Д.А. Новиков

МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Настоящая работа является учебным пособием для подготовки к экзамену по курсу "Механизмы стимулирования" для аспирантов, обучающихся по специальности 05.13.10 – "Управление в социальных и экономических системах" (см. программу курса и задачи к экзамену на сайте www.mtas.ru).

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Организации и стимулирование. В соответствии с определением, данным в Философском энциклопедическом словаре, *организация* (*организационная система*) – «объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил». Совокупность процедур, правил и т.д., регламентирующих взаимодействие участников организационной системы (ОС) называется *механизмом* ее *функционирования*[1] [1, 12]. Важнейшей составляющей механизма функционирования является *механизм управления* – совокупность процедур принятия управленческих решений [1].

Условия деятельности каждого субъекта в общем случае можно условно разделить на *ограничивающие* и *побуждающие*. Ограничивающие условия деятельности обусловлены принадлежностью к государству, нации, социальной группе, организации и т.д. и могут рассматриваться как институциональные. Среди них – система законов и норм, регламентирующих деятельность, начиная от законодательной системы и заканчивая «неписанными» законами и морально-этическими нормами. Они устанавливают систему ограничений, в рамках которой может осуществляться деятельность, разрешая или поощряя то, что не противоречит этой системе ограничений.

Побуждающие условия деятельности носят более персонифицированный характер и направлены на целенаправленное (то есть соответствующее целям и интересам отдельной личности, группы или коллектива, организации и т.д.) побуждение субъекта (или, опять же, группы, коллектива и т.д.) к совершению определенных действий. Каждый субъект, обладающий, в свою очередь, собственными целями и интересами, стремится к выбору действий, которые, с одной стороны, максимально соответствуют его целям и интересам, а, с другой стороны, удовлетворяют внешним и внутренним (ограничивающим) условиям деятельности.

---

[1] *Именно наличие механизма функционирования отличает организацию от коллектива* (*объединения людей, осуществляющих совместную деятельность*) *и группы* (*совокупности людей, объединенных общностью интересов*).

Одной из разновидностей целенаправленных внешних побуждающих воздействий (создания условий деятельности) является *стимулирование* (от латинского stimulus – остроконечная палка, которой погоняли животных) – «внешнее воздействие на организм, личность или группу людей, побуждение к совершению некоторого действия» (см. Психологический словарь). Описание стимулирования включает: изучение поведения в отсутствии побуждения, анализ возможных реакций на те или иные воздействия, поиск допустимых воздействий, обеспечивающих совершение требуемых действий.

Последний аспект соответствует *управлению*, понимаемому как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения желательного ее поведения. При этом в социально-экономических системах характерной чертой стимулирования, как разновидности управления, является необходимость согласования интересов управляющего и управляемого субъектов.

В настоящей работе стимулирование рассматривается именно с управленческой точки зрения (в том числе – при фиксированных институциональных ограничениях) и понимается в общем случае как комплексное целенаправленное внешнее воздействие на компоненты деятельности управляемой системы и процессы их формирования [11].

Следовательно, *механизм стимулирования* (*систему стимулирования*) можно определить как процедуру (правило) принятия управляющим органом решений относительно побуждения управляемых субъектов к совершению требуемых действий. Наиболее подробно изученной (и распространенной на практике) разновидностью стимулирования является *материальное стимулирование* – оплата труда. Поэтому, если не оговорено особо, под стимулированием будем понимать именно материальное стимулирование.

Стимулирование с точки зрения различных наук. Стимулирование изучается в таких областях науки как экономика, психология, управление и др. По «масштабу» рассмотрения и применяемым методам можно выделить следующие взаимосвязанные **подходы** (см. ссылки в [8]):

- «*макроэкономический*», в котором в центре внимания находится рынок труда;

- «*микроэкономический*», в котором акцент делается на рассмотрении стимулирования в рамках организации (предприятия, ведомства, фирмы и т.д.), причем основой является анализ именно экономической деятельности (как индивидуальной, так и коллективной);

- «*агентный*», в котором центром рассмотрения является человек, группа, коллектив и т.д. с их потребностями и интересами.

Рассмотрим перечисленные подходы более подробно. Для их описания удобно использовать следующую качественную модель.

Выделим трех участников трудовых отношений (см. рисунок 1). Первый (управляемый) субъект – конкретный индивидуум, субъект (быть может, коллективный), например, работник, коллектив отдела и т.д., предложением которого является труд, за который он поощряется. Условно управляемого субъекта в дальнейшем будем обозначать термином «*агент*».

Второй (управляющий) субъект – «работодатель», то есть организация, предприятие, ведомство, фирма и т.д., которых мы будем обобщенно обозначать термином «*центр*», является «потребителем» труда агента, преобразуя его в некоторый товар (продукты, услуги и т.д.), обладающий рыночной стоимостью. Поставляя товар на рынок, центр получает некоторый доход.

И, наконец, третий объект – «*рынок*» (будем считать, что рынок не обладает собственными интересами) как институт обмена правами собственности (в данном случае имеются в виду товарный, фондовый и др. рынки, но не рынок труда), является «потребителем» товара центра.

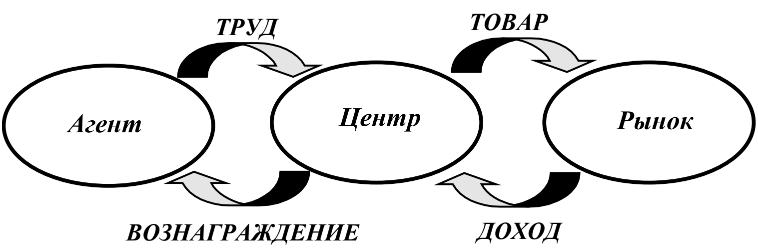

Рис. 1. Участники трудовых отношений

Итак, агент обменивает свой труд на вознаграждение со стороны центра[1], вступая тем самым во взаимоотношения с другими участниками *рынка труда*; а центр «обменивает» на рынке товар, созданный с использованием труда агента, на доход (см. рисунок 1).

Как отмечалось выше, в рамках настоящей работы нас интересуют вопросы стимулирования, в частности – оплаты труда. Для того чтобы ответить на вопрос, является ли то или иное вознаграждение допустимым и желательным с точки зрения агента и центра, следует определить их предпочтения.

Под *предпочтениями* центра (агента) мы будем понимать совокупность его свойств и способностей по определению индивидуальной ценности, полезности и т.д. различных альтернатив. В первом приближении можно считать, что центр заинтересован в максимизации прибыли (то есть его система предпочтений такова, что альтернативы, соответствующие большим значениям «прибыли», более предпочтительны), а агент – в максимизации некоторой субъективной полезности, зависящей от показателей труда и величины вознаграждения (то есть система предпочтений агента такова, что она позволяет ему «сравнивать» различные комбинации труда и вознаграждения).

Введя предположение о наличии предпочтений участников трудовых отношений, для корректной постановки задачи поиска величины вознаграждения агента со стороны центра осталось определить, что является целью деятельности каждого из субъектов, а что – ограничениями (внешними условиями) деятельности. Именно в этот момент возникают несколько альтернатив, соответствующих различным подходам к исследованию стимулирования. Будем считать, что каждый агент имеет свои представления о минимальной оплате, которая с его субъективной точки зрения соответствует его квалификации.

В рамках «макроэкономического» подхода предполагается, что (для каждого агента) объективно существует рыночная зарпла-

---

[1] *Следует отметить, что в приводимых рассуждениях один и тот же агент свободен в выборе работодателя, а работодатель – в выборе работника, поэтому можно условно считать, что на рисунке 1 изображена одна из возможных комбинаций взаимодействия некоторых агента и центра.*

та. Если зарплата, предлагаемая некоторым работодателем, не ниже рыночной, то агент соглашается работать за данную оплату. Ограничениями при этом являются экономическая эффективность (выгодность с точки зрения прибыли центра) найма данного агента и соответствие предлагаемой оплаты субъективным представлениям агента. Подобный подход, в рамках которого условно можно считать «основным» взаимодействие агента и рынка труда (см. рисунок 2а), развивается в многочисленных работах по исследованию предложения и спроса на рынке труда (см. ссылки в [8]).

На рисунке 2 (а, б и в) условно обозначены связи между рассматриваемыми участниками трудовых отношений. Жирными кружками (линиями) в каждом из случаев выделены те элементы (связи), которые считаются «основными».

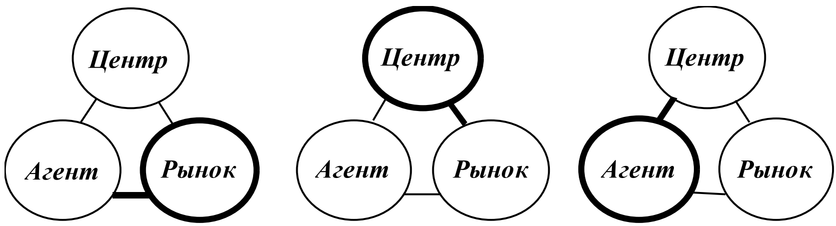

Рис. 2а. «Макроэкономический» подход

Рис. 2б. «Микроэкономический» подход

Рис. 2в. «Агентный» подход

При <u>«микроэкономическом» подходе</u> «основным» является взаимодействие центра и товарного рынка (см. рисунок 2б). Другими словами, центр нанимает конкретного агента, если его труд приводит к созданию товара или услуги, реализация которых приводит к максимальной прибыли. Ограничениями при этом являются субъективные представления агента и его рыночная зарплата. Задачи определения оптимальной (эффективной) заработной платы, оптимального числа нанимаемых работников и др. рассматриваются в работах по теории фирмы, теории контрактов и др. (см. ссылки в [8]).

Если в качестве «основного» рассматривается взаимодействие агента с центром (см. рисунок 2в), то есть соответствие предлагаемого центром вознаграждения предпочтениям агента, то такой подход считается агентным. Ограничениями при этом являются экономическая эффективность (с точки зрения прибыли центра) найма данного работника за данную оплату, а также рыночная зарплата данного работника. Агентный подход рассматривается в основном в работах по принятию решений, теории управления и др. (см. ссылки в [8]).

Ниже в настоящей работе используется, в основном, агентный подход, а именно считается, что агент соглашается на такие условия оплаты, которые являются наилучшими с точки зрения его субъективных предпочтений. Такое решение будет допустимым, только если оно выгодно для центра (обеспечивает ему допустимую или максимально возможную в данных условиях прибыль) и не нарушает рыночного равновесия (величина вознаграждения данного агента не ниже его рыночной зарплаты).

В рамках агентного подхода, в зависимости от выделяемого предмета исследования и используемых методов исследования различают следующие **направления**:

- «*менеджмента*», как совокупности систематизированных положений о наиболее эффективном управлении организацией, носящих обобщающий, эмпирический и интуитивный характер[1];
- «*психолого-социологическое*», исследующее процессы мотивации деятельности человека или в более общем случае – деятельность групп и коллективов (см. ссылки в [8]);
- «*математическое*», изучающее формальные (математические, имитационные и др.) модели – аналоги реальных систем (см. ссылки в [8]).

Упомянутые направления и выделенные подходы взаимосвязаны и взаимно используют результаты и методы друг друга. Однако, к сожалению, на сегодняшний день это взаимопроникновение недостаточно глубоко, и зачастую исследователи говорят на разных языках, не осознавая возможности переноса результатов из одной области исследований в другую.

Более того, несмотря на то, что большинство исследователей отмечает многоаспектность стимулирования как составляющей части мотивации, то есть наличие разнообразных форм, методов и средств стимулирования, на сегодняшний день большинство работ

[1] *Сюда же можно включить и управление персоналом.*

явно или неявно посвящено изучению *материального стимулирования* – таких поощрений или наказаний субъектов, которые могут быть измерены в денежной форме. Помимо этого, многие результаты исследований стимулирования в «гуманитарных» областях науки носят интуитивный характер и не всегда достигают желательного уровня строгости и формализации. Формальные же модели стимулирования, как отмечалось выше, изучаются в теории управления.

Стимулирование в теории управления. Формальные (математические, точнее – теоретико-игровые) модели стимулирования исследуются в рамках таких разделов теории управления социально-экономическими системами как: теория активных систем [1, 11], теория иерархических игр [3], теория контрактов (см. ссылки в [8]) и др. Необходимость использования моделей обусловлена сложностью, а зачастую и невозможностью проведения на социально-экономических системах натурного эксперимента. С одной стороны, применение математических моделей в ряде случаев дает возможность оценить эффективность различных механизмов управления, провести игровое и/или имитационное исследование, обучение управленческого персонала и т.д. С другой стороны, для большинства существующих теоретических результатов, полученных в упомянутых выше научных областях, характерен определенный отрыв от практики: как вводимые предположения, так и получаемые выводы не всегда сопровождаются содержательными интерпретациями или не доводятся до конструктивных прикладных алгоритмов и методик.

Другими словами, наблюдается значительный разрыв между теорией и практикой: с одной стороны, специалисты-практики иногда даже не подозревают о том, что в теории управления накоплен значительный опыт анализа и синтеза формальных моделей стимулирования; с другой стороны, специалисты-теоретики далеко не всегда доводят свои результаты до этапа практического использования, когда ими могут воспользоваться управленцы, не имеющие соответствующей математической подготовки.

Существующий разрыв отрицательно сказывается на обеих областях – игнорирование последних достижений науки не позволяет достичь высокой эффективности системы управления организацией, а отрыв от практики приводит к изоляции содержания теоретических моделей.

ЧАСТЬ 1. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ СТИМУЛИРОВАНИЕ

2. ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Основным аппаратом построения моделей стимулирования является *теория игр* – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах [5]. Простейшей игровой моделью является взаимодействие двух игроков – *центра* (principal) и подчиненного ему агента (agent). В качестве центра может выступать непосредственный руководитель агента или организация, заключившая трудовой (или какой-либо иной – страховой, подрядный и др.) договор с агентом. В качестве агента может выступать наемный работник или организация, являющаяся второй стороной по соответствующему договору.

Перейдем к описанию *базовой модели стимулирования*, отражающей взаимодействие одного начальника и одного подчиненного.

Рассмотрим *организационную систему* (ОС), состоящую из одного управляющего органа – *центра* – на верхнем уровне иерархии и одного управляемого субъекта – *агента* на нижнем уровне. *Участники ОС*, то есть центр и агент, обладают свойством *активности* – способностью самостоятельного выбора действий (стратегий).

Механизмом функционирования ОС называется совокупность правил, законов и процедур, регламентирующих взаимодействие участников системы. *Механизмом стимулирования* называется правило принятия решений центром относительно стимулирования агента. Механизм стимулирования включает в себя *систему стимулирования*, которая в рамках моделей, рассматриваемых в настоящей работе, полностью определяется *функцией стимулирования*, задающей зависимость вознаграждения агента от выбираемых им действий. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении теоретико-игровых моделей будем употреблять термины «механизм стимулирования», «система стимулирования» и «функция стимулирования» как синонимы.

Стратегией агента является выбор *действия* y Î A, принадлежащего множеству допустимых действий A. Содержательно действием агента может быть количество отрабатываемых часов, объем произведенной продукции и т.д. Множество допустимых действий агента представляет собой набор альтернатив, из которых он производит свой выбор. Например, диапазон возможной продолжительности рабочего времени, неотрицательный и не превышающий технологические ограничения объем производства, уровень качества продукции и т.д.

Стратегией центра является выбор *функции стимулирования* $s(y)$ Î M, принадлежащей допустимому множеству M и ставящей в соответствие действию агента некоторое неотрицательное вознаграждение, выплачиваемое ему центром, то есть[1] $s : A$ ® $Â_1^+$. Множество допустимых вознаграждений может ограничиваться как законодательно (например, минимальным размером оплаты труда), так и, например, соображениями экономической эффективности деятельности центра, тарифно-квалификационными требованиями к оплате труда данного агента и т.д.

Выбор действия y Î A требует от агента *затрат* $c(y)$ и приносит центру *доход* $H(y)$. *Функцию затрат агента* $c(y)$ и *функцию дохода центра* $H(y)$ будем считать известными (проблемы их идентификации обсуждаются в [7, 8]).

Интересы участников организационной системы (центра и агента) отражены их *целевыми функциями*, которые обозначим, соответственно[2], $F(\cdot)$ и $f(\cdot)$ (функциями выигрыша, полезности и т.д., в записи которых зависимость от стратегии центра будет опускаться), представляющими собой: для агента – разность между стимулированием и затратами

(1) $f(y) = s(y) - c(y)$;

а для центра – разность между доходом и *затратами центра на стимулирование* – вознаграждением, выплачиваемым агенту:

---

[1] *Напомним, что запись «g: X ® Y» обозначает отображение g множества X во множество Y.*

[2] *Напомним, что запись «$g(\cdot)$» обозначает функцию g от некоторого аргумента.*

(2) $F(y) = H(y) - s(y)$.

Обсудим структуру целевых функций.

Во-первых, исходя из содержательных интерпретаций, функцию $H(y)$ правильнее было бы назвать «прибылью», а не «доходом». Тем не менее, будем следовать установившейся в теории управления терминологии.

Во-вторых, расходы на оплату труда обычно составляют незначительную часть затрат организации (например, для промышленных предприятий – от 3 до 15 процентов). Тем не менее, с точки зрения мотивации важна не относительная доля этих затрат, а абсолютный размер вознаграждения, что обосновывает целесообразность их учета в целевой функции центра наряду с доходом.

В-третьих, используемое в настоящей работе представление целевой функции агента в виде (1) – «*стимулирование минус затраты*» – не является единственно возможным. Так, существуют модели, в которых предпочтения агента описываются разностью между его доходом и штрафами, устанавливаемыми центром [11] – так называемое представление «*доход минус штрафы*» (при этом штрафы, выплачиваемые агентом, суммируются с доходом центра в целевой функции последнего). Так как оба представления эквивалентны (одно сводится к другому с помощью линейного преобразования и замены переменных), то результаты исследования одного представления предпочтений участников ОС непосредственно переносятся и на другое представление.

После того как введены целевые функции, отражающие предпочтения участников ОС, целесообразно обсудить различия в описании материального и нематериального стимулирования.

Наличие скалярной целевой функции подразумевает существование единого эквивалента, в котором измеряются все слагаемые целевых функций (затраты агента, доход центра и, естественно, само стимулирование).

В случае, когда речь идет о материальном вознаграждении агента, таким эквивалентом выступают деньги. Содержательные интерпретации дохода центра при этом очевидны (более того, практически во всех работах, содержащих описание формальных моделей стимулирования, предполагается, что и стимулирование, и доход центра «измеряются» в денежных единицах). Сложнее дело обстоит с затратами агента, поскольку не всегда можно адекватно выразить в денежных единицах, например, удовлетворенность агента работой и т.д. С экономической точки зрения затраты агента можно интерпретировать как денежный эквивалент тех усилий, которые агент должен произвести для достижения того или иного действия. В рамках такой интерпретации вполне естественной выглядит идея компенсации затрат – вознаграждение со стороны центра должно как минимум компенсировать затраты агента (см. более подробно формальное описание в настоящем разделе ниже).

Если затраты агента измеряются в некоторых единицах «полезности» (учитывающей, например, физическую усталость, моральное удовлетворение от результатов труда и т.д.), отличных от денежных единиц (и несводимых к ним линейным преобразованием), то для того, чтобы иметь возможность складывать или вычитать полезности при введении целевой функции типа (1), необходимо определить полезность вознаграждения. Например, если используется материальное стимулирование, то можно ввести функцию полезности $\tilde{u}(s(y))$, которая отражала бы полезность денег для рассматриваемого агента. Целевая функция агента при этом примет вид $f(y) = \tilde{u}(s(y)) - c(y)$.

Также на практике распространен прием, заключающийся в «линеаризации» функции дохода центра. При этом целевые функции участников ОС (1) и (2) примут, соответственно, вид:

$$\tilde{f}(y) = \tilde{s}(y) - \tilde{c}(y),\ \tilde{\Phi}(y) = y - \tilde{s}(y),\ y \in \tilde{A},\ s \in \tilde{M},$$

где $\tilde{s}(\cdot) = s(H^{-1}(\cdot))$, $\tilde{c}(\cdot) = c(H^{-1}(\cdot))$, $\tilde{A} = H^{-1}(A)$, $\tilde{M} = H^{-1}(M)$, $H^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная функции $H(\cdot)$ дохода центра.

Введем следующие **предположения**, которых будем придерживаться, если не оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения.

Во-первых, будем считать, что множество возможных действий агента составляет положительную полуось. Отказу агента от участия в ОС (бездействию) соответствует нулевое действие.

Во-вторых, относительно функции затрат агента предположим, что она не убывает, непрерывна, а затраты от выбора нулевого действия равны нулю (иногда дополнительно будем требовать, чтобы функция затрат была выпукла и непрерывно дифференцируема).

В третьих, допустим, что функция дохода центра непрерывна, неотрицательна, и доход центра в случае отказа агента от участия в ОС (выборе последним нулевого действия) равен нулю.

Приведем содержательные интерпретации введенных предположений.

Первое предположение означает, что выбор возможных действий агента выражается величинами, представляющими собой неотрицательные действительные числа, например, количество отработанных часов, объем произведенной продукции и т.д.

Из второго предположения следует, что выбор бо́льших действий требует от агента не меньших затрат. Например, затраты могут расти с ростом объема выпускаемой продукции. Кроме того, нулевое действие (отсутствие деятельности агента) не требует затрат.

Третье предположение накладывает ограничения на функцию дохода центра, требуя, чтобы при выборе агентом нулевого действия (что в силу второго предположения требует от последнего нулевых затрат, то есть соответствует отсутствию взаимодействия с центром) центр не имел дохода, но и не нес убытков. Отметим, что это предположение несущественно для большинства приводимых ниже рассуждений.

Рациональное поведение участника ОС заключается в максимизации выбором собственной стратегии его целевой функции с учетом всей имеющейся у него информации – так называемая *гипотеза рационального поведения* [5] (ГРП).

Определим *информированность участников ОС* и *порядок функционирования*[1]. Будем считать, что на момент принятия решения (выбора стратегии) участникам ОС известны все целевые функции и все допустимые множества. Специфика теоретико-игровой задачи стимулирования заключается в том, что в ней фиксирован порядок ходов: центр обладает правом первого хода, сообщая агенту выбранную им функцию стимулирования, после

---

[1] *Информированностью субъекта называется та информация, которой он обладает на момент принятия решений. Порядком функционирования называется последовательность получения информации и выбора стратегий участниками организационной системы.*

чего при известной стратегии центра агент выбирает свое действие, максимизирующее его целевую функцию.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим упрощенную модель *трудового контракта*, заключаемого между работником (агентом) и некоторой организацией (центром) и являющегося, как правило, документом, в котором отражено следующее: центр обязуется обеспечить условия работы и выплатить вознаграждение, прямо или косвенно зависящее от результатов деятельности (действий) агента. Помимо этого в контракте оговариваются права и обязанности агента, в том числе – выбор каких действий он может и обязуется производить и т.д.

Таким образом, стратегией центра является выбор системы стимулирования, стратегией агента – выбор действия. Условия контракта (его содержание) известны обеим сторонам. Информированность участников следующая. На момент принятия решений (о том, какую систему стимулирования центру следует установить для того или иного агента) центр имеет информацию о том, какие действия этот агент может выбирать (множество его допустимых (возможных) действий) и о предпочтениях агента (его целевой функции) на этом множестве. Помимо этого центру, естественно, известны свои собственные предпочтения и ограничения (в том числе, институциональные) на множество допустимых функций стимулирования. Агент на момент принятия решения о том, какое действие ему следует выбрать, знает свои предпочтения и множество своих возможных действий, а также выбранную центром систему стимулирования, то есть функциональную зависимость вознаграждения от действий. Порядок функционирования следующий: заключается контракт, затем агент выбирает свое действие, после чего производятся выплаты. •[1]

Так как значение целевой функции агента зависит как от его собственной стратегии – действия, так и от функции стимулирования, то в рамках принятой гипотезы рационального поведения агент будет выбирать действия, которые при заданной системе стимулирования максимизируют его целевую функцию. Понятно, что множество таких действий, называемое множеством *реализуемых действий*, зависит от используемой центром системы стиму-

[1] *Символом «•» здесь и далее обозначается окончание примера.*

лирования. **Основная идея стимулирования** как раз и заключается в том, что, варьируя систему стимулирования, центр может побуждать агента выбирать те или иные действия.

Так как целевая функция центра зависит от действия, выбираемого агентом, то *эффективностью*[1] *системы стимулирования* является значение целевой функции центра на множестве действий агента, реализуемых данной системой стимулирования. Следовательно, задача стимулирования заключается в том, чтобы выбрать оптимальную систему стимулирования – имеющую максимальную эффективность. Приведем формальные определения.

Множество действий агента, доставляющих максимум его целевой функции (и, естественно, зависящее от функции стимулирования), называется *множеством решений игры* или *множеством действий, реализуемых данной системой стимулирования*[2]:

(3) $P(s) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in A} \{s(y) - c(y)\}$.

Зная, что агент выбирает действия из множества[3] (3), центр должен найти систему стимулирования, которая максимизировала бы его собственную целевую функцию. Так как множество $P(s)$ может содержать более одной точки, необходимо доопределить (с точки зрения предположений центра о поведении агента) выбор агента. Если не оговорено особо, то в ходе последующего изложения будем считать выполненной *гипотезу благожелательности* (ГБ), которая заключается в следующем: если агент безразличен между выбором нескольких действий (например, действий, на которых достигается глобальный максимум его целевой функции), то он выбирает из этих действий то действие, которое наиболее благоприятно для центра.

---

[1] *В экономике традиционно под «эффективностью» понимается отношение эффекта к затратам. Мы же будем следовать сложившейся в теории управления терминологии, и называть эффективностью управления значение целевой функции центра (в общем случае эффективность может определяться как некоторый функционал над* ($F(\cdot)$, $f(\cdot)$, $s(\cdot)$, y)).

[2] *Всюду при использовании максимумов и минимумов предполагается, что они достигаются.*

[3] *Напомним, что запись* «$\operatorname{Arg}\max\limits_{v \in V} g(v)$» *обозначает множество глобальных максимумов функции* $g(v)$ *на множестве* V.

Итак, в рамках ГБ агент выбирает из множества (3) наиболее благоприятное для центра действие, следовательно, *эффективность системы стимулирования* $s \in M$ равна:

(4) $K(s) = \max\limits_{y \in P(s)} F(y)$

где $F(y)$ определяется (2).

Если отказаться от гипотезы благожелательности, то следует вместо эффективности (4) стимулирования использовать *гарантированную эффективность*

$$K_g(s) = \min_{y \in P(s)} F(y).$$

Прямая задача синтеза оптимальной системы стимулирования заключается в выборе допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность:

(5) $K(s) \to \max\limits_{s \in M}$,

или максимальную гарантированную эффективность:

$$K_g(s) \to \max_{s \in M}.$$

Система стимулирования $s^*(\cdot)$, являющаяся решением задачи (5), то есть имеющая максимальную эффективность, называется *оптимальной*[1]:

$$s^*(\cdot) = \arg\max_{s \in M} K(s).$$

Обозначим $K^* = K(s^*)$, $K_g^* = \max\limits_{s \in M} K_g(s)$. Очевидно, что $K^* \geq K_g^*$. В [11, 15] доказано, что, если целевые функции непрерывны, а допустимые множества компактны, то эффективность K_g^* гарантированно оптимальной системы стимулирования сколь угодно близка к эффективности K^* оптимальной системы стимулирования.

Обратная задача стимулирования заключается в поиске множества систем стимулирования, реализующих заданное действие, или в более общем случае – заданное множество действий $A^* \subseteq A$.

---

[1] *Напомним, что запись* «$\arg\max\limits_{v \in V} g(v)$» *значение аргумента, на котором достигается глобальный максимум функции* $g(v)$ *на множестве* V

Например, при $A^* = \{y^*\}$ обратная задача может заключаться в поиске множества $M(y^*)$ систем стимулирования, реализующих это действие, то есть[1] $M(y^*) = \{s\ \hat{I}\ M \mid y^*\ \hat{I}\ P(s)\}$. Определив $M(y^*)$, центр имеет возможность найти в этом множестве «минимальную» систему стимулирования, то есть реализующую заданное действие с минимальными затратами на стимулирование, или систему стимулирования, обладающую какими-либо другими заданными свойствами, например – монотонность, линейность и т.д.

Следует отметить, что введенные выше предположения согласованы в следующем смысле. Агент всегда может выбрать нулевое действие, не требующее от него затрат (второе предположение) и приносящее нулевой доход центру (третье предположение). В то же время, центр имеет возможность ничего не платить ему за выбор этого действия.

Во всех содержательных интерпретациях теоретико-игровых моделей стимулирования предполагается, что у агента имеется альтернатива – сохранить статус-кво, то есть не вступать во взаимоотношения с центром (не заключать трудового контракта). Отказываясь от участия в данной ОС, агент не получает вознаграждения от центра и всегда имеет возможность выбрать нулевое действие, обеспечив себе неотрицательное (точнее – нулевое) значение целевой функции. Если вне данной ОС агент может гарантированно получить полезность $\overline{U}\ {}^3\ 0$ (*пособие по безработице* или *резервную полезность* – reservation wage utility) в терминологии теории контрактов), то и при участии в данной ОС ему должен быть гарантирован не меньший уровень полезности. С учетом резервной полезности множество (3) реализуемых действий примет вид

(6) $P(s, \overline{U}) = \mathrm{Arg} \max\limits_{\{y \in A \mid s(y) \geq c(y) + \overline{U}\}} \{s(y) - c(y)\}.$

Далее для простоты, если не оговорено особо, без ограничения общности будем считать резервную полезность равной нулю.

Сделав маленькое отступление, обсудим более подробно модель процесса принятия решений агентом. Предположим, что

---

[1] *Напомним, что запись $\{v\ \hat{I}\ V \mid g(v)\ {}^3\ 0\}$ обозначает множество таких v, принадлежащих множеству V, на которых функция $g(x)$ принимает неотрицательные значения.*

некоторый агент предполагает устроиться на работу на некоторое предприятие. Ему предлагается контракт $\{s(y), y^*\}$, в котором оговаривается зависимость $s(\cdot)$ вознаграждения от результатов y его деятельности, а также то, какие конкретные результаты y^* от него ожидаются. При каких условиях агент подпишет контракт, если обе стороны – и агент, и предприятие (центр) принимают решение о подписании контракта самостоятельно и добровольно? Рассмотрим сначала принципы, которыми может руководствоваться агент.

Первое условие – *условие согласованности стимулирования* (incentive compartibility constraint), которое заключается в том, что при участии в контракте выбор именно действия y^* (а не какого-либо другого допустимого действия) доставляет максимум его целевой функции (функции полезности). Другими словами, это – условие того, что система стимулирования согласована с интересами и предпочтениями агента.

Второе условие – *условие участия* в контракте (иногда его называют *условием индивидуальной рациональности* – individual rationality constraint), которое заключается в том, что, заключая данный контракт, агент ожидает получить полезность, большую, чем он мог бы получить, заключив другой контракт с другой организацией (с другим центром). Представления агента о своих возможных доходах на рынке труда отражает такая величина как *резервная заработная плата*. Остановимся на ее рассмотрении более подробно.

<u>Пример 2.</u> Предположим, что агент (безработный или собирающийся сменить работу) имеет свои субъективные[1] представления о распределении вероятностей предлагаемой на рынке труда заработной платы (или ставки заработной платы[2]) [7, 17]. Обозначим плотность этого распределения $p(s)$, k^* – уровень квалифика-

---

[1] *Необходимо помнить, что рассматривается модель поиска работы некоторым конкретным агентом. Поведение других агентов в тех же условиях может отличаться в силу различий их индивидуальных характеристик.*

[2] *<u>Ставка заработной платы</u> при повременной оплате труда соответствует вознаграждению за единицу времени (час, день, месяц и т.д.). Заработная плата в этом случае определяется произведением ставки оплаты на продолжительность отработанного времени.*

ции[1] данного агента. Гипотетическая кривая распределения приведена на рисунке 3.

Понятно, что в среднем более высокой квалификации соответствует более высокая оплата. Если бы агент обладал полной информацией о требованиях $s^*(k)$ к квалификации, предъявляемых на рынке труда для получения соответствующей заработной платы, и если бы достоверная информация о его квалификации k^* была полностью доступна всем потенциальным работодателям (центрам), то он был бы, фактически, лишен выбора и соглашался бы на существующий однозначный рыночный уровень заработной платы $s^*(k^*)$, соответствующий его квалификации. Проблема заключается в том, что информация о рынке труда несовершенна, то есть и агент, и центр действуют в условиях неполной информированности.

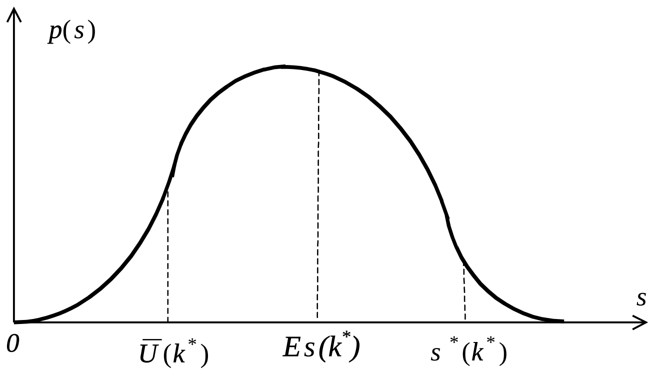

Рис. 3. Резервная, ожидаемая и максимальная заработная плата

Предположим, что агент имеет свои субъективные представления о минимальном уровне заработной платы $\overline{U}(k^*)$, за которую он согласен работать при данной его квалификации. Величина

---

[1] *Квалификацию в данном случае следует понимать в широком смысле – как совокупность не только профессиональных, но и личностных качеств и навыков (например, ответственность, организаторские способности, умение работать в коллективе и др.).*

$\overline{U}(k^*)$ называется *резервной заработной платой*. Тогда процесс поиска работы можно представить себе следующим образом: получая информацию о предлагаемых условиях работы и ее оплаты, агент соглашается с первым предложением, превышающим его резервную заработную плату (в случае смены работы в качестве резервной заработной платы может выступать, например, величина зарплаты на старом месте работы или величина пособия по безработице и т.д.).

