МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИСТЕТ

КАФЕДРА ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
В ЭКОНОМИКЕ И ПЛАНИРОВАНИИ

С. Г. Коковин, А. А. Цыплаков

Задачи по курсу «Методы микроэкономического анализа»

(сборник задач)

Новосибирск

2003

Задачник представляет собой пособие по курсу «Методы микроэкономического анализа», преподаваемому на экономическом факультете Новосибирского государственного университета. Предназначен для студентов и преподавателей экономических специальностей высших учебных заведений. Задачник может быть использован в преподавании таких дисциплин как «Микроэкономика», «Теория общественного сектора», «Экономика неопределенности», «Теория контрактов».

Содержание

Совершенные рынки 3
Квазилинейная экономика 11
Налоги 12
Экстерналии 16
Общественные блага 23
Риск и неопределенность 34
Модель инвестора 36
Рынки с риском 41
Асимметричная информация 45
Модели найма 47
Общие задачи 57
Литература 59

Совершенные рынки

1. Назвать наиболее важные черты, по которым рынок называют совершенным или классическим: 1) от чего зависят предпочтения и потребительские множества, 2) влияние экономических субъектов на цены, 3) определенность информации, 4) влияние издержек сделок, 5) существование рынков.

2. Найдите равновесие и Парето-границу в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителя:

$$u_1(\boldsymbol{x}_1) = \ln(x_{11}) + \ln(x_{12}),$$

$$u_2(\boldsymbol{x}_2) = \ln(x_{21}) + \ln(x_{22}),$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (1; 3),\ \boldsymbol{\omega}_2 = (3; 1).$$

Проиллюстрируйте этот анализ на диаграмме Эджворта и проинтерпретируйте графически обе теоремы благосостояния.

3. Привести пример равновесия в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, в котором первая теорема благосостояния была бы не применима из-за нарушения предположений, и равновесие нарушало бы ее утверждение. Можно привести графический пример, либо указать конкретные начальные запасы, $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$, функции полезности $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ и равновесие $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$.

4. Привести пример равновесия в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, в котором первая теорема благосостояния была бы не применима из-за нарушения предположений, но утверждение первой теоремы благосостояния оставалось бы справедливым.

5. Привести пример экономики обмена с двумя потребителями и двумя благами, графический или с конкретными начальными запасами $\boldsymbol{\omega}$, функциями полезности $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, и состоянием этой экономики $\boldsymbol{x}$, для которой вторая теорема благосостояния не применима и

(A) утверждение второй теоремы благосостояния остается справедливым.

(B) утверждение второй теоремы благосостояния неверно.

6. Сформулируйте предположения первой теоремы благосостояния для экономики обмена.

7. Сформулируйте предположения второй теоремы благосостояния для экономики обмена.

8. Сформулируйте и докажите теоремы благосостояния в модели обмена в условиях строгой монотонности, строгой выпуклости предпочтений и положительности совокупных начальных запасов.

9. Для каждого из предположений второй теоремы благосостояния покажите (приведя соответствующий пример), что отказ от этого предположения приводит к тому, что утверждение теоремы оказывается неверным.

10. Что можно сказать о соотношениях предельных норм замены товаров в потреблении и производстве в точке равновесия? Связано ли это соотношение с отсутствием Парето-улучшающего изменения состояния? Если данное соотношение нарушается, как следует строить Парето-улучшение данного состояния экономики?

11. Пусть допустимые потребительские наборы задаются неравенствами $\boldsymbol{x}_i \geqslant \boldsymbol{0}$. Какие из функций полезности представляют предпочтения, удовлетворяющие условиям первой и (или) второй теоремы благосостояния?

1) $u(x_1, x_2) = x_1$,	2) $u(x_1, x_2) = -x_1$,
3) $u(x_1, x_2) = const$,	4) $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$,
5) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$,	6) $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$,
7) $u(x_1, x_2) = \exp(x_1)x_2$,	8) $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$,
9) $u(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$,	10) $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$.

12. Покажите, что в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, если предпочтения гомотетичны и одинаковы, то граница Парето совпадает с диагональю

ящика Эджворта. Как найти равновесие в такой экономике, используя свойства границы Парето?

13. Пусть начальные запасы в экономике обмена лежат на Парето-границе. Какие дополнительные условия гарантируют, что на основе точки начальных запасов можно построить равновесие?

14. Пусть в экономике обмена с двумя потребителями их функции полезности равны $u_i(\boldsymbol{x}_i) = x_{i1}^2 + x_{i2}^2$. Допустимые потребительские наборы задаются неравенствами $\boldsymbol{x}_i \geqslant \mathbf{0}$.

Найти Парето-границу. Какие из точек Парето-границы можно реализовать как равновесие подбором цен и распределения собственности? Решите эту задачу в случае, когда

(1) суммарные начальные запасы двух благ одинаковы,

(2) суммарные начальные запасы двух благ различаются.

15. В классической экономике обмена с двумя потребителями, функции полезности последних, заданные на $\mathbb{R}_+^2$, равны

(a) $u_1 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}, \quad u_2 = 6 + x_1 - x_2$,

(b) $u_1 = \min\{x_1, x_2\}, \quad u_2 = 6 - x_1 + x_2$,

(c) $u_1 = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}, \quad u_2 = 6 - x_1 - x_2$.

В каких из трех экономик окажется, что...

1) любое равновесие Парето-оптимально (почему именно в этих, а в других — нет?),

2) любое Парето-оптимальное состояние с $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ можно превратить в равновесие подбором распределения собственности (почему именно в этих, а в других — нет?).

16. Для экономики обмена двух потребителей со строго монотонными, строго вогнутыми функциями полезности, заданными на $\mathbb{R}_+^l$, и строго положительными общесистемными запасами благ, доказать, что Парето-граница является связной кривой, соединяющей два угла ящика Эджворта, причем на каждой кривой безразличия в ящике Эджворта лежит ровно одна точка Парето, и что кривая Парето-границы не имеет колец. (Подсказка: воспользоваться представлением Парето-границы через оптимизационную задачу с параметром задающим «вес» полезности одного из потребителей, и теоремой о непрерывности по параметру решения задачи максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве).

17. Сформулируйте и докажите вариант первой теоремы благосостояния (о Парето-оптимальности равновесий) на основе сопоставления дифференциальных характеристик Парето-оптимальных и равновесных состояний. Какие дополнительные предположения о свойствах функций полезности (помимо дифференцируемости) необходимо сделать?

18. Первая теорема благосостояния (о Парето-оптимальности равновесий) доказывается от противного: предполагаем, что существует альтернативное к равновесному состояние $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, более желательный для некоторого потребителя i. Условие локальной ненасыщаемости (сформулировать) используется для того, чтобы проверить, что:

А) альтернативный вариант дороже, чем равновесный, для потребителя i;

Б) спрос сбалансирован с предложением в равновесии;

В) ………………

Укажите словами верный вариант взамен приведенных и запишите его формулой.

19. В доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума), не использующем дифференцируемость, условие выпуклости используется для того, чтобы применить теорему ... ... к множествам ... ... Сформулируйте применяемую теорему и определение соответствующих множеств.

20. В доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума), использующем дифференцируемость, условие выпуклости используется для того чтобы с помощью теоремы ... ... доказать, что соответствующие компоненты построенного состояния экономики являются решениями задач ... ... Сформулируйте применяемую теорему, соответствующие задачи и способ применения теоремы.

21. При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия), использующем дифференцируемость, условия на градиенты функций нужны для того, чтобы применить Теорему ... ... к задаче ... ...

22. При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при отсутствии свойства локальной ненасыщаемости не удается показать, что ... ... , так как может оказаться что ... ... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

23. При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при невыполнении условия выпуклости предпочтений не удается показать, что ... ... , так как может оказаться что ... ... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

24. При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при невыполнении условия, что рассматриваемая точка — внутренняя, не удается показать, что ... ... , так как может оказаться что ... ... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

25. При доказательстве второй теоремы благосостояния (о Парето-оптимальности равновесных распределений) при невыполнении условия локальной ненасыщаемости, не удается показать, что ... ... , так как может оказаться что ... ... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

26. Пусть два потребителя (потребление первого обозначим x, потребление второго обозначим z) в классической ситуации обмена имеют функции полезности

$$u_x(\boldsymbol{x}) = x_1^a + x_2^b, \quad u_z(\boldsymbol{z}) = cz_1 + dz_2,$$

где $\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{z} \geqslant \mathbf{0}$, и обладают начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_x$ и $\boldsymbol{\omega}_z$.

а) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно гарантировать, что состояние экономики, не улучшаемое по Парето, можно реализовать как равновесие?

Предположим, что в этой экономике осуществилось равновесие.

б) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно гарантировать, что оно не улучшаемо по Парето?

в) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно утверждать, что для обоих потребителей оно не лучше, чем начальное состояние?

г) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно утверждать, что для одного из потребителей оно не лучше, чем начальное состояние? О каком из потребителей идет речь?

27. В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1,\, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, а другой — $u_z(z_1,\, z_2)$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (1; 1)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2; 1)$.

Укажите функцию $u_z(\cdot)$ и равновесие Вальраса такие, что равновесное состояние не является Парето-оптимальным состоянием данной экономики.

Какое условие теоремы (какой?) при этом будет нарушаться?

Объяснить, почему это равновесие не Парето-оптимально.

28. В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1,\, x_2)$, а другой — $u_z(z_1,\, z_2) = z_1 + z_2$ $(x_1, x_2,\ z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (4; 1)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2; 2)$.

Укажите функцию $u_x(\cdot)$ и равновесие Вальраса в соответствующей экономике такие, что равновесное состояние этой экономики не является Парето-оптимальным. Объяснить, почему это равновесие не Парето-оптимально.

Какое условие теоремы (какой?) при этом нарушается?

29. В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1,\, x_2) = 2x_1 + x_2$, а другой — $u_z(z_1, z_2)$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (3; 2)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2; 1)$.

Укажите функцию $u_z(\cdot)$ такую, что не каждый Парето-оптимум можно реализовать как равновесие. Какое условие теоремы (какой?) при этом нарушается?

Какие именно Парето-оптимальные состояния нельзя реализовать как равновесие. Объяснить, почему.

30. В экономике имеется один производитель с технологией, задаваемой неявной производственной функцией $g(y) = -y_1 - \sqrt{y_2}$ и один потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Начальные запасы равны $(\omega_1, \omega_2) = (2; 0)$. Известно, что функция полезности может быть одного из трех видов: $u = \min(Ax_1, Bx_2)$, $u = \max(Ax_1, Bx_2)$ или же $u = Ax_1 + Bx_2$. Выберите функцию и подберите параметры A и B так, чтобы точка $(x_1, x_2) = (1; 1)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на графике с помощью множества производственных возможностей и кривых безразличия.

31. В экономике имеются потребители $i = 1, 2$ с функциями полезности $u_i(x_{ia}, x_{ib})$, где $x_{ia}, x_{ib} \geqslant 0$. Суммарные начальные запасы равны $(\omega_{\Sigma a}, \omega_{\Sigma b}) = (2; 2)$. Известно, что $u_2 = \sqrt{x_{2a}} + x_{2b}$, а функция полезности 1-го может быть одного из трех видов: $u_1 = \alpha \ln(1 + x_{1a}) + \beta \ln(1 + x_{1b})$, $u_1 = \alpha\, x_{1a} + \beta x_{1b}$ или же $u_1 = \alpha\,(x_{1a})^2 + \beta\,(x_{1b})^2$. Выберите функцию и подберите параметры α и β так, чтобы точка $(x_{1a}, x_{1b}) = (2; 0)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на диаграмме Эджворта.

32. В экономике имеется один производитель с технологией, задаваемой неявной производственной функцией $g(y) = -y_1 - y_2$ и один потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Начальные запасы равны $(\omega_1, \omega_2) = (1; 3)$. Известно, что функция полезности может быть одного из трех видов: $u = \min(Ax_1, x_2)$, $u = Ax_1 + x_2$ или же $u = \max(x_1 x_2, A)$. Выберите функцию и подберите параметр A так, чтобы точка $(x_1, x_2) = (1; 1)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему ее нельзя реализовать как равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на графике с помощью множества производственных возможностей и кривых безразличия.

33. В экономике имеются потребители $i = 1, 2$ с функциями полезности $u_i(x_{ia}, x_{ib})$, где $x_{ia}, x_{ib} \geqslant 0$. Суммарные начальные запасы равны $(\omega_{\Sigma a}, \omega_{\Sigma b}) = (2; 2)$. Известно, что $u_1 = (x_{1a})^2 + (x_{1b})^2$, а функция полезности 2-го может быть одного из трех видов: $u_2 = \max(x_{2a}, \alpha + x_{2b})$, $u_2 = \alpha x_{2a} + x_{2b}$ или же $u_2 = x_{2a}^{\alpha} x_{2b}$. Выберите функцию и подберите

параметр α так, чтобы точка $(x_{1a}, x_{1b}) = (1;2)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на диаграмме Эджворта.

34. Какие из нижеприведенных функций полезности соответствуют условиям 1-й теоремы благосостояния?

I. $u(x_1, x_2) = -1/x_1 - 1/x_2$, II. $u(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, III. $u(x_1, x_2) = 100$,

а) I и II.

б) I и III.

в) II и III.

г) только I.

35. Для выполнения первой теоремы благосостояния требуется, чтобы функция полезности удовлетворяла свойствам...

