а, значит, и аннуитет, уменьшаются на соответствующий процент от выплаты B_1:

$$A_2 = A_1 - B_1 \cdot p = 37500 - 30000 \cdot 0{,}05 = 37500 - 1500 = 36000.$$

Совершенно аналогично находим:

$$A_3 = A_2 - B_1 \cdot p = 36000 - 1500 = 34500,$$

$$A_4 = A_3 - B_1 \cdot p = 34500 - 1500 = 33000,$$

$$A_5 = A_4 - B_1 \cdot p = 33000 - 1500 = 31500.$$

Ответ. Представим план погашения займа в форме в таблицы 6.

Таблица 6 – План погашения займа

Год	**Остаток долга**	**Процентный платеж**	**Выплата долга**	**Аннуитет**
1	150000	7500	30000	37500
2	120000	6000	30000	36000
3	90000	4500	30000	34500
4	60000	3000	30000	33000
5	30000	1500	30000	31500
Итог	**0**	**22500**	**150000**	**172500**

2.5. Погашение ссуд при помощи выплат долга, изменяющихся по арифметической прогрессии, в случае, когда процентные деньги погашаются в зависимости от остатка долга

Задача. Заем величиной 200000 долларов погашается в течение 5 лет аннуитетами постнумерандо, причем выплаты долга от года к году:

a) увеличиваются на 5000 долларов,

b) уменьшаются на 5000 долларов.

Годовая ставка *простых* процентов равна 6%. Процентные деньги на аннуитеты не начисляются. Составить план погашения займа в каждом из этих случаев.

Решение.

а) Так как Z = 200000, p = 0,06, n = 5, d = 5000 (разность арифметической прогрессии), то первая выплата B_1 долга находится из уравнения

$$\frac{2B_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = Z,$$

левая часть которого есть сумма n первых членов арифметической прогрессии. Следовательно, первая выплата долга

$$B_1 = Z/n - d(n - 1)/2 = 200000/5 - 5000(5 - 1)/2 = 30000,$$

первый процентный платеж

$$D_1 = 200000 \cdot 0{,}06 = 12000,$$

а первый аннуитет

$$A_1 = B_1 + D_1 = 42000.$$

Поступая аналогично, составим таблицу 7.

Таблица 7. План погашения займа в случае а.

Год	**Остаток основного долга**	**Процентный платеж**	**Выплата основного долга**	**Аннуитет**
1	200000	12000	30000	42000
2	170000	10200	35000	45200
3	135000	8100	40000	48100
4	95000	5700	45000	50700
5	50000	3000	50000	53000
Сумма	0	39000	200000	239000

б) Этот случай отличается от случая а) лишь тем, что $d = -5000$, и первая выплата долга

$$B_1 = Z/n - d(n - 1)/2 = 200000/5 + 5000(5 - 1)/2 = 50000.$$

План погашения займа в случае б) задается таблицей 8.

Таблица 8. План погашения займа в случае б.

Год	**Остаток основного долга**	**Процентный платеж**	**Выплата основного долга**	**Аннуитет**
1	200000	12000	50000	62000
2	150000	9000	45000	54000
3	105000	6300	40000	46300
4	65000	3900	35000	38900
5	30000	1800	30000	31800
Сумма	0	33000	200000	233000

Ответ. В случаях а) и б) планы погашения займа представлены в таблицах 7 и 8 соответственно.

2.6. Погашение ссуд при помощи выплат долга, изменяющихся по геометрической прогрессии, в случае, когда процентные деньги погашаются в зависимости от остатка долга

Задача. Заем величиной 200000 долларов погашается в течение 5 лет аннуитетами постнумерандо, причем выплаты долга от года к году:

a) увеличиваются на 5%,

b) уменьшаются на 5%.

Процентная ставка *сложных* процентов равна 10%. Процентные деньги на аннуитеты не начисляются. Составить план погашения займа в каждом из этих случаев.

Решение.

а) По условию задачи Z = 200000, p = 0,1, n = 5, а знаменатель геометрической прогрессии q = 1,05.

Воспользуемся формулой для суммы конечной геометрической прогрессии

$$B_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = Z ,$$

с помощью которой можно найти первую выплату B_1:

$$B_1 = Z(q - 1)/(q^n - 1) = 200000(1{,}05 - 1)/(1{,}05^5 - 1) = 36195.$$

Первый процентный платеж

$$D_1 = 200000 \cdot 0{,}1 = 20000,$$

а первый аннуитет

$$A_1 = B_1 + D_1 = 56195.$$

Поступая аналогично, составим таблицу 9.

Таблица 9.– План погашения займа в случае а)

Год	Остаток основного долга	Процентный платеж	Выплата основного долга	Аннуитет
1	200000	20000	36195	56195
2	163805	16380,51	38004,75	54385,26
3	125800,25	12580,02	39904,98	52485
4	85895,27	8589,52	41900,24	50489,76
5	43995,04	4399,50	43995,04	48394,54
Сумма	0	61949,55	200000	261949,55

б) Этот случай отличается от случая а) лишь тем, что $q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$, и первая выплата

$$B_1 = Z(1 - q)/(1 - q^n) = 200000(1 – 0{,}95)/(1 - 0{,}95^5) = 44204{,}74.$$

Действуя по аналогии со случаем а), составим таблицу 10.

Таблица 10. План погашения займа в случае б).

Год	Остаток основного долга	Процентный платеж	Выплата основного долга	Аннуитет
1	200000,00	20000,00	44204,74	64204,74
2	135795,26	13579,52	41994,50	57574,02
3	113800,76	11380,07	39894,77	51274,84
4	73905,99	7390,59	37900,03	45290,62
5	36005,96	3600,59	36005,03	39605,62
Сумма	0	55950,77	199999,07	255949,84

Ответ. В случаях а) и б) планы погашения займа представлены в таблицах 9 и 10 соответственно.

2.7. Погашение ссуд при помощи аннуитетов, последний из которых может отличаться от остальных, в случае, когда процентные деньги погашаются в зависимости от остатка долга

Задача. Заём величиной $8000000 погашается аннуитетами, каждый из которых, за исключением последнего, составляет 35% от величины займа. Заем предоставляется на основе *сложных* процентов с годовой процентной ставкой в 5%. Процентные деньги на аннуитеты не начисляются. Составить план погашения займа и определить последний аннуитет.