Так как агент не может получить заработную плату, превышающую $s^*(k^*)$ (поэтому величину $s^*(k^*)$ иногда называют *максимальной заработной платой*), то ожидаемая заработная плата будет равна следующей величине:

$$Es(k^*) = \int_{\overline{U}(k^*)}^{s^*(k^*)} s\ p(s)\,ds\ .$$

Более подробное обсуждение свойств резервной заработной платы и моделей поиска работы можно найти в [17]. •

Вернемся к анализу условий взаимовыгодности заключения трудового контракта.

Аналогичные (приведенным выше для агента) условия согласованности и индивидуальной рациональности можно сформулировать и для центра. Если имеется единственный агент – претендент на заключение контракта, то контракт будет выгоден для центра, если выполнены два условия.

Первое условие (аналогичное условию согласованности стимулирования) отражает согласованность системы стимулирования с интересами и предпочтениями центра, то есть применение именно фигурирующей в контракте системы стимулирования должно доставлять максимум целевой функции (функции полезности) центра (по сравнению с использованием любой другой допустимой системы стимулирования) – см. (4).

Второе условие для центра аналогично условию участия для агента, а именно – заключение контракта с данным агентом выгодно для центра по сравнению с сохранением статус-кво, то есть отказу от заключения контракта вообще. Например, если считать, что прибыль предприятия (значение целевой функции центра) без заключения контракта равна нулю, то при заключении контракта прибыль должна быть неотрицательна.

Если претендентов на заключение контракта несколько, то центру необходимо учитывать третье условие – наиболее выгодно должно быть заключение контракта именно с данным (а не каким-либо другим) агентом или множеством агентов.

Качественно обсудив условия заключения взаимовыгодного трудового контракта, вернемся к формальному анализу, то есть решению задачи стимулирования (4). Отметим, что решение данной задачи «в лоб» достаточно трудоемко. Но, к счастью, можно угадать оптимальную систему стимулирования исходя из содержательных соображений, а затем корректно обосновать ее оптимальность.

Легко видеть, что в рамках введенных предположений при участии агента в рассматриваемой организационной системе ему гарантируется как минимум нулевое значение полезности. Условие неотрицательности полезности агента:

(7) $\forall\ y \in P(\sigma)\ \ f(y) \geq 0$

является условием индивидуальной рациональности. Следовательно, как минимум, реализуемыми будут такие действия, при выборе которых значения целевой функции агента будут неотрицательны (см. (6)):

(8) $P_0(\sigma) = \{y \in A \mid \sigma(y) \geq c(y)\} \subseteq P(\sigma)$.

Предположим, что функция $H(\cdot)$ дохода центра – возрастающая и вогнутая (свойство убывающей предельной полезности), а функция $c(\cdot)$ затрат агента – выпуклая (предельные затраты увеличиваются с ростом действия). На рисунке 4 изображены графики функций: $H(y)$ и $(c(y) + \overline{U})$. С точки зрения центра стимулирование не может превышать доход, получаемый им от деятельности агента (так как, отказавшись от взаимодействия с агентом, центр всегда может получить нулевую полезность). Следовательно, допустимое решение лежит ниже функции $H(y)$. С точки зрения агента стимулирование не может быть меньше, чем сумма затрат и резервная полезность (которую агент всегда может получить, выбирая нулевое действие). Следовательно, допустимое решение лежит выше функции $(c(y) + \overline{U})$.

Множество действий агента и соответствующих значений вознаграждений, удовлетворяющих как для центра, так и для агента одновременно всем перечисленным выше ограничениям (согласования, индивидуальной рациональности и др.) называется «*область компромисса*» и заштрихована на рисунке 4. При этом реализуемыми оказываются действия агента из следующего множества:

(9) $S = \{x \in A \mid H(x) - c(x) - \overline{U} \geq 0\}$.

Легко видеть, что при неизменных функциях дохода и затрат с ростом величины $\overline{U}$ область компромисса вырождается.

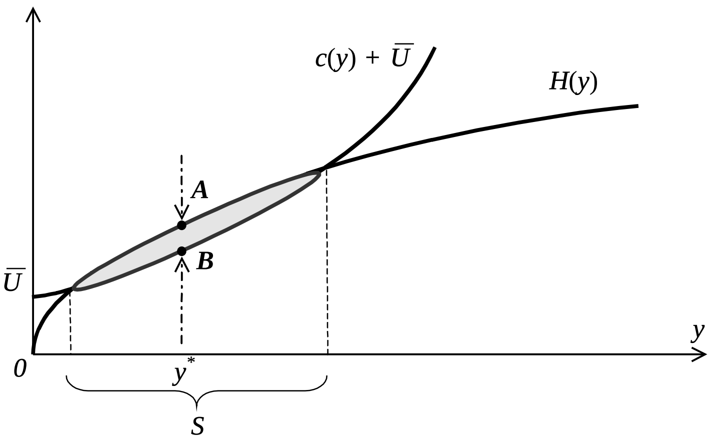

Рис. 4. Область компромисса в задаче стимулирования

Так как центр стремится минимизировать выплаты агенту, при условии, что последний выбирает требуемое действие, то оптимальная точка должна лежать на нижней границе области компромисса, то есть с точки зрения центра **стимулирование в точности должно равняться сумме затрат агента и резервной полезности**. Этот важный вывод получил в литературе название «*принцип компенсации затрат*» [7, 11, 12, 14]. В соответствии с этим принципом, для того, чтобы побудить агента выбрать определенное действие, центру достаточно, помимо резервной полезности, компенсировать затраты агента. Помимо компенсации затрат, центр может устанавливать также мотивирующую надбавку[1] $d \geq 0$.

Следовательно, для того, чтобы агент выбрал действие x Î A, стимулирование со стороны центра за выбор этого действия должно быть равно

(10) $s(x) = c(x) + \overline{U} + d$.

Легко видеть, что, если в противном случае (то есть при выборе агентом другого действия) вознаграждение равно нулю, то выполнены как условия согласованности стимулирования, так и условие индивидуальной рациональности агента. При этом стимулирование со стороны центра является минимально возможным. Следовательно, доказано, что параметрическим (с параметром x Î A) **решением задачи стимулирования** (5) является следующая система стимулирования

(11) $s_{QK}(x, y) = \begin{cases} c(x) + \overline{U} + d, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$,

которая называется *квазикомпенсаторной* (QK-*типа*).

В случае, если на максимальную величину вознаграждения наложено ограничение C ³ 0, которое можно рассматривать как размер *фонда заработной платы* (ФЗП), то из (10) следует, что область компромисса (9) имеет вид:

$$S = \{x \text{ Î } A \mid H(x) - C - \overline{U} \text{ ³ } 0\}.$$

Рассмотрим теперь, какое действие следует реализовывать центру, то есть каково оптимальное значение x Î A.

Так как в силу (10)-(11) стимулирование равно затратам агента, то **оптимальным реализуемым действием y^* является действие, максимизирующее в области компромисса разность между доходом центра и затратами агента**. Следовательно, оптимальное реализуемое действие может быть найдено из решения следующей стандартной оптимизационной задачи

(12) $y^* = \arg \max\limits_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}$,

[1] *С точки зрения формальной модели стимулирования достаточно, чтобы материальное стимулирование со стороны центра компенсировало затраты агента. Мотивирующая надбавка d ³ 0 может отражать мотивационные (психологические и др.) аспекты управления.*

которая получила название *задачи оптимального согласованного планирования* [1, 12]. Действительно, то действие, которое центр собирается побуждать выбирать агента, может интерпретироваться как *план* – желательное с точки зрения центра действие агента. В силу принципа компенсации затрат план является согласованным, значит центру в силу (11) остается найти оптимальный согласованный план.

Условие оптимальности в рассматриваемой модели (в предположении дифференцируемости функций дохода и затрат, а также вогнутости функции дохода центра и выпуклости функции затрат агента) имеет вид: $\frac{dH(y^*)}{dy} = \frac{dc(y^*)}{dy}$. Величина $\frac{dH(y)}{dy}$ в экономике называется предельной производительностью агента (MRP), а величина $\frac{dc(y^*)}{dy}$ – его предельными затратами (MC). Условие оптимума (MRP = MC) – определяет так называемую *эффективную заработную плату*.

Отметим еще одну важную содержательную интерпретацию условия (11). Оптимальный план y^* максимизирует разность между доходом центра и затратами агента, то есть доставляет максимум суммы целевых функций (1) и (2) участников ОС, и, следовательно, является эффективным по Парето[1].

Отметим, что квазикомпенсаторная система стимулирования не является единственной оптимальной системой стимулирования – легко показать, что в рамках гипотезы благожелательности решением задачи (5) является любая система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, удовлетворяющая следующему условию: $\tilde{\sigma}(y^*) = c(y^*) + \overline{U}$, $\forall y \neq y^*$ $\tilde{\sigma}(y) \leq c(y)$ – см. рисунок 5, на котором приведены эскизы трех оптимальных систем стимулирования – σ_1^*, σ_2^* и σ_3^*.

[1] *Напомним, что альтернатива называется эффективной по Парето, если не существует другой альтернативы, обеспечивающей всем участникам ОС не меньшие выигрыши, и хотя бы одному участнику – строго больший выигрыш.*

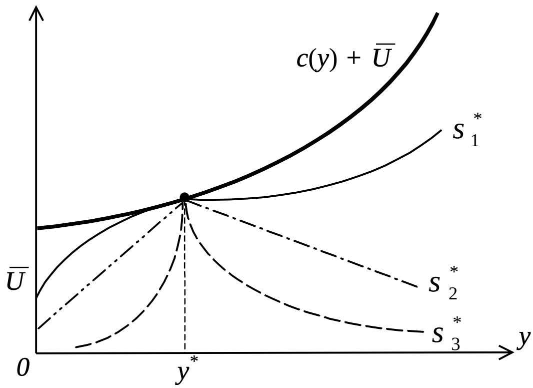

Рис. 5. Оптимальные системы стимулирования

Область компромисса является чрезвычайно важным понятием. Ее непустота отражает наличие возможности согласования интересов центра и агента в существующих условиях. Поясним последнее утверждение.

В формальной модели стратегии участников ограничены соответствующими допустимыми множествами. Учет ограничений индивидуальной рациональности агента (условно можно считать, что параметр резервной зарплаты $\overline{U}$, фигурирующий в условии участия, отражает ограничения рынка труда – см. введение) и центра (условно можно считать, что неотрицательность целевой функции центра отражает ограничения финансовой эффективности деятельности центра – затраты на стимулирование агента не должны превышать доход от результатов его деятельности), а также условий согласования, приводит к тому, что множество «рациональных» стратегий – область компромисса – оказывается достаточно узкой.

Фактически, компромисс между центром и агентом заключается в дележе полезности, равной разности полезностей в точках A и B на рисунке 4. Делая первый ход (предлагая контракт), центр «забирает» эту разность себе, вынуждая агента согласиться с резервным значением полезности. Легко проверить, что в противоположной ситуации, когда первый ход делает агент, предлагая контракт центру, нулевую полезность получает центр, а агент «забирает» разность полезностей между точками A и B себе.

Точки A и B на рисунке 4 являются «предельными» случаями, в которых вся «прибыль» $D = H(y^*) - C(y^*) - \overline{U}$ достается, соответственно, либо агенту, либо центру. Значительный интерес представляют промежуточные случаи, в которых величина D делится между центром и агентом в соответствии с некоторым правилом, взаимная договоренность о котором является *компромиссом* и достигается в результате переговоров [7, 15]. Примерами подобных правил являются: равное распределение (при котором центр и агент получают по $D/2$), принцип равных рентабельностей:

$$[H(y^*) - s(y^*)] / s(y^*) = [s(y^*) - c(y^*)] / c(y^*),$$

при котором размер вознаграждения является средним геометрическим между доходом центра и затратами агента, и др.

Из проведенного анализа следует, что решение задачи стимулирования может быть разделено на два этапа. На *первом этапе* решается *задача согласования* – определяется множество (3) реализуемых при заданных ограничениях действий. На *втором этапе* решается *задача оптимального согласованного планирования* (12) – ищется реализуемое действие, которое наиболее предпочтительно с точки зрения центра. Подобная идеология разбиения решения задачи управления ОС на этапы используется и в теории активных систем, и в теории контрактов при решении широкого класса задач.

Существенным «плюсом» квазикомпенсаторных систем стимулирования является их простота и высокая эффективность, существенным «минусом» – абсолютная неустойчивость относительно возможных возмущений параметров модели [2]. Действительно, если центр неточно знает функцию затрат агента, то сколь угодно малая неточность может приводить к значительным изменениям реализуемых действий. Вопросы адекватности моделей стимулирования, устойчивости оптимальных решений и т.д. подробно исследовались в [2, 3]. Предложенная в упомянутых работах техника анализа и методы повышения гарантированной (в рамках имеющейся у центра информации) эффективности стимулирования могут быть непосредственно использованы и для моделей, рассматриваемых ниже, поэтому проблемы адекватности и устойчивости в настоящей работе не рассматриваются.

Выше описан подход к решению задачи стимулирования, использующий анализ свойств множеств реализуемых действий: определялось множество действий, реализуемых некоторой системой стимулирования, после чего вычислялся максимум целевой функции центра по этому множеству, а затем уже выбиралась система стимулирования. При этом задача стимулирования распадается на два этапа: этап согласования и этап согласованного планирования. В явном виде эту последовательность можно выразить следующим образом: на первом этапе для каждой допустимой системы стимулирования вычисляются множества реализуемых действий, затем берется их объединение: $P_M = \bigcup\limits_{s \in M} P(s)$, после чего на втором этапе решается задача планирования – максимизации целевой функции центра на множестве P_M (отметим, что с точки зрения модели компромисса $P_M = S$).

Умея решать прямую задачу стимулирования, достаточно просто найти и решение соответствующей обратной задачи. Например, выражение (9) позволяет определить минимальные ограничения на стимулирование, позволяющие реализовывать заданные действия. Взаимосвязь прямых и обратных задач стимулирования подробно обсуждались в монографии [11]. Поэтому в настоящей работе в основном ограничимся прямыми задачами стимулирования, наиболее близкими к задачам управления персоналом и т.д.

Интересно подчеркнуть, что выше оптимальное решение, фактически, угадано без решения задачи «в лоб»[1]. Существенную помощь при этом оказала идея введения множеств реализуемых

[1] *Следует признать, что для теории активных систем во многих случаях характерно именно угадывание решений (исходя из интуиции, содержательных рассуждений и т.д.), а также стремление получить аналитическое решение. Объяснения этому достаточно прозрачны: исследование формальной модели социально-экономической системы не является самоцелью специалиста по управлению – его задача заключается в том, чтобы предложить максимально адекватное действительности содержательно интерпретируемое решение задачи управления.*

действий. Альтернативным подходом является анализ минимальных затрат на стимулирование[1].

Минимальными затратами (*центра*) *на стимулирование* по реализации действия $y \in P_M$ в классе допустимых систем стимулирования M называется следующая величина:

(13) $\sigma_{\min}(y) = \min\limits_{\sigma \in M} \{\sigma(y) \mid y \in P(\sigma)\}$,

то есть минимальное допустимое вознаграждение, которое побудит агента выбрать заданное действие. Для тех действий, которые не могут быть реализованы в классе M, положим минимальные затраты на стимулирование равными бесконечности:

(14) $\sigma_{\min}(y) = +\infty,\ y \in A \setminus P_M$.

Если одно и то же действие может быть реализовано несколькими системами стимулирования, то, очевидно, что в рамках утилитарной модели большей эффективностью обладает та из них, которая характеризуется меньшими затратами на стимулирование. Другими словами, оптимальным является класс систем стимулирования, реализующий любое действие агента с минимальными затратами центра на стимулирование. Например, в рамках введенных предположений принцип компенсации затрат можно сформулировать следующим образом: $\forall\ y \in P_M \quad \sigma_{\min}(y) = c(y) + \overline{U}$.

Как следует из сказанного выше, в рамках введенных предположений квазикомпенсаторная система стимулирования (11) является оптимальным решением базовой задачи стимулирования. Казалось бы, что можно еще «вытянуть» из этой задачи? Все дело в том, что считалось, что квазикомпенсаторная система является допустимой. Однако, на практике это не всегда так – центр может быть жестко ограничен некоторым фиксированным классом систем стимулирования, причем эти ограничения могут быть как экзогенными – например, определяться правовыми нормами, регулирующими оплату труда, так и эндогенными – по тем или иным причинам центр может быть склонен к использованию, например, сдельной или повременной оплаты, а не к простой компенсации

---

[1] *Следует сделать следующее терминологическое замечание. Понятие «затраты» характеризуют затраты агента по выбору того или иного действия, понятие же «затраты на стимулирование» характеризуют затраты центра на стимулирование по реализации того или иного действия.*

затрат. Следовательно, необходимо оценить сравнительную эффективность различных систем стимулирования.

Приводимое ниже описание систем стимулирования выполнено в рамках следующего общего подхода: для фиксированного класса систем стимулирования определяются минимальные затраты на стимулирование, затем сравниваются затраты на стимулирование для различных классов. Априори можно сказать, что так как «идеалом» являются «абсолютно оптимальные» квазикомпенсаторные системы стимулирования, то эффективность любой системы стимулирования будет не выше (а затраты на стимулирование, соответственно, не ниже), чем квазикомпенсаторной. Однако, важно не только качественное соотношение эффективностей, так как ключевым является вопрос именно о количественных потерях в эффективности (приросте в минимальных суммарных затратах на стимулирование) – только зная величину этих потерь управляющий орган может принимать решение о целесообразности использования конкретной системы стимулирования. Основным инструментом оценки потерь в эффективности являются приведенные выше результаты о соотношении эффективности и минимальных затрат на стимулирование, поэтому достаточным оказывается вычисление разности или отношения показателей эффективности или соответствующих затрат на стимулирование.

Закончив вводную часть, в которой с точки зрения теории активных систем и теории иерархических игр обсуждается инструментарий для дальнейшего исследования, перейдем к описанию задачи стимулирования с точки зрения теории контрактов.

3. МОДЕЛЬ ТЕОРИИ КОНТРАКТОВ

Теория контрактов – раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий теоретико-игровые модели взаимодействия управляющего органа – центра – и управляемого субъекта – агента, функционирующих в условиях внешней (возникающей извне по отношению к рассматриваемой ОС) вероятностной неопределенности [11, 19].

Учет неопределенности в моделях теории контрактов производится следующим образом: *результат деятельности* агента

z Î A_0 является случайной величиной, значение которой зависит как от действий агента y Î A, так и от внешнего неопределенного параметра – *состояния природы* q Î W, отражающее внешние условия деятельности агента.

Информированность участников ОС следующая: на момент принятия решений и центр, и агент знают распределение вероятностей состояния природы $p(q)$, или условное распределение результата деятельности $p(z, y)$. Действия агента не наблюдаются центром, которому становится известным лишь результат деятельности. Агент может либо знать состояние природы на момент выбора своего действия (случай *асимметричной информированности*), либо знать только его распределение (случай *симметричной информированности*, более соответствующий моделям стимулирования и поэтому в основном рассматриваемый ниже).

Стратегией центра является выбор функции $s(\cdot)$ от результата деятельности агента, которая в зависимости от содержательных трактовок модели может интерпретироваться как функция стимулирования (трудовые контракты), величина страхового возмещения (страховые контракты), величина задолженности или выплат (долговые контракты) и т.д. Стратегией агента является выбор действия при известной стратегии центра. Под контрактом, как и в предыдущем разделе, понимается совокупность стратегий центра и агента. При этом различают как явные контракты, то есть зафиксированные с юридической точки зрения (большинство страховых и долговых контрактов являются явными), так и неявные, то есть не заключаемые формально или подразумеваемые (в ряде случаев трудовые контракты являются неявными).

Так как результат деятельности агента, значение которого определяет полезности участников ОС, зависит от неопределенных параметров, то будем считать, что при принятии решений они усредняют свои полезности по известному распределению вероятностей и выбирают стратегии, максимизирующие ожидаемую полезность.

Оптимальным является контракт, который наиболее выгоден для центра (максимизирует его целевую функцию), при условии, что агенту взаимодействие с центром также выгодно. Последнее означает, что с точки зрения агента, как и в рассмотренной в разделе 2 модели, одновременно должны выполняться два условия – условие участия и условие индивидуальной рациональности.

Исторически первые работы по теории контрактов (см. ссылки в [8]) появились в начале 70-х годов как попытка объяснения в результате анализа теоретико-игровых моделей наблюдаемого противоречия между результатами макроэкономических теорий и фактическими данными по безработице и инфляции в развитых странах.

Одно из «противоречий» заключалось в следующем. Существуют три «типа» заработной платы: рыночная заработная плата («средняя» резервная полезность, на которую может рассчитывать данный агент), эффективная заработная плата (та заработная плата, которая максимизирует эффективность деятельности агента с точки зрения предприятия[1]) и фактическая заработная плата (та зарплата, которую получает агент). Статистические данные свидетельствовали, что фактическая зарплата не равна эффективной заработной плате (этот и подобные выводы делались исходя из анализа данных по уровню безработицы и уровню инфляции).

В первых моделях по теории контрактов рассматривались задачи определения оптимального числа нанимаемых агентов при учете только ограничения участия и фиксированных стратегиях центра, затем появились работы, посвященные методам решения задач управления (задач синтеза оптимальных контрактов), сформулированных с учетом и условия участия, и условия согласованности, затем акцент сместился на изучение более сложных моделей, описывающих многоэлементные и динамические модели, возможность перезаключения контрактов и т.д.

С точки зрения эффектов страхования (перераспределения риска) интересен следующий сделанный в теории контрактов вывод: различие между эффективной и фактической зарплатой качественно может быть объяснено тем, что нейтральный к риску центр страхует несклонных к риску агентов от изменений величины заработной платы в зависимости от состояния природы: стабильность заработной платы обеспечивается за счет того, что в

[1] *В большинстве случаев эффективная заработная плата определяется из условия равенства предельного продукта, производимого агентом, и предельных затрат этого агента*

благоприятных[1] ситуациях величина вознаграждения меньше эффективной заработной платы, зато в неблагоприятных ситуациях она выше той, которая могла бы быть без учета перераспределения риска[2]. Приведем пример, иллюстрирующий это утверждение.

Пример 3. Пусть у агента имеются два допустимых действия: $A = \{y_1; y_2\}$, $A_0 = \{z_1; z_2\}$, $P = \begin{Vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{Vmatrix}$, $½ < p \le 1$. Содержательно, результат деятельности агента в большинстве случаев (так как $p > ½$) «совпадает» с соответствующим действием.

Обозначим затраты агента по выбору первого и второго действия c_1 и c_2 соответственно, $c_2 \ge c_1$; ожидаемый доход центра (стимулирование) от выбора первого и второго действия – H_1 и H_2 (σ_1 и σ_2) соответственно; целевую функцию центра, представляющую собой разность между доходом и стимулированием – F, целевую функцию агента, представляющую собой разность между стимулированием и затратами – f.

Задача центра заключается в назначении системы стимулирования, которая максимизировала бы ожидаемое значение его целевой функции[3] EF при условии, что выбираемое агентом действие максимизирует ожидаемое значение Ef его собственной целевой функции.

Допустим, что агент *нейтрален к риску* (то есть его *функция полезности*, отражающая отношение к риску, линейна), и рассмотрим какую систему стимулирования центр должен использовать, чтобы побудить агента выбрать действие y_1. В предположении равенства нулю резервной полезности задача поиска минимальной системы стимулирования, реализующей действие y_1, имеет вид

---

[1] *На деятельность предприятий и, следовательно, на величину заработной платы, оказывают влияние как внешние макропараметры (сезонные колебания, периоды экономического спада и подъема, мировые цены и т.д.), так и такие параметры как состояние здоровья работника и др.*

[2] *Быть может, именно важностью этого вывода обусловлено то, что в работах по теории контрактов рассматриваются практически только модели с внешней вероятностной неопределенностью (в детерминированном случае, или в случае неопределенности при нейтральном к риску агенте, эффекты страхования, естественно, пропадают и фактическая заработная плата равна эффективной).*

[3] *Символ «E» обозначает оператор математического ожидания.*

(первое ограничение является ограничением согласованности стимулирования, второе – ограничением индивидуальной рациональности агента):

(15) $p\ s_1 + (1 - p)\ s_2 \to \min\limits_{s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0}$

(16) $p\ s_1 + (1 - p)\ s_2 - c_1 \geq p\ s_2 + (1 - p)\ s_1 - c_2$

(17) $p\ s_1 + (1 - p)\ s_2 - c_1 \geq 0.$

Задача (15)-(17) является задачей линейного программирования.

Множество значений стимулирования, удовлетворяющих условиям (16) и (17), заштриховано на рисунке 6, его подмножество, на котором достигается минимум выражения (15), выделено жирной линией (линия уровня функции (15), отмеченная на рисунке 6 пунктирной линией, имеет тот же наклон, что и отрезок[1] A_1B_1). Для определенности в качестве решения выберем из отрезка B_1C_1 точку C_1, характеризуемую следующими значениями:

(18) $s_1 = [p\ c_1 - (1 - p)\ c_2] / (2p - 1)$,

(19) $s_2 = [p\ c_2 - (1 - p)\ c_1] / (2p - 1)$.

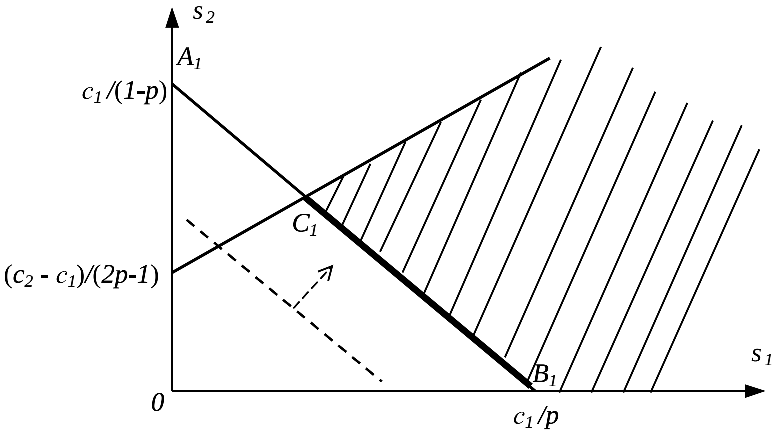

Рис. 6. Реализация центром действия y_1 при нейтральном к риску агенте

[1] *Отметим, что наличие множества решений при нейтральных к риску центре и агенте является характерной чертой задач теории контрактов. В то же время, введение строго вогнутой функции полезности агента (отражающей его несклонность к риску) приводит к единственности решения.*

Легко проверить, что ожидаемые затраты центра на стимулирование $Es(y_1)$ по реализации действия y_1 равны c_1, то есть

(20) $Es(y_1) = c_1$.

Предположим теперь, что центр хочет реализовать действие y_2. Решая задачу, аналогичную (15)-(17), получаем (см. точку C_2 на рисунке 7):

(21) $s_1 = [p\, c_1 - (1 - p)\, c_2] / (2p - 1)$,

(22) $s_2 = [p\, c_2 - (1 - p)\, c_1] / (2p - 1)$,

(23) $Es(y_2) = c_2$.

На втором шаге центр выбирает, какое из допустимых действий ему выгоднее реализовать, то есть какое действие максимизирует разность между доходом и ожидаемыми затратами центра на стимулирование по его реализации. Таким образом, ожидаемое значение целевой функции центра при заключении оптимального контракта равно $F^* = \max \{H_1 - c_1, H_2 - c_2\}$.

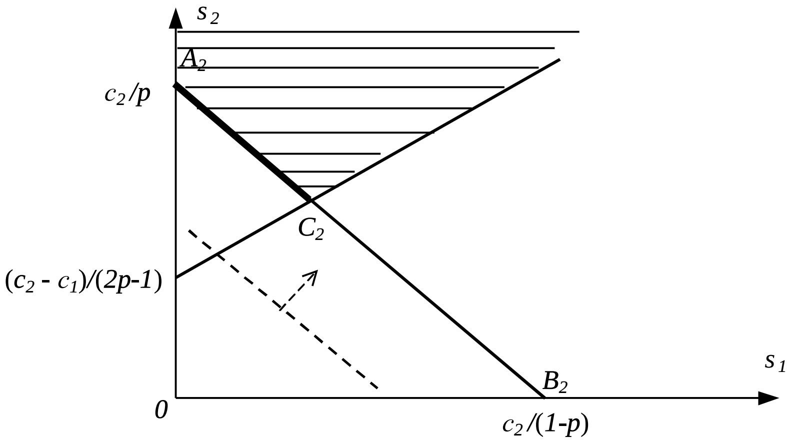

Рис. 7. Реализация центром действия y_2 при нейтральном к риску агенте

Исследуем теперь эффекты страхования в рассматриваемой модели. Пусть агент не склонен к риску, то есть оценивает неопределенные величины в соответствии со строго возрастающей строго вогнутой функцией полезности $u(\cdot)$. Так как от случайной величины – результата деятельности агента – зависит его вознаграждение (значение функции стимулирования), то предположим, что целевая функция агента имеет вид:

(24) $f(s(\cdot), z, y) = u(s(z)) - c(y)$.

Обозначим[1] $v_1 = u(s_1)$, $v_2 = u(s_2)$, $u^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная к функции полезности агента, и предположим, что функция полезности неотрицательна и в нуле равна нулю. Пусть центр заинтересован в побуждении агента к выбору действия y_1. Задача стимулирования в рассматриваемой модели примет вид (первое ограничение является ограничением согласованности стимулирования, второе – ограничением индивидуальной рациональности агента):

(25) $p\, u^{-1}(v_1) + (1 - p)\, u^{-1}(v_2)$ ® $\min\limits_{v_1 \geq 0,\, v_2 \geq 0}$

(26) $p\, v_1 + (1 - p)\, v_2 - c_1$ ³ $p\, v_2 + (1 - p)\, v_1 - c_2$

(27) $p\, v_1 + (1 - p)\, v_2 - c_1$ ³ 0.

Заметим, что линейные неравенства (26)-(27) совпадают с неравенствами (16)-(17) с точностью до переобозначения переменных. На рисунке 8 заштрихована область допустимых значений переменных v_1 и v_2. Линия уровня функции (25) (которая является выпуклой в силу вогнутости функции полезности агента) обозначена пунктиром.

В случае строго вогнутой функции полезности агента (при этом, очевидно, целевая функция (25) строго выпукла) внутреннее решение задачи условной оптимизации (25)-(27) единственно и имеет следующий вид (в качестве примера возьмем функцию полезности $u(t) = b\, ln(1 + g\, t)$, где b и g – положительные константы):

(28) $v_1 = c_1 + (c_1 - c_2)\, (1 - p) / (2p - 1)$,

(29) $v_2 = c_1 + (c_2 - c_1)\, p / (2p - 1)$.

Легко проверить, что в рассматриваемом случае при использовании системы стимулирования (28)-(29) ожидаемая полезность агента от выплат со стороны центра равна затратам агента по выбору первого действия, то есть

(30) $Ev = c_1$.

---

[1] *Подобная замена переменных, позволяющая линеаризовать систему ограничений, используется в двушаговом методе решения задачи теории контрактов.*

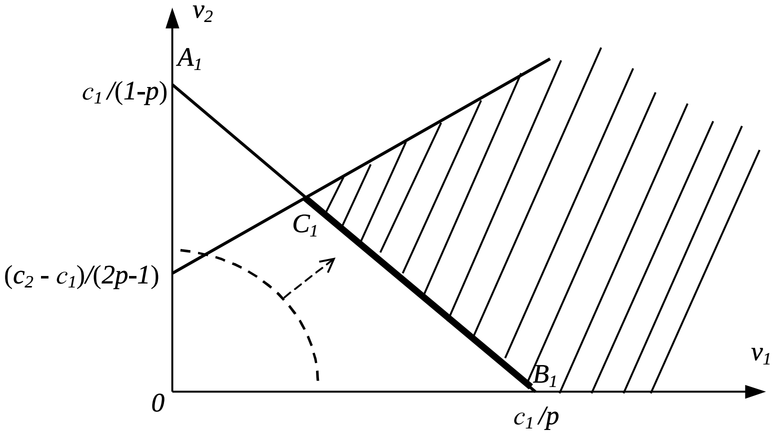

Рис. 8. Реализация центром действия y_1

Аналогично можно показать, что, если центр побуждает агента выбирать второе действие, то ожидаемая полезность агента от выплат со стороны центра в точности равна затратам агента по выбору второго действия.

Из (28)-(29) видно, что в случае несклонного к риску агента, побуждая его выбрать первое действие, центр «недоплачивает» в случае реализации первого результата деятельности ($v_1 \le c_1$) и «переплачивает» в случае реализации второго результата деятельности ($v_2 \ge c_2$), причем при предельном переходе к детерминированному случаю[1] (чему соответствует $p \to 1$) имеет место: $v_1 \to c_1$, $v_2 \to c_2$.

---

[1] *Отметим, что все модели с неопределенностью должны удовлетворять <u>принципу соответствия</u>: при «стремлении» неопределенности к «нулю» (то есть при предельном переходе к соответствующей детерминированной системе) все результаты и оценки должны стремиться к соответствующим результатам и оценкам, полученным для детерминированного случая. Например, выражения* (28)-(29) *при $p = 1$ переходят в решения, оптимальные в детерминированном случае.*

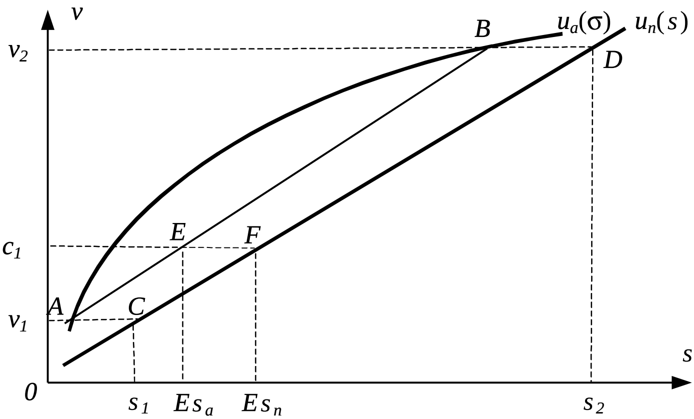

Рис. 9. Эффект страхования при реализация центром действия y_1

Графически эффект страхования в рассматриваемой модели для случая реализации первого действия отражен на рисунке 9, на котором изображены линейная (определенная с точностью до аддитивной константы) функция полезности агента $u_n(\cdot)$ и его строго вогнутая функция полезности $u_a(\cdot)$. Так как отрезок AB лежит выше и/или левее отрезка CD, а ожидаемая полезность агента в обоих случаях равна c_1, то при несклонности агента к риску ожидаемые выплаты Es_a меньше, чем ожидаемые выплаты Es_n, соответствующие нейтральному к риску агенту (см. точки E и F на рисунке 9). •

Завершив рассмотрение примера, иллюстрирующего эффекты страхования в моделях теории контрактов, перейдем к описанию задачи синтеза оптимального трудового контракта в терминах теории контрактов.