а) только локальной ненасыщаемости,

б) локальной ненасыщаемости и вогнутости,

в) дифференцируемости и вогнутости,

г) только вогнутости.

36. Для выполнения второй теоремы благосостояния требуется, чтобы функция полезности удовлетворяла свойствам...

а) локальной ненасыщаемости,

б) локальной ненасыщаемости и вогнутости,

в) вогнутости,

г) вогнутости и дифференцируемости.

37. Если функция полезности одного из потребителей является локально ненасыщаемой, то...

а) первая теорема благосостояния несправедлива;

б) бюджетное ограничение выполняется как равенство;

в) точка равновесия не является внутренней;

г) вторая теорема благосостояния несправедлива.

38. Вторая теорема благосостояния может не выполняться, если...

а) у одного из потребителей в его множестве потребительских наборов есть наилучший набор;

б) технологические множества выпуклы;

в) функция полезности хотя бы одного из потребителей недифференцируема;

г) функция полезности хотя бы одного из потребителей локально ненасыщаема.

39. В экономике двух потребителей с двумя благами функции полезности имеют вид

$$u_1 = x_{11} + 2\sqrt{x_{12}} \text{ и } u_2 = 2\sqrt{x_{21}} + x_{22}.$$

Начальные запасы 1-го потребителя равны $(1;3)$, а 2-го — $(2;1)$.

Пусть $x_{11} = 2$, $x_{12} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{22} = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $T_1 = -1$, $T_2 = 1$.

(а) Покажите формально, что $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ является равновесием с трансфертами $\boldsymbol{T}$.

(б) Является ли это равновесие оптимальным по Парето? Обоснуйте свой ответ.

40. В экономике с двумя благами функция полезности единственного потребителя имеет вид

$$u = 2\sqrt{x_1} + x_2,$$

а его начальные запасы равны $(3;1)$. Технология единственного предприятия задана неявной производственной функцией

$$g = -y_1 + 2\sqrt{-y_2}.$$

Пусть $x_1 = 4$, $x_2 = 3/4$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1/4$.

(а) Покажите формально, что $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ является Парето-оптимальным состоянием.

(б) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

41. В экономике двух потребителей с двумя благами функции полезности имеют вид

$$u_1 = x_{11} + 4\sqrt{x_{12}} \text{ и } u_2 = 2\sqrt{x_{21}} + x_{22}.$$

Начальные запасы 1-го потребителя равны $(2;4)$, а 2-го — $(1;1)$.

Пусть $x_{11} = 1$, $x_{12} = 2$, $x_{21} = 2$, $x_{22} = 3$.

(а) Покажите формально, что $\boldsymbol{x}$ является Парето-оптимальным состоянием.

(б) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

42. В экономике с двумя благами функция полезности единственного потребителя имеет вид

$$u = x_1 + 2\sqrt{x_2},$$

а его начальные запасы равны $(3;0)$. Технология единственного предприятия задана неявной производственной функцией

$$g=4\sqrt{-y_1}-y_2.$$

Пусть $x_1=2$, $x_2=4$, $y_1=-1$, $y_2=4$, $p_1=2$, $p_2=1$.

(а) Покажите формально, что $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ является равновесием.

(б) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

43. Покажите, что в модели обмена (с m потребителями) с совпадающими и строго выпуклыми предпочтениями потребителей и совпадающими начальными запасами вектора начальных запасов потребителей составляют Парето-оптимальное распределение.

44. При каких дополнительных предположениях относительно параметров модели обмена (с m потребителями) и совпадающими, выпуклыми и строго монотонными предпочтениями, представимыми непрерывно дифференцируемыми функциями полезности, распределение, состоящее из векторов начальных запасов, можно реализовать как равновесие? При каких ценах?

Квазилинейная экономика

45. Покажите, что в случае квазилинейной экономики без ограничений на квазилинейное благо Парето-граница в координатах полезностей u_i представляет собой гиперплоскость вида $\sum_{i\in I} u_i = const$.

46. Пусть $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — допустимое состояние квазилинейной экономики, и $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{0}$ — некоторый вектор цен, причем $\boldsymbol{x}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$, и

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{p}\sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j.$$

Докажите, что

$$\sum_{i\in I}u_i(\boldsymbol{x}_i, z_i)=W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\sum_{j\in J}\boldsymbol{\omega}_i.$$

47. В экономике два блага ($l+1=2$) и два потребителя, имеющие функции полезности $u_1=\sqrt{x_1}+z_1$ и $u_2=2\sqrt{x_2}+z_2$. Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

48. Решите предыдущую задачу с функциями полезности $u_1=-3/x_1^3+z_1$ и $u_2=-3/x_2^3+z_2$.

49. Потребители ($i=1, ..., m$) имеют квазилинейные функции полезности вида

(A) $u_i=2\alpha_i\sqrt{x_i}+z_i$, (B) $u_i=-\alpha_i^2\dfrac{1}{x_i}+z_i$, (C) $u_i=2\alpha_i\ln x_i+z_i$.

Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя в каждом из случаев.

50. Пусть предпочтения потребителей представляются квазилинейными сепарабельными функциями полезности. Тогда без потери общности можно считать, что в экономике два блага ($l+1=2$). Пусть $x_i(p)$ — спрос на первое благо i-го потребителя при ценах p, $D(p)=\sum x_i(p)$ — суммарный спрос потребителей на первое благо, и $p(x)=D^{-1}(x)$ — обратная функция спроса. Предположим, что функция $p(x)$ является непрерывной и убывающей при $x\geqslant 0$. Докажите, что если

$$v(x)=\int_0^x p(q)dq,$$

то $v(x)+z$ является функцией полезности репрезентативного потребителя.

51. В ситуации предыдущей задачи функция спроса на благо имеет вид

$$D(p)=\frac{1}{4p^2}.$$

Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

Налоги

52. Рассмотрите экономику обмена с двумя видами благ (x и y) и двумя потребителями (1 и 2), где каждый потребитель имеет функцию полезности $u_i=\ln(x_i)+\ln(y_i)$ и начальные запасы $\omega_i=(\omega_{ix}, \omega_{iy})$. Государство собирает адвалорный налог на продажу благ. Цель государства состоит в том, чтобы на собранные средства приобрести по рыночным ценам благо x в количестве x_0 и благо y в количестве y_0. Предполагаем, что с собственных закупок государство налог не взимает.

(A) Всегда ли государство может добиться своей цели?

(B) Может ли случиться так, что равновесие с налогами будет Парето-оптимальным (Парето-оптимальным с учетом того, что государство должно получить x_0 и y_0 благ x и y)?

53. Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями и двумя благами (A и B). Функции полезности потребителей: $u_1=2\ln a_1+b_1$ $u_2=\ln a_2+b_2$, где a_i — потребление блага A, а b_i — потребление блага B i-м потребителем. Начальные запасы благ: $\omega_1=(2;3)$, $\omega_2=(3;2)$. Вводится натуральный налог на потребление блага A, так что i-й потреби-

тель потребляет после уплаты налога $a_i(1-\tau_i)$ блага A, где τ_i — ставка налога. Соответственно. государство собирает в форме налога $a_1\tau_1+a_2\tau_2$ блага A.

(A) Найти равновесие, которое возникнет после введения налога (a_i, b_i и отношение цен p_A/p_B).

(B) Найти Парето-оптимум, учитывая, что заданное количество (a_0) блага A должно уйти государству. При каком распределении налога равновесие будет Парето-оптимальным?

54. Приведите пример оптимального равновесия с искажающими налогами на потребление. (Подсказка: рассмотрите потребителя с недифференцируемой функцией полезности).

55. Рассмотрите внутреннее равновесие с налогами на покупку благ в экономике обмена с трансфертами с двумя благами, m потребителями ($m>2$) и дифференцируемыми функциями полезности. Обе цены и все налоги положительны. Пусть в этом равновесии один из потребителей получает положительный трансферт, покупает первое благо и продает второе, а другой потребитель получает положительный трансферт, покупает второе благо и продает первое. Может ли в такой ситуации равновесие быть оптимальным по Парето? Объясните.

56. Рассмотрите внутреннее равновесие с налогами на покупку благ в экономике обмена с трансфертами с двумя благами, m потребителями ($m>2$) и дифференцируемыми функциями полезности. Обе цены и все налоги положительны. Пусть в этом равновесии один из потребителей получает положительный трансферт, покупает первое благо и продает второе, а другой потребитель получает отрицательный трансферт и продает оба блага. Может ли в такой ситуации равновесие быть оптимальным по Парето? Объясните.

57. Рассмотрите внутреннее равновесие с налогами на покупку благ в экономике обмена с трансфертами с двумя благами, m потребителями ($m>2$) и дифференцируемыми функциями полезности. Обе цены и все налоги положительны. Пусть в этом равновесии один из потребителей получает положительный трансферт и покупает оба блага, а другой потребитель получает отрицательный трансферт и продает оба блага. Может ли в такой ситуации равновесие быть оптимальным по Парето? Объясните.

58. Рассмотрите внутреннее равновесие с налогами на покупку благ в экономике обмена с трансфертами с двумя благами, m потребителями ($m>2$) и дифференцируемыми функциями полезности. Обе цены и все налоги положительны. Пусть в этом равновесии один из потребителей получает положительный трансферт и покупает оба блага, а другой потребитель получает отрицательный трансферт, продает первое благо и покупает второе. Может ли в такой ситуации равновесие быть оптимальным по Парето? Объясните.

59. В квазилинейной экономике есть 2 потребителя с функциями полезности

$$u_1=\sqrt{x_1}+z_1,\quad u_2=\sqrt{x_2}+z_2$$

и предприятие с функцией издержек $c(y)=2y$.

(A) Вводится адвалорный налог на потребление 1-го блага со ставкой τ. Найдите конкурентное равновесие в экономике (p,x_1,x_2,y) как функцию величины τ.

(B) Пользуясь результатами пункта (A), найдите чистые потери благосостояния от налога при ставке $\tau=1$, (т.е. 100%).

60. В экономике производится один предмет потребления, y, спрос на который образуется в результате максимизации следующей функции полезности репрезентативного потребителя: $u(y,x)=2\sqrt{y+1}+x$, где x — потребление свободного времени. Потребитель владеет единичным запасом времени, который он распределяет между рабочим временем L и свободным временем x. Рабочее время предлагается единственной фирме, которая производит y по технологии $y=\ln(2L)+3$. Вычислите чистые потери от введения 50%-го налога на продажу предмета потребления (продажная цена производителя равна половине цены, которую платит покупатель). Заработную плату примите за 1.

61. Рассмотрите модель оптимального налогообложения Рамсея в ситуации двух независимых рынков. На первом рынке спрос равен $D=10-p$, а предложение равно $S=1+p$. На втором рынке спрос равен $D=10-p/2$, а предложение равно $S=1+p/2$.

(A) Запишите условия первого порядка для оптимальных налогов (не исключая множитель Лагранжа)

(B) Во сколько раз отличается налог на одном рынке от налога на другом.

62. В ситуации частного конкурентного равновесия государству требуется собрать налоги общей величины R с n независимых рынков. Оно использует налог с единицы товара со ставкой t_i $(i=1,...,n)$. Функции спроса и предложения линейны: $S_i=a_i+b_i p$ и $D_i=c_i-d_i p$. Задача состоит в том, чтобы распределить налоги по рынкам так, чтобы общие потери благосостояния были минимальными.

Как ставка налога на данном рынке зависит от наклона кривых спроса и предложения? (Подсказка: не следует исключать из соответствующих условий первого порядка множитель Лагранжа).

63. Задача Рамсея выбора ставок налогов состоит в том, чтобы при сохранении величины налоговых сборов ...

а) минимизировать чистые потери,

б) минимизировать потери потребителя,

в) максимизировать объем продаж,

в) максимизировать прибыль.

Ее решение предписывает установить большие ставки налогов в тех отраслях (допишите) ... ...

64. Рассмотрите квазилинейную сепарабельную экономику. Пусть эластичность спроса в точке равновесия $|\varepsilon|=3$, предельные издержки у всех производителей постоянны и одинаковы и правительство устанавливает налог в размере \$6 с единицы товара. Если спрос — линейная функция, то насколько поднимется цена? А в случае спроса с постоянной эластичностью $|\varepsilon|=3$?

65. Рассмотрите квазилинейную сепарабельную экономику. Спрос имеет вид $D=8-p$, предложение имеет вид $S=3+p$. На этом рынке вводится налог на потребление в размере 50% цены. Найдите чистые потери благосостояния от введения налога.

66. Рассмотрите квазилинейную сепарабельную экономику. Спрос имеет вид $D=8-p$, предложение бесконечно эластично. На этом рынке вводится налог в размере 2 ед. на единицу товара. Найдите потери потребителей от введения налога, если до введения налога объем торговли на рынке был равен 4 ед.

67. Полезность потребителя зависит от потребления двух благ. Рассмотрим ситуацию обложения его налогами, в которой рыночные цены остаются неизменными. Пусть рыночные цены равны $p_1=2$, $p_2=1$. Потребитель облагается оптимальными налогами на потребление (на единицу товара), и известно, что ставка налога на первый товар равна $t_1=1$. Каким должен быть налог на второй товар?

68. Полезность потребителя зависит от потребления двух благ. Рассмотрим ситуацию обложения его налогами, в которой рыночные цены остаются неизменными. Потребитель облагается оптимальными налогами на потребление (на единицу товара), и известно, что ставки налога равны $t_1=1$ и $t_2=2$. Чему равно отношение рыночных цен p_1/p_2?