Решение. Сначала найдем все аннуитеты, за исключением последнего:

$$A = 8000000 \cdot 0{,}35 = 2800000.$$

Первый аннуитет состоит из первой выплаты долга и процентного платежа. Первый процентный платеж

$$D_1 = 8000000 \cdot 0{,}05 = 400000.$$

Первая выплата долга

$$B_1 = A - D_1 = 2800000 - 400000 = 2400000.$$

Остаток долга после первой выплаты

$$Z_1 = Z - B_1 = 8000000 - 2400000 = 5600000.$$

Далее получаем

$$D_2 = 5600000 \cdot 0{,}05 = 280000,$$

$$B_2 = A - D_2 = 2800000 - 280000 = 2520000,$$

$$Z_2 = Z_1 - B_2 = 5600000 - 2520000 = 3080000,$$

$$D_3 = 3080000 \cdot 0{,}05 = 154000,$$

$$B_3 = A - D_3 = 2800000 - 154000 = 2646000,$$

$$Z_3 = Z_2 - B_3 = 3080000 - 2646000 = 434000.$$

Заметим, что остаток долга Z_3 оказался меньше предыдущих аннуитетов, и найдем процентный платеж

$$D_4 = 434000 \cdot 0{,}05 = 21700.$$

На этом шаге размер выплаты долга совпадает с остатком долга

$$B_4 = Z_3 = 434000,$$

а аннуитет оказывается равным

$$B_4 + D_4 = 434000 + 21700 = 455700.$$

Представим план погашения займа в форме таблицы 11.

Таблица 11 – План погашения займа

Год	**Остаток долга**	**Процентный платеж**	**Выплата долга**	**Аннуитет**
1	8000000	400000	2400000	2800000
2	5600000	280000	2520000	2800000
3	3080000	154000	2646000	2800000
4	434000	21700	434000	455700
Итог	0	855700	8000000	8855700

2.8. Выбор оптимального варианта погашения кредита

Одним из методов анализа финансовых последствий коммерческих контрактов является метод сравнения *современных величин платежей*, предусмотренных этими контрактами.

Для покупателя наиболее выгоден контракт, имеющий *наименьшую современную стоимость*.

При вычислении современных величин всех платежей используется *одна и та же процентная ставка*.

Полученные величины являются условными показателями, однако они достаточно точно отражают преимущества контрактов.

Задача. Строительная фирма готова выполнить для заказчика работы по строительству объекта, стоимостью в 100 миллионов рублей. Для строительства этого объекта строительная фирма предлагает заказчику кредит в 100 миллионов рублей, предусматривающий расчет по схеме сложных процентов с годовой процентной ставкой в 15%. Предложены два варианта погашения кредита:

1. Авансовый платеж строительной фирме составляет 20% стоимости кредита. Процентные деньги за пользование кредитом начисляются на остаток долга после внесения авансового платежа. Кредит погашается в течение 4 лет равными аннуитетами постнумерандо.

2. Авансовый платеж строительной фирме составляет 22% стоимости кредита. Процентные деньги за пользование кредитом начисляются на остаток долга после внесения авансового платежа.

Предусмотрен *льготный период* для погашения кредита, в течение которого процентные деньги *не начисляются*, – первые 6 месяцев. Кредит погашается в течение 6 лет равными аннуитетами постнумерандо.

Найти стоимость строительства объекта в каждом из этих вариантов и определить, какой из них заказчику более выгоден.

Решение. Найдем сначала величины $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_2}$ аннуитетов в 1-м и 2-м вариантах погашения кредита соответственно, воспользовавшись формулами подсчета простых процентов для льготного периода и сложных процентов в отсутствии льготного периода:

$$A_1 = 100000000 \cdot 0,8 \cdot (1+0,15)^4 / 4 = 34980125\,,$$

$$A_2 = 100000000 \cdot 0,78 \cdot (1+0,15 \cdot 0,5) \cdot (1+0,15)^5 / 6 = 28108717\,.$$

Если избран вариант 1, то *современную стоимость* строительства объекта можно, используя (1.6.2.), вычислить по формуле

$$S_1 = 100000000 \cdot 0,2 + A_1 \cdot (1,15^{-1} + 1,15^{-2} + 1,15^{-3} + 1,15^{-4}) = 179867500.$$

Таким образом, стоимость строительства объекта по варианту 1 равна 179867500 рублей.

Если же избран вариант 2, то *современную стоимость* строительства объекта можно, используя (1.6.1.) и (1.6.2.), вычислить по формуле

$$S_2 = 100000000 \cdot 0,22 + \frac{A_2}{1+0,15 \cdot 0,5} +$$

$$+ A_2 \cdot (1,15^{-2} + 1,15^{-3} + 1,15^{-4} + 1,15^{-5} + 1,15^{-6}) = 130082234.$$

Таким образом, стоимость строительства объекта по варианту 2 равна 130082234 руб.

Ответ. 2-й вариант погашения кредита для заказчика более выгоден.

2.9. Постоянные финансовые ренты

Определение 1. *Финансовой рентой* называется последовательность платежей, осуществляемых через *одинаковые* промежутки времени.

Определение 2. *Постоянной* финансовой рентой называется финансовая рента с *одинаковыми* платежами, в противном случае она называется *переменной*.

Определение 3. Финансовая рента называется *конечной*, если *количество* платежей *ограничено*, *в* противном случае она называется *бесконечной*.

Замечание 1. Финансовые ренты часто встречаются в повседневной жизни. Простейшим примером является заработная плата, конечно, при условии, что начальство не задерживает ее выплат. К рентам также относятся пенсионные платежи, погасительные платежи в потребительском кредите, арендные платежи, платежи в различные фонды и т.д. За пользование рентными суммами, как правило, начисляются процентные деньги.

Рассмотрим сначала случай начисления *простых* процентов.

Задача 1. В первый день *каждого месяца*, начиная с 1-го января 2004 года, вкладчик помещает на свой счет в банке 1000 рублей. Расчет производится по схеме *простых* процентов с годовой *процентной* ставкой в 6% и помесячным начислением процентных денег, причем год рассматривается состоящим из 12 месяцев по 30 дней. Какая сумма окажется на счете 31 декабря 2013 года?

Решение. На первую сумму, внесенную на счет, процентные деньги начисляются в течение 120 месяцев, а за каждый месяц наращивается

$$6\%/12 = 0{,}5\%,$$

поэтому к 31 декабря 2013 года первая сумма превращается в сумму

$$K_1 = 1000 \cdot (1 + 0{,}005 \cdot 120) = 1600.$$

На вторую сумму, внесенную на счет, процентные деньги начисляются в течение 119 месяцев, и к 31 декабря 2013 года она превращается в сумму

$$K_2 = 1000 \cdot (1 + 0{,}005 \cdot 119) = 1595.$$

Третья внесенная на счет сумма превращается в сумму

$$K_3 = 1000 \cdot (1 + 0{,}005 \cdot 118) = 1590,$$

и т.д. Таким образом, возникает убывающая арифметическая прогрессия

$$K_1, K_2, ..., K_{120}$$

с первым членом 1600 и разностью (– 5), последний член которой

$$K_{120} = 1000 \cdot (1 + 0{,}005) = 1005.$$

Сумма этой арифметической прогрессии

$$S = \frac{1600 + 1005}{2} \cdot 120 = 156300.$$

Ответ. 31 декабря 2013 года на счете окажется 156300 рублей.