Пусть целевая функция несклонного к риску агента $f(s(\cdot), y, z)$ представляет собой разность между полезностью $u(s(z))$ от стимулирования $s(z)$, получаемого от центра и зависящего от результата деятельности агента, и детерминированными затратами $c(y)$, то есть

(31) $f(s(\cdot), y, z) = u(s(z)) – c(y)$.

Целевая функция нейтрального к риску центра $F(s(\cdot), y, z)$ представляет собой разность между детерминированным доходом $H(y)$ и стимулированием:

(32) $F(s(\cdot), y, z) = H(y) - s(z)$.

Задача синтеза оптимального контракта, описываемого кортежем $(s^*(\cdot), y^*)$, заключается в поиске такой зависимости $s^*(\cdot)$ вознаграждения агента от результатов его деятельности, которая максимизировала бы ожидаемое значение целевой функции центра при условии, что агент в рамках заключенного страхового контракта выбирает действие y^*, максимизирующее ожидаемое значение его собственной целевой функции, то есть:

(33) $EF(s(\cdot), z, y^*) \to \max\limits_{s(\cdot)}$,

(34) $y^* = \arg\max\limits_{y \in A} Ef(s(\cdot), z, y)$.

Для решения задачи (33)-(34) в случае конечных множеств допустимых действий агента и допустимых результатов его деятельности возможно использовать *двушаговый метод*[1], заключающееся в следующем. На первом шаге для фиксированного действия агента ищется минимальная (в смысле ожидаемых затрат центра на стимулирование) система стимулирования, реализующая это действие. На втором шаге ищется оптимальное реализуемое действие агента.

Недостатком данного метода является, во-первых, возможность его использования только для дискретных задач, во-вторых, высокая вычислительная сложность (если возможны k действий агента, то необходимо решать k задач выпуклого программирования), в-третьих, отсутствие возможности анализа зависимости оптимального контракта от параметров модели.

Завершив рассмотрение основных подходов к задаче стимулирования, используемых в теории управления, перейдем к обсуждению этой задачи с точки зрения экономики труда.

---

[1] *Если и центр, и агент нейтральны к риску, то решение задачи* (33)-(34) *неоднозначно, что качественно объясняется бессмысленностью перераспределения риска между субъектами, одинаково к нему относящимися.*

4. ПРОБЛЕМА СТИМУЛИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ ТРУДА

Экономика труда – раздел экономической теории, изучающий функционирование рынка в сфере труда, то есть поведение работодателей и работников в ответ на действие общих факторов: заработной платы, цен, условий труда и т.д. В контексте исследования задач стимулирования нас будет интересовать индивидуальное поведение на рынке труда (точнее, те его составляющие, которые определяются действующими на этом рынке механизмами и системами стимулирования), то есть принципы принятия решений агентом, являющимся субъектом рынка труда. Поэтому в настоящем разделе описывается модель взаимодействия агента и центра (соответственно, работника и предприятия), то есть в основном рассматривается эффективная, а не рыночная заработная плата.

Прерогативой агента – стороны, предлагающей рабочую силу на рынке труда, является, в частности, определение (совместно с работодателем) продолжительности рабочего времени, понимаемой в широком смысле – и как продолжительность рабочего дня, и как возможную работу в течение неполного рабочего дня и т.д. Для простоты будем считать, что единственной альтернативой рабочему времени является время, затрачиваемое на досуг, поэтому предложение труда эквивалентно спросу на досуг [17].

Опять же для упрощения изложения, пока не будет оговорено особо, будем считать, что совокупный доход пропорционален количеству отработанных часов, то есть, предположим, что на рынке труда используются только пропорциональные (повременные) системы стимулирования, в которых ставка оплаты постоянна и не зависит от суммарного количества отработанных часов.

Проанализируем поведение агента на рынке труда, то есть, исследуем его предпочтения в дилемме «труд – досуг», в рамках которой характеристикой предложения труда является желаемая продолжительность рабочего времени. Анализ будем проводить, последовательно усложняя описание модели поведения – от качественного вербального обсуждения к графическому анализу и, наконец, к формальной математической модели[1].

В экономике труда считается, что индивидуальное поведение на рынке рабочей силы определяется двумя эффектами – дохода и замещения [17]. Опишем модель принятия агентом решения относительно продолжительности рабочего времени.

Пусть *полезность* агента $u(q, t)$ зависит от его *дохода* q Î Â^1 и продолжительности ежедневного *свободного времени* (времени досуга) t Î $[0; T]$, где свободное и *рабочее время* t Î $[0; T]$ связаны условием[2] $t + t = T$. В некоторых работах зарубежных авторов полезность определяется на множестве пар «время досуга агента × количество товаров и услуг, которые он может приобрести». Понятно, что если цены на товары и услуги фиксированы, то такое представление эквивалентно введенному выше.

Предположим, что функция полезности $u(q, t)$ непрерывно дифференцируема, частично строго монотонна и имеет убывающие и выпуклые кривые безразличия.

Если у агента отсутствуют нетрудовые доходы (non-wage income), то его доход равен заработной плате и однозначно определяется продолжительностью рабочего времени, то есть $q(t) = s(t)$.

Функция полезности u(x) ставит в соответствие каждой альтернативе – паре (q, t) – действительное число, интерпретируемое как полезность этой альтернативы. Считается, что чем выше полезность альтернативы, тем «лучше» она с точки зрения данного агента.

Предположим, что u(x) – монотонная непрерывная функция своих переменных, то есть как увеличение дохода при фиксиро-

---

[1] *Все выводы, получаемые в рамках качественного анализа, остаются в силе и при графическом анализе. То же самое соотношение справедливо для графического и формального анализа. При этом чем более «формализованное» описание используется исследователем, тем более детальные и конструктивные (в рамках модели) выводы он может сделать.*

[2] *Обычно в экономике труда считается, что продолжительность рабочего дня не может превышать $T = 16$ часов (как минимум 8 часов в сутки человек должен тратить на сон, прием пищи и т.д.), то есть рабочее время t Î $[0; T]$. Если t – свободное время (время, которое тратится на досуг), то выполнено: $t + t = T$.*

ванном времени досуга, так и увеличение времени досуга при фиксированном доходе, приводят к увеличению полезности[1].

Некоторому фиксированному значению полезности g может соответствовать целое множество альтернатив, имеющих эту полезность: $\{(q, t) \mid u(q, t) = g\}$. Если изобразить это множество в координатах (t, q), то получим *кривую безразличия* (*изокванту*), которую также обозначим g. Кривые безразличия функции полезности агента в рассматриваемой модели обладают следующими свойствами:

1. Если g_1 и g_2 – две кривые безразличия, и $g_2 > g_1$, то кривая g_2 расположена выше и правее кривой g_1 (см. рисунок 10)[2].

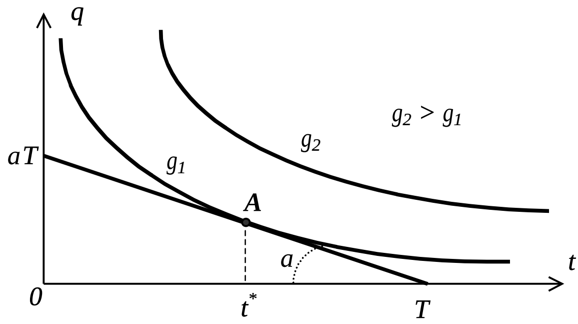

Рис. 10. Кривые безразличия и бюджетное ограничение

2. Кривые безразличия не имеют общих точек.

3. Кривая безразличия строго монотонно убывает. Это ее свойство имеет следующую содержательную интерпретацию: при фиксированном уровне полезности нельзя одновременно увеличить и доход, и время досуга.

---

[1] *В качестве модельных и теоретических зависимостей функции полезности от дохода и рабочего времени в литературе использовались следующие:* $u = q^a t^b$, $u = [a\,(t + e) + \overline{U}\,]^b[T - (t + c)]^d$, *где* $a, b, c, d, e, \overline{U}$ *– константы.*

[2] *Это утверждение – графическая иллюстрация доминирования по Парето любой альтернативой, имеющей полезность* g_2, *любой альтернативы, имеющей строго меньшую полезность* g_1.

4. Кривая безразличия является выпуклой. Это менее очевидное, но признаваемое почти всеми исследователями, свойство качественно отражает представление о том, что агент больше ценит то, чего ему сильнее не хватает (любая комбинация дохода и свободного времени более ценна, чем каждая из компонент по отдельности). Действительно, в соответствии с первым законом Госсена каждая следующая единица потребляемого блага имеет для потребителя меньшую ценность, чем его предшествующая единица. Этот закон касается только тех благ или ресурсов, каждая следующая единица которых, будучи вовлеченной в процесс потребления, делает этот ресурс менее редким. К такому типу ресурсов относятся и доход, и свободное время.

5. Кривые безразличия в совокупности «покрывают» всю плоскость (t, q). В том числе, каждая внутренняя точка первого квадранта этой координатной плоскости принадлежит одной и только одной кривой безразличия (см. второе их свойство).

Если *ставка оплаты*, которая выше обозначена a, постоянна и нетрудовые доходы (non-wage income) отсутствуют, то графически зависимость суммарного дохода от часов досуга можно изобразить прямой из точки[1] $(T; 0)$ (если число отработанных часов $t = T - t$ равно нулю, то, очевидно, равен нулю и доход) в точку $(0; a\ T)$ (отработав T часов, агент получит доход $a\ T$). Эта прямая отражает так называемое *бюджетное ограничение*.

Так как ставка оплаты является альтернативной стоимостью часа досуга, то *условием оптимума* (максимума полезности) является касание прямой бюджетного ограничения кривой безразличия [17]. На рисунке 10 кривая безразличия g_1 касается прямой бюджетного ограничения в точке А. То есть в рамках введенных предположений в равновесии для агента альтернативные издержки одного часа досуга равны ставке заработной платы (и наоборот) –

[1] *Если агент имеет нетрудовые доходы в размере* q_T, *то прямая бюджетного ограничения будет проходить через точку* $(T; q_T)$. *Сделанные выводы не относятся к самозанятым* (self-employed) *работникам, чьи доходы, хотя и являются трудовыми, но в решающей степени определяются не продолжительностью рабочего времени, а стратегией действий в качестве производителей товаров и услуг.*

тому дополнительному заработку, который мог бы быть получен при работе в течение этого часа.

Изменение ставки оплаты (угла наклона бюджетного ограничения) приводит к изменению точки оптимума – точки касания. Сдвиг точки касания влево соответствует уменьшению времени досуга (проявление эффекта замещения), сдвиг вправо – росту времени досуга (проявление эффекта дохода). То, в какую сторону сдвинется точка касания, в каждом конкретном случае зависит от предпочтений агента, отражаемых его функцией полезности, то есть от свойств кривых безразличия. Никаких как более общих выводов, так и конкретных закономерностей индивидуального поведения на рынке труда, установить в рамках рассматриваемой модели невозможно – действительно, у каждого человека в общем случае имеется своя система предпочтений и, используя очень общие предположения о свойствах функции полезности, введенные выше, невозможно предсказать его поведение в каждом конкретном случае[1].

Обсудим последнее утверждение более подробно. Ряд исследователей констатирует, что «теория не в состоянии показать (или предсказать) какой из эффектов – замещения или дохода – возобладает при изменении ставки заработной платы» [17, С. 222]. Более того, ряд экспериментальных данных, полученных зарубежными авторами (см. ссылки в [8]), свидетельствует, что у мужчин (в большинстве исследований – американских) и эффект дохода, и эффект замещения невелики (в смысле эластичности) и, возможно, даже равны нулю. Женщины (опять же, в большинстве случаев – американские) более чувствительны к изменениям ставки заработной платы и у них эффект замещения превалирует над эффектом дохода. Однако это влияет, в основном, не на изменение продолжительности рабочего времени, а на принятие решения об участии в трудовой деятельности. Нет необходимости подчеркивать, что даже качественные выводы, сделанные на основании анализа статистических данных, полученных для американского рынка труда, скорее всего, неприменимы в российских условиях.

[1] *Естественно, применяя используемую технику анализа к конкретной функции полезности, можно определить для данного агента желательную продолжительность рабочего времени.*

Таким образом, графический анализ предпочтений позволяет из условия оптимума по заданным функции полезности (точнее – семейству кривых безразличия) и ставке заработной платы (точнее – бюджетному ограничению) определить желательную продолжительность рабочего времени (точнее – времени досуга).

Перечисленные качественные свойства кривых безразличия и условие оптимума очевидны. В то же время, они позволяют не только находить решение дилеммы «труд/досуг», но и исследовать (по крайней мере, на качественном уровне) дилемму «труд/досуг/работа дома» и другие эффекты, в том числе – влияние компенсационных выплат (социальные программы, компенсации временной потери трудоспособности и т.д.) на предложение труда [17 и др.].

Перейдем к формальному анализу модели индивидуального поведения на рынке труда.

Если уравнение $u(q, t) = g$ разрешимо относительно q, то можно получить уравнение кривой безразличия: $q = v(g, t)$. Обозначая $u_t' = \frac{\partial u(q,t)}{\partial t}$, $u_q' = \frac{\partial u(q,t)}{\partial q}$, получаем выражение для производной кривой безразличия:

(35) $\frac{dq}{dt} = - u_t' \,/\, u_q'$.

Если a – постоянная ставка оплаты, то прямая бюджетного ограничения имеет вид:

(36) $q(t) = a\ t = a\ (T - t)$.

Агент решает задачу выбора такого значения t^* времени досуга (и, соответственно, рабочего времени $t^* = T - t^*$), которое максимизировало бы его полезность:

(37) $t^*\ \hat{I}\ \mathrm{Arg} \max\limits_{t \in [0;T]} u(q(t), t)$,

где $q(t)$ определяется выражением (36). Необходимое условие оптимальности – равенство нулю производной по t выражения $u(q(t), t)$:

$$u_q' \frac{dq}{dt} + u_t' = 0.$$

Подставляя (36), запишем условие оптимума следующим образом:

(38) $u'_t = a\ u'_q$.

Воспользовавшись (35), получаем, что необходимое условие оптимальности графически можно интерпретировать как условие касания кривой безразличия прямой бюджетного ограничения (см. рисунок 10). Отметим, что (38) является условием оптимума при «внутренних» решениях задачи (37). Если максимум в выражении (37) достигается при $t = T$ (граничное решение), то говорят, что имеет место «*угловое решение*» [17].

Содержательно, «угловое решение» соответствует оптимальности для рассматриваемого агента решению «не работать вообще», так как любой час своего досуга (в том числе и шестнадцатый) он ценит выше предлагаемой ставки оплаты. На рисунке 11 изображено «угловое решение», то есть при ставке резервной заработной платы $\overline{a}$ и величине «нетрудовых доходов» q_T (доходов агента, не зависящих от количества отрабатываемых часов, например – рента, пособия и т.д.) кривая безразличия g касается прямой бюджетного ограничения в точке A ($t^* = T$ – см. рисунок 11) или правее. Возможно и другое «угловое решение» – «не отдыхать вообще».

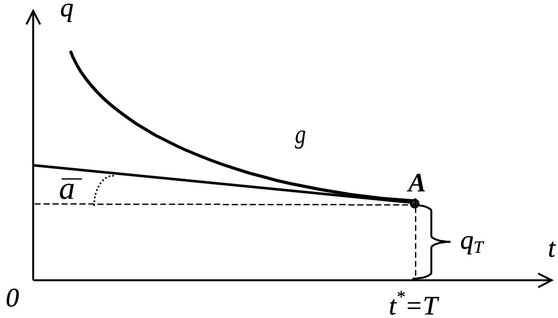

Рис. 11. «Угловое решение»

Итак, рассмотрены условия оптимальности при использовании центром пропорциональных систем оплаты. Та же идеология используется для исследования условий оптимальности при использовании центром произвольных (не только пропорциональных) систем оплаты.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение описанного метода определения оптимального времени досуга.

<u>Пример 4.</u> Пусть функция полезности имеет вид: $u(q, t) = b\, q\, t$, где b – некоторая положительная константа[1]. Кривой безразличия g в данном случае является гипербола: $q(t) = \frac{g}{b}\frac{1}{t}$. Из условия (38) получаем:

(39) $t^* = \sqrt{\dfrac{g}{ab}}$.

Из выражения (39) следует, что имеют место и эффект дохода: $\left.\dfrac{\partial t^*(a, g)}{\partial a}\right|_{g = Const}$ £ 0, и эффект замещения: $\left.\dfrac{\partial t^*(a, g)}{\partial g}\right|_{a = Const}$ з 0.

Существуют два способа определения оптимального времени досуга. Первый заключается в использовании условия (38): $\dfrac{dq}{dt} = -a$. Проверяя, что оптимально внутреннее решение ($u(0) = u(T) = 0$), получаем: $t^* = T/2$.

Второй способ заключается в «лобовом» решении задачи максимизации полезности (см. (37)):

$$t^* = \arg\max_{t \in [0;T]} u(q(t), t) = \arg\max_{t \in [0;T]} \{a b\, t\, (T - t)\} = T/2.$$

Интересно отметить, что при рассматриваемой функции полезности оптимальное решение t^* равно восьми часам и не зависит от ставки оплаты. В то же время, максимальное значение полезности $u^* = a\, b\, T^2 / 4$ возрастает с ростом ставки оплаты. •

Напомним, что до сих пор рассматривались модели индивидуального поведения на рынке труда в предположении, что за каж-

---

[1] *В приводимых в настоящей работе примерах фигурируют постоянные коэффициенты. Необходимость их введения обусловлена соображениями согласования размерностей. Так, в рассматриваемом примере коэффициент* b *имеет размерность «единица полезности / (рубль ´ час)».*

дый отработанный час агент получает одинаковую оплату (ставка оплаты считалась постоянной). Откажемся от этого предположения, то есть расширим класс допустимых систем стимулирования (любая система стимулирования может рассматриваться как пропорциональная с переменной ставкой оплаты).

Действием агента будем считать продолжительность рабочего времени t, которая однозначно определяет продолжительность свободного времени: $t = T - t$, то есть $y = t$, $A = [0; T]$. Предположим, что центр использует некоторую (не обязательно пропорциональную) систему стимулирования $s(t)$. Определим функцию «оплаты свободного времени» $\tilde{s}(t) = s(T - t)$. Отметим, что, если $s(\cdot)$ – возрастающая (убывающая, выпуклая, вогнутая) функция, то $\tilde{s}(t)$ – убывающая (соответственно, возрастающая, выпуклая, вогнутая) функция.

Введем зависимость дохода от свободного времени:

$$q(t) = \tilde{s}(t) = s(T - t).$$

Определяя наиболее предпочтительное (с точки зрения значения своей функции полезности $u(q, t)$) значение продолжительности рабочего времени, агент решает следующую задачу:

(40) $u(q, t) = u(s(T - t), t)$ ® $\max\limits_{t \in [0;T]}$.

Предполагая существование внутреннего решения t^* Î $(0; T)$, получаем необходимое условие оптимальности:

(41) $\dfrac{u_t'}{u_q'} = -\tilde{s}'(t) = s'(T - t) = s'(t).$

Левая часть выражения (41) с точностью до знака совпадает с производной кривой безразличия функции полезности, следовательно, в точке оптимума графики кривой безразличия полезности $u(\cdot)$ и функции стимулирования $s(\cdot)$ должны иметь общую касательную. Содержательно это утверждение означает, что предельный доход должен быть равен предельному стимулированию ($\dfrac{dq(t^*)}{dt} = -\left.\dfrac{ds(t)}{dt}\right|_{t = T - t^*}$), то есть в точке оптимума альтернативная стоимость единицы свободного времени по абсолютной величине равна скорости изменения вознаграждения (см. также условия оптимальности для базовых систем стимулирования).

Второй важный (и достаточно очевидный) вывод, который следует из анализа выражения (41), заключается в том, что в точке оптимума $t^* = T - t^*$ производная функции стимулирования $s(t)$ должна быть положительна (так как положительны обе производные функции полезности, фигурирующие в левой части (41); действительно, выше предполагалось, что полезность агента возрастает как с ростом дохода, так и с увеличением продолжительности свободного времени). Более того, так как «рабочим» оказывается участок функции стимулирования с положительной производной, то в рамках рассматриваемой модели для любой функции стимулирования найдется монотонная (неубывающая) функция стимулирования, побуждающая агента выбрать то же действие. Следовательно, справедливо следующее утверждение: **при решении задач синтеза оптимальных функций стимулирования достаточно (без потери эффективности) ограничиться классом неубывающих функций стимулирования**.

Это утверждение вполне согласовано со здравым смыслом и практическим опытом – б*о*льшим значениям действий (отработанному времени и т.д.) должно соответствовать большее вознаграждение.

ЧАСТЬ 2. БАЗОВЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

5. ОПИСАНИЕ БАЗОВЫХ СИСТЕМ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Перечислим базовые системы стимулирования.

Скачкообразные системы стимулирования (*C-типа*) характеризуются тем, что агент получает постоянное вознаграждение (равное заранее установленному значению *C*), при условии, что выбранное им действие не меньше заданного, и нулевое вознаграждение, при выборе меньших действий (см. рисунок 12):

(1) $$s_C(x,y) = \begin{cases} C, y \geq x \\ 0, y < x \end{cases}.$$

Параметр x Î X называется *планом* – желательным с точки зрения центра состоянием (действием, результатом деятельности и т.д.) агента.

Системы стимулирования С-типа могут интерпретироваться как *аккордные*, соответствующие фиксированному вознаграждению при заданном результате (например, объеме работ не ниже оговоренного заранее, времени и т.д. – см. ниже более подробно). Другая содержательная интерпретация соответствует случаю, когда действием агента является количество отработанных часов, то есть, вознаграждение соответствует, например, фиксированному *окладу* без каких либо надбавок и оценки качества деятельности.

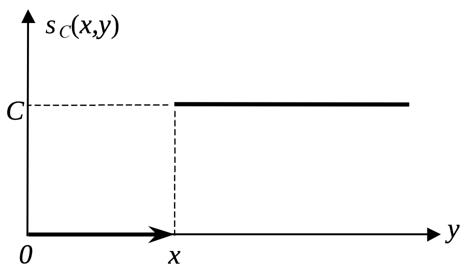

Рис. 12. Скачкообразная система стимулирования

Величины, соответствующие системам стимулирования С-типа, будем индексировать «C», например M_C – множество скачкообразных систем стимулирования и т.д.

Отметим, что большинство базовых систем стимулирования являются *параметрическими*, например, класс M_C Í M определяется заданием, помимо (1), множества допустимых планов X (относительно которого обычно предполагают, что оно совпадает с множеством допустимых действий агента: $X = A$, или с множеством действий P_M, реализуемых при заданных ограничениях механизма стимулирования).

Квазискачкообразные системы стимулирования (*QC-типа*) отличаются от скачкообразных тем, что вознаграждение выплачивается агенту только при точном выполнении плана (см. рисунок 13):

(2) $s_{QC}(x,y) = \begin{cases} C, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$

Следует отметить, что системы стимулирования QC-типа[1] являются достаточно экзотическими (особенно в условиях неопределенности непонятно, что понимать под точным выполнением плана) и редко используются на практике.

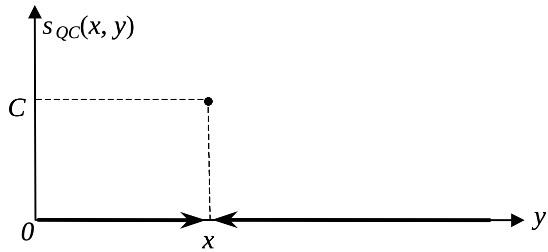

Рис. 13. Квазискачкообразная система стимулирования

Множество квазискачкообразных систем стимулирования обозначим M_{QC}.

Если на абсолютную величину вознаграждения агента не наложено никаких ограничений, то необходимо доопределить, что понимать под величиной C в (1) и (2), то есть амплитуда «скачка», также как и план, может являться переменной величиной, каковой и будем ее считать в системах стимулирования С-типа и QC-типа.

<u>Компенсаторная система стимулирования (*K-типа*)</u> характеризуется тем, что агенту компенсируют затраты при условии, что его действия лежат в определенном диапазоне, задаваемым, например, ограничениями на абсолютную величину индивидуального вознаграждения:

(3) $s_K(x,y) = \begin{cases} c(y), & y \leq x \\ 0, & y > x \end{cases},$

---

[1] *Символ «Q» и приставка «квази-» обозначает квази-систему стимулирования, вознаграждение совпадает с вознаграждением в исходной системе стимулирования в случае выполнения агентом плана ($y = x$) и равно нулю в остальных случаях (y ¹ x).*

где x £ $c^{-1}(C)$, $c^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная функции затрат агента, то есть центр может компенсировать агенту затраты при y £ x и не оплачивать выбор больших действий (см. рисунок 14).

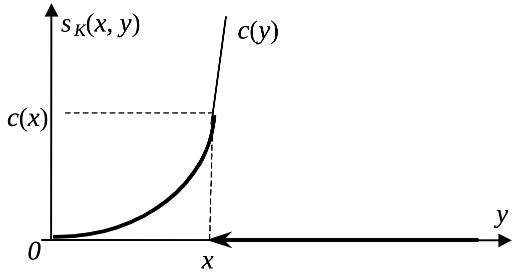

Рис. 14. Компенсаторная система стимулирования

Множество компенсаторных систем стимулирования обозначим M_K.

<u>Квазикомпенсаторные системы стимулирования (QK-*типа*)</u> отличаются от компенсаторных тем, что вознаграждение выплачивается агенту только при точном выполнении плана (см. рисунок 15):

(4) $s_{QK}(x,y) = \begin{cases} c(y), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$

Множество квазикомпенсаторных систем стимулирования обозначим M_{QK}. Этот класс систем стимулирования относительно подробно описан выше во втором разделе.

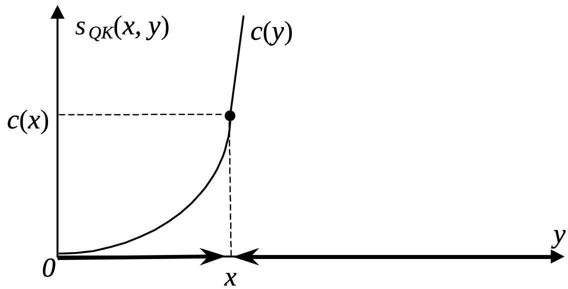

Рис. 15. Квазикомпенсаторная система стимулирования

Пропорциональные системы стимулирования (*L-типа*). На практике широко распространены системы оплаты труда, основанные на использовании постоянных ставок оплаты: повременная оплата подразумевает существование ставки оплаты единицы рабочего времени (как правило, часа или дня), сдельная оплата – существование ставки оплаты за единицу продукции и т.д. Объединяет эти системы оплаты то, что вознаграждение агента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объему выпущенной продукции и т.д.), а ставка оплаты a ³ 0 является коэффициентом пропорциональности (см. рисунок 16):

(5) $s_L(y) = a\, y$.

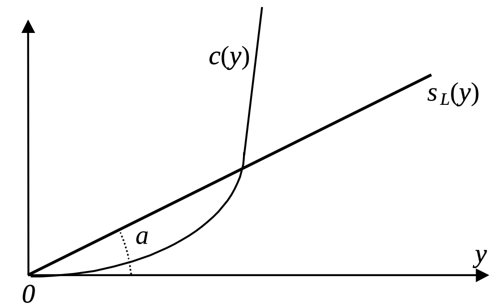

Рис. 16. Пропорциональная система стимулирования

В более общем случае возможно, что часть вознаграждения агента выплачивается ему независимо от его действий, то есть пропорциональная система может иметь вид $s_L(y) = s_0 + a\, y$.

Множество пропорциональных систем стимулирования обозначим M_L.

Системы стимулирования, основанные на перераспределении дохода (*D-типа*) используют следующую идею [7, 9]. Так как центр выражает интересы системы в целом, то можно условно идентифицировать его доход и доход от деятельности всей организационной системы. Поэтому возможно основывать стимулирование агента на величине дохода центра – положить вознаграждение агента равным определенной (например, постоянной) доле дохода центра[1]:

(6) $s_D(y) = x\ H(y)$,

где x Î $[0; 1]$. На сегодняшний день формальные модели с переменной долей $x(y)$, к сожалению, не исследованы. Множество систем стимулирования, основанных на перераспределении дохода, обозначим M_D.

По аналогии с тем, как это делалось для скачкообразных и компенсаторных систем стимулирования, можно ввести квазилинейные системы стимулирования (QL-типа), при использовании которых агент получает вознаграждение, пропорциональное плану, в случае его выполнения, и нулевое вознаграждение во всех остальных случаях. Аналогично определяются системы стимулирования QD-типа.

Еще раз отметим, что системы стимулирования C, L и D-типа являются параметрическими:

- для определения скачкообразной системы стимулирования достаточно задать пару (x, C);

- для определения пропорциональной системы стимулирования достаточно задать ставку оплаты a;

- для определения системы стимулирования, основанной на перераспределении дохода, достаточно задать норматив x.

<u>Степенные системы стимулирования</u> представляют собой достаточно искусственную конструкцию, когда вознаграждение агента пропорционально его затратам в определенной степени:

(7) $s_B(y) = a\ c^b(y)$,

где b Î $(0; 1)$. Использование степенных систем стимулирования оказывается эффективным в многоэлементных ОС с неопределенностью [12, 14]. В настоящей работе рассматривать их подробно мы не будем.

Перечисленные выше системы стимулирования являются простейшими, представляя собой элементы «конструктора», используя которые можно построить другие более сложные системы стимулирования. Для возможности такого «конструирования» необхо-

---

[1] *Следует отметить, что согласно действующему законодательству доходы по акциям и другие доходы от участия работников в собственности предприятия не относятся к фонду заработной платы.*

димо определить операции над системами стимулирования. Для одноэлементных ОС достаточно ограничиться операциями следующих трех типов.

Первый тип операции – переход к соответствующей квазисистеме стимулирования описан выше – вознаграждение считается равным нулю всюду, за исключением действия, совпадающего с планом. В детерминированных организационных системах «обнуление» стимулирования во всех точках, кроме плана, в рамках гипотезы благожелательности практически не изменяет свойств системы стимулирования, поэтому в ходе дальнейшего изложения не будем акцентировать внимание на различии некоторой системы стимулирования и системы стимулирования, получающейся из исходной применением операции первого типа.

Второй тип операции – разбиение множества возможных действий на несколько подмножеств и использование различных базовых систем стимулирования на различных подмножествах. Получающиеся в результате применения операции второго типа системы стимулирования будем называть *составными* и обозначать последовательной записью обозначений ее компонент.

Например, центр может фиксировать планы x_1 и x_2 (x_1 £ x_2) и использовать систему стимулирования С-типа со скачком в точке x_1 при действиях агента, меньших x_2, и пропорциональную систему стимулирования при действиях агента, превышающих план x_2 (содержательные интерпретации очевидны). Эскиз получающейся при этом системы стимулирования CL-типа приведен на рисунке 17.

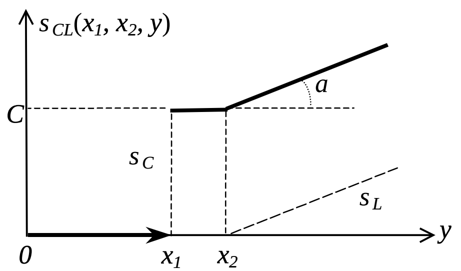

Рис. 17. Система стимулирования CL-типа

Понятно, что к одной и той же системе стимулирования можно применять операцию второго типа несколько раз. Возможно также применение операции второго типа к результатам ее предшествующего применения и т.д. Например, применяя операцию второго типа к системе стимулирования CL-типа, изображенной на рисунке 17, то есть добавляя условие, что система стимулирования является скачкообразной при y ³ x_3 ³ x_2, получим систему стимулирования CLC-типа. Применяя к ней, в свою очередь, например, операцию первого типа, получим систему стимулирования QCLC-типа и т.д.

Третий тип операции – алгебраическое суммирование двух систем стимулирования (что допустимо, так как стимулирование входит в целевые функции участников системы аддитивно). Результат применения операции третьего типа будем называть *суммарной системой стимулирования* и обозначать «суммой» исходных систем стимулирования. Эскиз системы стимулирования C+L-типа, получающейся в результате применения операции третьего типа к системам стимулирования C-типа и L-типа, изображен на рисунке 18.

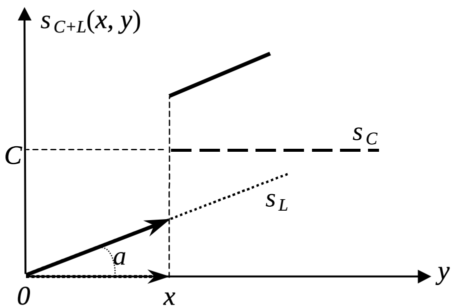

Рис. 18. Система стимулирования C+L-типа (суммарная)

Операцию третьего типа также можно применять последовательно к результатам предшествующих ее применений, получая, например, системы стимулирования C+L+K-типа и т.д. Возможно также ее комбинированное применение с операциями первого и второго типа.

Получающиеся в результате последовательного применения конечное число раз[1] операций первого, второго или третьего типа к системам C-типа, или K-типа, или L-типа или D-типа (которые называются *основными* [7]), а также к результатам предшествующих их применений, называются *производными* от исходных.

Базовыми системами стимулирования назовем системы стимулирования C-типа, K-типа, L-типа и D-типа, а также все производные от них системы стимулирования.

Итак, базовые системы стимулирования, полученные в результате применения только операций второго типа, названы *составными*. Базовые системы стимулирования, полученные в результате применения только операций третьего типа, названы *суммарными*. Основные, составные и суммарные системы стимулирования будем считать *простыми базовыми*. Суммарные составные системы стимулирования назовем *сложными базовыми* системами стимулирования.