69. Полезность потребителя зависит от потребления двух благ. Рассмотрим ситуацию обложения его налогами, в которой рыночные цены остаются неизменными. Пусть рыночные цены равны $p_1=2$, $p_2=1$. Из-за введения оптимальных налогов на потребление (на единицу товара) потребление обоих благ упало в 2 раза. Какие налоги были установлены?

70. Полезность потребителя зависит от потребления двух благ. Рассмотрим ситуацию обложения его налогами, в которой рыночные цены остаются неизменными. Пусть рыночные цены равны $p_1=2$, $p_2=1$. Результат введения налогов на потребление (на единицу товара) оказался таким же, как если бы потребителя обложили подушным налогом размером T. Чему было равно отношение ставок налогов t_1/t_2?

Экстерналии

71. Прибыль птицефабрики (фирмы 1) находится в зависимости от того, насколько сильно два алюминиевых завода (фирмы 2 и 3) загрязняют атмосферу. Цена на кур равна 6, цена на алюминий равна 2. Функции издержек равны

$$c_1=2y_1^2+y_1(y_2+y_3),$$

$$c_i=0{,}5\,y_i^2,\ (i=2,3),$$

где y_1 — объем производства кур, y_2, y_3 — объем производства алюминия. Найдите (а) равновесные объемы производства, (б) Парето-оптимальные объемы производства (подразумевая, что фирмы могут делиться прибылью), (в) налоги/дотации Пигу, (г) равновесную цену экстерналии и объемы производства при торговле экстерналиями.

72. Фирма 1 — пивзавод — сбрасывает в реку отходы, что уменьшает доходы двух одинаковых рыболовецких предприятий (фирмы 2 и 3). Цена на пиво равна 12, цена на рыбу равна 8. Функции издержек равны

$$c_1=2y_1^2,$$

$$c_i=1{,}5\,y_i^2+2y_1y_i,\ (i=2,3),$$

где y_1 — выпуск пива, y_2, y_3 — улов рыбы. Найдите (а) равновесные объемы производства, (б) Парето-оптимальные объемы производства (подразумевая, что фирмы могут делиться прибылью), (в) налоги/дотации Пигу, (г) равновесную цену экстерналии и объемы производства при торговле экстерналиями.

73. В квазилинейной экономике с экстерналиями функции полезности двух потребителей имеют вид

$$u_1=2\sqrt{x_1}+z_1 \ \text{ и } \ u_2=2\sqrt{x_2}-x_1+z_2,$$

а функция издержек единственного предприятия имеет вид $c(y)=y$. Начальные запасы первого блага (блага x) равны нулю. Охарактеризуйте Парето-оптимальные состояния данной экономики. Найдите равновесие и налоги Пигу.

74. В квазилинейной экономике с экстерналиями функции полезности двух потребителей имеют вид

$$u_1=2\sqrt{x_1}+z_1 \ \text{ и } \ u_2=2\sqrt{x_2}+z_2,$$

а функция издержек единственного предприятия имеет вид

$$c(y,x_1,x_2)=y+2x_1+x_2.$$

Начальные запасы первого блага (блага x) равны нулю. Охарактеризуйте Парето-оптимальные состояния данной экономики. Найдите равновесие и налоги Пигу.

75. В квазилинейной экономике с экстерналиями функции полезности двух потребителей имеют вид

$$u_1=2\sqrt{x_1}-y+z_1 \text{ и } u_2=2\sqrt{x_2}+z_2,$$

а функция издержек единственного предприятия имеет вид $c(y)=2y$. Начальные запасы первого блага (блага x) равны нулю. Охарактеризуйте Парето-оптимальные состояния данной экономики. Найдите равновесие и налоги Пигу.

76. В экономике есть 2 потребителя с функциями полезности

$$u_1=-1/x_1+z_1-x_2,\ u_2=-1/x_2-2x_1+z_2$$

и предприятие с функцией издержек $c(y)=y$.

(A) Сформулировать условия Парето-оптимума.

(B) Будет ли в нерегулируемом равновесии избыточным или недостаточным потребление товара x (в смысле дифференциально-малого отклонения от равновесия)?

(C) Сформулировать задачи потребителей для налогов Пигу.

77. В экономике с двумя благами, предпочтения потребителей $i=1,\ldots,n$ заданы функциями полезности

$$u_i(x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i,y_i).$$

Имеется технология, по которой из единицы блага x можно произвести единицу блага y, и наоборот. Запишите

(1) дифференциальную характеристику Парето-оптимума,

(2) дифференциальную характеристику равновесия,

(3) соотношения для налогов Пигу.

(4) Предложите Парето-улучшение.

78. Экономика состоит из одного потребителя и одного предприятия. Технологическое множество задается условиями $y_x^2+2y_z\leqslant 0$ и $y_z\leqslant 0$. Функция полезности имеет вид $u=\ln x+z-y_x^2$, где y_x — объем экстерналий. Начальные запасы равны $(\omega_x,\omega_z)=(0;1000)$.

(1) Дайте определение общего равновесия применительно к данной модели. Найдите его. (Используйте нормировку $p_z=1$).

(2) Найдите Парето-оптимум. Будет ли равновесный объем производства y_x выше или ниже Парето-оптимального?

(3) Вычислите налоги Пигу.

79. Экономика состоит из трех человек, потребляющих два типа благ, x и z. Благо x — это уровень «ухоженности» приусадебного участка, а благо z — все остальные блага. Двое из потребителей соседи, так что красивый внешний вид участка одного соседа создает положительный внешний эффект для другого. Третий же человек живет вдалеке. Функции полезности имеют вид

$$u_1=\ln x_1+\ln x_2+z_1\ ,\ \ u_2=\ln x_1+\ln x_2+z_2\ ,$$

$$u_3=\ln x_3+z_3.$$

Каждый потребитель имеет запас по 5 единиц каждого из двух благ.

(а) Найдите вальрасовское равновесие в данной экономике.

(б) Найдите все Парето-эффективные распределения благ в этой экономике.

(в) Предложите налог (или субсидию) Пигу, корректирующий экстерналию. Точно опишите, как, кем и за что он (она) платится.

80. Две фирмы оказывают друг на друга внешние влияния. Цена на продукцию 1-й фирмы равна 13, цена на продукцию 2-й фирмы равна 11. Функции издержек равны соответственно

$$c_1=2y_1^2+4y_1y_2+y_2^2,$$

$$c_2=3/2\,y_2^2+2y_1y_2+3/2\,y_1^2,$$

где $y_j\geqslant 0$ — объемы выпуска. Найдите (а) равновесные объемы производства, (б) Парето-оптимальные объемы производства, (в) квоты, обеспечивающие Парето-оптимум, (г) налоги/дотации Пигу. Сравните прибыли в каждой из ситуаций.

81. Какие из понятий не имеют прямого отношения к теории экстерналий?

а) налоги Рамсея

б) налоги Кларка

в) налоги Пигу

г) теорема Коуза

82. При доказательстве неоптимальности нерегулируемого равновесия в экономике с экстерналиями условие внутренности равновесия используется для того, чтобы ...

83. («Садовод и пчеловод») Один из двух соседей — садовод — принимает ежегодно решение об объеме производства яблок (apples) $y_a\geqslant 0$, а второй — пчеловод — об объеме производства меда (honey) $y_h\geqslant 0$. Цены этих товаров экзогенны (т.е. ищем частное равновесие) и равны p_a, p_h соответственно. Издержки обоих зависят от действий соседа, т.е. они имеют вид $c_a(y_a,y_h)$, $c_h(y_a,y_h)$, причем функции дифференцируемы и известно, что $\partial c_a(y_a,y_h)/\partial y_h<0$ и $\partial c_h(y_a,y_h)/\partial y_a<0$, т.е. издержки сбора яблок

убывают в зависимости от количества пчел y_h, а издержки сбора меда убывают по переменной y_a. Цель обоих — максимизация своей прибыли

$$\pi_j = p_j(y_j - c_j(y_j, y_{-j}))\ (j = a, h).$$

Покажите, что внутреннее нерегулируемое равновесие здесь всегда не оптимально (где оптимум определяется по максимуму совокупной прибыли), причем объем производства обоих недостаточен (по крайней мере, локально). Постройте локальное Парето-улучшение.

84. («Курение») Из двух соседей по комнате первый — некурящий, второй — курильщик. Функции полезности имеют вид:

$$u_1 = \ln(x_1) - z^2,$$

$$u_2 = \ln(x_2) - 0.5z^2 + 10z.$$

Здесь x_i — количество денег на другие блага, z — количество выкуренных 2-м сигарет, ω_i — начальные запасы денег.

(1) Предположим, что сигареты «бесплатные», т.е. производятся из денег с нулевыми издержками. Найти равновесие. Построить Парето-улучшение из равновесия (в дифференциалах). Найти Парето-границу.

(2) Пусть теперь сигареты стоят p (т.е. производятся по технологии с постоянной отдачей от масштаба). Найти равновесие и Парето-границу в зависимости от p. При каких значениях p равновесие оптимально?

85. Два охотника охотятся в одном лесу. Количество дичи, добываемой i-м охотником (y_i) зависит от его усилий (x_i) и общего количества дичи в лесу (z) как $y_i = x_i z$. Последнее зависит от их усилий по следующему закону: $z = 6 - x_1 - x_2$. Охотники стремятся добыть как можно больше дичи. Сравните результаты некоординированного поведения и оптимум Парето.

86. Месторождение нефти расположено под участками, принадлежащими двум различным нефтяным компаниям. Объем добычи компании (y_i) зависит от интенсивности добычи, которую она выбирает (x_i), составляя $x_i/(1+x_1+x_2)$ долю от общих запасов нефти в месторождении (1000 баррелей). Рыночная цена нефти — 15 песо за баррель, издержки на добычу одного барреля равны $(3+x_i)$ песо. Каков будет результат «эгоистичной погони за прибылью»? Покажите, что месторождение будет эксплуатироваться слишком интенсивно.

87. («Теорема о плохом колхозе») Пусть доход y_Σ артели («колхоза») есть простая сумма результатов $y_i \geqslant 0$, создаваемых усилиями отдельных участников $i = 1, \ldots, n$. Доход распределяется поровну. Функция полезности $u_i(r_i, y_i)$ каждого участника возрастает по его доходу $r_i = y_\Sigma/n$, и убывает по его усилиям y_i. Показать, что если хотя бы один участник в равновесии Нэша осуществляет усилия ($\exists i$: $y_i > 0$), то оно не Парето-оптимально. Предложите Парето-улучшение.

88. [MWG] На ферме Джонса производится только мед. Существуют два способа производства меда: без пчел и с пчелами. По первому способу ведро искусственного меда (неотличимого от настоящего) производится из 1 галлона кленового сиропа с использованием единицы труда. То же самое количество меда можно произвести традиционным способом (с пчелами). Для этого потребуется k единиц труда и b пчел. В обоих случаях ферма Джонса приспособлена к производству не более чем H ведер меда.

На соседней ферме, принадлежащей Смиту, выращиваются яблоки. Если имеются пчелы, то требуется меньше труда, так как тогда опыление производится пчелами, а не работниками, при этом c пчел заменяют одного работника. Ферма Смита позволяет вырастить A бушелей яблок.

Предположим, что рыночная ставка заработной платы равна w, цена пчелы — p_b, а цена галлона кленового сиропа — p_m. Каждый фермер производит максимально возможное количество продукции, минимизируя издержки (предполагается, что рыночные цены таковы, что в оптимуме производство окупается). Является ли это состояние экономики эффективным? Как оно зависит от параметров k, b, c, w, p_b, p_m? Дайте интуитивное объяснение результата. Сколько Смит будет готов предложить Джонсу за то, чтобы он производил мед с помощью пчел? Была бы достигнута эффективность, если бы обе фермы принадлежали одному человеку? Какие налоги должно ввести правительство для достижения эффективности?

89. [MWG] Рассмотрим экстерналии, затрагивающие двух потребителей. Функции полезности потребителей имеют вид $u_i = v_i(h) + z_i$ ($i = 1, 2$), где h — уровень экстерналии, z_i — количество денег, расходуемое на другие блага. Функции $v_i(\cdot)$ дважды дифференцируемы, причем $v_i''(\cdot) < 0$ ($i = 1, 2$), $v_1'(\cdot) > 0$, $v_2'(\cdot) < 0$. Первый потребитель обладает неограниченным правом производить экстерналии.

(1) Охарактеризуйте результат свободного действия рынка. Покажите, что он будет неоптимальным.

(2) Каким должен быть оптимальный налог Пигу на 1-го потребителя?

(3) Допустим, 2-й потребитель может ослабить влияние экстерналий, затратив некоторые усилия e. При этом его функция полезности имеет вид $u_2 = v_2(h, e) + m_2$, и $\partial^2 v_2/\partial h \partial e > 0$ (чем больше уровень усилий, тем меньше предельная «вредность» экстерналий). Нужно ли облагать налогами или субсидировать усилия, чтобы достичь оптимального равновесия?

90. [MWG] Производитель имеет дифференцируемую строго выпуклую функцию издержек $c(y, h)$, где y — объем выпуска (p — рыночная цена выпускаемого блага), h — уровень (отрицательных) экстерналий. Экстерналии влияют на потребителя, чья функция полезности имеет вид $u = v(h) + z$, где z — количество денег, расходуемое на другие блага.

(1) Найдите условия первого порядка для задачи фирмы.

(2) Найдите условия первого порядка Парето-оптимума.

(3) Покажите, что налог на экстерналии может привести к оптимальности, а налог на производство в общем случае — нет.