Перейдем теперь к случаю начисления *сложных* процентов.

Задача 2. В первый день *каждого года*, начиная с 1-го января 2004 года, вкладчик помещает на свой счет в банке 100000 рублей. Расчет производится по схеме *сложных* процентов с годовой *процентной* ставкой в 6%. Какая сумма окажется на счете 31 декабря 2013 года?

Решение. На первую сумму, внесенную на счет, процентные деньги начисляются в течение 10 лет, поэтому к 31 декабря 2013 года первая сумма превращается в сумму

$$K_1 = 100000 \cdot (1 + 0{,}06)^{10} = 179084{,}77.$$

На вторую сумму, внесенную на счет, процентные деньги начисляются в течение 9 лет, и к 31 декабря 2013 года она превращается в сумму

$$K_2 = 100000 \cdot (1 + 0{,}06)^{9} = 168947{,}9.$$

Третья внесенная на счет сумма превращается в сумму

$$K_3 = 100000 \cdot (1 + 0{,}06)^{8} = 159384{,}81.$$

и т.д. Таким образом, возникает убывающая геометрическая прогрессия

$$K_1, K_2, ..., K_{10}$$

с первым членом $179084{,}77$ и знаменателем $q = \frac{1}{1{,}06} = 0{,}9434$, последний член которой

$$K_{10} = 100000 \cdot (1 + 0{,}06) = 106000.$$

Сумма этой геометрической прогрессии

$$S = \frac{K_1 \cdot q^{10} - K_1}{q - 1} = \frac{K_{10} \cdot q - K_1}{q - 1} = \frac{106000 \cdot \frac{1}{1{,}06} - 179084{,}77}{\frac{1}{1{,}06} - 1} = 1397257{,}42\,.$$

Ответ. 31 декабря 2013 года на счете окажется 1397257,42 рублей.

Замечание 2. Особо отметим, что в задачах 1 и 2 рассматривались *конечные* финансовые ренты и перейдем к случаю *бесконечной* ренты.

Задача 3. Владелец оливковой рощи сдал ее в «вечную» аренду. Арендатор, начиная с 2000 года, переводит 1 января каждого года на банковский счет владельца оливкой рощи арендный платеж в размере $40000. Банк ежегодно начисляет на вклад владельца оливкой рощи *сложные* проценты, исходя из годовой процентной ставки 5%. Какова выкупная цена оливковой рощи на 1 января 2000 года?

Решение. В соответствии с формулой (1.6.2.) второй платеж, осуществленный 1 января 2001 года, эквивалентен по сложной процентной ставке в 5% сумме

$$Z_2 = \frac{40000}{1+0,05},$$

выплаченной 1 января 2000 года. Третий платеж, осуществленный 1 января 2002 года, эквивалентен по сложной процентной ставке в 5% сумме

$$Z_3 = \frac{40000}{(1+0,05)^2},$$

и т.д. Если ввести для первого платежа, осуществленного 1 января 2000 года, обозначение Z_1, то величины

$$Z_1, Z_2, ..., Z_n, ...$$

будут составлять *бесконечно-убывающую геометрическую прогрессию* с первым членом $Z_1 = 40000$ и знаменателем $q = \frac{1}{1,05}$. Сумма этой прогрессии

$$S = \frac{Z_1}{1-q} = \frac{40000}{1-\frac{1}{1,05}} = 840000$$

и является выкупной ценой оливковой рощи на 1 января 2000 года.

Ответ. Выкупная цена оливковой рощи на 1.01.2000 г. равна $840000**.**

Воспользовавшись решением задачи 3, решим

Задачу 4. Найти выкупную цену оливковой рощи на 1 января 2009 г.

Решение. В соответствии с формулой (1.6.2.) сумма $840000, выплаченная 1 января 2000 года, эквивалентна по сложной процентной ставке в 5% сумме

$$A = 840000 \cdot (1+0{,}05)^{10} = 1181964{,}36 \text{ (долл.)}$$

Ответ. Выкупная цена оливковой рощи на 1.01.2009 г. равна $1181964,33.

3. Схемы покупки долгов

3.1. Учет и переучет векселей

Определение 1. *Векселем* называется *безусловное* письменное обязательство *векселедателя* (заемщика) выплатить *векселедержателю* (кредитору) в указанное время и в указанном месте указанную сумму (*номинальную стоимость векселя*).

Определение 2. *Учетом (дисконтированием) векселя* называется его покупка *по цене, меньшей номинальной стоимости*.

Определение 3. *Дисконтом* называется *разница* между номинальной стоимостью векселя и ценой его покупки.

Определение 4. Пусть K – номинальная стоимость векселя, t – время *до наступления срока платежа по векселю* (в годах), *u* – *учетная* ставка *простых* процентов (в долях). Тогда *дисконт* рассчитывается по формуле

$$D = Kut, \tag{3.1.1.}$$

а *дисконтированная* цена векселя (без учета комиссионных) равна

$$Z(t) = K - D = K - Kut = K(1-ut). \tag{3.1.2.}$$

Замечание 1. Формулы (3.1.1.) и (3.1.2.) полностью соответствуют формулам (1.3.2.) и (1.3.3.).

Замечание 2. Операцию *учета* векселей проводят специализированные кредитные организации. Ее цель – получение процентных денег при *перепродаже* (*переучете*) векселей или при представлении векселей к оплате (погашению).

Замечание 3. Если время до наступления срока платежа по векселю *исчисляется в днях*, то, в соответствии с формулой (1.4.1.),

$$t = \frac{s}{g},$$

где числа g и s определяются так, как описано в § 1.4.

Задача 1. Вексель на сумму 300000 рублей со сроком погашения 16.07.2004 учитывается банком 16.04.2004 по *простой учетной* ставке в 9%. Найти дисконтированную цену векселя, используя способ расчета 365/360.

Решение. По условию задачи K = 300000, u = 0,09, s = 90, g = 360. С помощью формулы (3.1.1.) найдем дисконт:

$$D = 300000 \cdot 0,09 \cdot 90/360 = 6750.$$

Далее получаем

$$Z = 300000 - 6750 = 293250.$$

Ответ. Дисконтированная цена векселя 16.04.04 равна 293250 руб.

Замечание 4. Если известна дисконтированная цена ***Z*** векселя, а номинальная стоимость ***K*** неизвестна, то можно определить номинальную стоимость векселя, воспользовавшись формулой (3.1.2):

$$K = \frac{Z}{1 - u\dfrac{s}{g}}. \qquad (3.1.3.)$$

Задача 2. По договоренности с кредитором для оплаты векселя с номинальной стоимостью *K = 1000000* руб. и сроком платежа 18.04.2003 заемщик выписывает 18.04.2003 кредитору 4 векселя на основе простой годовой учетной ставки в *6%* в соответствии со следующей таблицей 12.