Число различных суммарных систем стимулирования определяется элементарно. Имеются следующие варианты: M_{C+C}, M_{C+K}, M_{C+L}, M_{C+D}, M_{K+L}, M_{K+D}, M_{L+D} (класс M_{K+K} эквивалентен классу M_K, а класс M_{L+L} эквивалентен классу M_L), M_{C+K+L}, M_{C+K+D}, M_{C+L+D}, M_{K+L+D}, $M_{C+K+L+D}$. Учитывая, что классы M_{A1+A2} и M_{A2+A1}, где[2] $A1, A2$ Î $\{C, K, L, D\}$, эквивалентны, получаем всего двенадцать[3] классов суммарных систем стимулирования.

Сложнее дело обстоит с составными системами стимулирования – их число зависит от числа точек разбиений множества допустимых действий агента. Поэтому ограничимся составными

---

[1] *Несмотря на то, что число исходных систем стимулирования конечно (равно четырем – C, K, L и D), применение к ним конечное число раз операций первого, второго или третьего типа порождает бесконечное множество систем стимулирования, хотя бы потому, что в операциях второго типа используются операции, зависящие от непрерывных параметров (планов и т.д.).*

[2] *Условимся, что система стимулирования A-типа является обозначением произвольной базовой системы стимулирования.*

[3] *Понятно, что можно рассматривать суммарные системы стимулирования, состоящие из трех и более «слагаемых», однако такие сложные системы стимулирования на практике встречаются редко, поэтому рассматривать их подробно не будем.*

системами стимулирования, включающими не более двух комбинаций. Учитывая, что комбинация компенсаторной системы стимулирования с собой эквивалентна исходной, получаем пятнадцать пар: M_{CC}, M_{CK}, M_{CL}, M_{CD}, M_{KC}, M_{KL}, M_{KD}, M_{LL}, M_{LC}, M_{LK}, M_{LD}, M_{DD}, M_{DC}, M_{DK}, M_{DL}, то есть пятнадцать классов составных систем стимулирования.

Суммируя четыре основных, двенадцать суммарных и пятнадцать составных (двойных), получаем 31 простую базовую систему стимулирования.

Таким образом, перечислив скачкообразные, компенсаторные, пропорциональные и основанные на перераспределении дохода системы стимулирования и определив три операции над ними, мы получили возможность генерировать значительное число различных систем стимулирования.

Следует вспомнить, что в настоящей работе рассматриваются модели стимулирования в организационных системах, поэтому необходимо изучить, насколько полно введенные базовые системы стимулирования охватывают используемые на практике формы индивидуальной заработной платы.

5. ФОРМЫ И СИСТЕМЫ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Системой оплаты труда называется способ определения размеров вознаграждения в зависимости от затрат, результатов труда и т.д. Те или иные конкретные системы оплаты труда выделяются в рамках более общих *форм оплаты труда*. Поэтому рассмотрим сначала формы заработной платы, а затем для каждой из форм перечислим основные системы оплаты.

Различают следующие **формы индивидуальной заработной платы** (см. ссылки в [8]):

- *тарифная*, при использовании которой индивидуальное вознаграждение агента не связано явным образом с количественными показателями его деятельности, а определяется ее содержанием, квалификационными требованиями и прочими нормативами[1].

Для оплаты труда руководителей и специалистов может использоваться *окладно-премиальная* система оплаты, в которой индивидуальное вознаграждение складывается из оклада (тарифная система) и премии, определяющейся по результатам деятельности организации, подразделения и т.д.

Разновидностью тарифной формы оплаты также являются так называемые *плавающие оклады*, при использовании которых показатели тарифной системы на каждый период рассчитываются с учетом результатов деятельности в предыдущих периодах.

- *повременная*, при использовании которой индивидуальное вознаграждение зависит от отработанного времени с учетом квалификации и качества труда;
- *сдельная*, при использовании которой индивидуальное вознаграждение зависит от количества произведенной продукции;
- *участие в доходе* (*участие в прибылях, выплаты бонуса*), например – приобретение акций компании;
- *премии* – дополнительное по сравнению с заработной платой вознаграждение, выплачиваемое в определенных случаях.

Отдельной формой заработной платы, стимулирующей продажи и не рассматриваемой подробно в настоящей работе, являются *комиссионные*[2].

Отметим, что перечисленные выше формы не являются однородными. Так, например, разделение повременной и сдельной заработной платы основывается на мере труда (то есть, способе измерения количества труда) – соответственно – времени и количестве произведенной продукции. Обе эти формы являются *регу-*

---

[1] Так как тарифная форма заработной платы связана с показателями индивидуальной деятельности косвенным образом (хотя величина показателей тарифной системы и является существенным мотивирующим фактором, в том числе – в соревновательных системах), то не будем рассматривать подробно ее формальные модели, ограничившись замечанием, что достаточно адекватной ее моделью является система стимулирования С-типа.

[2] Комиссионные в ряде случаев с формальной точки зрения могут рассматриваться как разновидность такой формы оплаты как участие в доходе. В тех ситуациях, когда произведенной продукцией выступают услуги, комиссионная оплата труда сотрудников является разновидностью сдельной оплаты.

лярными (выплачиваемыми в рамках действующего трудового контракта) и зависящими явным и известным работнику образом от показателей его деятельности. При продаже работникам акций компании (форма участия в доходе) вознаграждение не зависит столь явным образом от результатов именно индивидуальной деятельности; премии (как правило) не являются регулярной формой заработной платы и т.д.

Повременная форма заработной платы может реализовываться в виде следующих **систем оплаты**[1]:

- *простая повременная*;
- *повременно-премиальная*.

Сдельная форма заработной платы (иногда ее называют поштучной) может реализовываться в виде следующих систем оплаты:

- *прямая сдельная*;
- *сдельно-премиальная*;
- *сдельно-прогрессивная*;
- *косвенно-сдельная*;
- *аккордная*.

Связь между повременной и сдельной формами оплаты может быть установлена следующим образом. Если в сдельной оплате фиксированы нормы времени на выполнение определенных заданий, то ее можно рассматривать как повременную. При этом на практике, если работник справляется со своим заданием (с выполнением требований не только количества, но и качества) быстрее отведенного времени, то ему может оплачиваться все время по норме, независимо от фактически затраченного времени (см. ниже).

Рассмотрим перечисленные выше системы оплаты более подробно.

Простая повременная система оплаты[2] соответствует использованию фиксированных (постоянных, то есть не зависящих

---

[1] *В ходе дальнейшего изложения для того, чтобы различать, если это необходимо, реальные «системы оплаты» и их модели, для последних будем использовать термин «системы стимулирования».*

[2] *Повременная форма заработной платы используется для 70-80% американских рабочих, и для 60-70% рабочих в Западной Европе. В России по разным оценкам повременная форма оплаты используется примерно для 20-30% рабочих.*

от каких-либо показателей деятельности агента) ставок оплаты за единицу времени. Если под действием агента понимать отработанное время, то данной системе оплаты соответствует система стимулирования L-типа.

При использовании *повременно-премиальной системы оплаты*[1] к сумме заработка по тарифу (при условии выполнения и/или перевыполнения нормативов, например – плана x) добавляется премия (обозначим ее ставку $D\alpha$), измеренная, например, в процентах к тарифной ставке. Данной системе оплаты соответствует система стимулирования LL-типа (см. рисунок 19).

Прямая сдельная система оплаты (см. также простую повременную систему оплаты) характеризуется прямо пропорциональной зависимостью величины вознаграждения от объема выпуска (количества произведенной продукции) по единым твердым сдельным расценкам (ставкам), не зависящим от объема выпуска и т.д. Если под действием агента понимать количество произведенной продукции, то данной системе оплаты соответствует система стимулирования L-типа.

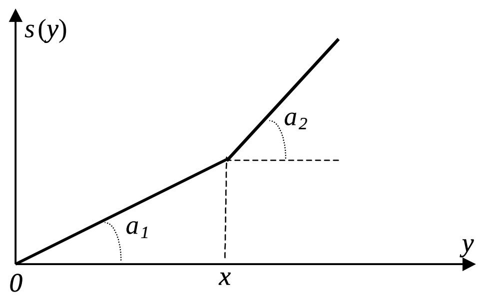

Рис. 19. Повременно-премиальная система оплаты (норматив - x; $\alpha_2 = (1+D\alpha)\alpha_1$ или $\alpha_2 = \alpha_1+D\alpha$)

При использовании *сдельно-премиальной системы оплаты*, помимо базового тарифа, выплачивается премия, например, за

[1] *Отметим, что во многих случаях термин «гибкие системы оплаты» применяется для обозначения систем оплаты, более сложных, чем простая повременная и/или простая сдельная.*

перевыполнение нормативов и т.д. (см. рисунок 20). Следует отметить, что в литературе сдельно-премиальная и сдельно-прогрессивная системы оплаты не всегда разделяются достаточно четко, поэтому можно в общем случае считать, что при перевыполнении нормативов используется повышенный тариф или ставка оплаты. Данной системе оплаты соответствует система стимулирования L+C-типа или в более общем случае, приведенном на рисунке 2.9 (a_1 £ a_2), система стимулирования LL+C-типа.

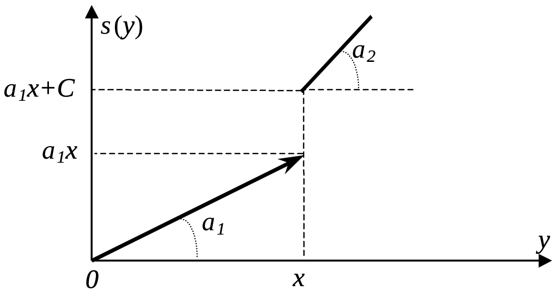

Рис. 20. Сдельно-премиальная система оплаты (норматив - x)

Сдельно-прогрессивная система оплаты, в рамках которой выработка сверх установленной нормы оплачивается по повышенным расценкам, с точки зрения формального анализа полностью аналогична повременно-премиальной системе оплаты (с точностью до конкретизации меры труда – см. выше), и ей соответствует система стимулирования LL-типа.

Косвенно-сдельная система оплаты используется, например, для оплаты труда вспомогательных рабочих. При этом размер их заработка может составлять определенный процент от заработка основных (обслуживаемых ими) рабочих. Данной системе оплаты соответствует система стимулирования, основанная на перераспределении дохода – D-типа.

При использовании *аккордной системы оплаты* совокупный индивидуальный заработок выплачивается за фиксированные стадии работы или за выполнение полного комплекса работ. Данной системе оплаты соответствует система стимулирования C-типа (см. выше). Разновидностью аккордной системы оплаты является так называемые *аккордно-премиальные системы оплаты*, в которых дополнительная премия выплачивается за качество работ, сокращение сроков и т.д.

Участие в доходе (*прибыли*) как форма индивидуальной заработной платы (см. выше) в точности совпадает с системой стимулирования D-типа.

Специфическая форма заработной платы, стимулирующая продажи, то есть – *комиссионные*, может с одной стороны рассматриваться либо как система стимулирования, основанная на перераспределении дохода (или прибыли) от продаж (системы стимулирования D-типа), либо как пропорциональная система стимулирования (если доход от продажи единицы товара задан, то фиксирование комиссионных означает установление прямо пропорциональной зависимости между величиной поощрения и числом проданных товаров, которое играет в данном случае роль действия агента). Если вознаграждение определяется как фиксированный процент от прибыли, то при трактовке действия агента как величины прибыли, участие в прибыли является прямой сдельной системой оплаты (пропорциональная система стимулирования). Такой подход охватывает следующие используемые на практике комиссионные формы: фиксированная денежная сумма за каждую проданную единицу продукции, фиксированный процент от маржи по контракту, фиксированный процент от объема реализации, фиксированный процент от базовой зарплаты при выполнении плана по реализации.

В заключение настоящего раздела обсудим такую форму индивидуальной заработной платы как *премия*. Будем различать премии, предусмотренные системой оплаты труда в организации (и относимые на себестоимость), то есть «регулярные», и премии поощрительного характера – единовременные (выплачиваемые организацией за счет собственных средств), которые не являются обязательными (например, премии к юбилейным датам и т.д.). Поощрительные премии не зависят явным образом от индивидуальных показателей деятельности за учетный период и поэтому рассматриваться нами не будут. Зачастую премии основываются на основании результатов долгосрочных достижений работника.

Учитываемые при этом диапазоны времени в зарубежной практике ограничиваются, как правило, тремя – пятью годами.

Различают регулярные премии следующих двух видов (отличающиеся показателями и условиями премирования).

В первом случае абсолютная величина премии, например, при выполнении и/или перевыполнении плановых заданий, оговорена заранее, чему соответствует система стимулирования A+C-типа, где A – некоторая базовая система стимулирования. В том числе величина премии может быть пропорциональна базовому окладу (без учеты премиальных, прогрессивных и других надбавок).

Во втором случае абсолютная величина премии определяется как заранее установленный процент от заработка за учетный период. Такие сложные системы премирования используются достаточно редко. Для их формального описания следовало бы ввести дополнительную (четвертую) операцию над базовыми системами стимулирования – «изменения масштаба» на определенных подмножествах множества допустимых действий агента. Теоретико-игровой анализ таких («сильно разрывных») систем стимулирования достаточно трудоемок.

Важную роль, помимо основной заработной платы, также играет *дополнительная заработная плата* в форме различных доплат (в том числе – доплаты за совмещение, сверхурочную работу и т.д.), надбавок (за квалификацию, выслугу лет, стаж работы в данной организации и т.д.) и единовременных вознаграждений. В отличие от премий, например, надбавки включаются в состав заработной платы регулярно. Основная и дополнительная заработные платы совместно могут рассматриваться как некоторая единая суммарная система стимулирования.

Выше перечислены основные формы и системы заработной платы, рассматриваемые в отечественной литературе по стимулированию и оплате труда. Системы заработной платы, используемые за рубежом, естественно, несколько отличаются от них, однако не столь сильно. Так, например, выделяются (см. ссылки в [8]) следующие компоненты вознаграждения работника: базовая заработная плата (одинаковая для некоторой группы работников, например, данной квалификации, должности и т.д.); индивидуальная компонента вознаграждения работника (определяемая его личным вкладом); компонента, общая для подразделения; участие в доходах компании в целом; одноразовые премии и т.д. Определение базовой заработной платы является задачей тарификации, носящей, условно говоря, скорее экономический, чем управленческий характер. Рассматриваемые в настоящей работе системы стимулирования соответствуют системам заработной платы, явным образом зависящим от результатов деятельности агента и/или коллектива (соответственно – три компоненты: индивидуальная, общая для подразделения, то есть «коллективная», и зависящая от результатов деятельности организации в целом). Модели коллективных форм и систем заработной платы (в том числе – вознаграждения по итогам работы подразделения, организации и участие в прибыли, то есть перераспределение доходов, и др.) рассматриваются в [8].

Как и системы оплаты, используемые в России, так и такие системы оплаты, используемые за рубежом, как: система двух ставок, система контролируемой дневной выработки, надбавки за квалификацию, плата за знание и компетенцию, системы Тейлора, Скэнлона, Роуэна, Барта, Гантта, Меррика, «эмпирические» системы и др. (см. подробности в [7, 8, 18 и др.]), также могут быть формально описаны соответствующей базовой системой стимулирования.

Таким образом, краткий обзор основных используемых на практике систем оплаты труда позволяет сделать вывод, что подавляющее большинство из них охватывается множеством введенных выше моделей базовых систем стимулирования. При этом можно утверждать, что такие формы индивидуальной заработной платы как: повременная, сдельная, участие в доходе, премиальная (и соответствующие им системы оплаты: простая повременная, повременно-премиальная, прямая сдельная, сдельно-премиальная, сдельно-прогрессивная, косвенно-сдельная и аккордная и др.) могут быть относительно адекватно описаны следующим множеством систем стимулирования (см. их определения выше): L, LL, L+C или LL+C, D, C.

Установив в первом приближении качественную взаимосвязь теоретических моделей систем стимулирования с формами индивидуальной заработной платы, перейдем к изучению сравнительной эффективности тех или иных простых базовых систем стимулирования в одноэлементных ОС.

6. ЭФФЕКТИВНОСТЬ БАЗОВЫХ СИСТЕМ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим перечисленные выше базовые системы стимулирования, акцентируя в основном внимание на их эффективности (то есть на минимальных затратах центра на стимулирование по реализации тех или иных действий агента – см. второй раздел). Параллельно с теоретическим исследованием будем рассматривать иллюстративный пример – модель стимулирования в одноэлементной детерминированной ОС, в которой функция дохода центра равна[1]: $H(y) = b\, y$, $b > 0$, а функция затрат агента выпукла и равна: $c(y) = a\, y^2$, $a > 0$.

Так как выше было доказано, что компенсаторные (и квазикомпенсаторные) системы стимулирования оптимальны, то есть обладают максимальной эффективностью, то необходимо сравнить эффективность других базовых систем стимулирования с эффективностью квазикомпенсаторных.

Скачкообразные системы стимулирования (С-типа).

Как отмечалось выше, если не наложено ограничений на абсолютную величину индивидуального вознаграждения, то при исследовании скачкообразных систем стимулирования амплитуду скачка C (то есть величину вознаграждения в случае выполнения плана) следует считать переменной величиной, устанавливаемой центром, наряду с планом.

Множество действий, реализуемых системами стимулирования С-типа при условии $\overline{U} = 0$, имеет вид $P(C) = \{y \in A \mid c(y) \leq C\} = [0; y^+(C)]$, где $c(y^+) = C$. Минимальные затраты на стимулирование равны: $\sigma_{minC}(y) = C$, $y \in P(C)$. Следовательно, $\forall\ y \in P(C)$ выполнено[2]

---

[1] *Во многих случаях возможно произвести замену переменных, идентифицируя действие агента и доход центра (с точностью до мультипликативной константы), то есть «линеаризовать» функцию дохода центра, что иногда упрощает выкладки и численные расчеты. В то же время, такую замену следует производить с известной долей осторожности, пересчитывая и интерпретируя единицы измерения затрат и стимулирования, а также следя за выполнением введенных предположений.*

[2] *Напомним, что величина $\Delta(A, B)$ обозначает разность эффективностей классов систем стимулирования A и B.*

(8) $D(C; K) = C - c(y) \geq 0$.

При использовании квазискачкообразных систем стимулирования оценка (8) также остается в силе.

Таким образом, скачкообразные системы стимулирования имеют эффективность, не превышающую эффективность компенсаторных, и совпадающую с последней при реализации действий, лежащих на границе множества реализуемых действий, определяемой ограничениями механизма стимулирования.

Другими словами, скачкообразные системы стимулирования оптимальны, если выполнены следующие условия:

$$x = y^*, \ C = c(y^*) + \overline{U} + d,$$

где y^* определяется выражением (12) – см. также выражение (11).

График целевой функции агента при использовании центром системы стимулирования $\sigma_C(x, y)$ (при некотором $x \in P(C)$) приведен на рисунке 21 (отметим, что для наглядности в рисунках настоящего раздела функция затрат агента изображается с обратным знаком).

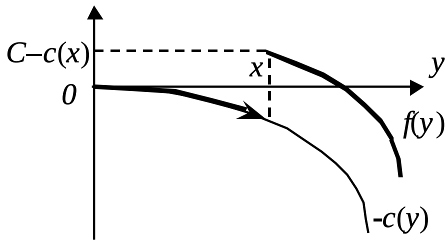

Рис. 21. Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования C-типа

Если ограничение C фиксировано, то при монотонной функции дохода центра оптимальным является реализация максимального действия $y^+(C)$, при этом $\sigma_{minC}(y^+(C)) = \sigma_{minQK}(y^+(C))$. В рассматриваемом примере $y^* = y^+(C) = \sqrt{C / a}$, если $b / \sqrt{aC} \geq 1$.

Компенсаторные системы стимулирования (К-типа).

При использовании компенсаторных (или квазикомпенсаторных) систем стимулирования минимальные затраты на стимулирование равны затратам агента.

Итак: $s_{minK}(y) = c(y)$, y Î $P(C)$. Очевидно, $D(K; K) = 0$. В рассматриваемом примере: $y^* = \arg\max_{y \geq 0} \{b\,y - a\,y^2\} = b/2a$, то есть $K_{QK} = F(y^*) = b^2/4a$; если же ФЗП ограничен, то: $K_{QK} = \max\{F(y^*), F(y^+(C)\}$, где $F(y^+(C) = b\sqrt{C/a} - C$, причем, если максимум целевой функции центра достигается в точке $y^+(C)$ (используется весь «размах» функции стимулирования), то оптимальными являются также и скачкообразные системы стимулирования с ограничением C.

График целевой функции агента при использовании центром системы стимулирования $s_K(x, y)$ (при некотором x Î $P(C)$) приведен на рисунке 22.

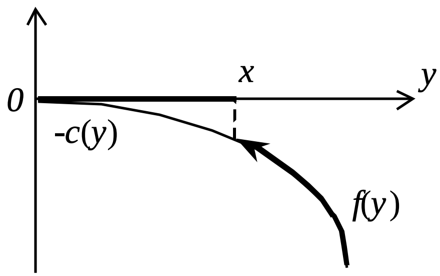

Рис. 22. Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования K-типа

<u>Пропорциональные системы стимулирования (L-типа).</u>

При использовании пропорциональных (линейных) или квазилинейных систем стимулирования и непрерывно дифференцируемой монотонной выпуклой функции затрат агента выбираемое им действие определяется следующим выражением: $y^* = c'^{-1}(a)$, где $c'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции затрат агента. При этом величина

(9) $D(L, K) = s_{minL}(y^*) - s_{minK}(y^*) = y^*\,c'(y^*) - c(y^*)$

всегда (при любых a ³ 0, и, следовательно, при любых y^* ³ 0) неотрицательна. В рассматриваемом примере $s_{minL}(y^*) = 2(y^*)^2$, то есть " y^* Î A' $s_{minL}(y^*) / s_{minK}(y^*) = 2$.

Таким образом, при выпуклых функциях затрат агента эффективность пропорциональных систем стимулирования не выше, чем компенсаторных. График целевой функции агента при использовании центром пропорциональной системы стимулирования приведен на рисунке 23.

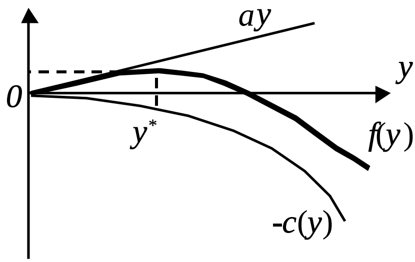

Рис. 23. Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования L-типа

Неэффективность пропорциональных систем стимулирования вида $s_L(y) = a\,y$ обусловлена требованием неотрицательности вознаграждений. Если допустить, что вознаграждение может быть отрицательным: $\breve{s}_L(y) = s_0 + a\,y$, где s_0 £ 0, то при выпуклых функциях затрат агента эффективность предложенной пропорциональной системы стимулирования $\breve{s}_L(\cdot)$ может быть равна эффективности оптимальной (компенсаторной) системы стимулирования. Для обоснования этого утверждения достаточно воспользоваться следующими соотношениями (см. рисунок 24):

$$y^*(a) = c^{'-1}(a),\ s_0(a) = c(c^{'-1}(a)) - a\,c^{'-1}(a).$$

Оптимальное значение a^* ставки оплаты при этом выбирается из условия максимума целевой функции центра:

$$a^* = \arg\max_{a \geq 0}\ [H(y^*(a)) - \breve{s}_L(y^*(a))].$$

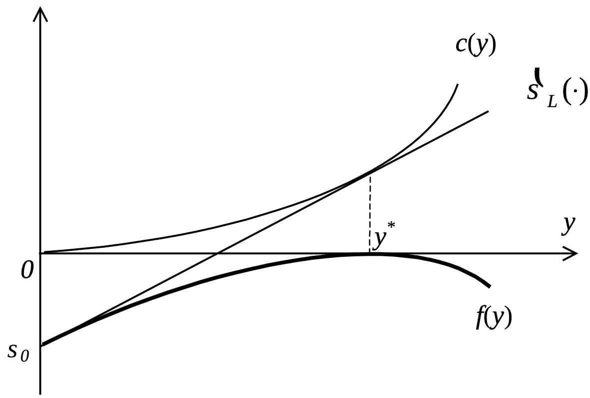

Рис. 24. Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования $\breve{s}_L(\cdot)$

В рассматриваемом примере $a^* = b$, $s_0 = - b^2 / 2\,a$, $y^* = b / 2\,a$.

<u>Системы стимулирования,</u>

<u>основанные на перераспределении дохода (D-типа).</u>

В работах [7, 9] при достаточно общих предположениях показано, что использование систем стимулирования, полностью основанных на перераспределении дохода, неэффективно (в сравнении с компенсаторными системами стимулирования).

Другими словами, ″ y^* Î A величина

(10) $D(D, K) = s_{minD}(y^*) - s_{minQK}(y^*)$

всегда неотрицательна. В рассматриваемом примере, так как функция дохода центра линейна по действию агента, то перераспределение дохода эквивалентно использованию пропорциональных систем стимулирования – при этом ставка оплаты $a = x\,b$, то есть: $s_{minD}(y^*) = s_{minL}(y^*) = 2(y^*)^2$, $x(y^*) = 2ay^*/b$, следовательно, y^* £ $b/2a$.

Эффективность системы стимулирования D-типа может быть и в точности такой же, как и эффективность «абсолютно оптимальной» квазикомпенсаторной системы стимулирования. Для этого достаточно, например, «однотипности» функции затрат агента и функции дохода центра. Следует признать, что содержательные интерпретации такого совпадения затруднительны.

Если в рассматриваемом примере $H(y) = b\,y^2$, где $b > a$, то при $x = a / b$ выполнено $K_D = K_{QK}$ (правда, если $a > b$, то системами стимулирования D-типа нельзя реализовать никаких действий, кроме нулевого).

<u>Системы стимулирования LL-типа.</u>

При использовании центром систем стимулирования LL-типа целевая функция агента имеет вид:

$$(11)\ f(y) = \begin{cases} a_1 y - c(y), & y \le x \\ a_2 y + (a_1 - a_2)x - c(y), & y \ge x \end{cases},$$

где x – величина действия, при превышении которого увеличивается ставка оплаты.

Обозначим $y_1^* = c'^{-1}(a_1)$, $y_2^* = c'^{-1}(a_2)$. Отметим, что в рамках введенных в разделе 1.1 предположений эти точки существуют и единственны, кроме того всегда выполнено: $y_1^* \le y_2^*$, $x \le y_2^*$ Возможны следующие случаи:

1. $y_1^* \le x \le y_2^*$, $f(y_1^*) \ge f(y_2^*)$ (в рассматриваемом примере этому соответствует выполнение $a_1 + a_2 \le 4\,a\,x$), тогда агент выберет действие y_1^*, то есть второй «кусок» (со ставкой a_2) функции стимулирования «не работает», при этом система стимулирования эквивалентна пропорциональной;

2. $y_1^* \le x \le y_2^*$, $f(y_1^*) \le f(y_1^*)$ (в рассматриваемом примере этому соответствует выполнение $a_1 + a_2 \ge 4\,a\,x$), тогда агент выберет действие y_2^*, то есть первый «кусок» (со ставкой a_1) функции стимулирования «не работает», но при этом система стимулирования не эквивалентна пропорциональной (см. оценку минимальных затрат на стимулирование ниже);

3. $y_1^* \le y_2^* \le x$, то есть получаем, практически, первый случай.

4. $x \le y_1^* \le y_2^*$, $f(y_1^*) \le f(y_2^*)$, то есть получаем, практически, второй случай.

Итак, интерес представляют (из-за отличия от систем L-типа) второй и четвертый из описанных выше случаев. Очевидно,

$s_{minLL}(y_2^*)$ £ $s_{minL}(y_2^*)$. Для рассматриваемого примера имеет место:

(12) $s_{minL}(y_2^*) - s_{minLL}(y_2^*) = (a_2 - a_1)\, x$.

Из выражения (12) видно, что эффективность системы стимулирования LL-типа возрастает с ростом параметра x £ y_2^*. Если отсутствуют ограничения на ставки оплаты, то получаем, что при $a_1 = 0$ при «стремлении» x к y_2^* система стимулирования LL-типа «стремится» к системе стимулирования C-типа со скачком в точке x.

Содержательно, с точки зрения центра максимально эффективной является неоплата (оплата с нулевой ставкой) действий, меньших плана, и компенсация затрат при точном выполнении (и/или перевыполнении плана) или пропорциональная оплата со ставкой, равной предельным затратам агента в точке плана.

Качественно, более высокую по сравнению с системами стимулирования L-типа эффективность систем LL-типа с последовательно возрастающими ставками оплаты можно объяснить тем, что последние «ближе» («точнее аппроксимируют») к выпуклой функции затрат агента. Кусочно-линейные системы стимулирования LLL-типа, LLLL-типа и т.д. с последовательно возрастающими ставками оплаты будут еще точнее аппроксимировать возрастающую выпуклую функцию затрат агента и, следовательно, будут иметь еще более высокую эффективность, приближаясь (по мере увеличения числа составляющих) к эффективности компенсаторной системы стимулирования.

Системы стимулирования CC-типа и C+C-типа, очевидно, эквивалентны (имеют ту же эффективность и те же минимальные затраты на стимулирование) базовым скачкообразным системам стимулирования (с одним скачком), поэтому подробно рассматривать их не будем.

Системы стимулирования L+C-типа и LL+C-типа.

Пусть производная функции затрат в нуле равна нулю. Обозначим $y_1^* = c'^{-1}(a_1)$, $y_2^* = c'^{-1}(a_2)$ (см. также системы стимулирования LL-типа). Система стимулирования LL+C-типа в зависимости от соотношения параметров может реализовывать одно трех из действий: y_1^*, x или y_2^*, где x – точка скачка.

По аналогии с исследованием систем LL-типа, для этого класса систем стимулирования можно показать, что их эффективность не ниже, чем эффективность систем L-типа и, естественно, не выше, чем систем K-типа и C-типа.

Системы стимулирования C+D-типа.

Содержательно, при использовании систем стимулирования C+D-типа индивидуальное вознаграждение агента складывается из оклада (выплачиваемого при условии выполнения, например, должностных обязанностей – тарифная система оплаты труда) и компоненты, зависящей от результатов деятельности всей организационной системы, точнее говоря – дохода центра, выражающего интересы системы в целом.

Обозначим $\tilde{c}(x, y) = c(y) - x\, H(y)$. Тогда целевая функция агента[1] может быть записана в виде:

(13) $f(x, y) = s(y) - \tilde{c}(x, y)$.

Итак, произведя замену переменных (затрат), получаем параметрическую (параметр – x) задачу синтеза оптимальной скачкообразной системы стимулирования в ОС с целевой функцией агента, определяемой (13), методы решения которой детально исследованы (см. [7, 9, 11, 12]). Таким образом, задача поиска оптимальной системы стимулирования C+D-типа решается в два этапа. На первом этапе для фиксированного x ищется оптимальная система стимулирования C-типа. На втором этапе ищется оптимальное значение параметра $x \in [0; 1]$.

Системы стимулирования K+A-типа и C+A-типа[2].

Относительно суммарных систем стимулирования следует сделать следующее общее замечание. Пусть A и B – классы компонент (слагаемых) некоторой суммарной системы стимулирования из класса A+B. Условие реализуемости действия $y^* \in A'$ имеет вид:

$$\forall y \in A' \quad s_{A+B}(y^*) - c(y^*) \geq s_{A+B}(y) - c(y).$$

---

[1] *Отметим, что функция $\tilde{c}(x, y)$ может не удовлетворять тем предположениям, которым удовлетворяет функция затрат $c(y)$.*

[2] *Напомним, что «A» обозначает произвольную базовую систему стимулирования.*

При этом минимальные затраты на стимулирование по реализации действия y^* равны

(14) $s_{min(A+B)}(y^*) = s_A(y^*) + s_B(y^*)$.

Свойство аддитивности минимальных затрат на стимулирование, отражаемое выражением (14), позволяет сделать важный вывод о свойстве суммарных систем стимулирования, в которых одной из компонент является компенсаторная или оптимальная (см. выше) скачкообразная системы стимулирования. Так как одна из компонент (оптимальная С-типа или К-типа) системы стимулирования С+А-типа или К+А-типа компенсирует затраты агента по выбору некоторого действия, то компонента А является «лишней» с точки зрения реализуемости этого действия, играя роль дополнительной мотивации. Из вышесказанного и (14) следует, что справедлива следующая оценка: $'' \, y^* \; \hat{I} \; A$

(15) $D(K+A, K) = D(C+A, C) = s_A(y^*)$.

Выражение (15) дает возможность легко оценить «экономические» потери от использования систем стимулирования С+А-типа или К+А-типа по сравнению с системами стимулирования С-типа или К-типа.

Содержательно (15) означает, что агент выбирает действие, при котором достигается максимум «дополнительного» (с учетом полностью компенсированных его затрат) вознаграждения $s_A(y)$. Поэтому анализ систем стимулирования С+А-типа или К+А-типа вырождается и заключается в поиске системы стимулирования А, которая будет: 1) иметь максимум в точке, которую хочет реализовать центр; 2) обладать достаточным мотивирующим эффектом; 3) иметь в точке максимума минимальное значение (с учетом второго пункта).

Итак, рассмотрены основные свойства базовых систем стимулирования: скачкообразных, компенсаторных, пропорциональных и основанных на перераспределении дохода, а также ряда производных от них систем стимулирования. Сводка полученных выше оценок их сравнительной эффективности (оценок затрат на стимулирование при любых допустимых действиях агента) приведена в таблице 1.

Знак «≥» («≤»), стоящий на пересечении некоторой строки и столбца таблицы 1, означает, что в рамках введенных предположений при использовании класса систем стимулирования, соответствующих строке, эффективность всегда не меньше (не больше) а, следовательно, минимальные затраты на стимулирование не больше (не меньше), чем при использовании класса систем стимулирования, соответствующих столбцу. Знак «?» означает, что соотношение затрат на стимулирование зависит от конкретного случая – параметров организационной системы, то есть свойств целевых функций и допустимых множеств и т.д. – и требует дополнительного исследования в каждом из этих конкретных случаев.