(4) При какой форме функции издержек налог на производство все же приводит к оптимальности?

91. [MWG] Группа состоит из m студентов. Каждый i-й студент учится по h_i часов в неделю. Эти усилия уменьшают его уровень полезности на величину $h_i^2/2$. В то же время это дает студенту добавку к стипендии, так что его полезность увеличивается на величину $\phi(h_i/\bar{h})$, где $\bar{h}$ — среднее количество часов, которое посвящают учебе студенты данной группы, а $\phi(\cdot)$ — дифференцируемая строго возрастающая вогнутая функция. Найдите характеристику внутреннего равновесия (по Нэшу). Сравните с оптимальным по Парето исходом. Дайте интерпретацию.

92. Каждый год n рыбаков ловят в озере рыбу. Ситуация начинается в году $t=1$ и продолжается бесконечно. Количество рыбы на начало t-го года составляет y_t. За год i-й рыбак вылавливает $x_{it}/(\sum_i x_{it}+1)$ долю от общего количества рыбы y_t, где x_{it} — его издержки на лов рыбы в году t. Цена на рыбу постоянна и равна p. Каждый рыбак максимизирует дисконтированную прибыль

$$\pi_i = \sum_{t=1}^{\infty} \pi_{it}\delta^{t-1} \ (0<\delta<1).$$

В начале года количество рыбы в два раза больше оставшегося к концу предыдущего года.

(1) Пусть каждый рыбак выбирает постоянную стратегию $x_i=x_{it}$. Покажите, что вылов рыбы будет больше оптимального.

(2) Как зависит выбор x_i и динамика рыбных запасов от цены на рыбу и дисконтирующего множителя δ?

(3) Предположим, что рыбаки остаются на озере только по одному году, и каждый год приезжают новые n рыбаков. Как это повлияет на ситуацию?

93. Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями. Потребитель X имеет функцию полезности

$$u_x = x_1 x_2 + 2z - z^2.$$

Потребитель Y имеет функцию полезности

$$u_y = y_1 y_2 - z^2.$$

Здесь x_k, y_k — объемы потребления двух обычных благ, z — уровень (отрицательного) внешнего влияния X на Y (X имеет право выбирать его произвольно). Потребитель X владеет единицей первого блага, а потребитель Y — единицей второго блага. Потребители рассматривают пропорции обмена как данные (условия совершенной конкуренции).

(1) Найти равновесие. Будет ли возникшее равновесие оптимальным?

(2) Желая изменить z, потребитель Y предлагает потребителю X t единиц второго блага в обмен на то, что тот установит z на уровне z^*. Потребитель X может либо согласиться на эту сделку, либо отказаться. На этом торг между ними заканчивается.

Торговля на обоих рынках происходит одновременно, т.е. сделка на рынке экстерналий изменяет начальные запасы благ и влияет на равновесную цену p. Учтите, что при этом оба потребителя считают, что не могут повлиять на цену p!

Найти равновесие. Будет ли возникшее равновесие оптимальным?

(3)* Решите ту же задачу в случае, когда $u_x = x_1 x_2 + 2\theta z - z^2$, где случайная величина θ принимает значения 0 и 1 с равной вероятностью, и значение θ известно только потребителю X.

94. [Laffont] Рассмотрим квазилинейную экономику с двумя благами, m потребителями и одним производителем, с функцией издержек $c(y)=y^2$. Производитель оказывает отрицательное внешнее влияние на потребителей:

$$u_i = \ln x_i + z_i - 0{,}5 \ln y.$$

Каждый потребитель располагает начальным запасом в виде четырех единиц квазилинейного блага. Предполагается, что каждый потребитель пренебрегает своим влиянием (через предъявляемый им спрос) на величину производства и, тем самым, на свою полезность.

(1) Найдите конкурентное равновесие и вычислите величину благосостояния.

(2) Охарактеризуйте Парето-оптимальные состояния этой экономики. Покажите, что равновесие не может принадлежать границе Парето. Вычислите чистые потери благосостояния в равновесии.

(3) Найдите налоги Пигу и соответствующее равновесие (предполагается, что налоги распределяются между потребителями с помощью фиксированных трансфертов). Объясните, почему того же результата можно добиться, облагая потребление. Какая при этом должна быть ставка налога?

(4) Покажите, что «национализация» производства, при которой предприятию разрешено выбирать только планы производства, дающие нулевую прибыль, еще менее предпочтительна, чем свободное функционирование рынка. Объясните, почему.

(5) Пусть в ситуации предыдущего пункта потребление x_i облагается налогом. Определите оптимальный уровень ставки налога (максимизирующий благосостояние). Почему данное состояние будет Парето-оптимальным? Объясните, почему налоговые сборы здесь будут больше, чем от оптимальных налогов в конкурентном равновесии.

(6) Предположим, что национализированное предприятие устанавливает цену по правилу

$$(\text{цена}) = (\text{предельные издержки}) \cdot (1+\mu),$$

Как ведет себя благосостояние в зависимости от маржи μ? Может ли при таком ценообразовании достигаться оптимум?

95. Пусть в экономике обмена есть два потребителя и два блага. Функция полезности второго потребителя зависит от уровня собственного потребления, а также от уровня полезности первого потребителя. Найдите и сопоставьте дифференциальные характеристики внутреннего равновесия и внутреннего Парето-оптимума.

96. Рассмотрим квазилинейную экономику с двумя благами и однородными экстерналиями. Первое благо производится из второго по технологиям, описываемым функциями издержек вида

$$c_j(y_j, a_j) = y_j^2 + \left(a_j - \frac{j+n}{2n} \right)^2 (j = 1, \ldots, n),$$

где y_j — объем производства первого блага, a_j — объем производства экстерналий. Функция полезности репрезентативного потребителя имеет вид

$$u(x, \sum_{j=1}^{n} a_j) = \ln(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j + z,$$

где x — объем потребления первого блага, z — объем потребления второго блага.

(1) Найдите равновесие без регулирования.

(2) Найдите Парето-оптимум.

(3) Пусть на объемы производства экстерналий установлены одинаковые квоты $\tilde{a}$. При каких квотах благосостояние будет максимальным?

(4) Найдите равновесие с торговлей квотами в зависимости от квот $\tilde{a}$. При каких квотах будет достигаться Парето-оптимум?

Общественные блага

97. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида:

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2 \ (a, b > 0).$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 2y$.

При $a = a'$, $b = b'$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен x'. При $a = ka'$, $b = kb'$ $(k > 0)$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен x'', где $x'' > x'$. Предполагаем, что обе рассматриваемые Парето-оптимальные точки внутренние.

Можно ли утверждать, что $k > 1$ или $k < 1$? Обоснуйте свое утверждение.

98. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида $u_j = v_j(x) + z_j$. Производные $v_j'(x)$ положительны и убывают. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = \alpha y$.

При $\alpha = \alpha'$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен x'. При $\alpha = \alpha''$ $(\alpha'' > \alpha')$ в Парето-оптимальном состоянии уровень общественного блага равен x''. Предполагаем, что обе рассматриваемые Парето-оптимальные точки внутренние.

Можно ли утверждать, что $x'' > x'$ или $x'' < x'$? Обоснуйте свое утверждение.

99. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида:

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2 \ (a, b \geqslant 0).$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 2y$.

При каких a и b (внутреннее) равновесие с добровольным финансированием будет Парето-оптимальным? Обоснуйте свое утверждение.

100. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида:

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2 \ (a, b > 0).$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 2y$.

(1) Какие условия на a и b гарантируют, что во (внутреннем) равновесии с добровольным финансированием только у первого потребителя взнос будет положительным? Обоснуйте свое утверждение.

(2) Какие условия на функцию $v(x)$ гарантируют, что в равновесии с добровольным финансированием общественное благо будет производиться?

101. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида:

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2 \ (a, b > 0).$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 4y$.

Финансирование общественного блага осуществляется на долевой основе с долями δ_1 и δ_2. Известно, что был достигнут консенсус. Что можно сказать об отношении долей $\delta 1/\delta_2$? Обоснуйте свое утверждение.

102. В квазилинейной экономике с общественным благом имеются два потребителя с функциями полезности вида:

$$u_1 = av(x) + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = bv(x) + z_2 \ (a, b > 0).$$

Производная $v'(x)$ положительна и убывает. Единственный производитель имеет функцию издержек вида $c(y) = 5y$.

Финансирование общественного блага осуществляется на долевой основе с долями $2/3$ и $2/3$. При каких условиях на a и b в этой экономике не может быть достигнут консенсус. Обоснуйте свое утверждение.

103. Экономика состоит из трех соседей, потребляющих коллективное благо y — внешний вид их общего двора. Каждый может затрачивать труд h_i по уходу за двором, причем $y = h_1 + h_2 + h_3$. Каждый имеет неограниченный запас труда. Функции полезности имеют следующий вид:

$$u_i = -h_i^2 + iy.$$

(а) Найдите нерегулируемое равновесие в данной экономике.

(б) Найдите равновесие с равно-долевым финансированием и голосованием по правилу простого большинства.

(в) Найдите равновесие Линдаля.

104. В квазилинейной экономике с общественным благом (x) функции полезности трех потребителей имеют вид $u_i = -(i + 1 - x)^2 + z_i$, а функция издержек имеет вид $c(y) = 12y$.

1) Найдите Парето-границу.

2) Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага.

3) Найдите равновесие при финансировании равными долями и голосовании простым большинством.

4) Найдите доли финансирования, при которых налоги Кларка в процедуре Гровса-Кларка равны нулю.

105. В квазилинейной экономике с общественным благом (x) функции полезности трех потребителей имеют вид $u_i = -(i + 4 - x)^2 + z_i$, а функция издержек имеет вид $c(y) = 12y$.

1) Найдите Парето-границу.

2) Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага.

3) Найдите условия на доли финансирования, которые гарантируют Парето-оптимальный исход голосования простым большинством.

106. В экономике с общественным благом $(s > 0)$ и частным благом $(z_i \geqslant 0)$ один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \ln s + z_1$, а другой — $u_2 = 2/3 \ln s + z_2$. Начальные запасы равны $\omega_1 = (0; 0{,}5)$ и $\omega_2 = (0; 0{,}5)$. Технология позволяет из единицы

частного блага производить β единиц общественного $(\beta > 0{,}5)$. При каких значениях параметра β равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

107. В экономике с общественным благом $(G \geqslant 0)$ и частным благом $(z_i \geqslant 0)$ один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = 0{,}5\,G + z_1$, а другой — $u_2 = \gamma G + z_2$ $(\gamma > 0)$. Начальные запасы равны $\omega_1 = (0; 40)$ и $\omega_2 = (0; 20)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра γ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

108. В экономике с общественным благом $(Q > 0)$ и частным благом $(z_i \geqslant 0)$ один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \ln Q + z_1$, а другой — $u_2 = \delta \ln Q + z_2$. $(\delta > 0)$. Начальные запасы равны $\omega_1 = (0; 0{,}5)$ и $\omega_2 = (0; 0{,}5)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра δ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

109. В экономике с общественным благом $(x \geqslant 0)$ и частным благом $(z_i \geqslant 0)$ один потребитель имеет функцию полезности $u_1 = 2x + z_1$, а второй — $u_2 = \alpha x + z_2$ $(\alpha > 0)$. Начальные запасы равны $\omega_1 = (0; 10)$ и $\omega_2 = (0; 10)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра α равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

110. В экономике с общественным благом $(x > 0)$ и частным благом первый потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \ln(2 + x) + z_1$, а второй — $u_2 = \delta \ln(2 + x) + z_2$ $(\delta > 0)$. Технология позволяет из единицы частного блага производить единицу общественного. При каких значениях параметра δ равновесие с добровольным финансированием окажется Парето-оптимальным? Объясните.

111. Пусть три соседа по даче хотели ли бы подвести к имеющейся общей емкости водопровод с мощностью подачи X тонн/сутки, стоимостью 4 рубля за тонну/сутки, выбирая размер мощности. Функции полезности имеют вид

$$u_i(X, z_i) = (i + 2) \ln X + z_i.$$

(1) Охарактеризуйте Парето-оптимум.

(2) Для каждого соседа определите, какую из трех возможных процедур общественного выбора он бы предпочел:

- равновесие с добровольным финансированием;

- равновесие Линдаля;

- долевое финансирование с равными долями и голосованием простым большинством;

- механизм Гровса-Кларка с долями $1/4$, $2/3$, $5/12$.

Аргументируйте ответ.

112. В экономике двух потребителей с двумя благами — общественным и частным — функции полезности имеют вид

$$u_1 = \ln G + 4\ln x_1 \quad \text{и} \quad u_2 = \ln G + 3\ln x_2.$$

Оба потребителя имеют начальные запасы только частного блага — 5 и 8 соответственно. Технология единственного предприятия позволяет из единицы частного блага произвести единицу общественного блага.

(A) Запишите систему уравнений, задающую границу Парето.

(B) Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага.

113. В экономике двух потребителей с двумя благами — общественным и частным — функции полезности имеют вид

$$u_1 = \ln G + 2\ln x_1 \quad \text{и} \quad u_2 = \ln G + 3\ln x_2.$$

Оба потребителя имеют начальные запасы только частного блага — 6 и 4 соответственно. Технология единственного предприятия позволяет из 2 единиц частного блага произвести единицу общественного блага.

(A) Запишите систему уравнений, задающую границу Парето.

(B) Найдите равновесие Линдаля.

114. Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = Gx_1$ и $u_2 = G^2x_2$, где G и x_i — потребление общественного и частного блага соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $G^3 = r$, где r — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 0{,}5$, $\omega_2 = 2{,}5$. Прибыль предприятия целиком идет второму потребителю.

(A) Проверьте, что $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}5$, $G = 1$, $r = 1$, $p_G = 3$, $p_x = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 3$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(B) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

115. Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = \sqrt{z} + \sqrt{x_1}$ и $u_1 = 2\sqrt{z} + \sqrt{x_2}$, где z и x_i — потребление общественного и частного блага соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $9z = a$, где a — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 117$. Прибыль предприятия целиком идет первому потребителю.

(A) Проверьте, что $x_1 = 4$, $x_2 = 81$, $z = 4$, $a = 36$, $p_z = 9$, $p_x = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 36$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(B) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = -3/a - 1/x_1$ и $u_2 = -1/a - 1/x_2$, где a и x_i — потребление общественного и частного блага соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $a = 3h$, где h — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 2/3$, $\omega_2 = 2/3$. Прибыль предприятия делится пополам между потребителями.

(A) Проверьте, что $x_1 = 2/3$, $x_2 = 2/3$, $a = 2$, $h = 2/3$, $p_a = 1$, $p_x = 3$, $t_1 = 2$, $t_2 = 0$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(B) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

116. Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = xz_1^4$ и $u_2 = xz_2$, где x и z_i — потребление общественного и частного блага соответственно. Общественное благо производится единственным предприятием по технологии $x^2 = z_0$, где z_0 — производственные затраты частного блага. Начальные запасы потребителей состоят только из частного блага и равны $\omega_1 = 9/4$, $\omega_2 = 3/4$. Прибыль предприятия целиком идет первому потребителю.

(A) Проверьте, что $z_1 = 2$, $z_2 = 3/4$, $x = 1/2$, $z_0 = 1/4$, $p_x = 1$, $p_z = 1$, $t_1 = 1/2$, $t_2 = 0$ — равновесие с добровольным финансированием общественного блага. Ответ должен быть полным.

(B) Продемонстрируйте, что это состояние не оптимально по Парето.

117. Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = \sqrt{G} + x_1$ и $u_2 = 2\sqrt{G} + x_2$, где G и x_i — потребление общественного и частного блага соответственно. Имеющаяся технология позволяет производить единицу общественного блага из 2 единиц частного. Первый потребитель несет долю δ расходов на общественное благо, а второй — $1-\delta$.

(A) Вычислите долю δ, при которой достигается консенсус (по возможности, проиллюстрируйте на графике). Найдите соответствующее равновесие.

(B) Предположим, что количество общественного блага выбирается по правилу $G = \min(g_1, g_2)$, где $g_i \geqslant 0$ — заявка i-го потребителя. Найдите соответствующее равновесие в зависимости от параметра δ.

(C) Будут ли указанные равновесия Парето-оптимальными? Поясните.

118. Функции полезности двух потребителей равны $u_1 = \ln G + x_1$ и $u_2 = 2\ln G + x_2$, где G и x_i — потребление общественного и частного блага соответственно. Имеющаяся технология позволяет производить единицу общественного блага из единицы част-

ного. Первый потребитель несет долю δ расходов на общественное благо, а второй — $1-\delta$.

(A) Вычислите долю δ, при которой достигается консенсус (по возможности, проиллюстрируйте на графике). Найдите соответствующее равновесие.

(B) Предположим, что количество общественного блага выбирается по правилу $M=\max(g_1, g_2)$, где $g_i \geqslant 0$ — заявка i-го потребителя. Найдите соответствующее равновесие в зависимости от параметра δ.

(C) Будут ли указанные равновесия Парето-оптимальными? Поясните.

119. В квазилинейной экономике с двумя благами, одно из которых — общественное, предпочтения потребителей $i=1, \ldots, m$ и заданы функциями полезности

$$u_i(G, z_i)=\alpha_i f(G)+z_i,$$

где G — общественное благо, z_i — оставшиеся деньги, $f(\cdot)$ — функция с убывающей производной. При этом выполняются неравенства $\alpha_i<\alpha_j$ при $i<j$. Технология задана функцией издержек единственного предприятия, $c(G)$. Охарактеризуйте равновесие с добровольным финансированием. Будут ли в этой ситуации безбилетники, и если будут, то кто? Обоснуйте. Сравните с Парето-оптимумом.

120. Пусть в квазилинейной экономике предпочтения потребителей описываются функцией полезности вида

$$u_i(x, z_i)= \alpha_i \ln x+z_i,$$

а функция издержек имеет вид

$$c(y)=y^2/2.$$

Начальные запасы частного блага у потребителей достаточно велики. Найдите равновесие с добровольным финансированием общественного блага. При каких условиях в этой экономике будет по крайней мере один «безбилетник»? Какие потребители окажутся «безбилетниками»?

121. Предположим, что в экономике с тремя потребителями производство общественного блага финансируется с помощью добровольных взносов частного блага $t_i \geqslant 0$, причем единица общественного блага производится из единицы частного. Функции полезности равны $u_i=Gx_i$. Найдите равновесие и Парето-оптимум, если начальные запасы частного блага равны а) $\boldsymbol{\omega}=(2; 3; 7)$, б) $\boldsymbol{\omega}=(2; 4; 6)$.

122. Отметьте верные из нижеприведенных утверждений, и заполните пробел. Если предпочтения потребителей ………………………, тогда механизм Гровса—Кларка приводит

1) к Парето-оптимальному состоянию экономики;

2) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если начальные запасы всех потребителями строго положительны;

3) к Парето-оптимальному состоянию экономики при отсутствии ключевых участников;

4) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если налоги Кларка ненулевые;

5) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если налоги Кларка ненулевые;

6) к тому, что участники объявляют истинные предпочтения.

7) Все вышеприведенные утверждения неверны.

123. Рассмотрим долевое финансирование с голосованием по правилу простого большинства (при стандартных гипотезах) в экономике с квазилинейными функциями полезности с одним общественным и одним частным благом. Отметьте верные из нижеприведенных утверждений. Этот механизм обязательно приводит

1) к Парето-оптимальному состоянию экономики;

2) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если начальные запасы всех участников строго положительны;

3) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если предпочитаемый медианным потребителем уровень общественного блага совпал с Парето-оптимальным;

4) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если все участники удовлетворены выбранным уровнем общественного блага (не желают его изменения при данных ценах и долях);

5) к такому же состоянию равновесия, как и механизм добровольного финансирования.

6) Все вышеприведенные утверждения, вообще говоря, неверны.

124. Рассмотрим долевое финансирование с голосованием по правилу усреднения заявок (при стандартных гипотезах). Отметьте верные из нижеприведенных утверждений. Этот механизм обязательно приводит

1) к Парето-оптимальному состоянию экономики;

2) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если все участники проголосовали за одинаковый положительный уровень общественного блага;

3) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если доли финансирования пропорциональны предельным нормам замещения общественного блага на частное;

4) к Парето-оптимальному состоянию экономики, если участники предложили уровни общественного блага, пропорциональные предельным нормам замещения общественного блага на частное;

5) к такому же состоянию равновесия, как и механизм Линдаля.

6) Все вышеприведенные утверждения, вообще говоря, неверны.

125. В процедуре Гровса-Кларка налоги Кларка...

а) идут на финансирование общественного блага;

б) распределяются пропорционально между участниками;

в) передаются участникам, пострадавшим от выбора того, с кого взят налог;

г) не передаются ни кому из участников.

126. Уравнение Самуэльсона связывает...

а) сумму норм замены общественного блага на частное в потреблении с нормой их замены в производстве;

б) норму замены общественного блага на частное в потреблении с суммой норм их замены в производстве;

в) норму замены общественного блага на частное в потреблении с нормой их замены в производстве;

г) сумму норм замены общественного блага на частное в потреблении с суммой норм их замены в производстве.

127. Укажите, какие из свойств функций полезности (вогнутость, квазилинейность, непрерывность, дифференцируемость, локальная ненасыщаемость) и другие дополнительные характеристики механизма Гровса—Кларка являются достаточными и/или необходимыми для того, чтобы этот механизм

1) был применим: …

2) корректно выявлял предпочтения: …

3) обеспечивал эффективный уровень общественного блага: …

4) обеспечивал Парето-эффективное для голосующих состояние: …

128. Какие условия являются достаточными и/или необходимыми для того, чтобы равновесие Линдаля:

1) существовало …

2) было Парето-эффективным …

129. Три соседа по дому решают, приобрести ли в складчину спутниковую антенну. В продаже имеются антенны двух типов — дорогие (ценой 3000 руб.) и дешевые (ценой 1200 руб.). Каждый из соседей определил лично для себя ценность антенны. Денежные выражения этих ценностей помещены в таблице:

Имя	Полезность дорогой антенны, руб.	Полезность дешевой антенны, руб.
A	500	150
B	900	450
C	2000	550

Чтобы каждый из соседей правдиво сообщил свою оценку, используется механизм Гровса—Кларка, с равными долями финансирования. Какой из вариантов будет выбран: не покупать антенну, купить дешевую, купить дорогую? Укажите численные значения результирующих налогов Кларка. Какой вариант будет выбран при голосовании по правилу простого большинства? Какой выбор является Парето-оптимальным?

130. [Bergstrom] В местечке Брасс Манки провинции Онтарио имеется 1000 жителей, у каждого из которых функция полезности имеет вид $u_i(x_i, y) = y^{\alpha}(x_i + k_i)$, где $y \geqslant 0$ — размер общественного катка, а $x_i \geqslant 0$ — годовое потребление пончиков. Стоимость строительства и содержания одного квадратного дюйма катка равна 1 пончику (пончики являются естественной денежной единицей в Брасс Манки). У каждого жителя есть некоторый запас пончиков ω_i.

Найдите равновесие Линдаля. Каким будет количество общественного блага? Сколько заплатит за общественное благо i-й житель?

131. [Bergstrom] (Субсидирование добродетели)

Благосостояние Аристотеля и Платона зависит от двух благ — одного частного и одного общественного. Их предпочтения совпадают и задаются вогнутой дважды дифференцируемой функцией полезности $u_i = u(x_1, x_{i2})$. Аристотель и Платон располагают одинаковыми запасами частного блага. Единицу общественного блага можно произвести из единицы частного. Его производство финансируется за счет добровольных взносов, и каждый из философов рассматривает взнос другого как данный. Добровольные взносы Аристотеля субсидируются из расчета σ руб. субсидии за 1 руб. взносов (другими словами, Аристотель фактически выплачивает $(1-\sigma)$ руб. на 1 руб. взносов). Субсидии финансируются за счет аккордных налогов, бремя которых делится поровну между философами. Известно, что в равновесии производство общественного блага положительно.

(1) Кто из философов может делать в равновесии положительные взносы?

(2) Выиграет ли Платон, если субсидию будут выплачивать ему, а не Аристотелю? Как можно объяснить полученный результат?

(3) Предположим, что благовоспитанные философы получают моральное удовлетворение от того, что часть общественного блага куплена за их средства, другими словами, функция полезности зависит дополнительно от количества общественного блага, купленного за счет *чистого* взноса данного философа (т.е. без учета субсидий). Поменяется ли от этого ответ на предыдущий вопрос?

132. [Laffont] Рассмотрим квазилинейную экономику с m потребителями и тремя благами: два частных и одно общественное (благо 1). Потребитель i описывается функцией полезности $u_i = \ln x_1 + 2\ln x_{i2} + z_i$, где x_{i2} — его потребление 2-го (частного) блага, а x_1 — потребление общественного блага. У потребителей имеются только запасы квазилинейного блага. Благо 2 производится из квазилинейного блага в соот-

ветствии с функцией издержек $c_2(y_2)=y_2^2$. Благо 1 (общественное) производится в соответствии с функцией издержек $c_1(y_1)=y_1$ ($y_1 \geqslant 0$).

(1) Найдите границу Парето. Вычислите соответствующий уровень благосостояния.

(2) Покажите, что государство может добиться Парето-оптимальности равновесия, зафиксировав уровень производства общественного блага.

(3) Для финансирования общественного благо решено облагать налогом t потребление блага 2. Вычислите величину налога, которая позволит профинансировать объем общественного блага, найденный в пункте 1.

(4) Объясните, почему этот налог приводит к неоптимальному по Парето состоянию. Вычислите чистые потери благосостояния.

Получите тот же результат, используя концепцию излишка. Дайте графическое представление чистых потерь на графике спроса и предложения на рынке блага 2.

(5) Пусть мы находимся в ситуации финансирования общественного блага через налогообложение потребления 2-го блага. Найдите оптимальный налог и оптимальное производство общественного блага (оптимум второго ранга). Объясните, почему в оптимуме второго ранга производство общественного блага отличается от полученного в первом пункте. Вычислите потери благосостояния для этого случая. Найдите выигрыш благосостояния, полученный благодаря оптимизации второго ранга (по сравнению с уровнем пункта 4).

133. [Laffont] (Выявление предпочтений в отношении общественных благ)

Рассмотрим квазилинейную экономику с m потребителями, двумя частными благами и одним общественным благом. Функция полезности i-го потребителя имеет вид $u_i=\theta_i(x_1+\sqrt{x_{i2}})+z$, где x_1 — потребление 1-го (общественного) блага, x_{i2} — потребление i-м потребителем 2-го (частного) блага, θ_i — параметр вкуса, известный только потребителю i. У потребителей имеются только начальные запасы квазилинейного блага. Блага 1 и 2 производятся в соответствии с функциями издержек $c_1(y_1)=m\,z^2/2$ и $c_2(y_2)=y_2$ ($y_2 \geqslant 0$). Бремя финансирования общественного блага делится поровну на всех потребителей, а благо 2 производится конкурентно. При решении задачи абстрагируйтесь от проблемы банкротства.