Таблица 12 – Сведения о новых векселях.

№	**Номинальная стоимость векселя (руб.)**	**Срок платежа**	**Количество дней до платежа**
1	K_1= 100000	25.06.2003	68
2	K_2=200000	05.07.2003	78
3	$K_3=X$	18.05.2003	30
4	$K_4=X$	03.06.2003	46

Найти номинальную стоимость ***X***, используя способ расчета ***365/360***.

Решение. С помощью формулы (3.1.1.) найдем сумму дисконтов первых двух векселей:

$$D_1 + D_2 = \frac{u}{g}(K_1 s_1 + K_2 s_2) = \frac{0,06}{360}(100000 \cdot 68 + 200000 \cdot 78) = 3733.$$

Суммарная дисконтированная стоимость этих векселей на 18.04.2003 равняется

$$Z_1 + Z_2 = K_1 + K_2 - D_1 - D_2 = 100000 + 200000 - 3733 = 296267.$$

Найдем теперь суммарную дисконтированную стоимость 3-го и 4-го векселя:

$$Z_3 + Z_4 = K_3 + K_4 - D_3 - D_4 = 2X - \frac{0,06}{360}(30X + 46X) = 1,983X.$$

С другой стороны это выражение равно

$$K - Z_1 - Z_2 = 1000000 - 296627 = 703373.$$

Поэтому

$$X = \frac{703373}{1,983} = 353394 \quad \text{(руб.)}$$

Ответ. Номинальная стоимость 3-го и 4-го векселя равна 353394 рубля.

Задача 3. Банк ***А*** имеет обязательство оплатить 18.06.2003 банку ***Б*** векселя на сумму *K* = \$860000. В качестве частичной оплаты банк ***А*** сдает 18.06.2003 в переучет (*редисконт*) банку ***Б*** 3 векселя на основе простой годовой учетной ставки *в 9%* в соответствии со следующей таблицей 13.

Таблица 13 – Сведения о редисконтных векселях.

№	**Номинальная стоимость векселя (дол.)**	**Срок платежа**	**Количество дней до платежа**
1	250000	18.09.2003	92
2	300000	14.08.2003	57
3	230000	19.08.2003	62
Всего	**780000**		

Найти остаток долга, используя способ расчета **365/360,** если затраты банка ***Б*** на операцию переучета составляют \$100.

Решение. По формуле (3.1.1.) суммарный дисконт 3-х векселей

$$D = (250000 \cdot 92 + 300000 \cdot 57 + 230000 \cdot 62) \cdot 0,09/360 = 13590 \quad \text{(дол.).}$$

Поскольку затраты банка ***Б*** на эту операцию составляют \$100, то погашение долга банка ***А*** осуществляется на сумму:

$$S = 780000 – 13590 – 100 = 766310 \ \text{(дол.),}$$

где *S* – суммарная переучетная (редисконтированная) цена 3-х векселей.

Для погашения долга банку А остается выплатить банку Б сумму

$$Д = K – S = 860000 – 766310 = 93690 \ \text{(дол.).}$$

Ответ. Банк ***А*** должен банку ***Б*** $93690.

3.2. Форфейтинговый кредит

Рассмотрим механизм *форфейтинга* на примере экспортной сделки. В этой сделке участвуют 3 стороны: экспортер товара (кредитор), импортер товара (заемщик) и покупатель долга у кредитора (*форфейтер*).

Сначала экспортер и импортер договариваются о том, что товар будет продан экспортером импортеру с оплатой *в кредит*, а задолженность будет оформлена векселями. Затем определяется номинальная стоимость векселей, причем *процентные деньги за кредит прибавляются к цене экспортируемого товара*. После этого форфейтер *покупает* векселя у экспортера со скидкой с номинальной стоимости.

Именно векселя чаще всего применяются в качестве долговых обязательств по форфейтинговому кредиту, однако могут использоваться и другие виды ценных бумаг, а схемы погашения долга могут быть разными.

Пример. Цена экспортируемой партии товара без учета платы за кредит равна $994000, форфейтинговый кредит предоставляется на 5 лет с годовой процентной ставкой в 16,5% и ежегодными погашениями. Составить план погашения форфейтингового кредита.

Рассмотрим 3 возможных схемы погашения форфейтингового кредита.

Схема 1. Погашение основного долга осуществляется 5-ю равными выплатами по $198800. Номинал каждого из 5-ти векселей равен выплате основного долга плюс п*ростой* процент, начисленный на остаток основного долга.

В соответствии с этой схемой вексель с погашением в конце первого года выписывается на сумму (дол.)

$$F_1 = 198800 + 994000 \cdot 0{,}165 = 362810.$$

Вексель с погашением в конце второго года выписывается на сумму (дол.)

$$F_2 = 198800 + (994000 – 198800) \cdot 0{,}165 = 330008,$$

и т.д.

$$F_3 = 198800 + (994000 – 2 \cdot 198800) \cdot 0{,}165 = 297206,$$

$$F_4 = 198800 + (994000 – 3 \cdot 198800) \cdot 0{,}165 = 264440,$$

$$F_5 = 198800 + (994000 – 4 \cdot 198800) \cdot 0{,}165 = 231602.$$

Сведем результаты вычислений в таблицу 14.

Таблица 14 – Погашение форфейтингового кредита по схеме 1.

Погашение в конце	**Выплата основного долга**	**Остаток основного долга**	**Процентные деньги**	**Номинал векселя**
1-го года	198800	994000	164010	362810
2-го года	198000	795200	131208	330008
3-го года	198800	596400	98406	297206
4-го года	198800	397600	65640	264440
5-го года	198800	198800	32802	231602
Итог	**994000**	**0**	**492066**	**1486066**

Схема 2. Погашение основного долга осуществляется 5-ю равными выплатами по $198800. Номинал каждого из 5-ти векселей рассчитывается по схеме *сложных* процентов, начисленных на величину выплаты основного долга за период времени от начала действия кредитного соглашения и до момента оплаты векселя.

В соответствии с этой схемой номинальная стоимость векселя F_i, определяется по формуле:

$$F_i = (1 + 0{,}165)^i \cdot 198800\,, \qquad i = 1,\ldots,5.$$

Для удобства соберем результаты вычислений в таблицу 15.

Таблица 15 – Погашение форфейтингового кредита по схеме 2.

Погашение в конце	**Выплата основного долга**	**Номинал векселя**	**Процентные деньги**
1-го года	198800	231602,00	32802,00
2-го года	198000	269816,33	71016,33
3-го года	198800	314336,02	115536,02
4-го года	198800	366201,47	167401,47
5-го года	198800	426624,71	227824,71
Итог	**994000**	**1608580,53**	**614580,53**

Схема 3. Погашение долга осуществляется исходя из договоренности о том, что проценты *простые*, а номиналы всех векселей *равны*.