Таблица 1

Сравнительная эффективность
базовых систем стимулирования

	C	**K**	**L**	**D**	**LL**	**LL+C**	**C+D**
C	¾	=	3	3	3	3	3
K	=	¾	3	3	3	3	3
L	£	£	¾	?	£	£	?
D	£	£	?	¾	?	?	£
LL	£	£	3	?	¾	£	?
LL+C	£	£	3	?	3	¾	?
C+D	£	£	?	3	?	?	¾

Выше были выделены четыре основных, двенадцать суммарных и пятнадцать составных (двойных), то есть всего 31 простая базовая система стимулирования. Подробно исследованы некоторые (K, C, L, D, LL, L+C и др.) из базовых систем стимулирования, отражающих наиболее часто используемые на практике системы индивидуальной заработной платы.

Полное исследование сравнительной эффективности всех базовых систем стимулирование подразумевает, как минимум, попарное сравнение соответствующих минимальных затрат на стимулирование, результатами которого могла бы стать таблица типа таблицы 1, имеющая *31 ´ 31 = 961* ячейку. Заполнение такой таблицы является трудоемкой, но, в принципе, реализуемой задачей. В то же время, такое детальное исследование всех возможных комбинаций представляется нецелесообразным по следующим причинам.

Во-первых, выше при описании результатов исследования комбинаций, вошедших в таблицу 1, мы зачастую вводили те или иные предположения как относительно свойств целевых функций, так и относительно соотношений конкретных параметров, явно оговаривая или неявно подразумевая (будучи обоснованно уверенными [11]), что небольшие изменения этих параметров не повлияют на сделанные выводы и, в частности – на оценки сравнительной эффективности.

Во-вторых, из приведенных результатов видно, что «техника» анализа различных комбинаций практически одинакова (что и является одной из основ упомянутой выше уверенности): следует вычислить действия, реализуемые используемой системой стимулирования, определить минимальные затраты на стимулирование и сравнить их с соответствующими показателями для других базовых систем стимулирования.

Таким образом, с одной стороны, учет всего многообразия возможных вариантов достаточно трудоемок, с другой стороны единообразие, простота и алгоритмичность их анализа свидетельствуют о наличии единых (методологических и методических) подходов к их изучению. Поэтому, наверное, нецелесообразно исследовать все комбинации моделей, а лучше предоставить исследователю операций возможность самостоятельно реализовать в каждом конкретном случае единый подход к изучению как существующих на практике систем оплаты, так и их формальных моделей.

Существенными для проведенного анализа являлись введенные выше предположения о поведении агента – в частности: используемых им принципах рационального выбора, свойствах функции затрат и т.д. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований представляется ослабление этих предположений, то есть расширение множества моделей и исследование возможности использования предложенного выше подхода (анализ минимальных затрат на стимулирование) в этом более широком их классе.

В заключение настоящего раздела рассмотрим интерпретации базовых систем стимулирования в терминах экономики труда (функции полезности), исходя из обоснованного выше предположения, что кривые безразличия функции полезности $u(q, t)$ агента убывающие и выпуклые[1].

Системы стимулирования K-типа.

Напомним, что компенсаторной выше была названа система стимулирования, которая компенсирует затраты агента, обеспечивая ему некоторый уровень полезности (например, полезность резервной заработной платы $\overline{U}$). Множество допустимых вознаграждений агента при ограничении C механизма стимулирования заштриховано на рисунке 25.

Если центр гарантирует агенту значение полезности, равное полезности резервной заработной платы, то компенсаторная система стимулирования $s_K(t)$ может быть найдена из следующих соотношений (см. определение множества реализуемых действий выше):

(16) $\forall\ t: (T - t) \in P(C) \quad u(\tilde{s}_K(t), t) = \overline{U}$,

(17) $s_K(t) = \tilde{s}_K(T - t)$.

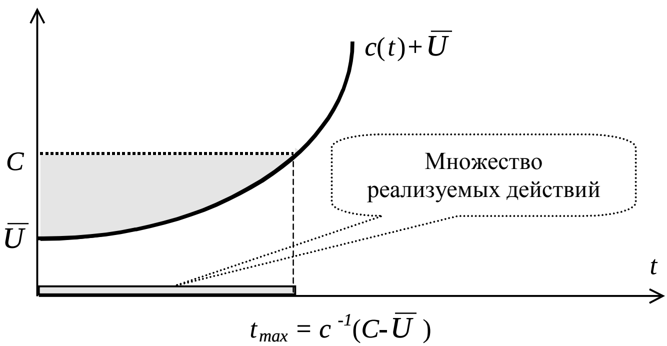

Рис. 25. Множество допустимых вознаграждений

[1] *Подчеркнем, что для упрощения изложения считается, что задача выбора агентом продолжительности рабочего времени имеет внутреннее решение, то есть, исключим из рассмотрения «угловое решение», при котором оптимальная для агента продолжительность свободного времени равна T (при этом стимулирование бессмысленно, так как агент отрабатывает нулевое число часов, как и в случае полного отсутствия стимулирования).*

Из (16)-(17) следует, что график функции $\tilde{s}_K(t)$ совпадает с кривой безразличия функции полезности, определяемой условием: $g = \overline{U}$ (см. рисунок 26). Так как кривая безразличия – убывающая и выпуклая, следовательно компенсаторная система стимулирования является возрастающей и выпуклой (см. рисунок 26). Кривая безразличия, соответствующая гарантированной полезности агента $\overline{U}$, на рисунке 26 выделена жирной линией.

На рисунке 26 также изображена (жирной штрих-пунктирной линией) компенсаторная функция стимулирования $s_K(t)$, соответствующая данной функции полезности агента (отметим, что при $t > t_{max} = T - t_{min} = c^{-1}(C - \overline{U})$ компенсаторное вознаграждение превысит ограничение C).

Итак, компенсация затрат в модели индивидуальных предпочтений означает, что агент «находится» на изокванте полезности и безразличен между всеми продолжительностями рабочего времени. Если выполнена гипотеза благожелательности, то он выберет продолжительность рабочего времени, оговоренную в контракте.

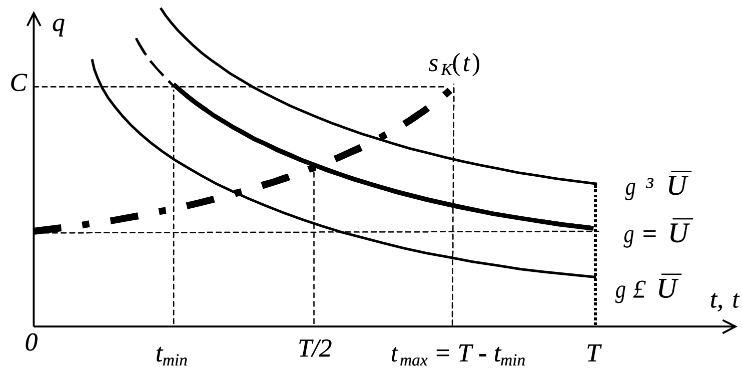

Рис. 26. Компенсаторная функция стимулирования

Приведем доказательство оптимальности систем стимулирования К-типа в терминах функции полезности. Пусть центр хочет побудить агента отработать t^* часов. Свободное время при этом равно $t^* = T - t^*$. Наличие резервной заработной платы ограничивает множество возможных значений вознаграждения полуинтервалом AB (см. рисунок 27).

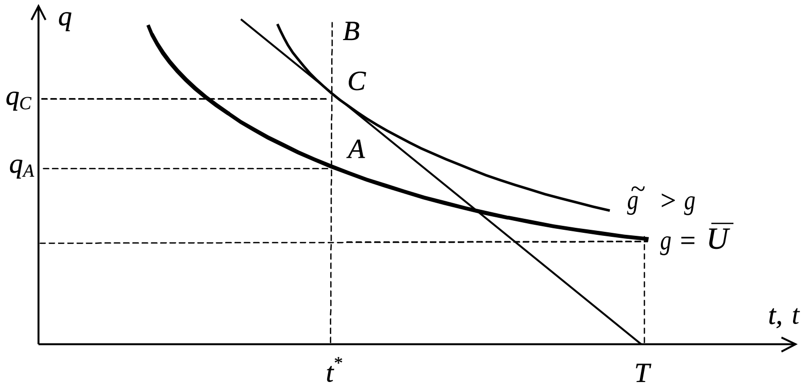

Рис. 27. Оптимальность функции стимулирования К-типа

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования сводится к поиску такого бюджетного ограничения, которое касалось бы некоторой кривой безразличия на отрезке AB, причем желательно, чтобы величина вознаграждения в точке касания была минимальна, то есть чтобы точка касания находилась как можно ближе к точке A, а в идеале – совпадала бы с ней. Кривая безразличия, проходящая через точку A, соответствует ограничению резервной заработной платы. Если рассматривать ее саму как бюджетное ограничение, то получим, что последнему соответствует именно компенсаторная система стимулирования. При ее использовании затраты на стимулирование по реализации действия t^* равны q_A (см. рисунок 27).

Если попытаться найти оптимальную пропорциональную систему стимулирования, реализующую то же действие t^*, то получим, что соответствующим ей бюджетным ограничением является прямая, касающаяся кривой безразличия $\tilde{g} > g = \overline{U}$ в точке C (см. рисунок 27). Через точку C проходит кривая безразличия, соответствующая строго большей полезности, чем полезность резервной заработной платы. Поэтому, хотя пропорциональная система стимулирования и реализует действие t^*, она реализует его с затратами на стимулирование q_C, строго большими, чем минимально необходимые. Разность $q_C - q_A$ показывает насколько переплачивает центр при использовании неотрицательных пропорциональных систем стимулирования по сравнению с компенсаторными. Аналогичные рассуждения можно привести, иллюстрируя их графиками (см. ниже), и относительно эффективности других базовых систем стимулирования в сравнении с компенсаторными и друг с другом.

Из всех базовых систем стимулирования только компенсаторные зависят непосредственно от затрат агента. Поэтому при рассмотрении остальных базовых систем стимулирования учет полезности агента будет производиться не столь явным образом, как это делалось выше для компенсаторных. Реализуемое действие будем обозначать как и ранее t^* ($t^* = T - t^*$). Аналогия приводимых ниже результатов с результатами анализа пропорциональных систем стимулирования следующая – функция поощрения $\tilde{s}(t)$ является бюджетным ограничением, которого в точке оптимума должна «касаться» кривая безразличия агента.

Системы стимулирования C-типа.

Напомним, что при использовании скачкообразных систем стимулирования $s_C(t)$ агент поощряется на фиксированную величину только в том случае, если его действие (продолжительность рабочего времени t) не меньше, чем заданный норматив x. Соответствующая функция $\tilde{s}_C(t)$ определяется следующим образом: агент поощряется на фиксированную величину только в том случае, если продолжительность его свободного времени t не больше, чем заданный норматив x.

На рисунке 28 представлены: скачкообразная система стимулирования $\tilde{s}_C(t)$ со скачком в точке x; кривая безразличия $g = \overline{U}$ полезности обозначена пунктиром, она совместно с ограничением механизма стимулирования C определяет минимальную продолжительность свободного времени t_{min}, которую центр может побудить выбрать агента; кривая безразличия функции полезности (соответствующая максимальному при данной системе стимулирования значению полезности агента) обозначена непрерывной линией, эта кривая безразличия характерна тем, что она касается[1] $\tilde{s}_C(t)$ в точке А.

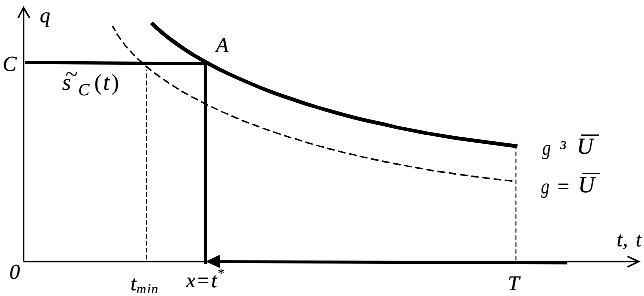

Рис. 28. Скачкообразная функция стимулирования

Значение времени досуга, равное t_{min}, соответствует максимальной продолжительности рабочего времени, которое центр может побудить отработать агента, используя скачкообразные системы стимулирования, ограниченные сверху константой C (доход агента, равный C, при $t = t_{min}$ обеспечивает ему минимальный уровень полезности, соответствующий резервной заработной плате).

Системы стимулирования L-типа (то есть линейные – с постоянной ставкой оплаты) детально описаны выше.

Остановимся более подробно на взаимосвязи сдельной и повременной оплаты. Как отмечалось выше, если результат деятельности агента, достигаемый за единицу времени (являющуюся основой отсчета при повременной оплате – минута, час, день и т.д.), постоянен и не зависит от количества уже отработанных часов, то с точки зрения теоретического анализа сдельная и повременная системы оплаты полностью эквивалентны – между ними

[1] *Оптимальная продолжительность рабочего времени (то есть продолжительность, максимизирующая полезность агента при данной зарплате) в рассматриваемом случае определяется уже не «дифференциальными» условиями первого порядка (условие касания), а общим видом условий реализуемости действия (условий глобального максимума).*

существует линейная связь (то есть результат деятельности y прямо пропорционально рабочему времени t). Если результат деятельности агента, достигаемый за единицу времени, зависит от количества уже отработанных часов, то между повременной и сдельной оплатой существуют различия.

В работах зарубежных исследователей по экономике труда [17] обычно принимается следующий вид зависимости между результатами деятельности y и текущей продолжительностью рабочего времени t (см. рисунок 29). На рисунке 30 изображен график производной $\frac{dy(t)}{dt}$ кривой $y(t)$ – кривая *производительности деятельности* агента (результат деятельности, достигаемый в единицу времени).

Содержательно, низкая производительность в начале рабочего дня обусловлена эффектом «врабатывания» (или адаптации) – агент переключается (промежуток времени $[0; t_1]$) на новый (по сравнению, например, с отдыхом) вид деятельности – работу. Постепенно производительность растет (промежуток времени $[t_1; t_2]$, достигая максимума в момент времени t_2 (или в более общем случае в некотором интервале времени). Затем, после момента времени t_2, начинает сказываться, например, усталость, и производительность начинает убывать.

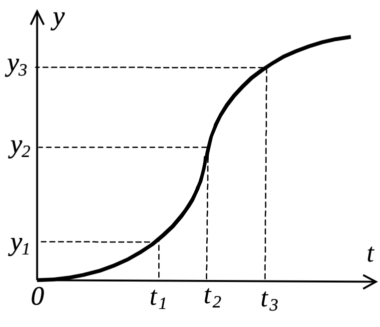

Рис. 29. Зависимость результата (кумулятивного) деятельности агента от времени

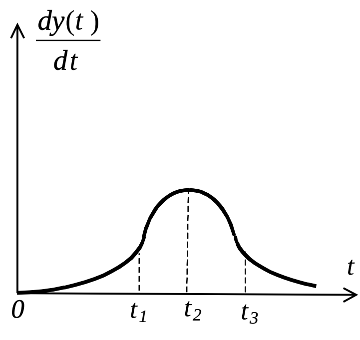

Рис. 30. Производительность деятельности агента

В многочисленных исследованиях (проведенных в основном в доперестроечный период) также встречаются кривые (зависимости производительности труда от времени в течение рабочего дня[1]) типа приведенных на рисунке 30. Эскиз графика характерной зависимости производительности труда рабочих (с учетом перерыва на обед) от времени изображен на рисунке 31 (нулевой момент времени соответствует началу рабочего дня; во время обеденного перерыва – на интервале $[t_1; t_2]$ – производительность равна нулю; момент времени t_3 соответствует окончанию рабочего дня). Содержательные интерпретации участков возрастания, постоянства и убывания производительности труда очевидны.

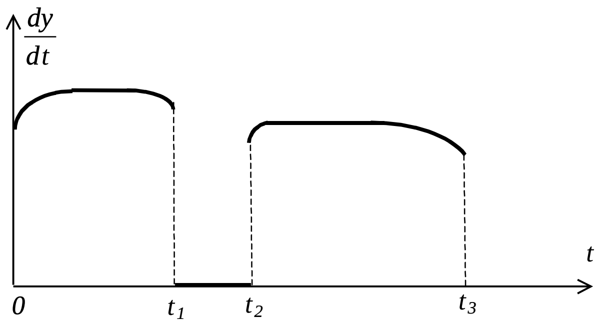

Рис. 31. Зависимость производительности труда от времени в течение рабочего дня

Нелинейное изменение результата деятельности агента во времени позволяет выделить два «типа» агентов, которых следует оплачивать по-разному. Поясним последнее утверждение. Если принять, что функция затрат агента имеет вид, изображенный на рисунке 29, то при использовании центром компенсаторной системы стимулирования кривые безразличия агента могут касаться кривой бюджетного ограничения в одной из двух характерных точек – точке A, в которой кривая бюджетного ограничения вогнута (первый «тип»), или в точке B, в которой кривая бюджетного

[1] *Следует отметить, что и отечественными, и зарубежными учеными исследовались зависимости производительности труда от времени не только в течение рабочего дня, но и в течение рабочей недели, месяца, года и т.д.*

ограничения выпукла (второй «тип» – см. рисунок 32). Выделенным двум типам агентов соответствуют разные семейства кривых безразличия: агенты первого типа по сравнению с агентами второго типа выше ценят доход, а агенты второго типа – свободное время.

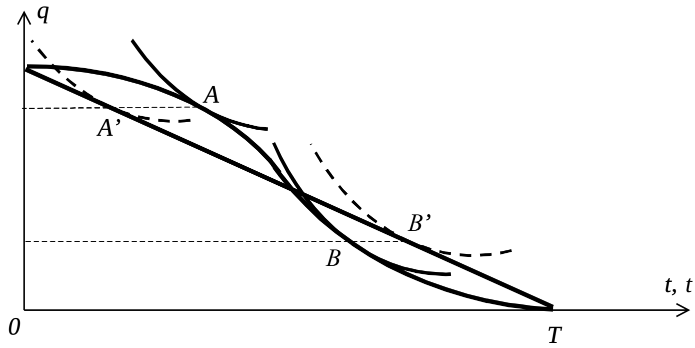

Рис. 32. Два «типа» агентов

Если цель центра заключается в том, чтобы при минимальном вознаграждении агента побуждать его к увеличении продолжительности рабочего времени, то для агентов первого типа следует использовать повременную систему (пропорциональную, в которой показателем является продолжительность рабочего дня) стимулирования, а для агентов второго типа – сдельную (компенсаторную, в которой показателем является результат деятельности) – см. горизонтальные прямые и точки A, A' и B, B' на рисунке 32.

Системы стимулирования D-типа. Напомним, что в системах стимулирования, основанных на перераспределении дохода, вознаграждение агента пропорционально (с коэффициентом пропорциональности не зависящим от действия агента) доходу центра $H(y)$, который зависит от действия агента, то есть $s_D(t) = x\,H(t)$, $x \in [0; 1]$.

Если функция дохода центра вогнутая (что обычно предполагается как в теоретико-игровых, так и в экономических моделях), то функции $s_D(t)$ и $\tilde{s}_D(t)$ также являются вогнутыми. На рисунке 33 изображены функции стимулирования $s_D(t)$ и $\tilde{s}_D(t)$, а также кривая безразличия, соответствующая максимальному значению полезности агента (эта кривая касается кривой $\tilde{s}_D(t)$ в точке А).

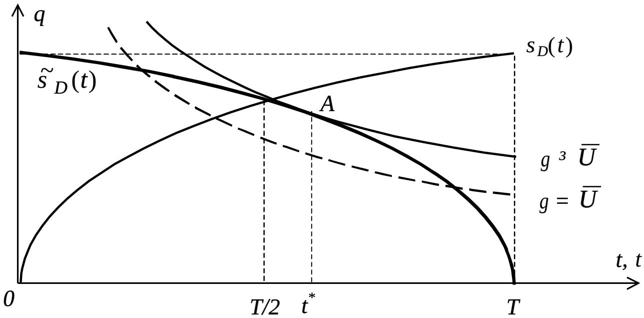

Рис. 33. Функция стимулирования D-типа

Вогнутые функции стимулирования.

Пусть функция стимулирования (бюджетное ограничение) вогнутая, а кривая безразличия агента – выпуклая (см. рисунок 34). Тогда для данной системы стимулирования можно произвести линеаризацию (см. выше), то есть найти неотрицательную систему стимулирования L+C-типа, реализующую то же действие, что и исходная система стимулирования. Величина q_T называется *нетрудовым доходом* (она равна доходу агента при нулевом рабочем времени).

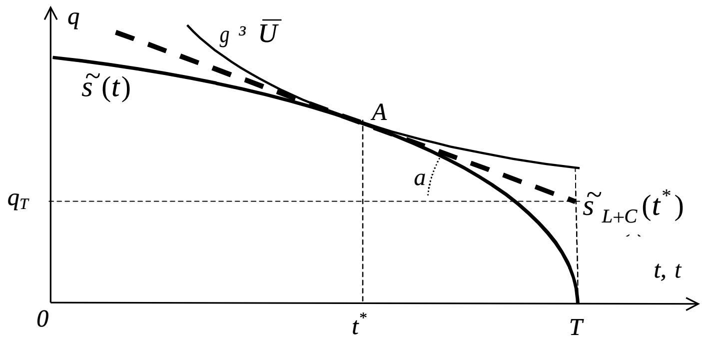

Рис. 34. Линеаризация вогнутой функции стимулирования

Итак, рассмотрено описание основных базовых систем стимулирования в терминах экономики труда. Используя полученные результаты, легко получить аналогичные описания для остальных базовых систем стимулирования. Проиллюстрируем возможность переноса на примере составных и суммарных систем стимулирования.

Системы стимулирования LL-типа (составные). Напомним, что составной системой стимулирования LL-типа называется такая система стимулирования, в которой агент поощряется пропорционально действию, причем на различных участках множества возможных действий $A = [0; T]$ коэффициенты пропорциональности a_1 и a_2 различны. Так как выше было показано, что оптимальная система стимулирования должна быть возрастающей и выпуклой, то рассмотрим случай, когда $0 < a_1$ £ a_2 (при $a_1 = a_2$ получим подробно рассмотренную выше систему стимулирования L-типа). Условием оптимальности является равенство ставки оплаты и альтернативной стоимости одного часа досуга. Следовательно, возможны три варианта – кривая безразличия полезности агента касается бюджетной кривой, имеющей вид ломаной, либо на линейном участке с углом наклона a_1 (точка A – см. рисунок 35), либо на линейном участке с углом наклона a_2 (точка B – см. рисунок 36), либо на обоих участках сразу (точки A и B – см. рисунок 37) – см. также описание систем стимулирования LL-типа.

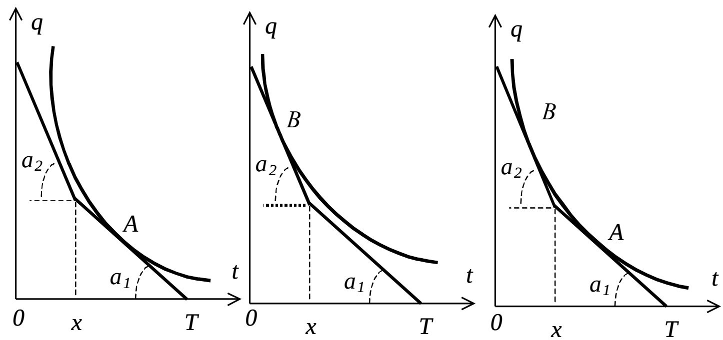

Рис. 35 *Рис. 36* *Рис. 37*

Система стимулирования LL-типа

Системы стимулирования L+C-типа (суммарные). Напомним, что суммарной системой стимулирования L+C-типа называется такая система стимулирования, при использовании которой агент поощряется пропорционально действию, причем, если его действие (количество отработанных часов) превышает норматив x, то ему доплачивается постоянная величина C. Как и ранее, возможны три варианта – кривая безразличия полезности агента касается бюджетной кривой, имеющей вид разрывной прямой, на линейном участке с углом наклона a либо правее точки x (точка А – см. рисунок 38), либо левее этой точки (точка В – см. рисунок 39), либо, что не исключено в силу выпуклости кривых безразличия, одновременно в точке x и правее ее (точки А и В – см. рисунок 40).

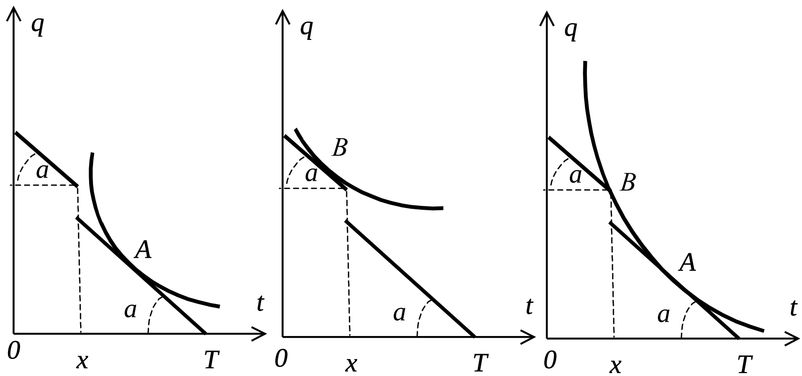

Рис. 38 *Рис. 39* *Рис. 40*

Система стимулирования L+C-типа

Итак, рассмотрена взаимосвязь между теоретико-игровыми моделями стимулирования и экономическими моделями предложения труда. Полученные результаты позволили не только провести содержательные аналогии, но и установить количественные соотношения между параметрами этих двух классов моделей.

Для использования результатов моделирования на практике требуется уметь идентифицировать модель стимулирования, в том числе – определять предпочтения участников ОС. Так как предпочтения центра описываются его функцией дохода, а предпочтения агента – функцией затрат, то необходимо привести конструктивные алгоритмы определения этих функций. Рассмотрим сначала проблему идентификации функции затрат агента.

ЧАСТЬ 3. КОЛЛЕКТИВНОЕ СТИМУЛИРОВАНИЕ

7. КОЛЛЕКТИВНОЕ СТИМУЛИРОВАНИЕ ЗА ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В предыдущих разделах рассматривались системы индивидуального стимулирования. Дальнейшее изложение посвящено описанию моделей коллективного стимулирования, то есть стимулирования коллектива агентов.

Простейшим обобщением базовой одноэлементной модели является *многоэлементная ОС* с независимыми (невзаимодействующими) агентами. В этом случае задача стимулирования распадается на набор одноэлементных задач.

Если ввести общие для всех или ряда агентов ограничения на механизм стимулирования, то получается задача стимулирования в ОС со слабо связанными агентами, представляющая собой набор параметрических одноэлементных задач, для которого проблема поиска оптимальных значений параметров решается стандартными методами условной оптимизации.

Если агенты взаимосвязаны, то есть затраты или/и стимулирование агента зависят, помимо его собственных действий, от действий других агентов, то получается «полноценная» многоэлементная модель стимулирования, описываемая ниже.

Последовательность решения многоэлементных и одноэлементных задач имеет много общего. Сначала необходимо построить компенсаторную систему стимулирования, реализующую некоторое (произвольное, или допустимое при заданных ограничениях) действие – первый этап – этап анализа согласованности стимулирования. В одноэлементных ОС в рамках гипотезы благожелательности для этого достаточно проверить, что при этом максимум целевой функции агента будет достигаться, в том числе и на реализуемом действии. В многоэлементных ОС достаточно показать, что выбор соответствующего действия является равновесной стратегией в игре агентов. Если равновесий несколько, то необходимо проверить выполнение для рассматриваемого действия дополнительной гипотезы о рациональном выборе агентов. В большинстве случаев достаточным оказывается введение аксиомы единогласия (агенты не будут выбирать равновесия, доминируемые по Парето другими равновесиями), иногда центру приходится вычислять гарантированный результат по множеству равновесных стратегий агентов и т.д. Далее следует приравнять стимулирование затратам и решить стандартную оптимизационную задачу – какое из реализуемых действий следует реализовывать центру – второй этап – этап согласованного планирования – см. также второй раздел.

В большинстве рассматриваемых в теории управления моделей стимулирования изучаются одноэлементные ОС, состоящие из одного управляющего органа (центра) и одного управляемого субъекта – агента. В настоящем разделе описывается предложенный в [14] метод, заключающийся в выборе системы стимулирования, реализующей оптимальный с точки зрения центра вектор действий агентов как равновесие в доминантных стратегиях[1] (РДС) [5], что позволяет декомпозировать игру агентов и получить аналитическое решение задачи стимулирования.

Стимулирование в ОС со слабо связанными агентами. Описанные выше результаты решения задачи стимулирования могут быть непосредственно обобщены на случай, когда имеются $n \geq 2$ агентов, функции затрат которых зависят только от их собственных действий (так называемые *сепарабельные затраты*), стимулирование каждого агента зависит только от его собственных действий, но существуют ограничения на суммарное стимулирование агентов. Такая модель *называется ОС со слабо связанными агентами* и является промежуточной между системами индивидуального и коллективного стимулирования.

[1] *Напомним, что равновесием в доминантных стратегиях называется такой вектор действий агентов, что каждому агенту выгодно выбирать соответствующую компоненту этого равновесия независимо от того, какие действия выбирают другие агенты – см. формальное определение ниже.*

Пусть I = {$1, 2, \ldots, n$} – множество агентов, y_i Î A_i – действие i-го агента, $c_i(y_i)$ – затраты i-го агента, $s_i(y_i)$ – стимулирование его со стороны центра, i Î I, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор действий агентов, y Î A' = $\prod_{i \in I} A_i$. Предположим, что центр получает доход $H(y)$ от деятельности агентов.

Пусть размеры индивидуальных вознаграждений агентов ограничены величинами {C_i}$_{i\ Î\ I}$, то есть " y_i Î A_i $s_i(y_i)$ £ C_i, i Î I. Если фонд стимулирования (ФЗП) ограничен величиной R, то есть $\sum_{i \in I} C_i \leq R$, то получаем (см. второй раздел), что максимальное множество реализуемых действий для i-го агента зависит от соответствующего ограничения механизма стимулирования: $P_i(C_i) = [0, y_i^+(C_i)]$, i Î I.

Тогда оптимальное решение задачи стимулирования в ОС со слабо связанными агентами определяется следующим образом – максимизировать выбором индивидуальных ограничений {C_i}$_{i\ Î\ I}$, удовлетворяющих *бюджетному ограничению* $\sum_{i \in I} C_i \leq R$, следующее выражение:

$$\Phi(R) = \max_{\{y_i \in P_i(C_i)\}_{i \in I}} H(y_1, \ldots, y_n),$$

что является стандартной задачей условной оптимизации.

Отметим, что когда ФЗП фиксирован, затраты центра на стимулирование не вычитаются из его дохода. Если ФЗП является переменной величиной, то его оптимальное значение R^* может быть найдено как решение следующей задачи:

$$R^* = \arg \max_{R \geq 0} \, [F(R) - R].$$

<u>Пример 5.</u> Пусть функции затрат агентов: $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, i Î I, а функция дохода центра – $H(y) = \sum_{i \in I} a_i y_i$, где {a_i}$_{i\ Î\ I}$ – положительные константы.

При заданных ограничениях {C_i}$_{i\ Î\ I}$ максимальное реализуемое действие каждого агента: $y_i^+(C_i) = \sqrt{2 r_i C_i}$, i Î I. Задача свелась к определению оптимального набора ограничений $\{C_i^*\}_{i \in I}$, удовлетворяющего бюджетному ограничению и максимизирующего целевую функцию центра:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in I} a_i \sqrt{2 r_i C_i} \to \max\limits_{\{C_i\}} \\ \sum\limits_{i \in I} C_i \le R \end{cases}.$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$C_i^* = \frac{r_i a_i^2}{\sum\limits_{j \in I} r_j a_j^2} R,\ i \in I.$$

Оптимальный размер ФЗП равен $R^* = \sum\limits_{i \in I} r_i a_i^2 / 2$. •

Стимулирование в ОС с сильно связанными агентами. Обозначим $y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, \quad y_{i+1}, \ldots, y_n) \in A_{-i} = \prod\limits_{j \ne i} A_j$ – обстановка игры для i-го агента. Интересы и предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра $F(\sigma, y)$ представляет собой разность между его доходом $H(y)$ и суммарным вознаграждением $u(y)$, выплачиваемым агентам: $u(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i(y)$, где $\sigma_i(y)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(y) = (\sigma_1(y), \sigma_2(y), \ldots, \sigma_n(y))$. Целевая функция i-го агента $f_i(\sigma_i, y)$ представляет собой разность между стимулированием, получаемым от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

(1) $F(\sigma, y) = H(y) - \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i(y)$.

(2) $f_i(\sigma_i, y) = \sigma_i(y) - c_i(y),\ i \in I$.

Отметим, что и индивидуальное вознаграждение, и индивидуальные затраты i-го агента по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех агентов (*случай сильно связанных агентов* с *несепарабельными затратами*).

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно – функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Относительно параметров ОС введем следующие предположения:

- множество действий каждого агента совпадает со множеством неотрицательных действительных чисел;

- функции затрат агентов непрерывны, неотрицательны и $''\ y_i\ \hat{I}\ A_i\ c_i(y)$ не убывает по y_i, $i\,\hat{I}\ I$; и $''\ y_{-i}\ \hat{I}\ A_{-i}\ c_i(0, y_{-i}) = 0$.

- функция дохода центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при ненулевых действиях агентов.

Второе предположение означает, что независимо от действий других агентов любой агент может минимизировать свои затраты выбором нулевого действия. Остальные предположения – такие же, как и в одноэлементной модели (см. второй раздел).

Так как и затраты, и стимулирование каждого агента в рассматриваемой модели зависят в общем случае от действий всех агентов, то агенты оказываются вовлеченными в *игру* [5], в которой выигрыш каждого зависит от действий всех. Обозначим $P(s)$ – множество равновесных при системе стимулирования s стратегий агентов – множество решений игры (тип равновесия пока не оговаривается; единственно предположим, что агенты выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью).

Как и в одноэлементной ОС, рассмотренной во втором разделе, гарантированной эффективностью (далее просто «эффективностью») стимулирования является минимальное (или максимальное – в рамках гипотезы благожелательности) значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

(3) $K(s) = \min\limits_{y \in P(s)} F(s, y)$.

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования σ^*, имеющей максимальную эффективность:

(4) $\sigma^* = \arg\max\limits_{\sigma \in M} K(\sigma)$.