(1) Определите оптимальный по Парето уровень потребления общественного блага.

(2) Предположим, что каждый участник заявляет свой параметр вкуса $\tilde{\theta}_i$ (некоторое действительное число, возможно не совпадающее с θ_i), зная, что уровень производства общественного блага будет выбран в соответствии с правилом

$$y_1=\frac{1}{m}\sum\tilde{\theta}_i.$$

Рассмотрите этот механизм как игру, вычислив для этого непрямые функции полезности потребителей $V_i(\theta_i,y_1)$. Покажите, что эта игра в общем случае не будет иметь равновесия по Нэшу.

(3) Предложите механизм со стимулирующими платежами, аналогичный механизму Гровса—Кларка, который позволил бы планирующему органу получить истинные оценки $\tilde{\theta}_i=\theta_i$ как доминирующие стратегии участников.

(4) Предположим, что планирующий орган получает оценки θ_i из наблюдений за потреблением блага 2 и выбирает потребление общественного блага по приведенной выше формуле. Зная механизм принятия решений планирующим органом, участники приспосабливают к нему свое поведение и изменяют потребление блага 2. Вычислите потери благосостояния, возникающие как следствие такого стратегического поведения, и покажите, что они стремятся к нулю при неограниченном росте m.

(5) Вычислите налог на потребление блага 2, который нейтрализует поведение потребителей на рынке блага 2, возникающее в предположениях предыдущего пункта. Сравните с результатом пункта 3.

(6) В рамках предположений пунктов 3 и 4 найдите равновесие, в котором доли финансирования общественного блага зависят от предпочтений потребителей по следующему правилу:

$$\delta_i=\tilde{\theta}_i/\sum\tilde{\theta}_j.$$

Покажите, что асимптотические результаты (при m стремящемся к бесконечности) изменятся.

Риск и неопределенность

134. Потребитель имеет элементарную функцию полезности $u(x)=\sqrt{x}$. Он получает доход 9 с вероятностью $2/3$ и доход 25 с вероятностью $2/3$. Найти плату за риск.

135. Индивидуум имеет функцию полезности типа Неймана—Моргенштерна. Элементарная функция полезности строго возрастает и зависит только от одного аргумента (денег). Лотерея \$3 и \$5 с вероятностями $1/2$ и $1/2$ и лотерея \$3 и \$9 с вероятностями $2/3$ и $1/3$ для него эквивалентны. Может ли быть верным, что этот индивидуум

(а) рискофоб;

(б) нейтрален к риску;

(в) рискофоб?

136. Пусть есть одно благо (деньги), элементарная функция полезности потребителя имеет вид $u(x)=\sqrt{x}$, а начальный запас (гарантированная сумма) денег равен \$9. Существует лотерейный билет, который может выиграть \$0 с вероятностью 0,5 (если выпадет «орел») и \$7 с вероятностью 0,5 («решка»). Рассмотрите три альтернативные ситуации:

(1) За какую сумму x потребитель купил бы такой билет?

(2) За какую сумму y потребитель согласился бы сам эмитировать (продать) такой лотерейный билет (можно считать, что его гарантированный запас состоит из 9-ти билетов по \$1 выигрывающих в состоянии мира «орел» и 9-ти по \$1 на «решку»)?

(3) Если потребителю подарят такой билет, за какую сумму z он бы его продал?

137. Рискофоб с элементарной функцией полезности (функцией Бернулли) вида $u(x) = -1/x$ имеет \$900 и лотерейный билет, который дает \$900 с вероятностью $1/2$ и \$0 с вероятностью $1/2$. За сколько он продал бы этот билет?

138. Богатство потребителя равно 100 д.е. Элементарная функция полезности равна квадратному корню из дохода. Лотерейный билет дает выигрыш 0 д.е. с вероятностью π и 20 д.е. с вероятностью $(1-\pi)$. Цена билета равна 5 д.е. При каких вероятностях потребитель

(1) купит билет?

(2) продаст билет (сам его эмитирует)?

(3) продаст билет, если ему его подарят?

(Решать не обязательно, достаточно составить неравенство)

139. Рассмотрим следующую игру: если игрок называет число a, то получает дополнительно к имеющейся у него сумме ω сумму a с вероятностью $1/3$ и $(-a)$ с вероятностью $2/3$. Какое число назовет игрок, предпочтения которого описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$?

(a) $u(x) = \sqrt{x}$; (b) $u(x) = -e^{-ax}$; (c) $u(x) = -\dfrac{1}{x}$;

(d) $u(x) = \ln x$; (e) $u(x) = ax - bx^2$; (f) $u(x) = a\sqrt{x} + bx$.

140. Пусть рискофоб, предпочтения которого описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$, владеет суммой денег ω рублей и лотерейным билетом, выигрывающим a рублей с вероятностью $1/2$. Покажите, что при уменьшении a до нуля цена, за которую он готов продать этот лотерейный билет, стремиться к величине ожидаемого (для данного рискофоба) выигрыша по этому билету.

141. Индивидуум, чьи предпочтения на лотереях описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$, располагает суммой денег ω рублей. Ему предлагают приобрести лотерейный билет, выигрывающий a рублей с вероятностью $1/2$. Пусть p — максимальная цена, которую он готов уплатить за лотерейный билет.

(1) Чему равна p при $\omega = 9$ и $a = 16$?

(2) Покажите, что p ...

- растет при увеличении величины выигрыша a.

- растет при увеличении суммы денег ω.

- не может превышать величину $a/4$ рублей.

142. Предпочтения судовладельца описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности от богатства x вида $u(x)$, причем $u(\cdot)$ имеет положительную убывающую производную. Он владеет богатством \$40 000 и может потерять в случае аварии судна \$10 000.

(A) Пусть вероятность аварии равна 0,02 и известно, что он застраховался на сумму \$9 000. Возможно ли, что цена страхования на \$1 равна \$0,02? Если нет, то больше или меньше, чем \$0,02? Объясните.

(B) Пусть цена страхования на \$1 равна \$0,02 и известно, что он застраховался на сумму \$11 000. Возможно ли, что вероятность аварии равна 0,02? Если нет, то больше или меньше, чем 0,02? Объясните.

(C) Пусть вероятность аварии равна 0,01 и известно, что цена страхования на \$1 равна \$0,02. Возможно ли, что он застраховался на сумму \$10 000? Если нет, то больше или меньше, чем \$10 000? Объясните.

143. Нейтральный к риску фермер может посеять капусту на берегу реки и получить доход \$1000 , но рискует потерять весь урожай при наводнении. Он может посеять вдали от берега, где урожайность на 20% меньше, но нет риска. Фермер оценивает вероятность наводнения в 0,1. Как он поступит без дополнительной информации? Сколько бы он отдал за точную информацию о наводнении?

144. Золотоискатель с запасом 900\$, полезностью типа Неймана—Моргенштерна и функцией Бернулли вида $u(x) = \sqrt{x}$ решает, купить ли по цене 300\$ золотоносный участок, где с равной вероятностью ожидает выигрыш в 900\$ или ничего.

(A) За сколько он купил бы у геолога соответствующий прогноз, если положительный прогноз означает, что с вероятностью 0,75 золото есть, а отрицательный — что с вероятность 0,75 золота нет?

(B) Предположим, золотоискатель не купил прогноз, а застраховался на сумму в 300\$ на случай отсутствия золота и купил участок. По какой цене продавались страховые контракты?

Модель инвестора

145. Пусть инвестор с полезностью типа Неймана—Моргенштерна сталкивается с m активами один из которых — гарантированный, с возможностью кредита. Какие достаточные условия гарантируют, что все рискованные активы войдут в портфель?

146. Пусть инвестор с элементарной функцией полезности $u(x)=\ln x$ имеет возможность вложить свое богатство ω в n рискованных активов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_i=1+1/i$, и в гарантированный актив с доходностью $r_0=1{,}1$. Укажите гипотезы и условия на параметры, при которых все рискованные активы войдут в портфель.

147. Инвестор со строгим неприятием риска выбирает, какую долю капитала оставить в безрисковой форме с доходностью r_0, а сколько вложить в рискованные активы двух типов со средними доходностями $\bar{r}_1>r_0$, $\bar{r}_2>r_0$. Пусть функция полезности инвестора типа Неймана—Моргенштерна и возможен кредит в банке, а доходность рискованных активов вероятностно независима.

Какие из перечисленных исходов возможны

а) все три актива войдут в портфель;

б) только один рискованный и один безрисковый войдут;

в) только два рискованных войдут в портфель?

148. Инвестор выбирает, какую долю α своего капитала K вложить в рискованный актив, а какую долю — в безрисковый.

(А) Пусть его элементарная функция полезности равна $u(x)=-e^{-\gamma x}$ ($\gamma>0$). Докажите, что независимо от величины капитала инвестор вложит в рискованный актив одну и ту же *сумму* (αK).

(В) Пусть $u(x)=x^{\gamma}$ ($0<\gamma<1$), $u(x)=-x^{-\gamma}$ ($\gamma>0$) или $u(x)=\ln x$. Докажите, что независимо от величины капитала инвестор вложит в рискованный актив одну и ту же *долю* капитала (α).

149. Пусть на рынке доступны лишь два актива — рискованный и безрисковый. Как изменяется величина вложений в рискованный актив при росте суммы инвестиций, если предпочтения инвестора представляются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$?

Решить задачу при

(a) $u(x)=\sqrt{x}$; (b) $u(x)=-e^{-ax}$; (c) $u(x)=-\dfrac{1}{x}$;

(d) $u(x)=\ln x$; (e) $u(x)=ax-bx^2$; (f) $u(x)=a\sqrt{x}+bx$.

150. Инвестор имеет элементарную функцию полезности $u=x^3$. Состояния мира A и B могут осуществиться с вероятностями $\mu_A=2/3$ и $\mu_B=2/3$. Инвестор может вложить свои 10 единиц капитала в два предприятия. Доход двух предприятий в двух состояниях мира равен: $x_{1A}=1$, $x_{2A}=2$, $x_{1B}=4$, $x_{2B}=3$. Найдите оптимальный портфель.

151. Известно, что рискованный актив дает доход, равный 2 в первом состоянии мира (с вероятностью $1/2$) и β во втором состоянии мира, а безрисковый — 1 (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x)=\ln x$.

152. Известно, что рискованный актив дает доход, равный 2 в первом состоянии мира (с вероятностью $1/2$) и 10 во втором состоянии мира, а безрисковый — β (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x)=\ln x$.

153. Известно, что рискованный актив дает доход, равный 4 в первом состоянии мира (с вероятностью β) и 1 во втором состоянии мира, а безрисковый — 2 (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x)=\ln x$.

154. Известно, что рискованный актив дает доход, равный 4 в первом состоянии мира (с вероятностью $1/4$) и β во втором состоянии мира, а безрисковый — 1 (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий только безрисковый актив в положительном количестве (отрицательные количества невозможны). Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x)=\ln x$.

155. Имеются два вида активов — облигации и акции. Их доходности, зависящие от предполагаемого состояния экономики, приведены в таблице:

Состояние экономики	Вероятность события	Доходность облигаций	Доходность акций
Спад	$2/3$	1,1	1,0
Норма	$2/3$	1,4	1,6
Подъем	$2/3$	1,7	2,2

Кредит невозможен. Элементарная функция полезности инвестора равна $u(x)=4x-x^2$.

(А) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом максимизации функции полезности фон Неймана—Моргенштерна.

(Б) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом модели Марковица—Тобина.

(В) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом модели Марковица—Тобина, если дополнительно существует безрисковый актив с доходностью 1,3.

156. Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством ω и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение

рактеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(\bar{r}_0, \sigma_0) = (1; 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (1{,}2; 0{,}3)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}15; 0{,}2)$, $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (1{,}3; 0{,}4)$. Рискованные активы жестко положительно коррелированы (с коэффициентом 1). Что можно сказать о структуре рисковой части оптимального портфеля? Поясните словами и графически.

157. Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством ω и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(r_0, \sigma_0) = (?, 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (1{,}1; 0{,}2)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}2; 0{,}2)$. Рискованные активы некоррелированы. При какой величине r_0 рисковая часть оптимального портфеля может иметь характеристики $(\bar{r}_R, \sigma_R) = (1{,}15; \sqrt{0{,}2})$? Поясните словами и графически.

158. Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством ω и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(r_0, \sigma_0) = (1, 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (0{,}9; 0{,}1)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}1; 0{,}2)$. Рискованные активы жестко отрицательно коррелированы (с коэффициентом –1). Что можно сказать о структуре рисковой части оптимального портфеля? Поясните словами и графически.

159. В модели Марковица инвестор со строгим неприятием риска выбирает какую долю капитала оставить в безрисковой форме с доходностью r_0 а сколько вложить в рискованные активы (акции) двух типов со средними доходностями $\bar{r}_1 > r_0$, $\bar{r}_2 > r_0$. Могут ли какие-либо условия на коэффициент корреляции ρ и (или) доходности гарантировать, что

(A) все три актива войдут в портфель;

(B) только первый из рискованных активов войдет в портфель;

(C) только два рискованных актива войдут в портфель?