В этом случае начисленные по простой процентной ставке в 16,5% на всю сумму сделки в $994000 процентные деньги добавляются ко всей сумме сделки, а все 5 векселей имеют одинаковую номинальную стоимость:

F_i = 994000·(1+0,165·5)/5 = 362810, i=1,2,3,4,5.

Общая номинальная стоимость векселей равна *$1814050*.

4. Доходность финансовых операций

4.1. Аналогия финансовых операций со схемами предоставления ссуд

Обозначим символом ***C(t)*** капитал, составляющий в момент времени ***t*** (в годах) сумму в ***C*** денежных единиц.

Определение 1. *Финансовой операцией* с началом в момент времени t_1 и концом в момент времени t_2 $(t_2 > t_1)$ называется *любое* действие (или бездействие), при котором капитал $C_1(t_1)$ превращается в капитал $C_2(t_2)$.

Определение 2. Капитал C_1 называется *инвестицией*, а капитал C_2 – *результатом* финансовой операции.

Определение 3. *Коэффициентом увеличения капитала* в финансовой операции называется *отношение результата* к *инвестиции* C_2/C_1, а *номинальным доходом* финансовой операции называется *разность* между *результатом* и *инвестицией* $C_2 - C_1$.

Рассмотрим понятие *доходности* финансовых операций. Для этого напомним расчетные формулы в операциях по предоставлению ссуд. Пусть p_1, p_2, p_3 – годовые *процентные* ставки простых, сложных и непрерывных процентов соответственно. Тогда формулы наращения процентов имеют вид:

$$K(t) = Z\,(1 + p_1 t),$$

$$K(t) = Z\,(1 + p_2)^t,$$

$$K = Z\,e^{p_3 t}.$$

Выразим отсюда значения годовых процентных ставок p_1, p_2, p_3, считая величины ***Z, K*** и ***t*** известными:

$$p_1 = \frac{1}{t}\left(\frac{K}{Z} - 1\right), \tag{4.1.1}$$

$$p_2 = \left(\frac{K}{Z}\right)^{\frac{1}{t}} - 1, \tag{4.1.2}$$

$$p_3 = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{K}{Z}\right). \tag{4.1.3}$$

Формулы (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) являются основой для определения трех различных вариантов понятия *доходности*, точнее говоря, *среднегодовой доходности* финансовых операций, причем в каждом из этих определений капитал C_1 играет роль суммы ***Z,*** а капитал C_2 – суммы ***K***.

Определение 4. (Аналогия финансовой операции со схемой предоставления ссуды на основе *простой процентной* ставки.) *Доходностью (среднегодовой доходностью)* d_1 финансовой операции, выраженной *в долях*, называется число

$$d_1 = \frac{1}{t_2 - t_1}\left(\frac{C_2}{C_1} - 1\right), \tag{4.1.4.}$$

а *доходностью (среднегодовой доходностью)* финансовой операции, выраженной *в процентах*, называется число

$$D_1 = 100 \cdot d_1 \quad (\%).$$

Определение 5. (Аналогия финансовой операции со схемой предоставления ссуды на основе *сложной процентной* ставки.) *Доходностью (среднегодовой доходностью)* d_2 финансовой операции, выраженной *в долях*, называется число

$$d_2 = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1, \qquad (4.1.5.)$$

а *доходностью (среднегодовой доходностью)* финансовой операции, выраженной *в процентах*, называется число

$$D_2 = 100 \cdot d_2 \quad (\%).$$

Определение 6. (Аналогия финансовой операции со схемой предоставления ссуды на основе *непрерывной процентной* ставки.) *Доходностью (среднегодовой доходностью)* d_3 финансовой операции, выраженной *в долях*, называется число

$$d_3 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right), \qquad (4.1.6.)$$

а *доходностью (среднегодовой доходностью)* финансовой операции, выраженной в процентах, называется число

$$D_3 = 100 \cdot d_3 \quad (\%).$$

Замечание 1. Наибольшее распространение имеет доходность d_1. Доходность d_2 применяется, когда продолжительность финансовой операции $t_2 - t_1$ значительно превышает 1 год. Доходность d_3, как правило, используется в теоретических исследованиях.

Замечание 2. Можно рассмотреть и другие варианты понятия доходности, связанные, например, с аналогией финансовой операции со схемой предоставления ссуды на основе *учетной* ставки, но в данном курсе мы этого делать не будем.

Пример 1. Фирме предоставлен кредит сроком на 270 дней с расчетом по схеме *простых* процентов с годовой *процентной* ставкой в 12%. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 1% от суммы кредита. Считая, что в году 360 дней, определить доходность D_1 этой финансовой операции для кредитора. На сколько процентов удержание комиссионных повышает доходность финансовой операции для кредитора?

Решение. Поскольку

$$t_2 - t_1 = \frac{270}{360} = \frac{3}{4},$$

$$C_1 = Z \cdot (1 - 0{,}01) = 0{,}99 \cdot Z, \quad C_2 = K,$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{K}{0{,}99 \cdot Z} = 1{,}0101 \cdot \frac{K}{Z} = 1{,}0101 \cdot \frac{Z \cdot (1 + p \cdot t)}{Z} = 1{,}0101 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 0{,}75) = 1{,}101009,$$

то, воспользовавшись формулой (4.1.4.), получим

$$d_1 = \frac{1}{t_2 - t_1}(\frac{C_2}{C_1} - 1) = \frac{1}{0{,}75} \cdot (1{,}101009\text{-}1) = 0{,}1347.$$

Таким образом, $D_1 = 13{,}47\%$.

Следовательно, удержание комиссионных в размере 1% от суммы кредита повышает доходность на 13,47% –12% = 1,47%.

Ответ. Доходность финансовой операции $D_1 = 13{,}47\%$. Удержание комиссионных повышает доходность на 1,47%.

Пример 2. Фирме предоставлен кредит сроком на 5 лет с расчетом по схеме *сложных* процентов с годовой *процентной* ставкой в 10%. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 0,8% от суммы кредита. Определить доходность D_2 этой финансовой операции для кредитора. На сколько процентов удержание комиссионных повышает доходность финансовой операции для кредитора?

Решение. Поскольку

$$t_2 - t_1 = 5,$$

$$C_1 = Z \cdot (1 - 0{,}008) = 0{,}992 \cdot Z, \quad C_2 = K,$$

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{K}{0,992\cdot Z}=1,008065\cdot\frac{K}{Z}=1,008065\cdot\frac{Z\cdot(1+p)^t}{Z}=1,008065\cdot(1+0,1)^5=1,6235,$$

то, воспользовавшись формулой (4.1.5.), получим

$$d_2=\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{t_2-t_1}}-1=1,6235^{\frac{1}{5}}-1=1,1018-1=0,1018.$$

Таким образом, $D_2=10,18\%$.