Из результатов второго раздела следует, что в частном случае, когда агенты независимы (вознаграждение и затраты каждого из них зависят только от его собственных действий), то оптимальной (точнее – d-оптимальной, где $d = \sum\limits_{i \in I} d_i$) является квазикомпенсаторная система стимулирования:

(5) $\sigma_{iK}(y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \; i \in I,$

где $\{d_i\}_{i \in I}$ – сколь угодно малые строго положительные константы (мотивирующие надбавки), а оптимальное действие y^*, реализуемое системой стимулирования (5) как РДС, является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$y^* = \arg\max_{y \in A'} \{H(y) - \sum_{i \in I} c_i(y_i)\}.$$

Если стимулирование каждого агента зависит от действий всех агентов (рассматриваемый в настоящем разделе случай коллективного стимулирования) и *затраты не сепарабельны* (то есть затраты каждого агента зависят в общем случае от действий всех агентов, что отражает взаимосвязь и взаимозависимость агентов), то определения множества *равновесий Нэша*[1] $E_N(\sigma) \subseteq A'$ и РДС $y_d \in A'$ имеют вид:

(6) $E_N(\sigma) = \{y^N \in A \mid \forall i \in I \;\; \forall y_i \in A_i$

$$\sigma_i(y^N) - c_i(y^N) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}^N) - c_i(y_i, y_{-i}^N)\},$$

$y_{i_d} \in A_i$ – доминантная стратегия i-го агента, тогда и только тогда, когда

[1] *Напомним, что равновесием Нэша называется такой вектор действий агентов, что каждому агенту выгодно выбирать соответствующую компоненту этого равновесия при условии, что все остальные агенты выбирают равновесные действия.*

$$\forall\, y_i \in A_i,\ \forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ \ \sigma_i(y_{i_d}, y_{-i}) - c_i(y_{i_d}, y_{-i}) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i}).$$

Если при заданной системе стимулирования у всех агентов имеется доминантная стратегия, то говорят, что данная система стимулирования реализует соответствующий вектор действий как РДС.

Фиксируем произвольный вектор действий агентов $y^* \in A'$ и рассмотрим следующую систему стимулирования:

$$(7)\ \ \sigma_i(y^*, y) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases},\ \delta_i \geq 0,\ i \in I.$$

В [14] доказано, что при использовании центром системы стимулирования (7) y^* – РДС. Более того, если $\delta_i > 0,\ i \in I$, то y^* – единственное РДС.

Содержательно, при использовании системы стимулирования (7) центр использует следующий **принцип декомпозиции**: он предлагает i-му агенту – «выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты, независимо от того какие действия выбрали остальные агенты, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр декомпозирует игру агентов.

Если стимулирование каждого агента зависит только от его собственного действия, то, фиксировав для каждого агента обстановку игры, перейдем от (7) к системе индивидуального стимулирования следующим образом: фиксируем произвольный вектор действий агентов $y^* \in A'$ и определим систему стимулирования:

$$(8)\ \ \sigma_i(y^*, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}^*) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases},\ \delta_i \geq 0,\ i \in I.$$

Содержательно, при использовании системы стимулирования (8) центр предлагает i-му агенту – «выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты, считая, что остальные агенты также выбрали соответствующие компоненты – y_{-i}^*, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр также декомпозирует игру агентов.

Отметим, что функция стимулирования (8) зависит только от действия i-го агента, а величина y_{-i}^* входит в нее как параметр. Кроме того, при использовании центром системы стимулирования (8), в отличие от (7), каждый из агентов имеет косвенную информацию обо всех компонентах того вектора действий, который хочет реализовать центр. Для того, чтобы система стимулирования (8) реализовывала вектор y^* как РДС, необходимо введение дополнительных (по сравнению со случаем использования (7)) предположений относительно функций затрат агентов – см. [14].

Здесь же уместно качественно пояснить необходимость введения неотрицательных констант $\{d_i\}_{i \text{ Î } I}$ в выражениях (5), (7) и (8). Если требуется реализовать некоторое действие как одно из равновесий Нэша, то эти константы могут быть выбраны равными нулю. Если требуется, чтобы равновесие было единственным (в частности, чтобы агенты не выбирали нулевые действия – иначе при вычислении гарантированного результата в (3) центр вынужден рассчитывать на выбор агентами нулевых действий), то агентам следует доплатить сколь угодно малую, но строго положительную величину за выбор именно того действия, которое предлагается центром. Более того, величины $\{d_i\}_{i \text{ Î } I}$ в выражениях (5), (7) и (8) играют важную роль и с точки зрения устойчивости компенсаторной системы стимулирования по параметрам модели. Например, если функция затрат i-го агента известна с точностью до D_i £ $d_i / 2$, то компенсаторная система стимулирования (7) все равно реализует действие y^*.

Вектор оптимальных реализуемых действий агентов y^*, фигурирующий в качестве параметра в выражении (7) или (8), определяется в результате решения следующей задачи оптимального согласованного планирования:

(9) $y^* = \arg \max\limits_{t \in A'} \{H(t) - u(t)\}$,

где $v(t) = \sum\limits_{i \in I} c_i(t)$, а эффективность системы стимулирования (7), (9) равна следующей величине:

$$K^* = H(y^*) - \sum_{i \in I} c_i(y^*) - d.$$

В [14] доказано, что система стимулирования (7), (9) является оптимальной, то есть, обладает максимальной эффективностью среди всех систем стимулирования в многоэлементных ОС.

Примеры. Рассмотрим несколько примеров решения задач синтеза оптимальных систем коллективного стимулирования в многоэлементных ОС.

Пример 6. Решим задачу стимулирования в ОС с двумя агентами, имеющими функции затрат: $c_i(y) = \dfrac{(y_i + a\, y_{3-i})^2}{2r_i}$, $i = 1, 2$, где a – некоторый параметр, отражающий степень взаимозависимости агентов. Пусть функция дохода центра $H(y) = y_1 + y_2$, а фонд заработной платы ограничен величиной R. Если центр использует систему стимулирования (7), то задача стимулирования сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} H(y) \to \max\limits_{y \ge 0} \\ c_1(y) + c_2(y) \le R \end{cases}.$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что решение имеет вид:

$$y_1^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{a\ r_2 + r_1}{a^2 - 1},\ y_2^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{a\ r_1 + r_2}{a^2 - 1}.$$

Подставляя равновесные действия агентов в целевую функцию центра, получаем, что оптимальный размер ФЗП равен (см. также пример 5)

$$R^* = \arg \max_{R \ge 0}\ [\sqrt{2R(r_1 + r_2)}\ /(1 - a) - R] = \frac{r_1 + r_2}{2(a - 1)^2}. \bullet$$

Пример 7 (совместное производство). Рассмотрим многоэлементную двухуровневую ОС, состоящую из центра и n агентов.

Пусть целевая функция i-го агента $f_i(y, r_i)$ представляет собой разность между доходом $h_i(y)$ от совместной деятельности и затратами $c_i(y, r_i)$, где r_i – параметр эффективности (тип) агента, то есть $f_i(y, r_i) = h_i(y) - c_i(y, r_i)$, i Î N.

Выберем следующий вид функций дохода и затрат:

$$h_i(y) = l_i\, q\, Y,\ i\ \hat{I}\ N,\ c_i(y, r_i) = \frac{y_i^2}{2(r_i \pm b_i \sum\limits_{j \neq i} y_j)},\ i\ \hat{I}\ N,$$

где $Y = \sum\limits_{i \in I} y_i$, $\sum\limits_{i \in I} l_i = 1$. Для случая, когда в знаменателе стоит знак «–», предполагается, что $\sum\limits_{j \neq i} y_j < \frac{r_i}{b_i}$.

Содержательно набор агентов может интерпретироваться как фирма, подразделения которой (агенты) производят однородную продукцию, реализуемую на рынке по цене q. Суммарный доход $q\, Y$ распределяется между агентами в соответствии с фиксированными долями $\{ l_i \}_{i\ \hat{I}\ I}$. Затраты агента возрастают по его действиям, а эффективность деятельности определяется типом агента r_i.

Взаимодействие агентов моделируется зависимостью затрат (эффективности деятельности) каждого из них от действий всех (других) агентов. Знак «+» в знаменателе соответствует эффективному взаимодействию агентов (убыванию затрат на масштаб) – чем большие действия выбирают другие агенты, тем меньше затраты (выше эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать снижению удельных постоянных издержек, обмену опытом, технологиями и т.д. Знак «–» в знаменателе соответствует неэффективному взаимодействию агентов (возрастанию затрат на масштаб) – чем большие действия выбирают другие агенты, тем больше затраты (ниже эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать нехватке основных фондов, ограничениям на побочные показатели (например, загрязнение окружающей среды) и т.д. Коэффициенты $\{b_i\ ^3\ 0\}_{i\ \hat{I}\ I}$ отражают степень взаимозависимости агентов.

Пусть рыночная цена q известна всем участникам ОС. Тогда, дифференцируя целевые функции агентов, приравнивая производные нулю и складывая получившиеся при этом выражения

$$y_i = l_i\, q\, (r_i \pm b_i \sum\limits_{j \neq i} y_j),\ i\ \hat{I}\ I,$$

получим следующую зависимость суммарных действий Y^+ от параметра q:

$$Y^{+}(q) = \frac{\sum_{i \in I} \frac{l_i\, q\ r_i}{1 \pm l_i q b_i}}{1\,\mathbf{m} \sum_{i \in I} \frac{l_i\, q\ b_i}{1 \pm l_i q b_i}} .$$

Стимулированию соответствует изменение параметров $\{ l_i \}_{i\ Î\ I}$, которые могут интерпретироваться как внутренние (внутрифирменные, трансфертные и т.д.) цены. •

<u>Пример 8 (акккордная оплата труда)</u>. Рассмотрим ОС с двумя агентами, имеющими функции затрат $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, где r_i – тип i-го агента, $y_i\ Î\ A_i = \Re_1^{+}$, $i = 1, 2$. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между стимулированием $s_i(y_1, y_2)$, получаемым от центра, и затратами, то есть: $f_i(y) = s_i(y) – c_i(y_i)$, $i = 1, 2$.

Пусть центр использует систему стимулирования

$$(10)\quad s_i(y_1, y_2) = \begin{cases} C_i, \ y_1 + y_2 \geq x \\ 0, \ \ y_1 + y_2 < x \end{cases}, \ i = 1, 2.$$

Содержательно, центр выплачивает каждому агенту фиксированное вознаграждение при условии, что сумма их действий оказывается не меньше, чем некоторое плановое значение $x > 0$. Обозначим $y_i^{+} = \sqrt{2 r_i C_i}$, $i = 1, 2$, $Y = \{(y_1, y_2) \mid y_i\,£\ y_i^{+},\ i = 1, 2,\ y_1 + y_2\,£\ x\}$ – множество индивидуально-рациональных действий агентов, то есть действий, при которых они не перерабатывают (обеспечивать сумму действий, большую плана x, им не имеет смысла) и каждый имеет неотрицательное значение целевой функции. Рассмотрим четыре возможных комбинации переменных (см. рисунки 41–44).

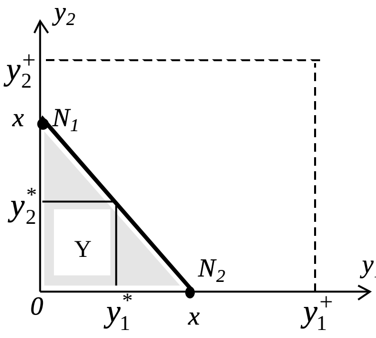

Рис. 41

В первом случае (см. рисунок 41) множество равновесий Нэша составляет отрезок: $E_N(s) = [N_1; N_2]$. Фиксируем произвольное равновесие $y^* = (y_1^*,\ y_2^*)$ Î $E_N(s)$. Наличие «большого» равновесия Нэша (отрезка, содержащего континуум точек) имеет несколько минусов с точки зрения эффективности стимулирования. Поясним это утверждение

Так как все точки отрезка $[N_1; N_2]$ эффективны по Парето с точки зрения агентов, то при определении эффективности системы стимулирования центр вынужден (в зависимости от своей функции полезности) либо использовать гарантированный результат (вычислять минимум по этому отрезку), либо доплачивать агентам за выбор конкретных действий из этого отрезка малую, но строго положительную, величину.

Построим систему индивидуального стимулирования в соответствии с результатами, приведенными выше (см. (8) и (9)):

$$(11)\quad \tilde{s}_1^*(y_1) = s_1(y_1,\ y_2^*) = \begin{cases} C_1, & y_1 \ge y_1^* \\ 0, & y_1 < y_1^* \end{cases},$$

$$\tilde{s}_2^*(y_2) = s_2(y_1^*,\ y_2) = \begin{cases} C_2, & y_2 \ge y_2^* \\ 0, & y_2 < y_2^* \end{cases}.$$

При использовании этой системы стимулирования точка $y^* = (y_1^*,\ y_2^*)$ оказывается единственным равновесием Нэша, то есть, переходя от системы стимулирования (10) каждого агента, зависящей от действий всех агентов, к системе стимулирования (11), зависящей только от действий данного агента, центр «декомпозирует» игру агентов, реализуя при этом единственное действие. При этом эффективность стимулирования, очевидно, не только не понижается, а может оказаться более высокой, чем при использовании исходной системы стимулирования.

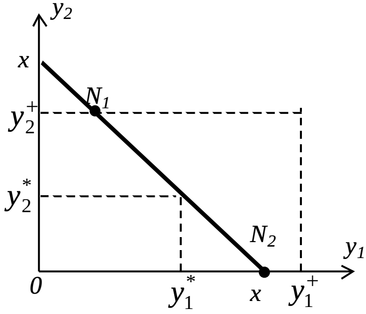

Рис. 42

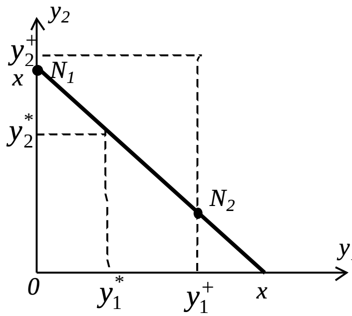

Рис. 43

Во втором и третьем случаях равновесием Нэша являются отрезки $[N_1; N_2]$, изображенные на рисунках 42 и 43 соответственно.

И, наконец, в четвертом случае (см. рисунок 44) множество равновесий Нэша состоит из точки $(0; 0)$ и отрезка $[N_1; N_2]$, то есть

$E_N(s) = (0; 0) \cup [N_1; N_2]$,

причем точки интервала $(N_1 N_2)$ недоминируемы по Парето другими равновесиями.

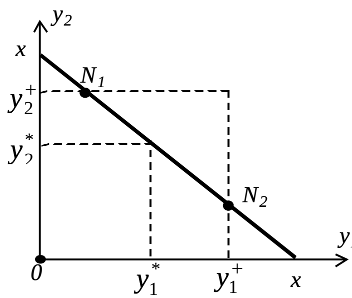

Рис. 44

Пусть в условиях рассматриваемого примера функции затрат агентов не сепарабельны и имеют вид: $c_i(y) = \dfrac{(y_i + a\, y_{3-i})^2}{2r_i}$. Определим множество Y индивидуально-рациональных действий агентов: $Y = \{(y_1, y_2) \mid c_i(y) \le C_i,\ i = 1, 2\}$. Для того чтобы не рассматривать все возможные комбинации значений параметров $\{r_1, r_2, C_1, C_2, x\}$ возьмем случай, представленный на рисунке 45.

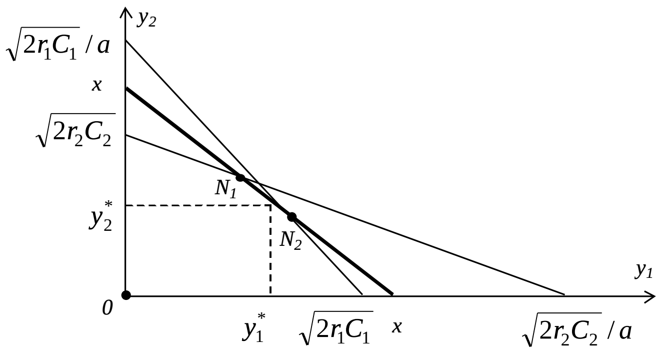

Рис. 45. Множество равновесий Нэша [N_1; N_2]
в случае несепарабельных затрат

В рассматриваемом случае множество равновесий Нэша включает отрезок [N_1; N_2]. Система стимулирования

(12) $\tilde{s}_1^*(y) = \begin{cases} c_1(y_1^*, y_2), & y_1 = y_1^* \\ 0, & y_1 \neq y_1^* \end{cases}$ $\tilde{s}_2^*(y) = \begin{cases} c_2(y_1, y_2^*), & y_2 = y_2^* \\ 0, & y_2 \neq y_2^* \end{cases}$

реализует действие y^* Î [N_1; N_2] как равновесие в доминантных стратегиях. •

Завершив рассмотрение моделей систем коллективного стимулирования за индивидуальные результаты деятельности агентов, перейдем к описанию моделей систем коллективного стимулирования за результаты совместной деятельности.

8. СТИМУЛИРОВАНИЕ ЗА РЕЗУЛЬТАТЫ КОЛЛЕКТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В большинстве известных моделей стимулирования рассматриваются либо ОС, в которых управляющий орган – центр – наблюдает результат деятельности каждого из управляемых субъектов – агентов, находящийся в известном взаимно однозначном соответствии с выбранной последним стратегией (действием), либо ОС с неопределенностью [11, 14], в которых наблюдаемый результат деятельности агентов зависит не только от его собственных действий, но и от неопределенных и/или случайных факторов (см., например, модель теории контрактов в третьем разделе).

Настоящий раздел содержит формулировку и решение задачи коллективного стимулирования в многоэлементной детерминированной ОС, в которой центр имеет агрегированную информацию о результатах деятельности агентов.

Пусть в рамках модели, рассмотренной в предыдущем разделе, *результат деятельности* $z \in A_0 = Q(A')$ ОС, состоящей из n агентов, является функцией (называемой *функцией агрегирования*) их действий: $z = Q(y)$. Интересы и предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра представляет собой разность между его доходом $H(z)$ и суммарным вознаграждением $u(z)$, выплачиваемым агентам: $u(z) = \sum_{i \in I} \sigma_i(z)$, где $\sigma_i(z)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z), \ldots, \sigma_n(z))$, то есть

(1) $F(\sigma(\cdot), z) = H(z) - \sum_{i \in I} \sigma_i(z)$.

Целевая функция i-го агента представляет собой разность между стимулированием, получаемым им от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

(2) $f_i(\sigma_i(\cdot), y) = \sigma_i(z) - c_i(y),\ i \in I$.

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решений о выбираемых стратегиях (соответственно – функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС, а также функция агрегирования. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

В случае, когда индивидуальные действия агентов наблюдаемы для центра (или когда центр может однозначно восстановить их по наблюдаемому результату деятельности), последний может использовать систему стимулирования, зависящую непосредственно от действий агентов: $\forall i \in I\ \ \tilde{\sigma}_i(y) = \sigma_i(Q(y))$. Методы решения задачи стимулирования для этого случая описаны в предыдущем разделе. Поэтому рассмотрим случай, когда центр наблюдает только результат деятельности ОС, от которого зависит его доход, но не знает и не может восстановить индивидуальных действий агентов, то есть, имеет место *агрегирование информации* – центр имеет не всю информацию о векторе y Î A действий агентов, а ему известен лишь некоторый их агрегат z Î A_0 – параметр, характеризующий результаты совместных действий агентов.

Будем считать, что относительно параметров ОС выполнены предположения, введенные в предыдущем разделе, и, кроме того, предположим, что функция агрегирования однозначна и непрерывна.

Как и выше, эффективностью стимулирования является минимальное (или максимальное – в рамках гипотезы благожелательности) значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

(3) $K(s(\cdot)) = \min\limits_{y \in P(s(\cdot))} F(s(\cdot), Q(y))$.

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования s^*, имеющей максимальную эффективность:

(4) $s^* = \arg \max\limits_{s(\cdot)} K(s(\cdot))$.

Отметим, что в рассмотренных в предыдущих разделах задачах стимулирования декомпозиция игры агентов основывалась на возможности центра поощрять агентов за выбор определенного (и наблюдаемого центром) действия. Если действия агентов не наблюдаемы, то непосредственное применение идеи декомпозиции невозможно, поэтому при решении задач стимулирования, в которых вознаграждение агентов зависит от агрегированного результата деятельности ОС, следует использовать следующий подход – найти множество действий, приводящих к заданному результату деятельности, выделить среди них подмножество, характеризуемое минимальными суммарными затратами агентов (и, следовательно, минимальными затратами центра на стимулирование при использовании компенсаторных функций стимулирования, которые оптимальны), построить систему стимулирования, реализующую это подмножество действий, а затем определить – реализация какого из результатов деятельности наиболее выгодна для центра.

Перейдем к формальному описанию решения задачи стимулирования в ОС с агрегированием информации.

Определим множество векторов действий агентов, приводящих к заданному результату деятельности ОС:

Y(z) = {y Î A' | Q(y) = z} Í A', z Î A_0.

Выше показано, что в случае наблюдаемых действий агентов минимальные затраты центра на стимулирование по реализации вектора действий y Î A' равны суммарным затратам агентов $\sum_{i\in I} c_i(y)$. По аналогии вычислим минимальные суммарные затраты агентов по достижению результата деятельности z Î A_0 $\tilde{J}(z) = \min_{y\in Y(z)} \sum_{i\in I} c_i(y)$, а также множество действий $Y^*(z) = \mathrm{Arg} \min_{y\in Y(z)} \sum_{i\in I} c_i(y)$, на котором этот минимум достигается.

Фиксируем произвольный результат деятельности x Î A_0 и произвольный вектор $y^*(x)$ Î $Y^*(x)$ Í $Y(x)$.

В [14] (при следующем дополнительном предположении «технического» характера: " x Î A_0, " y' Î $Y(x)$, " i Î I, " y_i Î $Proj_i\, Y(x)$ $c_j(y_i, y'_{-i})$ не убывает по y_i, j Î I) доказано, что:

1) при использовании центром системы стимулирования

(5) $s^*_{ix}(z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)) + d_i, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}$, i Î I,

вектор действий агентов $y^*(x)$ реализуется как единственное равновесие с минимальными затратами центра на стимулирование равными $\tilde{J}(x)$ – d, где $d = \sum_{i\in I} d_i$;

2) система стимулирования (5) является d-оптимальной.

Итак, первый шаг решения задачи стимулирования (4) заключается в поиске минимальной системы стимулирования (5), характеризуемой затратами центра на стимулирование $\tilde{J}(x)$ и реализующей вектор действий агентов, приводящий к заданному результату деятельности x Î A_0. Поэтому на втором шаге решения задачи стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности ОС $x^* \in A_0$ как решение задачи оптимального согласованного планирования:

(6) $x^* = \arg \max\limits_{x \in A_0} \, [H(x) - \tilde{J}(x)]$.

Таким образом, выражения (5)-(6) дают решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования результатов совместной деятельности.

Исследуем, как незнание (невозможность наблюдения) центром индивидуальных действий агентов влияет на эффективность стимулирования. Пусть, как и выше, функция дохода центра зависит от результата деятельности ОС. Рассмотрим два случая. Первый – когда действия агентов наблюдаемы, и центр может основывать стимулирование как на действиях агентов, так и на результате деятельности ОС. Второй случай, когда действия агентов не наблюдаемы, и стимулирование может зависеть только от наблюдаемого результата деятельности ОС. Сравним эффективности стимулирования для этих двух случаев.

При наблюдаемых действиях агентов затраты центра на стимулирование $J_1(y)$ по реализации вектора $y \in A'$ действий агентов равны $J_1(y) = \sum\limits_{i \in I} c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_1 равна: $K_1 = \max\limits_{y \in A'} \{H(Q(y)) - J_1(y)\}$ – см. предыдущий раздел.

При ненаблюдаемых действиях агентов минимальные затраты центра на стимулирование $J_2(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ определяются следующим образом (см. (5) и (6)): $J_2(z) = \min\limits_{y \in Y(z)} \sum\limits_{i \in I} c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_2 равна: $K_2 = \max\limits_{z \in A_0} \{H(z) - J_2(z)\}$.

В [14] доказано, что эффективности K_1 и K_2 равны. Данный факт, который условно можно назвать «теоремой об идеальном агрегировании в моделях стимулирования», помимо оценок сравнительной эффективности имеет чрезвычайно важное методологическое значение. Оказывается, что в случае, когда функция дохода центра зависит только от результата совместной деятельности агентов, эффективности стимулирования одинаковы как при использовании стимулирования агентов за наблюдаемые действия, так и при стимулировании за агрегированный результат деятельности, несущий меньшую информацию (отметим, что центр при этом должен знать функции затрат агентов), чем вектор действий агентов.

Другими словами, наличие агрегирования информации не снижает эффективности функционирования системы. Это достаточно парадоксально, так как в [9] доказано, что наличие неопределенности и агрегирования в задачах стимулирования не повышает эффективности. В рассматриваемой модели присутствует *идеальное агрегирование* (см. определение и подробное обсуждение проблем агрегирования в управлении ОС в [9]), возможность осуществления которого содержательно обусловлена тем, что центру не важно, какие действия выбирают агенты, лишь бы эти действия приводили с минимальными суммарными затратами к заданному результату деятельности. При этом уменьшается информационная нагрузка на центр, а эффективность стимулирования остается такой же.

Итак, качественный вывод из проведенного анализа следующий: если доход центра зависит от агрегированных показателей деятельности агентов, то целесообразно основывать стимулирование агентов на этих агрегированных показателях. Даже если индивидуальные действия агентов наблюдаются центром, то использование системы стимулирования, основывающейся на действиях агентов, не приведет к увеличению эффективности управления, а лишь увеличит информационную нагрузку на центр.

Напомним, что во втором разделе был сформулирован принцип компенсации затрат. На модели с агрегированием информации этот принцип обобщается следующим образом: минимальные затраты центра на стимулирование по реализации заданного результата деятельности ОС определяются как минимум компенсируемых центром суммарных затрат агентов, при условии, что последние выбирают вектор действий, приводящий к заданному результату деятельности. Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример 9. Пусть $z = \sum_{i \in I} y_i$, $H(z) = z$, $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, $i \in I$ (см. также примеры 5 и 6). Вычисляем

$$Y(z) = \{y \in A' \mid \sum_{i \in I} y_i = z\}.$$

Решение задачи

$$\sum_{i \in I} c_i(y_i) \to \min_{y \in A'} \text{ при условии } \sum_{i \in I} y_i = x$$

имеет вид: $y_i^*(x) = \frac{r_i}{W} x$, где $W = \sum_{i \in I} r_i$, $i \in I$. Минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $x \in A_0$ равны $J(x) = x^2 / 2W$. Вычисляя максимум целевой функции центра: $\max_{x \geq 0} [H(x) - J(x)]$, находим оптимальный план: $x^* = W$ и оптимальную систему стимулирования:

$$s_i^*(W, z) = \begin{cases} r_i \frac{x^2}{2W^2}, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, \quad i \in I.$$

При этом эффективность стимулирования (значение целевой функции центра) равна $K = W / 2$. •

Выше рассматривались системы коллективного стимулирования, в которых зависимость вознаграждения у каждого агента была индивидуальной. На практике во многих ситуациях центр вынужден использовать одинаковую для всех агентов зависимость вознаграждения от действия или результата совместной деятельности. Рассмотрим соответствующие модели.

9. УНИФИЦИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

До сих пор рассматривались *персонифицированные* системы индивидуального и коллективного стимулирования, в которых центр устанавливал для каждого агента свою зависимость вознаграждения от его действий (раздел 2), или действий других агентов (раздел 7), или результатов их совместной деятельности (раздел 8). Кроме персонифицированных, существуют *унифицированные* системы стимулирования, в которых зависимость вознаграждения от тех или иных параметров одинакова для всех агентов. Необходимость использования унифицированного стимулирования может быть следствием институциональных ограничений, а может возникать в результате стремления центра к «демократическому» управлению, созданию для агентов равных возможностей и т.д.

Так как унифицированное управление является частным случаем персонифицированного, то эффективность первого не превышает эффективности второго. Следовательно, возникает вопрос, к каким потерям в эффективности приводит использование унифицированного стимулирования, и в каких случаях потери отсутствуют?

Рассмотрим две модели коллективного унифицированного стимулирования (используемая техника анализа может быть применена к любой из описанных в настоящей работе систем стимулирования) – унифицированные пропорциональные системы стимулирования и унифицированные системы коллективного стимулирования за результаты совместной деятельности. В первой модели унификация не приводит к потерям эффективности (оказывается, что именно унифицированные системы стимулирования оказываются оптимальными в классе пропорциональных), а во второй снижение эффективности значительно.

Унифицированные пропорциональные системы стимулирования. Введем следующее предположение относительно функций затрат агентов (ниже это предположение будет ослаблено):

(1) $c_i(y_i, r_i) = r_i\, \varphi(y_i/r_i),\ i \in I$,

где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, $\varphi(0) = 0$, (например, для функций типа Кобба-Дугласа $\varphi(t) = t^{\alpha} / \alpha$, $\alpha \geq 1$), $r_i > 0$ – параметр эффективности агента.

Если центр использует пропорциональные (L-типа) индивидуальные системы стимулирования: $\sigma_i(y_i) = \gamma_i y_i$, то целевая функция агента имеет вид: $f_i(y_i) = \gamma_i y_i - c_i(y_i)$. Вычислим действие, выбираемое агентом при использовании центром некоторой фиксированной системы стимулирования:

(2) $y_i^*(\gamma_i) = r_i\, \varphi'^{-1}(\gamma_i)$,

где $j\ '^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции $j(\cdot)$. Минимальные суммарные затраты центра на стимулирование равны:

$$(3)\ J_L(g) = \sum_{i=1}^{n} g_i\, r_i\, j\,'^{-1}(g_i)\,,$$

где $g = (g_1, g_2, ..., g_n)$. Суммарные затраты агентов равны:

$$(4)\ c(g) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, j\,(j\,'^{-1}(g_i))\,.$$

В рамках приведенной выше общей формулировки модели пропорционального стимулирования возможны различные постановки частных задач. Рассмотрим некоторые из них, интерпретируя действия агентов как объемы выпускаемой ими продукции.

Задача 1. Пусть центр заинтересован в выполнении агентами плана R по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами агентов (еще раз подчеркнем необходимость различения суммарных затрат агентов и суммарных затрат центра на стимулирование). Тогда его цель заключается в выборе ставок оплаты $\{g_i\}_{i\ \hat{I}\ I}$ в результате решения следующей задачи:

$$(5)\ \begin{cases} c(g) \to \min\limits_{g} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(g_i) = R \end{cases},$$

решение которой имеет вид:

$$(6)\ g_i^* = j\,'(R/W);\ \ y_i^* = r_i\,(R/W);\ i\ \hat{I}\ I,$$

$$c^* = W\, j\,(R\,/\,W);\ J_L^* = R\, j\,'(R\,/\,W).$$

где $W = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$. Так как оптимальные ставки оплаты одинаковы для всех агентов, то оптимальна именно унифицированная (!) система стимулирования.

Задача 2. Содержательно двойственной к задаче 1 является задача максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты агентов:

$$(7)\ \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i^*(g_i) \to \max\limits_{g} \\ c(g) \le R \end{cases}.$$

Решение задачи (7) имеет вид:

$$(8)\ g_i^* = j'(j^{-1}(R / W));\ y_i^* = r_i\, j^{-1}(R / W);\ i\ \hat{I}\ I,$$

$$c^* = R;\ J_L^* = j^{-1}(R / W)\, W\, j'(j^{-1}(R / W)),$$

то есть в двойственной задаче (естественно) оптимальным решением также является использование унифицированных пропорциональных систем стимулирования.

Замена в задачах 1 и 2 суммарных затрат агентов на суммарные затраты на стимулирование порождает еще одну пару содержательно двойственных задач.

<u>Задача 3.</u> Если центр заинтересован в выполнении агентами плана R по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами на стимулирование, то ставки оплаты определяются в результате решения следующей задачи:

$$(9)\ \begin{cases} J_L(g) \to \min\limits_{g} \\ \sum_{i=1}^{N} y_i^*(g_i) = R \end{cases},$$

решение которой совпадает с (6), что представляется достаточно интересным фактом, так как суммарные затраты агентов отражают интересы управляемых субъектов, а суммарные затраты на стимулирование – интересы управляющего органа. Естественно, отмеченное совпадение является следствием сделанных предположений.

<u>Задача 4</u> заключается в максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты на стимулирование:

$$(10)\ \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} y_i^*(g_i) \to \max\limits_{g} \\ J_L(g) \le R \end{cases}.$$

Из метода множителей Лагранжа получаем условие оптимальности (l – множитель Лагранжа): $l\ j'^{-1}(g_i)\ j''(g_i) + g_i = 1,\ i\ \hat{I}\ I$, из которого следует, что все ставки оплаты должны быть одинаковы и удовлетворять уравнению $g\ j'^{-1}(g) = R / W$.

Таким образом, мы доказали следующий результат: в организационных системах со слабо связанными агентами, функции затрат которых имеют вид (1), унифицированные системы стимулирования оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования.

Отметим, что выше установлено, что унифицированные пропорциональные системы стимулирования оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования в ОС со слабо связанными агентами, имеющими функции затрат вида (1). Поэтому исследуем их сравнительную эффективность на множестве всевозможных (не только пропорциональных) систем стимулирования. Как было показано выше (в разделах 2 и 7) для этого достаточно сравнить минимальные затраты на стимулирование, например, в задаче 2, с затратами на стимулирование в случае использования центром оптимальных квазикомпенсаторных систем стимулирования (которые равны $J_{QK}(y^*) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, j\,(y_i / r_i)$).

Решая задачу выбора вектора y^* Î A', минимизирующего $J_{QK}(y^*)$ при условии $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = R$, получаем, что $J_{QK}^* = W\, j\,(R / W)$.

Подставляя из выражения (6) $J_{UL}^* = R\, j\,'(R / W)$, вычислим отношение минимальных затрат на стимулирование:

(11) $J_{UL}^* / J_{QK}^* = R / W \;\; j\,'(R / W) / j\,(R / W)$.