160. Пусть в модели Марковица инвестор, обладающий капиталом 1 млн. долл. делает выбор между тремя активами: один безрисковый с доходностью $r_0 = 1{,}1$, а другие два — с доходностями $\bar{r}_1 = 1{,}2$ и $\bar{r}_2 = 1{,}5$ соответственно и дисперсиями доходностей $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$. Известно, что инвестор выбрал портфель, характеризующейся доходностью $r_P = 1{,}27$ и дисперсией доходности $\sigma_P^2 = 0{,}17$. Доходность рискованной части его портфеля равна $r_R = 1{,}44$.

(1) Найдите суммы, вложенные инвестором в каждый из активов.

(2) Найдите дисперсию доходности рискованной части портфеля этого инвестора.

(3) Найдите коэффициент корреляции доходностей двух рискованных активов.

161. В модели Марковица инвестор сталкивается с двумя рискованными активами с характеристиками $\sigma_1^2 = 4$, $\bar{r}_1 = 2$, $\sigma_2^2 = 1$, $\bar{r}_2 = 11/2$, где σ_k^2 — дисперсия доходности k-го актива, а $\bar{r}_k$ — ожидаемая доходность, и с одним безрисковым активом с доходностью $r_0 = 1$. Известно, что инвестор выбрал такой портфель, что его рискованная часть имеет характеристики $\sigma_R^2 = 8/3$, $\bar{r}_R = 12/3$, а сам оптимальный портфель имеет ожидаемую доходность $\bar{r}_P = 12/3$. Найдите дисперсию доходности оптимального портфеля. Найдите доли активов в оптимальном портфеле. Найдите величину корреляции между доходностями двух рискованных активов.

162. В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности равной 1,6. Имеются два вида активов: акции с параметрами риск-доходность $(\sigma_1, \bar{r}_1) = (2; 1{,}2)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2, \bar{r}_2) = (1; 1{,}4)$, причем они некоррелированы. Будет ли строго возрастать или убывать доля облигаций в рисковой (рыночной) части портфеля инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0 = 1$ до $r_0 = 2$?

(A) Нарисовать ее приблизительный график и объяснить ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(B) Вывести функциональную зависимость.

163. В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности равной 1,7. Имеются два вида активов – акции с параметрами риск-доходность $(\sigma_1, \bar{r}_1) = (1; 0{,}8)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2, \bar{r}_2) = (1; 1{,}4)$, причем они отрицательно коррелированы с коэффициентом –1. Будет ли строго возрастать или убывать доля облигаций в портфеле инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0 = 1$ до $r_0 = 2$?

(A) Нарисовать ее приблизительный график и объяснить ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(B) Вывести функциональную зависимость.

164. В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности равной 1,8. Имеются два вида активов – акции с параметрами риск-доходность $(\sigma_1, \bar{r}_1) = (2; 1{,}4)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2, \bar{r}_2) = (1; 1{,}3)$, причем они положительно коррелированы с коэффициентом 1. Будет ли строго возрастать или убывать доля акций в портфеле инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0 = 1$ до $r_0 = 2$?

(A) Нарисовать ее приблизительный график и объяснить ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(B) Вывести функциональную зависимость.

165. (Очень осторожный инвестор).

Некий инвестор всегда предпочитает активы с меньшим риском (дисперсией) вне зависимости от ожидаемой доходности. Пусть он составляет портфель из двух активов с ожидаемыми полезностями $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ и дисперсиями доходности σ_1^2 и σ_2^2. В какой пропорции войдут в портфель эти активы, если они ...

(1) жестко положительно коррелированны (коэффициент корреляции равен $\rho_{12}=1$),

(2) некоррелированы ($\rho_{12}=0$),

(3) строго отрицательно коррелированы ($\rho_{12}=-1$).

166. На отрезке в ряд расположены четыре предприятия:

Время от времени происходит стихийное бедствие, которое сокращает прибыли на двух соседних предприятиях наполовину. Без учета этого прибыль на всех предприятиях одинакова. Вероятность стихийного бедствия для каждой пары предприятий, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, одинакова. В какой пропорции распределит свой капитал между акциями этих предприятий инвестор с квадратичной элементарной функцией полезности?

167. [Аткинсон, Стиглиц] Инвестору доступны не приносящий дохода безрисковый актив и рискованный актив, причем норма доходности рискового актива зависит следующим образом в зависимости от некоторой базовой нормы доходности $\tilde{r}$ и параметра $\tau \in [0;1]$:

(а) $\tilde{r}_1=(1-\tau)\tilde{r}$;

(б) $\tilde{r}_1=\tilde{r}+\tau(\tilde{r}-\bar{r})$, где $\bar{r}=\mathsf{E}(\tilde{r})$.

Как меняется структура оптимального портфеля инвестора-рискофоба в зависимости от параметра τ? Проинтерпретируйте полученные результаты.

Проиллюстрируйте анализ для простого случая, когда есть всего два состояния природы, на диаграмме (в системе координат «богатство в первом состоянии» — «богатство во втором состоянии»).

168. [Аткинсон, Стиглиц] Докажите, что в ситуации, когда инвестору доступны приносящий доход безрисковый и рискованный активы, налог на валовой доход от портфельных инвестиций увеличивает (уменьшает, оставляет постоянным) частный риск (т.е. дисперсию доходности оптимального портфеля), если эластичность по доходу спроса на рискованный актив положительна (отрицательна, постоянна). Проиллюстрируйте его графически для случая двух состояний природы.

Рынки с риском

169. Известно, что потребитель в экономике с риском с полной системой рынков имеет строго вогнутую элементарную функцию полезности, зависящую от одного

(физического) блага и заданную на неотрицательных количествах потребления. Что можно сказать об объемах потребления в разных состояниях мира, если цены блага в разных состояниях мира пропорциональны вероятностям? Рассмотрите либо общий случай, либо (для упрощения) дифференцируемую функцию полезности и 2 состояния мира.

170. Рассмотрите модель Эрроу—Дебре (с условно-случайными благами) в которой есть единственное физическое благо. Пусть количество состояний природы равно количеству потребителей, причем каждому потребителю соответствует одно состояние природы, в котором он владеет всем начальным запасом. Пусть, кроме того, начальные запасы не зависят от состояний природы и оценки вероятностей состояний природы у потребителей совпадают. Предположив, что элементарные функции полезности потребителей, $u_i(\cdot)$, строго вогнутые и возрастающие, покажите, что...

1) в Парето-оптимальных состояниях потребление не зависит от состояния природы.

2) равновесия Эрроу—Дебре и Раднера единственны. Охарактеризуйте эти равновесия.

171. В экономике распределения с риском имеется два потребителя с функциями полезности Неймана—Моргенштерна, один товар и два состояния мира — A и B, случающиеся с равными вероятностями. Элементарные функции полезности равны $u_1=-\exp(-x_1)$ и $u_2=-\exp(-2x_2)$ соответственно. Общие начальные запасы в экономике равны $(4;7)$. Найти Парето-оптимум и равновесие, если доходы обоих равны 10.

172. Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i=1,2$), двумя состояниями мира (Sun, $Rain$) и двумя (физическими) благами ($Apples$, $Bananas$) запасы которых в состоянии мира S у 1-го потребителя — $\omega_{1S}=(0;0)$, у 2-го потребителя — $\omega_{2S}=(3;6)$, а в состоянии мира R у 1-го потребителя — $\omega_{1R}=(5;1)$, у 2-го потребителя — $\omega_{2R}=(1;2)$. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с элементарными функциями полезности

$$u_1=-1/x_{1a}-1/x_{1b} \qquad u_2=x_{2a}+4x_{2b}$$

Предположим, что вероятность состояния мира S равна $2/3$, а вероятность состояния мира R — $2/3$.

(1) Покажите формально, что состояние $x_{1S}=(2;1)$, $x_{1R}=(2;1)$, $x_{2S}=(1;5)$, $x_{2R}=(4;2)$, $p_a=(1;2)$, $p_b=(4;8)$ является равновесием Эрроу—Дебре.

(2) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера?

173. Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i=1,2$), двумя состояниями мира ($Good$, Bad) и двумя (физическими) благами ($Apples$, $Cucumbers$) запасы которых в состоянии мира G у 1-го потребителя — $\omega_{1G}=(4;4)$, у 2-го потребителя — $\omega_{2G}=(2;2)$, а в состоянии мира B — $\omega_{1B}=(1;1)$ и $\omega_{2B}=(5;5)$ соответственно. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности вида

$$u_i = \ln x_{ia} + \ln x_{ic}$$

Предположим, что вероятность состояния мира G равна $2/3$, а вероятность состояния B — $2/3$.

(1) Покажите формально, что состояние $x_1 = (3;3;3;3)$, $x_2 = (3;3;3;3)$, $p_G = (2;2)$, $p_B = (1;1)$, является равновесием Эрроу—Дебре.

(2) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера?

174. Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i = 1, 2$), двумя состояниями мира (Sun, $Rain$) и двумя (физическими) благами ($Apples$, $Bananas$) запасы которых в состоянии мира S у 1-го потребителя — $\omega_{1S} = (3;3/2)$, у 2-го потребителя — $\omega_{2S} = (3;3/2)$, а в состоянии мира R у 1-го потребителя — $\omega_{1R} = (3;3/2)$, у 2-го потребителя — $\omega_{2R} = (3;3/2)$. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с элементарными функциями полезности

$$u_i = \ln x_{ia} + \ln x_{ib}$$

Предположим, что субъективная вероятность состояния мира S для 1-го потребителя равна $2/3$, а вероятность состояния мира R — $2/3$. Субъективная вероятность состояния мира S для 2-го потребителя равна $2/3$, а вероятность состояния мира R — $2/3$.

(1) Покажите формально, что состояние $x_{1S} = (2;1)$, $x_{1R} = (4;2)$, $x_{2S} = (4;2)$, $x_{2R} = (2;1)$, $p_a = (1;1)$, $p_b = (2;2)$ является равновесием Эрроу—Дебре.

(2) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера?

175. Рассмотрите следующую ситуацию (близкую по духу концепции справедливости Джона Роулза). Два индивидуума в первый период должны выбрать, как они будут жить во втором периоде. Во втором периоде каждый из них может быть либо бедным, либо богатым в зависимости от состояния мира. В состоянии мира 1 богатым будет 1-й индивидуум, а в состоянии мира 2 — 2-й. В первом периоде они не знают, кто кем будет («покров неведения»), и могут заключать между собой соглашения относительно перераспределения богатства во втором периоде. Дайте интерпретацию этой ситуации с точки зрения модели Эрроу—Дебре (или Раднера). При каких предположениях можно ожидать исхода, характеризующегося социальным равенством?

176. Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира (R и S), с двумя благами (A и B) и системой активов, состоящей из всех возможных активов Эрроу. Пусть цены активов равны $(q_{aR}, q_{aS}, q_{bR}, q_{bS}) = (1;2;3;4)$, а цены благ равны $(2;6)$ в состоянии R и $(1;3)$ состоянии S. Возможен ли при таких ценах арбитраж? Если возможен, то предложите план арбитража. Если невозможен, то объясните почему.

177. Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира (R и S), с двумя благами (A и B) и системой активов, состоящей из двух активов Эрроу, выраженных в

благе A. Пусть цены активов равны $(q_{aR}, q_{aS}) = (1;4)$. Возможен ли при таких ценах арбитраж? Если возможен, то предложите план арбитража. Если невозможен, то объясните почему.

178. Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира (R и S), с двумя благами (A и B) и системой активов, состоящей из двух активов, выраженных в благе A. Один актив дает 1 в состоянии R и 1 в состоянии S, а другой — 0 в состоянии R и 1 в состоянии S. Выгоден ли план арбитража $\Delta z = (1;-1)$? Предложите цены активов, при которых этот план арбитража не приводит к увеличению чистых расходов на покупку активов.

179. Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира (R и S), с двумя благами (A и B) и системой активов, состоящей из двух активов, выраженных в благе A. Один актив дает 1 в состоянии R и 1 в состоянии S, а другой — 0 в состоянии R и 1 в состоянии S. Пусть цены этих активов равны 4 и 1 соответственно. Найдите соответствующие «цены активов Эрроу» π_R и π_S. Что можно сказать по этим ценам о возможности арбитража?

180. Вчера Анатолий вложил в банк Чара 100$ из своих сбережений в 1000$, ожидая получить через день +30% с вероятностью 0,8 или потерять вложение с вероятностью 0,2. Аналогично, Борис вложил в компанию МММ 100$ из своих сбережений в 1000$ ожидая получить через день +30% с вероятностью 0,8 или потерять вложение с вероятностью 0,2. Предпочтения обоих представляются функцией полезности Неймана—Моргенштерна.

(1) Сделайте, если можно, (или укажите, что нельзя) по этим данным выводы –

- о склонности участников к риску…

- о совпадении их субъективных оценок вероятностей (оба актива доступны обоим)…

- о статистической (не)зависимости выигрыша Чары и МММ.

(2) Предположим, что на следующий день А и Б обменялись информацией и имеют уже одинаковые субъективные вероятности выигрыша Чары = 0,5 и МММ = 0,5, считая их жестко отрицательно коррелированными, и могут заключать друг с другом любые условные контракты. Можно ли утверждать, что ненулевой обмен акций Чары на МММ произойдет, или нужны дополнительные предположения на функции $u_a(\cdot)$, $u_b(\cdot)$? Можно ли предсказать, что 50 акций Чары обменяют на 50 акций МММ, или для этого нужны дополнительные предположения на функции $u_a(\cdot)$, $u_b(\cdot)$? Можно ли предсказать Парето-эффективность результата обмена?