Следовательно, удержание комиссионных в размере 0,8% от суммы кредита повышает доходность операции на 10,18% – 10% = 0,18%.

Ответ. Доходность финансовой операции для кредитора $D_2=10,18\%$. Удержание комиссионных повышает доходность на 0,18%.

Пример 3. Вексель на сумму 500000 рублей учитывается банком за 3 месяца до момента погашения по *простой годовой учетной* ставке в 12%. Считая, что в году 12 месяцев по 30 дней, найти доходность D_1 этой финансовой операции для банка.

Решение. По условию задачи $K=500000,\ u=0,12,\ t=3/12=0,25$. С помощью формулы (3.1.2.) найдем сначала дисконтированную цену векселя:

$$Z=K-Kut=500000-500000\cdot0,12\cdot0,25=485000.$$

Далее, воспользовавшись формулой (4.1.4.), получаем

$$d_1=\frac{1}{t_2-t_1}\left(\frac{C_2}{C_1}-1\right)=\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{K}{Z}-1\right)=\frac{1}{0,25}\cdot\left(\frac{500000}{485000}-1\right)=0,1237.$$

Ответ. Доходность $D_1=12,37\%$.

4.2. Мгновенная доходность финансовых операций

Доходности d_1, d_2, d_3 можно подсчитывать не только для всего отрезка продолжительности финансовой операции $[t_1,t_2]$, но и для любого другого отрезка, входящего в него. Полезно также вычислять предельные значения каждой из доходностей d_1, d_2 и d_3, когда длина отрезка уменьшается к нулю.

Такой предельный переход приводит к определению понятия *мгновенной доходности* финансовой операции.

Для того, чтобы найти мгновенную доходность финансовой операции в момент времени t, рассмотрим отрезок времени $[t,\ t+\vartriangle t]$ и устремим его длину $\vartriangle t$ к нулю.

Тогда в случае доходности d_1 получим

$$\widetilde{d_1} = \lim_{\vartriangle t\to 0} d_1 = \lim_{\vartriangle t\to 0} \frac{1}{\vartriangle t}\left(\frac{C(t+\vartriangle t)}{C(t)} - 1\right) = \lim_{\vartriangle t\to 0} \frac{C(t+\vartriangle t) - C(t)}{C(t)\cdot \vartriangle t} = \frac{C^{'}(t)}{C(t)}. \qquad (4.2.1.)$$

Поскольку в формуле (4.2.1.)

$$\frac{C^{'}(t)}{C(t)} = (\ln C(t))^{'}, \qquad (4.2.2.)$$

то выражение (4.2.2.) называется логарифмической производной функции $C(t)$.

В случае доходности d_2

$$\widetilde{d_2} = \lim_{\vartriangle t\to 0} d_2 = \lim_{\vartriangle t\to 0}\left(\frac{C(t+\vartriangle t)}{C(t)}\right)^{\frac{1}{\vartriangle t}} - 1 =$$

$$= \lim_{\vartriangle t\to 0} \frac{[C(t) + C^{'}(t)\cdot \vartriangle t + o(\vartriangle t)]^{\frac{1}{\vartriangle t}}}{C(t)} - 1 = \qquad (4.2.3.)$$

$$= \lim_{\vartriangle t\to 0}\left[1 + \frac{C^{'}(t)}{C(t)}\cdot \vartriangle t + \frac{o(\vartriangle t)}{C(t)}\right]^{\frac{1}{\vartriangle t}} - 1 = e^{\frac{C^{'}(t)}{C(t)}} - 1.$$

В случае доходности d_3

$$\widetilde{d_3} = \lim_{\vartriangle t \to 0} d_3 = \lim_{\vartriangle t \to 0} \frac{1}{\vartriangle t} \cdot \ln\left(\frac{C(t+\vartriangle t)}{C(t)}\right) =$$
$$= \lim_{\vartriangle t \to 0} \frac{1}{\vartriangle t} \cdot \ln \frac{C(t) + C^{'}(t) \cdot \vartriangle t + o(\vartriangle t)}{C(t)} =$$
$$= \lim_{\vartriangle t \to 0} \frac{1}{\vartriangle t} \cdot \ln[1 + \frac{C^{'}(t)}{C(t)} \cdot \vartriangle t + \frac{o(\vartriangle t)}{C(t)}] = \qquad (4.2.4.)$$
$$= \lim_{\vartriangle t \to 0} \frac{1}{\vartriangle t} \cdot [\frac{C^{'}(t)}{C(t)} \cdot \vartriangle t + \frac{o(\vartriangle t)}{C(t)}] = \frac{C^{'}(t)}{C(t)}.$$

Следствие. Для доходностей d_1 и d_3 мгновенные доходности в момент времени t равны логарифмической производной от капитала $C(t)$. В случае доходности d_2 мгновенная доходность в момент времени t равна экспоненте от логарифмической производной капитала $C(t)$ минус 1.

Задача. Логарифмическая производная от капитала по времени равна функции $f(t)$. В момент времени $t=0$ капитал составляет C_0 денежных единиц. Найти формулу, выражающую зависимость капитала от времени.

Решение. Воспользовавшись формулой (4.2.2.),

$$\frac{d(\ln C(t))}{dt} = f(t),$$

получаем,

$$d(\ln C(t)) = f(t)dt,$$

$$\ln C(t) = \int_0^t f(s)ds + \ln C_0.$$

Следовательно,

$$C(t) = C_0 \cdot e^{\int_0^t f(s)ds}. \qquad (4.2.5.)$$

Ответ. Зависимость капитала от времени выражается формулой

$$C(t) = C_0 \cdot e^{\int_0^t f(s)ds}$$

Следствие. В случае, когда логарифмическая производная капитала постоянна и равна k, из формулы (4.2.5.) вытекает соотношение

$$C(t) = C_0 \cdot e^{\int_0^t f(s)ds} = C_0 \cdot e^{\int_0^t kds} = C_0 e^{kt},$$

т.е. капитал растет в зависимости от времени экспоненциально.

5. Примеры и задачи для самостоятельного решения

1. Число увеличилось в 2,9 раза. На сколько процентов увеличилось это число? (Ответ: на 190 %.)

2. Число уменьшилось в 8 раз. На сколько процентов уменьшилось это число? (Ответ: на 87,5 %.)

3. Число увеличилось на 17**%**. Во сколько раз увеличилось это число? (Ответ: в 1,17 раза.)

4. Число ***d*** на **23%** меньше числа ***c***. Какую часть составляет число ***d*** от числа ***c***? (Ответ: 0,77.)

5. Налог на добавленную стоимость (НДС) равняется 18% цены товара. Найти НДС, если товар с учетом НДС стоит 2950 руб. (Ответ: 450 руб.)