Из выпуклости функции $j\,(\cdot)$ следует, что J_{UL}^* / J_{QK}^* з 1. Более того, можно показать, что при $R / W > 0$ и строго выпуклых функциях затрат отношение (11) строго больше единицы. Так как суммарные затраты на стимулирование при использовании унифицированных пропорциональных систем стимулирования выше, чем при использовании «абсолютно оптимальных» компенсаторных систем стимулирования, следовательно, первые не оптимальны в классе всевозможных систем стимулирования. Полученный для многоэлементных организационных систем результат вполне согласован со сделанным выше выводом, что в одноэлементных системах эффективность пропорционального стимулирования не выше, чем компенсаторного.

Унифицированные системы стимулирования результатов совместной деятельности. В восьмом разделе исследовались персонифицированные системы стимулирования агентов за результаты их совместной деятельности. Рассмотрим, что произойдет, если в этой модели потребовать, чтобы система стимулирования была унифицированной.

Рассмотрим класс унифицированных систем стимулирования за результаты совместной деятельности (см. также восьмой раздел), то есть систем стимулирования, в которых центр использует для всех агентов одну и ту же зависимость индивидуального вознаграждения от результата деятельности z Î A_0. Введем следующую функцию:

(12) $c(y) = \max\limits_{i \in I} \{c_i(y)\}$.

На первом шаге вычислим минимальные затраты центра на стимулирование $J_U(z)$ по реализации результата деятельности z Î A_0 унифицированной системой стимулирования: $J_U(z) = \min\limits_{y \in Y(z)} c(y)$. Множество векторов действий, минимизирующих затраты на стимулирование по реализации результата деятельности z Î A_0, имеет вид:

$$Y^*(z) = \mathrm{Arg} \min_{y \in Y(z)} c(y).$$

По аналогии с тем, как это делалось в восьмом разделе, можно показать, что унифицированная система стимулирования (ср. с (5)):

(13) $s_{ix}(z) = \begin{cases} c(y^*(x)) + d / n, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}$, i Î I,

где $y^*(x)$ – произвольный элемент множества $Y^*(x)$, реализует результат деятельности x Î A_0 с минимальными в классе унифицированных систем стимулирования затратами на стимулирование.

На втором шаге решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности ОС x_U^* как решение задачи оптимального согласованного планирования:

(14) $x_U^* = \arg \max\limits_{z \in A_0} [H(z) - n\ J_U(z)]$.

Выражения (13)-(14) дают решение задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования агентов за результаты их совместной деятельности. Легко видеть, что эффективность унифицированного стимулирования (13)-(14) не выше, чем эффективность персонифицированного стимулирования (5)-(6).

Пример 10. Пусть в условиях примера 6 центр должен использовать унифицированную систему стимулирования. Определим $c(y) = y_j^2 / 2\ r_j$, где $j = \arg \min\limits_{i \in I} \{r_i\}$. Тогда минимальные затраты на стимулирование равны $J_U(z) = z^2 / 2\ n\ r_j$. Оптимальный план $x_U^* = n\ r_j$ дает значение эффективности $n\ r_j / 2$, которая меньше эффективности $\sum\limits_{i \in I} r_i / 2$ персонифицированного стимулирования (см. пример 6), а равенство имеет место в случае одинаковых агентов. •

10. «БРИГАДНЫЕ» ФОРМЫ ОПЛАТЫ ТРУДА

Настоящий раздел посвящен описанию моделей коллективного стимулирования, а именно – «бригадных» форм оплаты труда[1], в рамках которых вознаграждение агента – члена бригады – определяется *коэффициентом его трудового участия* (КТУ) и зависит от его действия в сравнении с действиями других агентов (в частном случае – при фиксированном премиальном фонде, в общем случае – когда премиальный фонд определяется агрегированным результатом деятельности всей бригады в целом).

Процедура определения КТУ может быть различной [16], а именно, возможно:

---

[1] *Термин «бригадные формы оплаты труда» является устойчивым словосочетанием, возникшим еще в бывшем СССР. Тем не менее, системы оплаты труда, основывающиеся на оценке индивидуального вклада в результат деятельности коллектива (с этой точки зрения бригадные формы оплаты труда близки к механизмам стимулирования за результаты коллективной деятельности, рассмотренным выше), широко используются до сих пор.*

- формирование КТУ пропорционально тарифному разряду (квалификации) работника;

- формирование КТУ пропорционально *коэффициенту трудового вклада* (КТВ) работника;

При формировании КТУ пропорционально тарифным разрядам имеется в виду следующее. Считается, что тарифный разряд характеризует деятельность каждого работника – агента. При этом полагается, что, чем больше тарифный разряд, тем выше квалификация агента. Поэтому тарифный разряд, отражая эффективность работы каждого агента, может быть использован для оценки его деятельности.

При формировании КТВ учитывается фактический вклад каждого агента в зависимости от индивидуальной производительности труда и качества работы в общую работу всего трудового коллектива.

Итак, в трудовом коллективе руководство имеет свои цели и формирует условия функционирования, чтобы достичь этих целей. Соответственно, агенты тоже имеют свои цели и, выбирая соответствующие действия, стремятся их достичь.

Предполагается, что по результатам своей деятельности коллектив получает премиальный фонд R, который распределяется между агентами полностью в зависимости от выбранной системы стимулирования.

Будем считать, что i-ый агент характеризуется показателем r_i, отражающим его квалификацию (эффективность деятельности), то есть индивидуальные затраты i-го агента $c_i = c_i(y_i, r_i)$ монотонно убывают с ростом квалификации r_i, $i \in I$. Коллектив, в котором квалификация всех агентов одинаковая, будем называть *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Эффективность системы стимулирования будем оценивать суммой действий агентов: $F(y) = \sum_{i \in I} y_i$.

Процедуры, основанные на КТУ. Рассмотрим сначала случай использования КТУ. Фонд R распределяется между агентами на основе коэффициентов трудового участия $\{d_i\}_{i \in I}$, $\sum_{j \in I} d_j = 1$.

Таким образом, премия i-го элемента определяется выражением $s_i = d_i R$.

Целевые функции агентов имеют вид:

(1) $f_i(y_i) = s_i - c_i(y_i, r_i),\ i \in I$.

Достаточно распространенная из-за своей простоты процедура определения КТУ основывается только на учете показателя квалификации i-го агента, то есть $d_i = \frac{r_i}{\sum_{j \in I} r_j}$. Подставляя в (1), получим, что **использование КТУ, основанных на квалификации агентов и не зависящих от их реальных действий, не оказывает никакого воздействия на агентов**, то есть не побуждает их выбирать, например, б*о*льшие действия. Поэтому перейдем к рассмотрению КТВ.

Процедуры, основанные на КТВ. Естественный и простейший способ определения КТВ агента – пропорционально действию последнего, то есть

(2) $d_i = \frac{y_i}{\sum_{j \in I} y_j},\ i \in I$.

Пусть функции затрат агентов линейны: $c_i(y_i, r_i) = y_i / r_i$. Тогда из (1) и (2) получаем следующее выражение для целевой функции i-го агента, зависящей уже от действий всех агентов:

(3) $f_i(y) = R \frac{y_i}{\sum_{j \in I} y_j} - y_i / r_i,\ i \in I$.

Следовательно, исследуемую ситуацию можно рассматривать как игру n лиц с функциями выигрыша вида (3).

<u>Однородный коллектив.</u> Рассмотрим сначала случай однородного коллектива. Равновесные по Нэшу действия агентов имеют вид:

(4) $y_i^* = \frac{Rr(n-1)}{n^2},\ i \in I$,

что приводит к следующему значению *эффективности*:

(5) $K_1(R, r, n) = \dfrac{Rr(n-1)}{n}$.

Из (4) видно, что чем больше премиальный фонд, тем большие действия выбирают агенты. Из (5) следует, что эффективность линейно растет при увеличении как премиального фонда (то есть, не существует оптимального размера премиального фонда, максимизирующего эффект K_1 / R его использования), так и квалификации агентов. Если действия агентов ограничены сверху, то существует оптимальный размер премиального фонда, который при известном ограничении может быть вычислен из выражения (4). Кроме того, легко показать (см. подробности в [16]), что разбиение однородного коллектива на более мелкие коллективы и соответствующее дробление премиального фонда не приводит к росту эффективности его использования. Также можно показать, что при постоянном размере фонда сокращение однородного коллектива приводит к уменьшению эффективности и увеличению действий, выбираемых агентами.

Рассмотрим следующую задачу: возможно ли повысить суммарный показатель эффективности однородного коллектива, не увеличивая фонд премирования R, но по-другому формируя КТВ агентов?

Для этого рассмотрим следующую процедуру формирования КТВ, которая более чувствительна к различию агентов, чем (2):

(6) $d_i = \dfrac{y_i^a}{\sum\limits_{j \in I} y_j^a}$, $i \in I$, $1 \le a \le \dfrac{n}{n-1}$.

Тогда равновесные по Нэшу действия агентов имеют вид:

(7) $y_i^* = a\,\dfrac{Rr(n-1)}{n^2}$, $i \in I$,

что превышает (4)

Ограничение $1 \le a \le \dfrac{n}{n-1}$ позволяет констатировать, что использование процедуры (6) формирования КТВ позволяет увеличить эффективность по сравнению с процедурой (2) на $1 / (n - 1)$ процентов. Например, если коллектив состоит из 11 человек, показатель эффективности можно увеличить максимум на 10%.

Неоднородный коллектив. Из (2) и (3) следует, что в неоднородном коллективе ситуации равновесия Нэша соответствуют следующие действия агентов и эффективность[1]:

$$(8)\ y_i^* = \frac{\sum_{j \in I} 1/r_j - (n-1)/r_i}{(\sum_{j \in I} 1/r_j)^2} R(n-1),\ i\ \hat{I}\ I,$$

$$(9)\ K_2(R, \vec{r}, n) = \sum_{j \in I} y_j^* = \frac{R(n-1)}{\sum_{j \in I} 1/r_j}.$$

Предположим, что коллектив состоит агентов двух типов – m агентов-лидеров, имеющих эффективность r^+, и $(n - m)$ «рядовых» агентов, элементов, имеющих эффективность r^-, причем $r^+ > r^-$. Тогда $\sum_{i \in I} 1/r_i = m / r^+ + (n - m) / r^-$.

Используя выражение (8), найдем действия, выбираемые в равновесии лидерами:

$$(10)\ y^+ = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-} [1 - \frac{1}{r^+} \frac{(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}],$$

и рядовыми агентами:

$$(11)\ y^- = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-} [1 - \frac{1}{r^-} \frac{(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}].$$

Используя выражение (9), найдем значение эффективности

$$(12)\ K_2(R, m, n) = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}.$$

Из выражений (8), (10), (11) видно, что появление в коллективе лидеров (более квалифицированных агентов) вынуждает рядовых (менее квалифицированных) выбирать меньшие действия. Понятно, что это влечет за собой уменьшение значений их целевых функций.

---

[1] *Отметим, что в случае однородных агентов* (8) *переходит в* (4), *а* (9) *– в* (5).

Из (11) получаем, что, если количество лидеров в коллективе таково, что $m \geq \dfrac{1/r^-}{1/r^- - 1/r^+}$, то рядовым агентам вообще не выгодно увеличивать выбираемые ими действия. Однако при $m = 1$, то есть, если в коллективе есть только один лидер, то рядовым агентам всегда выгодно увеличивать действия. В то же время легко показать [16], что появление в коллективе лидеров приводит к повышению эффективности всего коллектива, несмотря на выбор меньших действий рядовыми элементами.

Исследуем, возможно ли дальнейшее увеличение показателей эффективности работ в коллективе в рамках того же премиального фонда R. Для этого разобьем неоднородный коллектив на два однородных подколлектива. Пусть первый состоит из m лидеров, а второй состоит из $(n - m)$ рядовых агентов. Соответственно разобьем премиальный фонд R всего коллектива, именно: $R = R^+ + R^-$. Тогда в равновесии Нэша эффективность первого подколлектива равна $\dfrac{R^+ r^+ (m-1)}{m}$, а второго – $\dfrac{R^- r^- (n-m-1)}{n-m}$.

Соответственно, общий показатель эффективности всего коллектива из n агентов равен

(13) $K_3(R, m, n) = \dfrac{R^+ r^+ (m-1)}{m} + \dfrac{R^- r^- (n-m-1)}{n-m}$.

Выше отмечалось, что разбиение однородного коллектива на несколько подколлективов не приводит к увеличению суммарного показателя эффективности. Для неоднородного коллектива это не всегда так. Например, из сравнения (12) и (13) следует, что, если в коллективе имеется половина лидеров, эффективность деятельности которых в два раза выше эффективности рядовых агентов, то выделение лидеров в отдельный подколлектив повысит суммарную эффективность только если в исходном коллективе было не более шести агентов. В противном случае возможно снижение суммарной эффективности в результате разбиения неоднородного коллектива на два однородных подколлектива, даже при оптимальном распределении премиального фонда между подколлективами.

Индивидуальное и коллективное стимулирование. В заключение настоящего раздела сравним эффективности индивидуального и коллективного стимулирования для ряда практически важных частных случаев (см. также [16]).

Пусть функции затрат агентов линейны: $c_i(y_i, r_i) = y_i / r_i$, $i \in I$, и пусть существует одинаковое для всех агентов ограничение y^{max} на максимальную величину выбираемого действия: $A_i = [0; y^{max}]$, $i \in I$.

Перенумеруем агентов в порядке убывания эффективностей деятельности:

(14) $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_n$.

Предположим, что ограничение y^{max} таково, что действие y_1^*, определяемое (8) при $i = 1$, является допустимым. Тогда допустимыми являются и действия всех остальных агентов при использовании системы коллективного стимулирования (2), основанной на КТВ. Эффективность коллективного стимулирования $K_2(R, \vec{r}, n)$ при этом определяется выражением (9).

Вычислим эффективность индивидуального стимулирования, при котором центр может стимулировать агентов независимо за индивидуальные результаты деятельности при условии, что сумма вознаграждений не превышает фонд R. Для этого воспользуемся принципом компенсации затрат (см. второй раздел) и результатами решения задачи стимулирования слабо связанных агентов (см. седьмой раздел).

Получим, что при использовании центром квазикомпенсаторных систем стимулирования оптимальной является компенсация затрат первым в упорядочении (14) k агентам (или ($k + 1$) агенту – в зависимости от соотношения параметров), где

(15) $k = \min \{j \in I \mid y^{max} \sum_{i=1}^{j} 1/r_i \leq R, y^{max} \sum_{i=1}^{j+1} 1/r_i > R\}$.

Содержательно выражение (15) означает, что центру следует в первую очередь задействовать агентов, эффективность деятельности которых максимальна. Другими словами, отличное от нуля стимулирование получат первые k или ($k + 1$) агентов, а остальным следует назначить нулевое вознаграждение (их использование нецелесообразно). Таким образом, эффективность индивидуального стимулирования равна

$$(16)\ K_4(R,\ \vec{r}\,,\ n) = k\, y^{max} + r^{k+1}\,(R - y^{max}\sum_{i=1}^{k} 1/r_i\,).$$

Выражения (9) и (16) позволяют проводить сравнительный анализ эффективностей коллективного и индивидуального стимулирования.

Как правило, индивидуальное стимулирование оказывается более эффективным (см. также разделы 8 и 9). Например, в случае однородных коллективов справедлива следующая оценка:

$$K_4(R, r, n) / K_1(R, r, n) \approx n / (n - 1) \geq 1.$$

Близкими к бригадным формам оплаты труда являются так называемые ранговые системы стимулирования, в которых для коллективного стимулирования используются процедуры соревнования, установления системы нормативов и т.д. Этот класс коллективных систем стимулирования рассматривается в разделе 12, а в следующем разделе анализируются системы стимулирования, учитывающие динамику процесса деятельности агентов.

11. ШКАЛЫ ОПЛАТЫ ТРУДА

В настоящем разделе рассматриваются модели оплаты труда, отражающие временн*о*й аспект взаимодействия центра и агентов, то есть учитывающие динамику процесса выполнения работ агентом [2, 13].

При расчетах центра с агентами – работодателя с работниками, заказчика – с исполнителями работ по договору, а также во многих других реальных ситуациях, размер оплаты, получаемой агентом, зависит от процента завершения работ. В качестве «процента завершения», в частности, могут выступать показатели освоенного объема [6].

Предположим, что сумма договора, или стоимость работы или пакета работ согласована центром и агентом и равна C (напомним, что в скачкообразных системах стимулирования, которые могут интерпретироваться как аккордная форма оплаты труда, величина C являлась ФЗП). *Шкалой оплаты труда* называется кумулятивная зависимость размера вознаграждения (доли от стоимости договора), выплаченного центром агенту, от процента завершения.

Обозначим через $b \in [0; 1]$ процент завершения, через $g \in [0; 1]$ – процент от суммы C, выплаченный агенту. Тогда шкалой оплаты труда будет зависимость $g(b)$. Эта зависимость обладает следующими свойствами (содержательные интерпретации которых очевидны):

- функция $g(\cdot)$ – неубывающая и непрерывная справа;
- $g(0) = 0$;
- $g(1) = 1$.

Если ввести зависимость $s(b)$ размера вознаграждения, получаемого агентом (а не уже полученного за весь выполненный текущий объем работ) от процента завершения, то, очевидно, что этот размер вознаграждения с точностью до мультипликативной константы (стоимости договора C) совпадает со скоростью изменения уже полученных агентом сумм, то есть, если $g(\cdot)$ – кусочно-дифференцируемая[1] функция, то[2]

(1) $s(b) = C\,\dfrac{dg(b)}{db}$, $b \in [0; 1]$.

Верно и обратное соотношение:

(2) $g(b) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^b s(w)dw$.

Из выражений (1) и (2) следует, что на участках возрастания $s(\cdot)$ функция $g(\cdot)$ является «выпуклой», на участках убывания $s(\cdot)$ функция $g(\cdot)$ является «вогнутой», а в точке максимума $s(\cdot)$ функция $g(\cdot)$ имеет «перегиб». Кроме того, очевидно, выполняется «условие нормировки»:

(3) $\displaystyle\int_0^1 s(w)dw = C$.

Перечислим некоторые типовые шкалы оплаты труда.

[1] *Условимся считать, что значение производной в точке скачка равна d-функции Дирака, умноженной на амплитуду скачка.*

[2] *Интуитивно можно интерпретировать $g(b)$ как интегральную функцию некоторого вероятностного распределения, а $s(b)$ – как соответствующую ей плотность распределения (если последняя существует).*

Во-первых, это – *равномерная оплата*, при которой вознаграждение агента за каждую единицу процента завершения одинаково (см. рисунок 46). Отметим, что именно равномерной оплате соответствуют все статические модели стимулирования.

Во-вторых, это – *аккордная оплата*, при которой вся сумма договора C выплачивается только в момент полного завершения работ (см. рисунок 47).

В-третьих, это a-*процентная предоплата* (a Î $[0; 1]$), при которой сумма a C выплачивается в момент начала работ, а сумма $(1 - a)$ C – в момент полного завершения работ (см. рисунок 48).

Возможны и другие варианты – любой определенной на отрезке $[0; 1]$ измеримой функции соответствует некоторая шкала оплаты труда. Например, на рисунке 49 приведена так называемая квартильная оплата, при которой за четверть объема работ выплачивается четверть стоимости договора. На рисунках 50-52 приведены, соответственно, варианты выпуклых шкал, вогнутых шкал и шкал с перегибом.

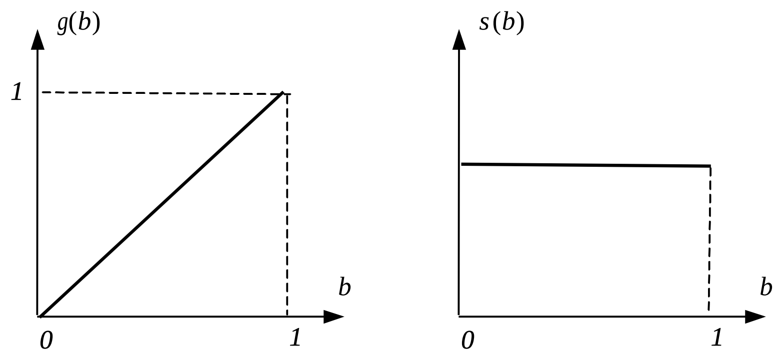

Рис. 46. Равномерная шкала

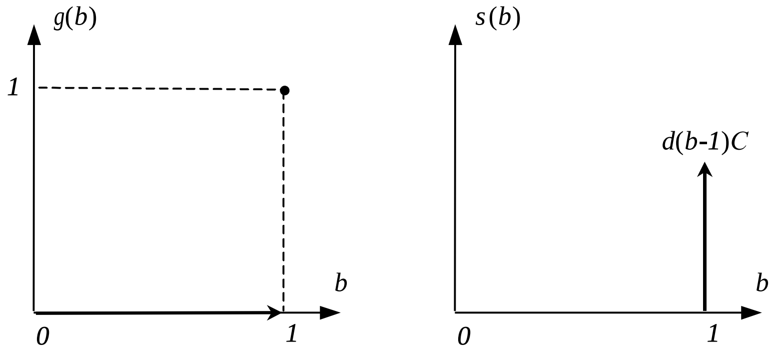

Рис. 47. Аккордная оплата

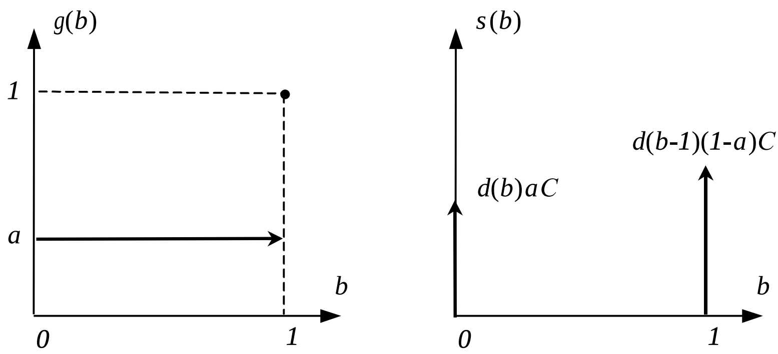

Рис. 48. a-процентная предоплата

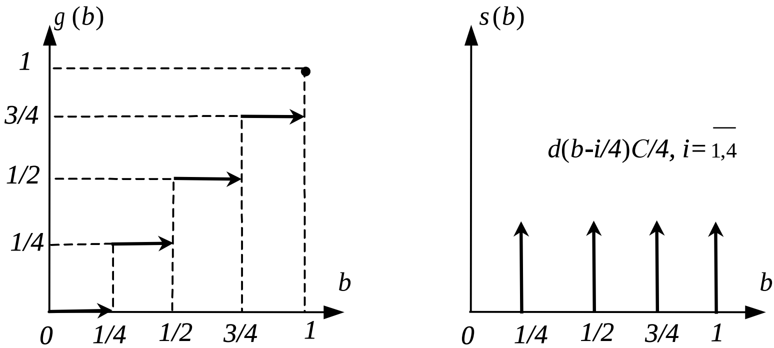

Рис. 49. Квартильная оплата

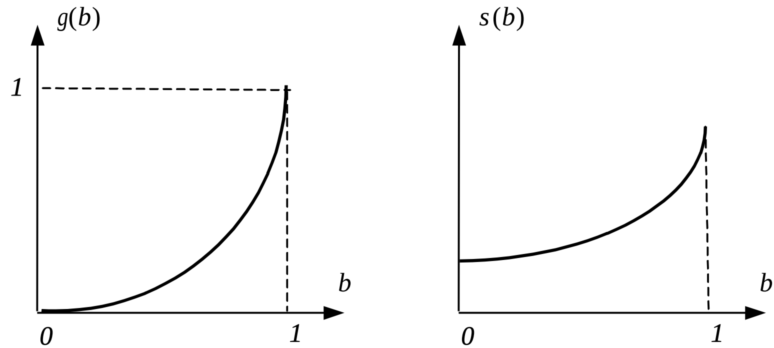

Рис. 50. Выпуклая шкала

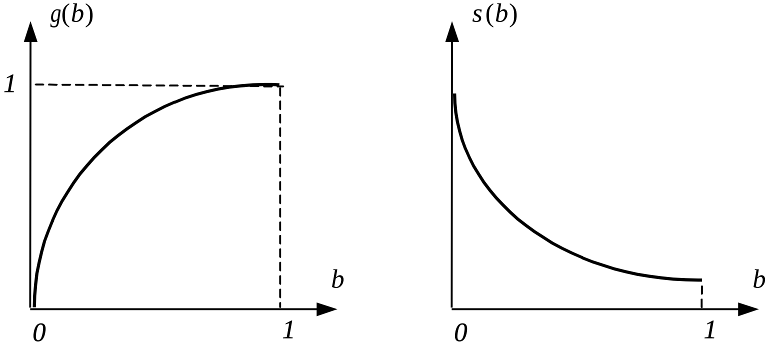

Рис. 51. Вогнутая шкала

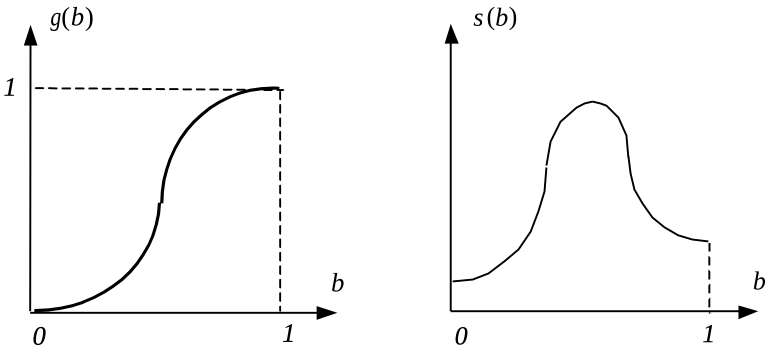

Рис. 52. Шкала с перегибом

Введем действие $y(t)$ агента в момент времени $t \geq 0$, характеризующее объем работ, выполняемый им в единицу времени в момент времени $t \geq 0$. Функцию $y(\cdot)$ назовем траекторией. Очевидно, что время $T = T(y(\cdot))$ завершения работы можно определить как минимальное время, такое, что

(4) $$\int_0^{T(y(\cdot))} y(t)\,dt = 1.$$

При заданной траектории $y(\cdot)$ можно определить зависимость процента завершения от времени:

(5) $b(t, y(\cdot)) = \int\limits_0^t y(t)dt$.

Из (5) следует, что $b(0) = 0$, $b(T(y(\cdot)) = 1$.

Имея шкалу $g(b)$ и зная зависимость (5) процента завершения от времени, можно найти зависимость от траектории и времени величины процента завершения:

(6) $g(t, y(\cdot)) = g(b(t, y(\cdot)))$

и зависимость от траектории и времени размера вознаграждения, получаемого агентом:

(7) $s(t, y(\cdot)) = C\ \dfrac{dg\,(b\,(t, y(\cdot))}{db}$.

Отметим, что в каждый «момент» b агент чувствует себя тем уверенней, чем большая доля вознаграждения ему уже выплачена. При этом невыплаченная часть вознаграждения может рассматриваться как характеристика *риска* с точки зрения агента.

Введем функции дохода центра $H(t, b)$ и затрат агента $c(t, y)$, а также показатели дисконтирования x_0 и x, отражающие степень учета будущего, соответственно, центром и агентом.

Теперь имеется все необходимое для того, чтобы сформулировать теоретико-игровую задачу управления.

Стратегией центра является выбор стоимости работ $C \geq 0$ и шкалы оплаты труда $g(b)$ из множества функций, удовлетворяющих введенным выше требованиям. Он выбирает ее и сообщает агенту, стратегией которого является выбор траектории $y(\cdot)$, принадлежащей множеству положительнозначных кусочно-непрерывных функций. Агент выбирает траекторию, которая в соответствии с выражениями (4)-(7) определяет продолжительность работ, динамику процента завершения и выплат. Целью центра является максимизация дисконтированной разности между доходом и выплатами агенту:

(8) $\int\limits_0^{T(y(\cdot))} [H(t, b(t, y(\cdot))) - s(t, y(\cdot))]\, e^{-x_0 t}\, dt \ \to \max\limits_{g(\cdot),\, C}$,

при условии, что агент (при известных ему стоимости работ и шкале) выбирает траекторию, максимизирующую дисконтированную разность между вознаграждением, получаемым от центра, и своими затратами:

(9) $$\int_0^{T(y(\cdot))} [s\,(t\,, y(\cdot)) - c(t\,, y(\cdot))]\, e^{-xt}\, dt \;\to \max_{y(\cdot)},$$

Задачу (8)-(9) назовем *задачей выбора шкалы оплаты труда*. Приведем решение этой задачи для различных частных случаев (на сегодняшний день общих методов решения задачи (8)-(9) не известно).

Начнем с простейшего случая, соответствующего, статической задаче стимулирования, то есть будем считать, что объем работ $y \geq 0$, выполняемый агентом в единицу времени, постоянен, функции дохода $H(y)$ и затрат $c(y)$ не зависят от времени, дисконтирование отсутствует. Соответствующую задачу назовем *квазидинамической*.

Если центр использует шкалу $g(b)$, то из (1)-(7) следует, что: $T(y) = 1 / y$, $b(t, y) = y\, t$, $g(t, y) = g(y\, t)$, $s(t, y) = C\, g'(y\, t)$. Следовательно, задача (8)-(9) выбора шкалы оплаты труда в рассматриваемом (квазидинамическом) случае примет вид:

(10) $$\begin{cases} H(y) / y - C \to \max\limits_{C \geq 0} \\ C - c(y) / y \to \max\limits_{y \geq 0} \end{cases},$$

при ограничениях участия, которое отражают выгодность взаимодействия центра и агента (не вступая во взаимодействие друг с другом, и центр, и агент могут получить нулевую полезность):

(11) $$\begin{cases} H(y) / y - C \geq 0 \\ C - c(y) / y \geq 0 \end{cases}.$$

Обратим внимание на то, что выражения (10) и (11) не зависят от шкалы $g(\cdot)$. Поэтому решение задачи (10)-(11) тривиально. Обозначим

(12) $y_{min} = \arg \min\limits_{y \geq 0} c(y) / y$.

Тогда, если

(13) $H(y_{min}) \geq c(y_{min})$,

то

(14) $C^* = c(y_{min}) / y_{min}$,

иначе центру и агенту взаимодействовать невыгодно[1].

В [2] доказано, что в квазидинамической задаче поиска шкалы оплаты труда при выполнении условия участия (13) оптимальное решение (12), (14) не зависит от шкалы и функции дохода центра. Содержательно это утверждение означает, что в квазидинамическом случае все шкалы оплаты труда эквивалентны, поэтому рассмотрим более общий случай.

Введем «техническое» предположение (которое имеет прозрачные содержательные интерпретации). А именно, предположим, что функция затрат непрерывна и $\lim\limits_{x\to\infty} c(x)/x =$ ¥.

В [2] доказано, что если функции дохода и затрат не зависят от времени и дисконтирование отсутствует, то для любой траектории $y(\cdot)$ агента найдется постоянное его действие $x_{y(\cdot)}$, обеспечивающее ему ту же полезность.

Действительно, в рассматриваемых условиях целевая функция агента примет вид:

$$\int\limits_0^{T(y(\cdot))} [Cg'(\int\limits_0^t y(t)dt) - c(y(t))]dt,$$

следовательно, в силу непрерывности функции затрат, найдется $x_{y(\cdot)}$ ³ *0*, такой что:

$$(15)\ c(x_{y(\cdot)}) / x_{y(\cdot)} = \int\limits_0^{T(y(\cdot))} c(y(t))dt.$$

Условие (15) позволяет вычислить постоянное действие агента $x_{y(\cdot)}$, обеспечивающее ему (при произвольной шкале!) ту же полезность, что и траектория $y(\cdot)$.

Из приведенных рассуждений следует, что при любой фиксированной сумме договора и выполнении условия участия (13) агент выберет действие (12). Значит, следствием является тот факт, что в рамках введенных предположений при решении задачи выбора шкалы оплаты труда можно ограничиться классом постоянных траекторий (то есть классом квазидинамических задач).

---

[1] *В рамках введенных предположений для существования y_{min} ¹ 0, удовлетворяющего (13), достаточно, чтобы функция затрат была выпуклой и имела в нуле строго положительную производную.*

Таким образом, если функции дохода и затрат не зависят от времени и дисконтирование отсутствует, то все шкалы оплаты труда эквивалентны.

Очевидно, различие эффективностей шкал проявится, если ввести дисконтирование и зависимость от времени доходов и затрат. Исследование подобных моделей (то есть общей постановки задачи (8)-(9)), в том числе, с учетом риска, представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

12. РАНГОВЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Во многих моделях стимулирования вознаграждение агентов зависит от абсолютных значений их действий и/или результата деятельности (см. выше). В то же время, на практике достаточно распространены *ранговые системы стимулирования* (РСС), в которых величина вознаграждения агента определяется либо принадлежностью показателя его деятельности некоторому наперед заданному множеству – так называемые *нормативные* РСС, либо местом, занимаемым агентом в упорядочении показателей деятельности всех агентов – так называемые *соревновательные* РСС [8, 14].

Преимуществом ранговых систем стимулирования является в основном то, что при их использовании центру иногда не обязательно знать достоверно значения всех действий, выбранных агентами, а достаточна информация о диапазонах, которым они принадлежат, или об упорядочении действий. Однако возникает вопрос: так как РСС являются подклассом систем стимулирования, то в каких случаях использование РСС не приводит к потерям эффективности управления (стимулирования), а если приводит, то какова величина этих потерь? Приведем основные результаты, следуя [14].

Нормативные РСС (НРСС) характеризуются наличием процедур присвоения рангов агентам в зависимости от показателей их деятельности (выбираемых действий и т.д.). Введем следующие предположения, которые будем считать выполненными на протяжении настоящего раздела.

Во-первых, будем считать, что множества возможных действий агентов одинаковы и составляют множество A неотрицательных действительных чисел. Во-вторых, предположим, что функции затрат агентов монотонны и затраты от выбора нулевого действия равны нулю.

Пусть $Á = \{1, 2, \ldots m\}$ – множество возможных рангов, где m – размерность НРСС, $\{q_j\}$, $j = \overline{1,m}$ – совокупность m неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за «попадание» в различные ранги; d_i: A_i ® $Á$, $i = \overline{1,n}$ – процедуры классификации. Тогда НРСС называется кортеж $\{m, Á, \{d_i\}, \{q_j\}\}$.

Известно, что для любой системы стимулирования существует НРСС не меньшей эффективности. Основная идея обоснования этого утверждения заключается в том, что для любой системы стимулирования и для любого агента всегда можно подобрать индивидуальную процедуру классификации его действий так, чтобы он при использовании НРСС выбирал то же действие, что и при использовании исходной системы стимулирования. Однако на практике использование для каждого агента собственной процедуры классификации нецелесообразно, а зачастую и невозможно. Поэтому рассмотрим случай, когда процедура классификации одинакова для всех агентов – так называемая *унифицированная* НРСС (УНРСС) – см. также обсуждение проблем унификации систем стимулирования в девятом разделе.

Унифицированные нормативные ранговые системы стимулирования. При использовании УНРСС агенты, выбравшие одинаковые действия, получают одинаковые вознаграждения. Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, такой, что 0 £ Y_1 £ Y_2 £ … £ Y_m < +¥, который определяет некоторое разбиение множества A. Унифицированная НРСС задается кортежем $\{m, \{Y_j\}, \{q_j\}\}$, причем вознаграждение i-го агента s_i определяется следующим образом: $s_i(y_i) = \sum_{j=0}^{m} q_j I(y_i$ Î $[Y_j, Y_{j+1}))$, где $I(\cdot)$ – функция-индикатор, $Y_0 = 0$, $q_0 = 0$. Унифицированная НРСС называется *прогрессивной*, если вознаграждения возрастают с ростом действий: q_0 £ q_1 £ q_2 £ ... £ q_m. Эскиз графика прогрессивной УНРСС приведен на рисунке 53.

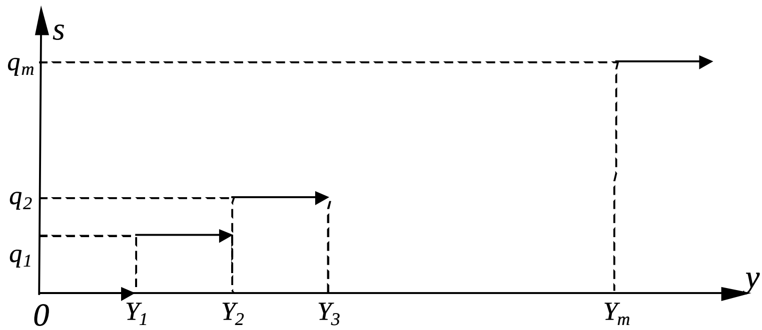

Рис. 53. Пример прогрессивной УНРСС

Так как УНРСС кусочно-постоянна, то в силу монотонности функций затрат очевидно, что агенты будут выбирать действия с минимальными затратами на соответствующих отрезках. Иначе говоря, условно можно считать, что при фиксированной системе стимулирования множество допустимых действий равно $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$, причем, так как $c_i(0) = 0$, то $q_0 = 0$. Действие y_i^*, выбираемое i-ым агентом, определяется парой векторов (Y, q), то есть имеет место $y_i^*(Y, q) = Y_{k_i}$, где

(1) $k_i = \arg \max\limits_{k=\overline{0,m}} \{q_k - c_i(Y_k)\}$, i Î I.

Обозначим $y^*(Y, q) = (y_1^*(Y, q),\ y_2^*(Y, q), ...,\ y_n^*(Y, q))$. Задача синтеза оптимальной УНРСС заключается в выборе размерности УНРСС m и векторов q и Y, удовлетворяющих заданным ограничениям, которые максимизировали бы целевую функцию центра:

(2) $F(y^*(Y, q))$ ® $\max\limits_{Y,q}$.

Фиксируем некоторый вектор действий y^* Î $A' = A^n$, который мы хотели бы реализовать с помощью УНРСС.

Из того, что при использовании УНРСС агенты выбирают действия только из множества Y, следует, что минимальная размерность системы стимулирования должна быть равна числу попарно различных компонент вектора действий, который требуется реализовать. Следовательно, использование УНРСС размерности, большей, чем n, нецелесообразно. Поэтому ограничимся системами стимулирования, размерность которых в точности равна числу агентов, то есть положим $m = n$.

Для фиксированного вектора действий $y^* \in A'$ положим $Y_i = y_i^*$, $i \in I$, и обозначим $c_{ij} = c_i(Y_j)$, $i, j \in I$. Из определения реализуемого действия (см. (1)) следует, что для того, чтобы УНРСС реализовывала вектор $y^* \in A'$ (то есть, побуждала агентов выбирать соответствующие действия) необходимо и достаточно выполнения следующей системы неравенств:

(3) $q_i - c_{ii} \geq q_j - c_{ij},\ i \in I, j = \overline{0, n}$.

Обозначим суммарные затраты на стимулирование по реализации действия y^* УНРСС

(4) $J_{УНРСС}(y^*) = \sum_{i=1}^{n} q_i(y^*)$,

где $q(y^*)$ удовлетворяет (3). Задача синтеза оптимальной (минимальной) УНРСС заключается в минимизации (4) при условии (3).

Предположим, что агентов можно упорядочить в порядке убывания затрат и предельных затрат ($\forall\ y \in A\ \ c_1'(y) \geq c_2'(y) \geq \ldots \geq c_n'(y)$), и фиксируем некоторый вектор $y^* \in A'$, удовлетворяющий следующему условию:

(5) $y_1^* \leq y_2^* \leq \ldots \leq y_n^*$,

то есть чем выше затраты агента, тем меньшие действия он выбирает.

Введенным предположениям удовлетворяют, например, такие распространенные в экономико-математическом моделировании функции затрат агентов, как: $c_i(y_i) = k_i\,c(y_i)$, $c_i(y_i) = k_i\,c(y_i/k_i)$, где $c(\cdot)$ – монотонная дифференцируемая функция, а коэффициенты (отражающие эффективность деятельности агентов) упорядочены: $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$ (частными случаями являются линейные функции затрат, функции затрат типа Кобба-Дугласа и др.).

В [14] доказано, что:

1) унифицированными нормативными ранговыми системами стимулирования реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют (5);
2) оптимальная УНРСС является прогрессивной;
3) для определения оптимальных размеров вознаграждений может быть использована следующая рекуррентная процедура: $q_1 = c_{11}$, $q_i = c_{ii} + \max_{j<i} \{q_j - c_{ij}\}$, $i = \overline{2, n}$;
4) индивидуальные вознаграждения в УНРСС, реализующей вектор y^* Î A', удовлетворяют:

$$(6)\ q_i = \sum_{j=1}^{i} (c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)).$$

Выражение (6) позволяет исследовать свойства УНРСС – вычислять оптимальные размеры вознаграждений, строить оптимальные процедуры классификаций, сравнивать эффективность УНРСС с эффективностью компенсаторных систем стимулирования и т.д. – см. свойства ранговых систем стимулирования ниже.

УНРСС единичной размерности. Отметим, что выше исследовались УНРСС размерности n. Частым случаем УНРСС являются унифицированные системы стимулирования С-типа (УНРСС единичной размерности)]. Поэтому рассмотрим задачу синтеза унифицированной системы стимулирования, в которой центр назначает общий для всех агентов план и использует унифицированную систему стимулирования С-типа с одним «скачком»:

$$(7)\ s(x, y_i) = \begin{cases} C, & y_i \geq x \\ 0, & y_i < x \end{cases},$$

где C – некоторая неотрицательная величина (размер «премии»), x – общий для всех агентов план.

Обозначим $P(x, C)$ – множество тех агентов, у которых затраты в точке x не превышают C, то есть таких агентов, которым выгодно выполнение плана x: $P(x, C) = \{i$ Î $I \mid c_i(x)$ £ $C\}$.

Из введенных предположений следует, что $P(x, C) = \{k(x, C), \ldots, n\}$, где $k(x, C) = \min \{i$ Î $I \mid c_i(x)$ £ $C\}$.

Агенты из множества $Q(x, C) = \{1, 2, \ldots, k(x, C) - 1\}$ выполнение плана x при вознаграждении C невыгодно, и они выберут действия, минимизирующие затраты, то есть действия, равные нулю.

Тогда действия $\{ y_i^* \}$ *i Î I*, реализуемые системой стимулирования (7), удовлетворяют:

(8) $y_i^*(x,C) = \begin{cases} x, & i \geq k(x,C) \\ 0, & i < k(x,C) \end{cases}.$

Суммарные затраты центра на стимулирование при использовании центром системы стимулирования (7), в силу (8), равны

(9) $J(x,C) = C\,(N - k(x, C) + 1)$.

Как показано в [9, 14], зависимость $y_i^*(x, C)$ не является непрерывной. Поэтому для каждого *x Î A* существует конечное число минимальных затрат центра на стимулирование, при которых изменяется число агентов, выполняющих план x: $\{c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)\}$. Аналогично, для фиксированного ограничения C при непрерывных и строго монотонных функциях затрат агентов существует конечное число планов $\{ c_i^{-1}(C)\}$ *i Î I* (где «$^{-1}$» обозначает обратную функцию), при которых изменяется число агентов, которые их выполняют.

Сравним минимальные затраты на стимулирование при использовании центром компенсаторной системы индивидуального стимулирования и УНРСС единичной размерности. Фиксируем произвольный план *x Î A*. Для того чтобы все агенты выбрали действия, совпадающие с планом, необходимо, чтобы $k(x, C) = 1$, то есть $C = c_1(x)$. Тогда из (8)-(9) получаем, что минимальные затраты на стимулирование равны (напомним, что индекс «U» соответствует унифицированным системами стимулирования) $J_{UQK}(x) = n\,c_1(x)$. Следовательно, потери в эффективности (по сравнению с системами стимулирования QK-типа) составляют:

(10) $D(x) = (n - 1)\,c_1(x) - \sum_{i=2}^{n} c_i(x)$.

Соревновательные системы стимулирования. Рассмотрим кратко известные свойства соревновательных ранговых систем стимулирования (СРСС), в которых центр задает число классов и число мест в каждом из классов, а также величины поощрений агентов, попавших в тот или иной класс. То есть в СРСС индивидуальное поощрение агента не зависит непосредственно от абсолютной величины выбранного им действия, а определяется тем местом, которое он занял в упорядочении показателей деятельности всех агентов.

В [14] доказано, что:

1) необходимым и достаточным условием реализуемости вектора действий агентов $y^* \in A$ в классе СРСС является выполнение (5);
2) данный вектор реализуем следующей системой стимулирования, обеспечивающей минимальность затрат центра на стимулирование:

$$(11)\ q_i(y^*) = \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\},\ i = \overline{1,n}.$$

Выражение (11) позволяет исследовать свойства СРСС – вычислять оптимальные размеры вознаграждений, строить оптимальные процедуры классификаций, сравнивать эффективность СРСС с эффективностью компенсаторных систем стимулирования и с эффективностью УНРСС и т.д.

Свойства ранговых систем стимулирования. Одним из *типовых решений* [2] является использование ранговых систем стимулирования, в которых либо множество возможных результатов деятельности разбивается на равные отрезки («расстояния» между нормативами одинаковы), либо на равные отрезки разбивается множество вознаграждений («расстояния» между размерами вознаграждений за выполнение нормативов одинаковы). Поэтому исследуем последовательно эти два случая для нормативных и соревновательных РСС. Кроме того, зачастую на практике предполагается, что существуют нормативы затрат, не зависящие от объемов работ, что в рамках рассматриваемой модели стимулирования приводит к предположению о линейности функций затрат агентов.

Пусть множество $A = [0; A^+] \subseteq \mathbb{R}^1$ разбито на n равных отрезков $[Y_i, Y_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, $Y_0 = 0$, $Y_n = A^+$, то есть $Y_i = i\,A^+ / n$, $i \in I$. Тогда из выражения (6) получаем, что размеры вознаграждений должны удовлетворять следующему соотношению [2]:

(12) $q_1 = c_1(A^+/n)$, $q_i = q_{i-1} + [c_i(i\,A^+/n) - c_i((i-1)\,A^+/n)]$, $i = \overline{2, n}$.

В частности, для линейных функций затрат $c_i(y_i) = k_i\, y_i$, i Î I, получаем:

(13) $q_1 = k_1 A^+/n$, $d_i = q_i - q_{i-1} = k_i A^+ / n$, $i = \overline{2, n}$.

Таким образом, справедлив следующий вывод: если используется равномерное разбиение множества A, то при линейных функциях затрат агентов УНРСС является прогрессивной и вогнутой функцией (см. также свойства шкал оплаты труда в разделе 11).

Возникает предположение – может быть всегда УНРСС являются монотонными и вогнутыми (или монотонными и вогнутыми). На самом деле, оптимальные УНРСС всегда являются монотонными, однако никаких однозначных суждений относительно выпуклости/вогнутости сделать нельзя – в зависимости от функций затрат и соотношения типов агентов УНРСС может быть вогнутой, линейной, выпуклой или ни вогнутой, ни выпуклой. Приведем иллюстративный пример.

<u>Пример 11.</u> Пусть агенты имеют квадратичные функции затрат типа Кобба-Дугласа. Тогда из (12) следует, что

$$d_i = (A^+)^2(2\,i - 1) / 2\,n^2\, r_i,\ i \text{ Î } I.$$

Получаем, что «вторая производная» равна

$$d_i - d_{i-1} = \frac{(A^+)^2}{2n^2}\ \frac{(2i-1)r_{i-1} - (2i-3)r_i}{r_{i-1}r_i},\ i = \overline{2, n}.$$

Учитывая, что $r_i > r_{i-1}$, $i = \overline{2, n}$, имеем, что при $r_{i-1} < r_i < \frac{2i-1}{2i-3}\, r_{i-1}$, $i = \overline{2, n}$, УНРСС является прогрессивной и выпуклой, при $r_i > \frac{2i-1}{2i-3}\, r_{i-1}$, $i = \overline{2, n}$ – вогнутой, а при $r_i = \frac{2i-1}{2i-3}\, r_{i-1}$, $i = \overline{2, n}$ – линейной.

Следовательно, имея распределение агентов по типам, можно для каждого класса функций их затрат предсказывать, какими свойствами должна обладать оптимальная УНРСС. Например, если последовательность типов агентов с квадратичными функциями затрат типа Кобба-Дугласа является монотонно возрастающей и лежит в области I на рисунке 54, то соответствующая оптимальная УНРСС является выпуклой, если – в области II, то вогнутой, на границе этих областей – линейной, а если пересекает границу, то ни выпуклой, ни вогнутой. •

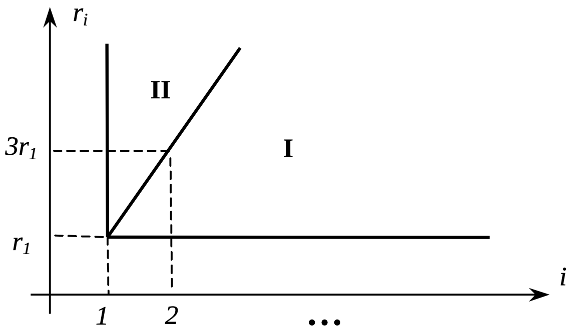

Рис. 54. Выпуклость, линейность и вогнутость оптимальных УНРСС

Перейдем к исследованию УНРСС, в которых равномерны вознаграждения, то есть $q_i = i\, q_1$, $i \in I$. Из выражения (6) получаем, что

(14) $Y_1 = c_1^{-1}(q_1)$, $Y_i = c_i^{-1}(q_1 + c_i(Y_{i-1}))$, $i = \overline{2, n}$,

где $c^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная к функции затрат.

Для линейных функций затрат агентов имеем: $Y_i = q_1 \sum_{j=1}^{i} 1/k_j$, $i \in I$. Из условия $Y_n = A^+$ окончательно получаем: $q_1 = A^+ / \sum_{j=1}^{n} 1/k_j$,

(15) $Y_i = [A^+ \sum_{j=1}^{i} 1/k_j\ ] / \sum_{j=1}^{n} 1/k_j$, $i \in I$.

Введем в рассмотрение показатель «равномерности» нормативов:

(16) $D_i = Y_i - Y_{i-1} = q_1 / k_i = A^+ / [k_i \sum_{j \in I} 1/k_j\ ]$, $i = \overline{2, n}$.

Можно показать [2], что в УНРСС при линейных функциях затрат агентов и равномерных вознаграждениях (прямо пропорциональных номеру норматива) оптимальные приросты нормативов увеличиваются с ростом эффективности деятельности агента.

Аналогично тому, как это делалось для УНРСС, исследуем СРСС с равномерными нормативами.

Пусть множество $A = [0; A^+]$ Í $\hat{A}^1$ разбито на $(n - 1)$ равный отрезок $[Y_i, Y_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$, $Y_1 = 0$, $Y_n = A^+$, то есть $Y_i = (i - 1)\, A^+ / (n - 1)$, i $\hat{I}$ I. Тогда из выражения (11) получаем, что размеры вознаграждений должны удовлетворять следующему соотношению:

(17) $q_1 = 0,\ q_i = q_{i-1} + [c_{i-1}((i - 1)\, A^+ / (n - 1)) -$

$$- c_{i-1}((i - 2)\, A^+ / (n - 1))],\ i = \overline{2, n}.$$

В частности, для линейных функций затрат $c_i(y_i) = k_i\, y_i$, i $\hat{I}$ I, получаем:

(18) $q_1 = 0,\ d_i = q_i - q_{i-1} = k_{i-1}\, A^+ / (n-1),\ i = \overline{2, n}$.

Можно показать [2], что, если используется равномерное разбиение множества A, то при линейных функциях затрат агентов СРСС является прогрессивной и вогнутой функцией.

Пример 12. Пусть агенты имеют квадратичные функции затрат типа Кобба-Дугласа. Тогда из (17) следует, что

$$d_i = (A^+)^2 (2\, i - 3) / 2\, (n-1)^2\, r_{i-1},\ i = \overline{2, n}.$$

Получаем, что «вторая производная» равна

$$d_{i+1} - d_i = \frac{(A^+)^2}{2(n-1)^2}\ \frac{(2i-1)r_{i-1} - (2i-3)r_i}{r_{i-1} r_i},\ i = \overline{1, n-1}.$$

В рассматриваемом примере можно по аналогии с тем, как это делалось в примере 11, построить области возрастающих последовательностей типов агентов, при которых УНРСС является выпуклой, вогнутой, линейной или ни выпуклой, ни вогнутой. •

Перейдем к исследованию СРСС, в которых равномерны вознаграждения, то есть $q_i = (i - 1)\, q_2$, $i = \overline{2, n}$. Из выражения (11) получаем, что

(19) $Y_1 = 0,\ Y_i = c_{i-1}^{-1}(q_2 + c_{i-1}(Y_{i-1})),\ i = \overline{2, n}$.

Для линейных функций затрат агентов имеем: $Y_i = q_2 \sum_{j=2}^{i} 1 / k_{j-1}$, $i = \overline{2, n}$. Из условия $Y_n = A^+$ окончательно получаем: $q_2 = A^+ / \sum_{j=2}^{n} 1 / k_{j-1}$ (отметим, что в СРСС основные показатели не зависят от эффективности деятельности победителя конкурса – агента, имеющего минимальные затраты),

$$(20)\ Y_i = [A^+ \sum_{j=1}^{i} 1/k_j\ ] / \sum_{j=1}^{n} 1/k_j\ , i\ Î\ I.$$

Введем в рассмотрение показатель «равномерности» нормативов

$$(21)\ D_i = Y_i - Y_{i-1} = q_2 / k_{i-1} = A^+ / [k_{i-1} \sum_{j=1}^{n} 1/k_j\ ],\ i = \overline{2, n}.$$

Из выражения (21) следует справедливость следующего утверждения: в СРСС при линейных функциях затрат агентов и равномерных вознаграждениях (прямо пропорциональных номеру норматива) оптимальные приросты нормативов увеличиваются с ростом эффективности деятельности агента.

Применение используемой в настоящем разделе техники анализа ранговых систем стимулирования дает возможность изучать свойства оптимальных УНРСС и СРСС для различных (конкретных) функций затрат и распределений типов агентов.

13. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В МАТРИЧНЫХ СТРУКТУРАХ

Во многих реальных системах один и тот же агент оказывается подчинен одновременно нескольким центрам, находящимся либо на одном, либо на различных уровнях иерархии. Первый случай называется *распределенным контролем*, второй – *межуровневым взаимодействием*.

Межуровневое взаимодействие. Анализ моделей межуровневого взаимодействия [9] свидетельствует, что двойное подчинение агента управляющим органам, находящимся на различных уровнях иерархии, оказывается неэффективным. Косвенным подтверждение этой неэффективности является известный управленческий принцип «вассал моего вассала – не мой вассал». Поэтому с нормативной точки зрения каждый агент должен быть подчинен только своему непосредственному «начальнику» – управляющему органу, находящемуся на следующем (и только на следующем) более высоком уровне иерархии.

Возникает закономерный вопрос: почему в реальных организационных системах наблюдаются эффекты межуровневого взаимодействия? Дескриптивное (без учета нормативной структуры взаимодействия участников и институциональных ограничений) объяснение таково. Обычно предполагается, что потери эффективности могут возникать только из-за факторов агрегирования, декомпозиции задач управления и недостаточной информированности центра об агентах [9]. Если же присутствуют, в частности, информационные ограничения на промежуточном уровне – например, количество информации, которое должен переработать управляющий орган некоторой подсистемы, превосходит его возможности – то часть функций управления (быть может, в агрегированном виде) вынужденно передается на более высокий уровень. Проще говоря, основной причиной наблюдаемого на практике межуровневого взаимодействия, как правило, является некомпетентность (в объективном смысле этого слова) промежуточного центра. Поэтому, с одной стороны, при решении задач синтеза организационной, функциональной, информационной и других структур ОС априори следует допускать возможность межуровневого взаимодействия, стремясь, тем не менее, избежать его, насколько это возможно. С другой стороны, наличие межуровневого взаимодействия в реальной ОС косвенно свидетельствует о неоптимальности ее функционирования и должно послужить руководителю сигналом о необходимости пересмотра структуры, а иногда и состава, системы.

В то же время, двойное подчинение агентов центрам одного и того же уровня зачастую неизбежно. Примером являются матричные структуры управления [4, 9, 10, 15], для которых распределенный контроль является характерной чертой.

Распределенный контроль. Специфической чертой *матричных структур управления* (МСУ), характерных для проектно-ориентированных организаций, является подчиненность одного и того же агента одновременно нескольким центрам одного уровня иерархии, функции которых могут быть различными (координирующая, обеспечивающая, контролирующая и т.д.). Например, на иерархическую организационную структуру накладывается «горизонтальная» структура проектов (см. рисунок 55).

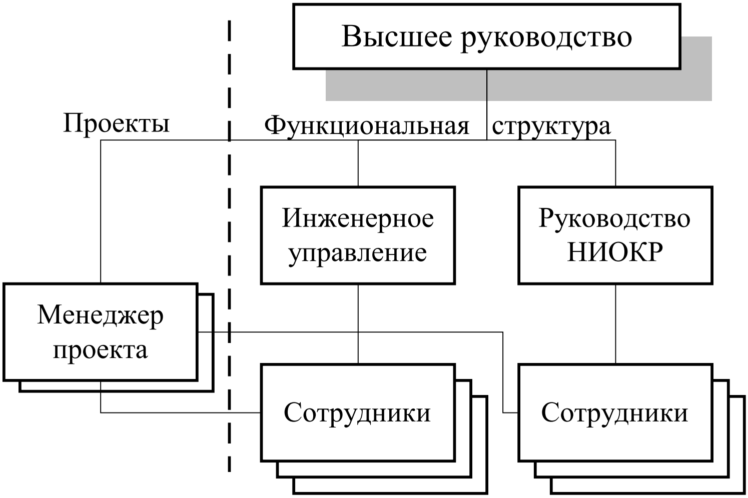

Рис. 55. Пример матричной структуры управления

В МСУ центры, осуществляющие управление агентом, оказываются вовлеченными в «игру», равновесие в которой имеет достаточно сложную структуру. В частности можно выделить два устойчивых режима взаимодействия центров – режим сотрудничества и режим конкуренции.

В *режиме сотрудничества* центры действуют совместно, что позволяет добиваться требуемых результатов деятельности управляемого агента с использованием минимального количества ресурсов.

В *режиме конкуренции*, который возникает, если цели центров различаются достаточно сильно, ресурсы расходуются неэффективно.

Приведем простейшую модель матричной структуры управления (достаточно полное представление о современном состоянии исследований этого класса задач управления можно получить из [4, 15]).

Пусть ОС состоит из одного агента и k центров. Стратегией агента является выбор действия $y \in A$, что требует от него затрат $c(y)$. Каждый центр получает от деятельности агента доход, описываемый функцией $H_i(y)$, и выплачивает агенту стимулирование $\sigma_i(y)$, $i \in K = \{1, 2, \ldots, k\}$ – множеству центров. Таким образом, целевая функция i-го центра имеет вид

(1) $F_i(\sigma_i(\cdot), y) = H_i(y) - \sigma_i(y), i \in K$,

а целевая функция агента:

(2) $f(\{\sigma_i(\cdot)\}, y) = \sum_{i \in I} \sigma_i(y) - c(y)$.

Порядок функционирования следующий: центры одновременно и независимо (кооперативные модели взаимодействия центров в системах с распределенным контролем рассматриваются в [4]) выбирают функции стимулирования и сообщают их агенту, который затем выбирает свое действие. Ограничимся рассмотрением множества Парето-эффективных равновесий Нэша игры центров, в которых, как показано в [15], их стратегии имеют вид

(3) $\sigma_i(x, y) = \begin{cases} \lambda_i, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}, i \in K$.

Содержательно, центры договариваются о том, что будут побуждать агента выбирать действие $x \in A$ – *план* – и осуществлять совместное стимулирование. Такой режим взаимодействия центров называется режимом сотрудничества.

Из условий оптимальности по Парето следует, что сумма вознаграждений, получаемых агентом от центров в случае выполнения плана, равна его затратам (обобщение принципа компенсации затрат на системы с распределенным контролем), то есть:

(4) $\sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)$.

Условие выгодности сотрудничества для каждого из центров можно сформулировать следующим образом: в режиме сотрудничества каждый центр должен получить полезность не меньшую, чем он мог бы получить, осуществляя стимулирование агента в одиночку (компенсируя последнему затраты по выбору наиболее выгодного для данного центра действия). Полезность i-го центра от «самостоятельного» взаимодействия с агентом в силу результатов второго раздела равна

(5) $W_i = \max\limits_{y \in A}\ [H_i(y) - c(y)]$, i Î K.

Обозначим $l = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$,

(6) $S = \{x$ Î A | \$ l Î $\Re_+^k$: $H_i(x) - l_i$ ³ W_i, i Î K, $\sum\limits_{i \in K} l_i = c(x)\}$

– множество таких действий агента, для реализации которых сотрудничество выгодно для центров.

Множество пар x Î S и соответствующих векторов l называется *областью компромисса*:

(7) $L = \{x$ Î A, l Î $\Re_+^k$ | $H_i(x) - l_i$ ³ W_i, i Î K, $\sum\limits_{i \in K} l_i = c(x)\}$.

Режим сотрудничества по определению имеет место, если область компромисса не пуста: L ¹ Æ. В режиме сотрудничества агент получает нулевую полезность.

Обозначим

(8) $W_0 = \max\limits_{y \in A}\ [\sum\limits_{i \in K} H_i(y) - c(y)]$.

Легко показать, что область компромисса не пуста тогда и только тогда, когда

(9) W_0 ³ $\sum\limits_{i \in K} W_i$.

Таким образом, критерием реализуемости режима сотрудничества является условие (9). Содержательно оно означает, что, действуя совместно, центры могут получить бóльшую суммарную полезность, чем действуя в одиночку. Разность $W_0 - \sum\limits_{i \in K} W_i$ может интерпретироваться как мера согласованности интересов центров и характеристика эмерджентности ОС.

Если условие (9) не выполнено и L = Æ, то имеет место режим конкуренции центров, характеризуемый так называемым аукционным решением. Упорядочим (перенумеруем) центров в порядке убывания величин $\{W_i\}$: W_1 ³ W_2 ³ … ³ W_k. Победителем будет первый центр, который предложит АЭ, помимо компенсации затрат, полезность, на сколь угодно малую величину превышающую W_2.

Обсудим качественно полученные результаты. Одним из недостатков МСУ является то, что при недостаточном разделении полномочий между менеджерами проектов и руководителями функциональных подразделений возможен конфликт между ними, когда и менеджеры проектов, и функциональные руководители (иначе говоря, центры промежуточного уровня иерархии) стремятся «перетянуть» на себя находящихся под их общим контролем агентов. При этом, очевидно, ОС теряет в эффективности функционирования, так как на такое перетягивание, «перекупку» агентов могут уходить весьма существенные средства.

Сотрудничество центров промежуточного уровня – совместное назначение планов и использование согласованной системы стимулирования агентов (3) – позволяют избежать подобного конфликта и неэффективности. Переход от режима конкуренции к режиму сотрудничества требует согласования интересов центров, что может осуществляться управляющими органами более высоких уровней иерархии методами стимулирования. Приведем одну из возможных моделей.

Выше были исследованы случаи, когда в матричной структуре управления центрам промежуточного уровня иерархии (например, менеджерам проектов) выгодно сотрудничать: объединяться в одну коалицию и совместно выбирать план агента. В такой ситуации всех центров можно рассматривать как одного игрока, максимизирующего целевую функцию

$$(10)\quad \Phi_K(.) = \sum_{i \in K} H_i(y) - c(y).$$

Хорошо это или плохо с точки зрения *высшего руководства* (ВР – см. рисунок 55), представляющего интересы организации в целом? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо определить интересы ВР и методы его воздействия на функционирование системы.

С точки зрения ВР управляемым объектом является совокупность центров промежуточного уровня и агента. Центры характеризуются функциями доходов $H_i(y)$, i Î K, а агент – функцией своих затрат $c(y)$.

Предположим, что интересы центра зависят только от результата деятельности системы, то есть от реализовавшихся в результате выбранного агентом действия, значений доходов и затрат. Тогда целевую функцию ВР можно записать в виде $F(\cdot)=F(H_1(\cdot),...,H_k(\cdot),c(\cdot))$.

Логично также предположить, что цели ВР заключаются в увеличении, насколько это возможно, дохода каждого из проектов (представляемых агентами) и в уменьшении затрат по реализации этих проектов. Таким образом, целевая функция ВР возрастает по переменным $H_1, H_2, \ldots, H_k$ и убывает по затратам c агента.

В простейшем случае целевая функция ВР представляет собой линейную свертку с неотрицательными весами a_i всех подцелей в единый критерий:

(11) $F(y)=\sum_{i\in K} a_i H_i(y) - a_0 c(y)$.

Сравнивая данное выражение с формулой (10) для целевой функции коалиции центров, видим, что если коэффициенты a_i различны, то в системе наблюдается рассогласование интересов ВР и центров промежуточного уровня (менеджеров проектов). Те, стремясь максимизировать свою целевую функцию, реализуют «не то» действие агента, которое необходимо ВР. Следовательно, ВР должно воздействовать каким-то образом на центры промежуточного уровня с тем, чтобы приблизить реализуемое действие y к требуемому – доставляющему максимум критерию эффективности (11).

Одним из методов воздействия ВР на функционирование системы является внутрифирменное «налогообложение», когда устанавливаются ставки $\{b_i\}$ отчислений в пользу ВР с доходов центров промежуточного уровня $\{H_i(x)\}$ и/или ставки g_i отчислений с прибылей $\{H_i(x) - s_i(x)\}$. Как будет показано ниже, для полного согласования интересов ВР и центров промежуточного уровня достаточно единой ставки g Î $[0; g_{max}]$ налога с прибыли.

С учетом единой ставки налога с прибыли и дифференцированной ставки «подоходного налога», целевые функции ВР и коалиции из всех центров среднего звена можно записать соответственно как

(12) $F(y)=g[\sum_{i\in K} a_i b_i H_i(y) - a_0 c(y)]$,

(13) $\Phi(y) = (1-g)[\sum_{i \in K}(1-b_i)H_i(y) - c(y)]$.

Для согласования интересов ВР и центров промежуточного уровня достаточно, чтобы их целевые функции ВР достигали максимума в одной точке. Из (12), (13) следует, что это условие выполнено при $a_i b_i / a_0 = 1 - b_i$, то есть при ставках подоходного налога $b_i = \dfrac{1}{1 + a_i / a_0}$. ВР заинтересовано в увеличении своей доли прибыли, поэтому $g = g_{\max}$. При такой системе налогообложения достигается полное согласование интересов ВР и менеджеров проектов (центров промежуточного уровня). Так, например, если $a_i = 1$, $i \in K$, то ставка подоходного налога должна быть равна 50%.

Итак, в многоуровневых системах для обеспечения эффективного функционирования системы в целом каждый более высокий уровень иерархии должен осуществлять согласование своих интересов и интересов всех нижележащих агентов, в том числе – путем выбора соответствующей системы стимулирования. Таким образом, для нормальной работы МСУ от высшего руководства требуется использование управляющих воздействий, позволяющих центрам промежуточного уровня вырабатывать совместную политику и назначать согласованные планы агентам.

14. ЛИТЕРАТУРА

(работы, отмеченные звездочкой, можно найти в электронной библиотеке на сайте www.mtas.ru)

1 *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999. – 128 с.

2 *Васильев Д.К., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А., Цветков А.В. Типовые решения в управлении проектами. М.: ИПУ РАН, 2003. – 74 с.

3 Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. – 327 с.

4 *Губко М.В. Управление организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003. – 140 с.

5 *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 139 с.

6 *Колосова Е.В., Новиков Д.А., Цветков А.В. Методика освоенного объема в оперативном управлении проектам. М.: Апостроф, 2001. – 154 с.

7 *Кочиева Т.Б., Новиков Д.А. Базовые системы стимулирования. М.: Апостроф, 2000. – 108 с.

8 Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003. –312 с.

9 *Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.

10 *Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.

11 Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

12 *Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999. – 108 с.

13 *Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.

14 *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000. – 184 с.
15 *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001. – 118 с.
16 *Щепкин А.В. Механизмы внутрифирменного управления. М.: ИПУ РАН, 2001. – 80 с.
17 Эренберг Р.Дж., Смит Р.С. Современная экономика труда. Теория и государственная политика. М.: Изд-во МГУ, 1996.–800 с.
18 Armstrong M. Reward management. London, 2000. – 804 p.
19 Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.