6. Сначала цена товара увеличилась на ***40%,*** а затем *новая* цена уменьшилась на ***20%.*** Что произошло с первоначальной ценой товара? (Ответ: увеличилась на 12%.)

7. Сначала цена товара увеличилась на *60%***,** а затем возвратилась до первоначального уровня**.** На сколько процентов уменьшилась *новая* цена товара? (Ответ: уменьшилась на 37,5%)

8. Банковский вклад, не тронутый в течение года, в конце этого года увеличивается на ***5%.*** На сколько процентов увеличится вклад, не тронутый в течение 4-х лет? (Ответ: на 21,55%.)

9. Найти месячный темп инфляции, если за 2 месяца цена товара увеличилась с 6250 рублей до 6760 рублей. (Ответ: темп инфляции равен 4%.)

10. Месячный темп инфляции равен 2%. Сколько стоил товар полгода назад, если сейчас его цена равна 5405,58 рублей. (Ответ: 4800 руб.)

11. В течение первых 3-х месяцев темп инфляции был равен 3%, а в течение следующих 2-х месяцев темп инфляции был равен 4%. На сколько процентов увеличились цены за 5 месяцев? (Ответ: на 18,19%.)

12. Депозит рассчитывается по схеме простых процентов с годовой процентной ставкой в 20%. За какое время первоначальная сумма увеличивается в 3 раза? (Ответ: за 10 лет.)

13. Депозит рассчитывается по схеме сложных процентов с годовой процентной ставкой в 10%. За какое время первоначальная сумма увеличивается в 5 раз? (Ответ: за 16,89 года.)

14. Сумма в 2000000 рублей взята в долг на срок в 4,8 года с годовой процентной ставкой в 10% при условии погашения долга одним платежом в конце срока. Какую сумму нужно будет возвратить кредитору, если расчет производится

1. по схеме простых процентов?
2. по схеме сложных процентов?
3. по смешанной схеме?
4. по схеме непрерывных процентов?

(Ответ: 1) 2960000 руб., 2) 3160202,3 руб., 3) 3162456 руб., 4) 3232148,8 руб.)

15. Сумма в 2000000 рублей взята в долг на срок в 4,8 года с годовой учетной ставкой в 10% при условии погашения долга одним платежом в конце срока. Какую сумму нужно будет возвратить кредитору, если расчет производится

1. по схеме простых процентов?
2. по схеме сложных процентов?

(Ответ: 1) 3846153,85 руб., 2) 3316392,7 руб.)

16. Сумма в 2000000 рублей взята в долг на срок в 3 года и 9 месяцев с годовой процентной ставкой в 10% при условии погашения долга одним платежом в конце срока. Какую сумму нужно будет возвратить кредитору, если расчет производится по схеме простых процентов с поквартальным реинвестированием процентов? (Указание: воспользуйтесь формулой (1.7.2.)). (Ответ: 2689777,65 руб.)

17. Заемщик получил ссуду в 3000000 руб., которую должен погасить одним платежом через 1,5 года. Расчет производится по схеме простых процентов, причем первые 0,75 года годовая *процентная* ставка равна 13%, а в оставшееся время годовая *процентная* ставка равна 17%. Найти сумму, возвращаемую кредитору. (Ответ: 3675000 руб.)

18. Заемщик получил ссуду в 3000000 руб., которую должен погасить одним платежом через 1,5 года. Расчет производится по схеме сложных процентов, причем первые 0,75 года годовая *процентная* ставка равна 13%, а в оставшееся время годовая *процентная* ставка равна 17%. Найти сумму, возвращаемую кредитору. (Ответ: 3698873,54 руб.)

19. Заемщик получил 09.03.2005 г. ссуду в 600000 долл., возвратить которую необходимо 29.7.2005, а расчет производится по схеме простых процентов с 13%-й годовой процентной ставкой. Какую сумму должен возвратить заемщик кредитору при расчете по

1. английскому способу?
2. французскому способу?
3. немецкому способу?

(Ответ: 1) 630131,51$, 2) 630550$, 3) 630116,67$.)

20. Ломбард предоставляет кредиты под залог ювелирных изделий, исходя из 50% текущей рыночной стоимости изделия на основе годовой учетной ставки в 30% на срок в 3 месяца. Клиент передал в ломбард золотой браслет. Эксперт ломбарда оценил рыночную стоимость браслета в 10000 руб. Какую сумму получит клиент и какую сумму он должен возвратить ломбарду? (Ответ: клиент получает 4625 руб., возвращает 5000 руб.)

21. Какая из сумм больше: 1700 руб. сейчас или 1970 руб. через 1,5 года, если

1. простая процентная ставка равна 10%?
2. сложная процентная ставка равна 10 %?

3. простая учетная ставка равна 10%?

4. сложная учетная ставка равна 10%?

(Ответ: 1) через 1,5 года 1970 руб. больше, чем 1700 руб. сейчас, 2) через 1,5 года 1970 руб. больше, чем 1700 руб. сейчас, 3) 1700 руб. сейчас больше, чем 1970 руб. через 1,5 года 4) 1700 руб. сейчас больше, чем 1970 руб. через 1,5 года)

22. Кредитор предоставил заемщику 4 ссуды по схеме простых процентов с годовой *процентной* ставкой в 20%, параметры которых указаны в таблице 16.

Таблица 16. Сведения о ссудах.

Номер ссуды	1	2	3	4
Размер (руб.)	100000	200000	200000	500000
День выдачи	1.06.05	1.07.05	1.08.05	1.09.05
День погашения	1.10.05	1.11.05	1.12.05	1.01.06

После получения последней ссуды заемщик захотел консолидировать все ссуды. Воспользовавшись способом расчета 365/360, найти *дату* консолидированного платежа и определить, какую сумму денег заемщик должен выплатить кредитору в этот день? (Ответ: 3.12.05 заемщик должен выплатить кредитору 1067888,89 руб.)

23. Скорость роста банковского вклада пропорциональна размеру вклада с коэффициентом пропорциональности 0,02. Найти сумму на счете через **4** года, если первоначальная сумма вклада равна 10000 руб. (Ответ: 10832,87 руб.)

24. Заемщик договорился с кредитором о покупке девизы в 3000000 рублей. В Москве 1 доллар стоит 27,51 рублей, а в Нью-

Йорке 1 рубль стоит 0,036075 доллара. В Москве или Нью-Йорке заемщику выгоднее купить девизу? (Ответ: В Нью-Йорке.)

25. Заемщик в Москве должен возвратить кредитору в Лондоне долг в 300000 фунтов стерлингов. Курсы обмена валют в четырех странах приведены в таблице 17.

Таблица 17. Курсы обмена валют.

Страна	Курсы обмена валют	
	Рубль	**Евро**
Россия, 100 руб.	100	2,7285
Франция, 100 евро	3662	100
Великобритания, 100 ф. ст.	5282	144,24
США, 100 дол.	2729	75,08

В какой валюте заемщику выгоднее всего оплатить долг? (Ответ: в евро.)

26. Покупатель обратился в банк с просьбой о предоставлении кредита на покупку ноутбука, стоимостью 36000 рублей. Банк предоставил покупателю *потребительский кредит* на срок в 2 года на основе годовой процентной ставки в 20% с *ежемесячными* погашениями *постнумерандо*. Какую сумму денег покупатель должен ежемесячно перечислять банку, если при расчете применяется схема

1. простых процентов?
2. сложных процентов?

(Ответ: 1) 2100 руб., 2) 2160 руб.)

27. Заем величиной в $200000, предоставленный на срок в 5 лет с годовой *процентной* ставкой в 15%, погашается одинаковыми аннуитетами постнумерандо. Кредитор *по такой же схеме* рассчитывает процентные деньги за пользование каждым аннуитетом с момента его получения и до срока окончания займа, которые идут в счет погашения займа. Найти величину аннуитетов, если при расчете применяется схема

1. простых процентов?
2. сложных процентов?

(Ответ: 1) 67307,69$, 2) 59663,11$.)

28. Заем величиной в $500000, предоставленный на срок в 6 лет с расчетом *по схеме сложных* процентов с годовой *процентной* ставкой в 10%, погашается одинаковыми аннуитетами постнумерандо. Часть каждого аннуитета, идущая на погашение процентных денег, составляет 8% от существующего в момент совершения погашающего платежа остатка долга (без учета процентных денег). Составить план погашения займа. (Указание: воспользуйтесь схемой решения задачи из § 2.3.)

29. Заем величиной $800000, предоставленный на срок в 10 лет с расчетом *по схеме сложных* процентов с годовой *процентной* ставкой в 8%, погашается аннуитетами постнумерандо с одинаковыми выплатами долга. Процентные деньги на аннуитеты не начисляются. Часть каждого аннуитета, идущая на погашение процентных денег, составляет 4% от существующего в момент совершения погашающего платежа остатка долга (без учета процентных денег). Составить план погашения займа. (Указание: воспользуйтесь схемой решения задачи из § 2.4.)

30. Заем величиной 5000000 долларов погашается в течение 10 лет аннуитетами постнумерандо, причем выплаты долга от года к году:

1. увеличиваются на 25000 долларов,
2. уменьшаются на 25000 долларов.

Годовая ставка *простых* процентов равна 10 %. Процентные деньги на аннуитеты не начисляются. Составить план погашения займа в каждом из этих случаев. (Указание: воспользуйтесь схемой решения задачи из § 2.5.)

31. Заем величиной 5000000 долларов погашается в течение 10 лет аннуитетами постнумерандо, причем выплаты долга от года к году:

1. увеличиваются на 8%,
2. уменьшаются на 8%.

Процентная ставка *сложных* процентов равна 10%. Процентные деньги на аннуитеты не начисляются. Составить план погашения займа в каждом из этих случаев. (Указание: воспользуйтесь схемой решения задачи из § 2.6.)

32. В первый день *каждого месяца*, начиная с 1-го января 2005 года, вкладчик помещает на свой счет в банке 2000 рублей. Расчет производится по схеме *простых* процентов с годовой *процентной* ставкой в 8% и помесячным начислением процентных денег, причем год рассматривается состоящим из 12 месяцев по 30 дней. Какая сумма окажется на счете 31 декабря 2010 года? (Ответ: 558720 руб.)

33. В первый день *каждого года*, начиная с 1-го января 2005 года, вкладчик помещает на свой счет в банке 3000 долл. Расчет производится по схеме *сложных* процентов с годовой *процентной* ставкой в 8%. Какая сумма окажется на счете 31 декабря 2010 года? (Ответ: 23768,41 долл.)

34. Вексель на сумму 1000000 рублей со сроком погашения 1.09.2005 учитывается банком 1.06.2005 по *простой учетной* ставке в 18%. Найти:

1. дисконтированную цену векселя, используя способ расчета 365/360;
2. доходность D_1 этой финансовой операции для банка.

(Ответ: 1) 954000 руб., 2) 18,87%.)

35. Логарифмическая производная от капитала по времени равна функции $2/t$. В момент времени $t=1$ капитал составляет 1000000 руб. Найти капитал в момент времени $t=5$. (Ответ: 25000000 руб.)

36. Через 4 года долг с учетом процентных денег достиг 100 000 руб.

Годовая процентная ставка 15%. Сколько денег было взято в долг, если

начисляются:

1. простые проценты?
2. сложные проценты?
3. непрерывные проценты?

(О т в е т: 1) 62 500 руб., 2)57 175,32 руб., 3)54 881,19 руб.)

37. Через 4 года долг с учетом процентных денег достиг 100 000 руб.

Годовая учетная ставка 15%. Сколько денег было взято в долг, если

начисляются:

1. простые проценты?
2. сложные проценты?

(О т в е т: 1)40 000 руб., 2)52 200,63 руб.)

38. В момент выдачи ссуды удерживается дисконт в размере 10%. Ссуда выдается на срок 144 дня по схеме простых процентов. Найти годовую учетную ставку, если год считается равным 360 дням.

(О т в е т: 25%)

39. Какой годовой учетной ставке соответствует годовая процентная ставка 60% ?

(О т в е т: 37,5%)

40. Какой годовой процентной ставке соответствует годовая учетная ставка 20% ?

(О т в е т: 25%)

41. За 8 лет первоначальная сумма вклада выросла в 5 раз. Найти годовую

процентную ставку, если при расчете используется схема:

1. простых процентов?
2. сложных процентов?
3. непрерывных процентов?

(О т в е т: 1) 50% , 2) 22,28%, 3) 20,12%)

42. За 8 лет первоначальная сумма вклада выросла в 5 раз. Найти годовую

учетную ставку, если при расчете используется схема:

1. простых процентов?
2. сложных процентов?

(О т в е т: 1) 10%, 2) 18,22%.)

Библиографический список

1. Башарин Г.П. Начала финансовой математики. – М.: ИНФРА-М, 1997.
2. Белов Б.А., Самаров К.Л., Щиканов А.Ю. Математика, экономико-математические методы и модели, финансовая математика, эконометрика. Контрольные задания и методические указания. – М.: МГУС, 2004.
3. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. – М.: Приор, 1998.
4. Кочович Е. Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов. – М.: Финансы и статистика, 1994.
5. Ковалев В.В., Уланов В.А. Курс финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 1999.
6. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики. – М.: Дело, 1998.
7. Малыхин В.И. Финансовая математика. Учебное пособие. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
8. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика. Учебно-справочное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2002.
9. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело, 1995.
10. Четыркин Е.М. Финансовая математика. Учебник. – М.: Дело, 2002.