(3) Как изменятся Ваши ответы на указанные вопросы, если считать акции жестко положительно коррелированными?

(4) Та же ситуация, что в пункте (2), но возможные контракты ограничены двумя типами: или за 1$ сегодня и 1 акцию МММ две акции Чары, или за 1$ сегодня и m ак-

ций Чары две акции МММ. Записать задачу Анатолия в форме модели Раднера. Гарантирован ли Парето-эффективный результат торговли?

Асимметричная информация

181. Сформулируйте модель Акерлова с двумя градациями качества благ и условия, когда блага низшего качества вытесняют блага высшего качества.

182. Автомобили трех градаций качества встречаются с одинаковой вероятностью. Оценки продавцов для этих трех типов автомобилей равны 1, 3 и f, а оценки покупателей 2, 5 и 8 соответственно. Качество автомобилей известно только продавцам. Найдите максимальную величину f, при которой будет существовать равновесие, в котором продаются все три типа автомобилей.

183. Модель Акерлова для рынка «лимонов» с тремя градациями качества. Пусть резервные оценки продавцов для трех типов товара составляют \$2000, \$2300, \$2600, а оценки покупателей — $\$2000+\beta$, $\$2300+\beta$, $\$2600+\beta$ соответственно. Пусть частота существования в природе первого типа товара — $1/3$, второго — $1/3$, третьего — $1/3$. При каких параметрах β существует равновесие, в котором продаются (а) все типы, (б) только два худших типа, (в) только самые плохие?

184. Рассмотрите в рамках модели Акерлова рынок товара, имеющего 5 градаций качества. Цену назначает продавец (рынок продавца). Покупатели нейтральны к риску. Предпочтения продавцов и покупателей заданы следующей таблицей

Вероятность (доля)	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
Качество	1	2	3	4	5
Оценка продавцов	1	2	3	4	5
Оценка покупателей	1	3	5	7	9

При каком условии на вероятности π_j на этом рынке может существовать равновесие, в котором будут продаваться только товары двух худших градаций качества?

185. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества s имеет равномерное распределение на отрезке

I) $[0;50]$, II) $[40;50]$.

Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) совпадает с параметром качества s, а оценка товара покупателем равна αs ($\alpha>1$). При каких значениях параметра α будет происходить разрушение рынка лучших автомобилей (неблагоприятный отбор)? Как ведет себя равновесная доля продаваемых автомобилей при возрастании α?

186. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества s имеет равномерное распределение на отрезке $[40;50]$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) совпадает с параметром качества s, а оценка товара покупателем равна $s+\alpha$. Найдите равновесие как функцию параметра α. Как ведет себя равновесная доля продаваемых автомобилей при возрастании α?

187. Рассмотрите модель Акерлова, в которой товар с вероятностью $1-s$ может иметь дефект, из-за которого он негоден (s — вероятность того, что товар годен). Все потребители ценят годный товар в 10 у.е. , а негодный — в 0 у.е. Тип продавца определяется величиной s. Тип s имеет равномерное распределение на отрезке $[0;1]$. Издержки продавцов: $c(s)=(s+1)$ у.е. Найдите и опишите равновесие.

188. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества s имеет равномерное распределение на отрезке $[10;100]$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) равна $2s$, а оценка товара покупателем равна $3s$. На рынке имеются оценщики, которые готовы сообщить покупателю истинное качество товара за цену $\alpha>0$. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра α.

189. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества s имеет равномерное распределение на отрезке $[\beta, 200]$, $\beta>0$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) равна $3s$, а оценка товара покупателем равна $5s$. На рынке имеются оценщики, которые готовы сообщить покупателю истинное качество товара за цену 100. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра β.

190. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества s имеет равномерное распределение на отрезке $[3, 50]$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) равна $4s-\gamma$, $\gamma>0$, а оценка товара покупателем равна $5s$. На рынке имеются оценщики, которые готовы сообщить покупателю истинное качество товара за цену 20. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра γ.

191. Рассмотрите модель Акерлова для рынка «лимонов». Параметр качества s имеет равномерное распределение на отрезке $[1, 10]$. Пусть оценка продавцом своего товара (резервная цена для продавца) равна $3s$, а оценка товара покупателем равна $4s+\delta$, $\delta>0$. На рынке имеются оценщики, которые готовы сообщить покупателю истинное качество товара за цену 3. Найдите равновесие на рынке в зависимости от параметра δ.

192. [Тироль] Рассмотрим рынок подержанных автомобилей с градациями качества $s\in[s_1, s_2]$. которые непрерывной случайной величиной, которая равномерно распределена на отрезке $[s^1, s^2]$. Продавец оценивает единицу товара качества s как s, а покупатель — как αs, где α — коэффициент *разный* для разных покупателей. Предполагаем, что α распределены равномерно на отрезке $[\alpha^1, \alpha^2]$. Покупатели нейтральны по отношению к риску (т.е. покупатель купит автомобиль с ожидаемым качеством s^e тогда и только тогда, когда $\alpha s^e > p$.

(i) Найдите объем торговли в условиях полной информации.

(ii) Изобразите кривые спроса и предложения при асимметричной информации. Может ли быть так, что кривая спроса имеет положительный наклон?

(iii) Найдите конкурентное равновесие. Будет ли объем торговли больше или меньше Парето-оптимального?

(iv) Покажите, что на таком рынке равновесие может быть не единственным, и что равновесие с более высокой ценой доминирует по Парето равновесие с более низкой ценой.

(v) Государство вводит стандарт качества. Автомобили с качеством ниже s_0 продавать запрещено. Может ли это увеличить общее благосостояние (с точки зрения суммарного излишка)?

193. Рассмотрите модель Акерлова в предположении, что переговорная сила принадлежит покупателю (можно интерпретировать такой рынок как рынок труда). Покажите, что если $v(s) \geqslant c(s)\ \forall s$, то в одном из равновесий продавец назначает цену, равную предельным издержкам.

Модели найма

194. Барин выбирает, какую долю $\tau \in [0;1]$ стоимости урожая y забирать у крестьянина в виде издольщины. При этом он максимизирует свой ожидаемый доход τy. Крестьянин максимизирует по $y \geqslant 0$ функцию $(1-\tau)y - y^2$, то есть прибыль при квадратичной функции тягости усилий.

(1) Найти оптимальную для барина долю τ.

(2) Что будет, если дополнительно к издольщине барин может использовать фиксированный оброк (r)? Какими данными следует дополнить задачу, чтобы она имела решение? Введите соответствующие обозначения, запишите целевые функции и найдите решение.

195. [Varian] Профессор P наняла преподавателя-ассистента мистера A. Профессора интересует, сколько часов мистер A будет преподавать, а также то, сколько она должна ему заплатить. Профессор P желает максимизировать свою функцию заработной платы $x - w$, где x — количество часов, преподаваемых мистером A, а w — заработная плата, которую она ему платит. Если мистер A преподает x часов и получает w, то его полезность равна $w - x^2/2$. Резервная полезность мистера A равна нулю.

(a) Если профессор P выбирает x и w, максимизируя свою полезность при ограничении, что мистер A готов на нее работать, то сколько часов будет преподавать мистер A и сколько ему придется заплатить?

(b) Предположим, что профессор P устанавливает схему заработной платы в форме $w(x) = ax + b$ и позволяет мистеру A выбирать количество часов x. Какие значения a и b следует выбрать профессору P? Удалось бы профессору P достичь более высокого уровня заработной платы, если бы она использовала схему $w(x)$ более общей функциональной формы?

196. Количество производимой работником продукции (y) зависит от его усилий (x) и случайного фактора (ξ), принимающего значения 0 и 100 с равной вероятностью, причем $y = x + \xi$. Произведенная продукция дает предприятию прибыль в размере $2y - w$, где w — плата работнику. Работник имеет элементарную функцию полезности $u(w,x) = w - x^2/100$, а его резервная полезность равна 0. Предприятие назначает плату пропорционально усилиям ($w(x) = \alpha x$), либо пропорционально произведенной продукции ($w(y) = \alpha y$) (если усилия ненаблюдаемы).

(A) Сравните эти два вида контрактов.

(B) Будут ли они Парето-оптимальными?

(C)* Каким будет оптимальный контракт в каждой из ситуаций, если на вид функции $w(y)$ нет ограничений?

197. Предположим, что в модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника имеет вид $u(a,w) = \sqrt{w} - a^2$ где, где w — плата, a — усилия ($a = 1$ или 2). Доход, приносимый работником, зависит от усилий a и случайного фактора (состояния мира) ξ: $\tilde{y} = y(a,\xi)$. Случайный фактор ξ может принимать три значения, $(1, 0, -1)$, с вероятностями, указанными в таблице. В таблице также указана прибыль в каждом возможном случае.

ξ	$a=1$	$a=2$	Вероятность
1	100	100	$(1-\mu)/2$
0	100	1	μ
–1	1	1	$(1-\mu)/2$

Пусть резервная полезность работника $u_0 = 2{,}5$, вероятность $\mu = 0{,}5$. Известно, что наниматель установил оплату за прибыль 100 равной $w(100) = 64$. При какой плате $w(1)$ выполняется условие участия?

198. Пусть в модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника имеет вид $u(R,x) = \sqrt{R} - x$, где $R = R(s)$ — это плата, зависящая от уровня выручки s. Усилия x могут принимать значения 1 или 4. Функция выручки $s(x,\xi)$ зависит от усилий x и случайного фактора ξ, который может принимать три значения, (ξ_1, ξ_2, ξ_3), с вероятностями $(1/3, 1/3, 1/3)$. Результат действий работника (выручка s) задается таблицей

ξ	$x=1$	$x=4$	Вероятность
ξ_1	120	120	1/3
ξ_2	1	120	1/3
ξ_3	1	1	1/3

Пусть резервная полезность работника $u_0 = 0{,}2$. Найдите оптимальный контракт: пару выплат $R_1, R_{120} \geqslant 0$ соответственно за наблюдаемую выручку $s=1$ или 120.

199. Пусть в модели найма со скрытыми действиями элементарная функция полезности работника имеет вид $u(r,a)=\sqrt{r}-a$, где $r=r(h)$ — это плата, зависящая от уровня выручки h. Усилия a могут принимать значения 1 или 4. Функция выручки $h(a,\xi)$ зависит от усилий a и случайного фактора ξ, который может принимать три значения, (ξ_1,ξ_2,ξ_3), с вероятностями $(1/6, 2/3, 1/6)$. Результат действий работника (выручка h) задается таблицей

ξ	$a=1$	$a=4$	Вероятность
ξ_1	60	60	$1/6$
ξ_2	1	60	$2/3$
ξ_3	1	1	$1/6$

Пусть резервная полезность работника $u_0=0{,}3$. Найдите оптимальный контракт: пару выплат $r_1, r_{60} \geqslant 0$ соответственно за наблюдаемую выручку $h=1$ или 60.

200. Хозяин нанимает работника. Результат работы (то есть доход хозяина) зависит от ненаблюдаемой хозяином величины усилий работника, x, а также от ненаблюдаемых случайных событий (состояний мира). Эта зависимость описывается таблицей:

	Событие «не везет»	Событие «как всегда»	Событие «везет»
	$1/3$	$1/3$	$1/3$
$x=1$	60	60	120
$x=3$	60	120	120

Предпочтения работника заданы функцией полезности фон Неймана-Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x,w)=3\sqrt{w}-x$. Резервный уровень полезности работника равен $u_0=0$. Найдите оптимальный контракт, где денежные выплаты w обусловлены величиной дохода, полученного хозяином.

201. В модели найма с ненаблюдаемыми усилиями доход, помимо усилий x, зависит также от состояний мира ($\xi=1,2,3$). Вероятности состояний мира и доходы указаны в таблице

	$\xi=1$	$\xi=2$	$\xi=3$
Вероятность	$1/3$	$1/3$	$1/3$
$x=1$	0	100	200
$x=2$	100	200	300

Предпочтения работника заданы функцией полезности фон Неймана-Моргенштерна с элементарной функцией полезности

$$u(x,w)=-120/w-x.$$

Резервная полезность работника равна $u_0=-4$. Найдите оптимальный контракт. Покажите, что результат будет таким же, как и при наблюдаемости действий.

202. В модели найма с ненаблюдаемыми усилиями доход, помимо усилий x, зависит также от состояний мира ($\xi=1,2,3,4$). Вероятности состояний мира и доходы указаны в таблице

	$\xi=1$	$\xi=2$	$\xi=3$	$\xi=4$
Вероятность	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$
$x=1$	0	100	100	200
$x=2$	100	100	100	200
$x=4$	100	200	200	200

Предпочтения работника заданы функцией полезности фон Неймана-Моргенштерна с элементарной функцией полезности

$$u(x,w)=\sqrt{w}-x.$$

Резервная полезность работника равна $u_0=8$. Найдите оптимальный контракт.

203. Рассмотрите дискретную модель найма со скрытыми действиями работника. При усилии a ($a=1,\ldots,k$) вероятность получения результата y_s ($s=1,\ldots,m$) равна μ_{as}. Резервная полезность для работника равна u_0, а его элементарная функция полезности имеет вид $v(w)-c_a$, где w — оплата усилий работника, а c_a — издержки, которые для работника сопряжены с усилиями a.

(1) Покажите, что если оплата, обусловленная контрактом, не зависит от результатов ($w(y)=const$), то работник выбирает усилие, минимизирующее его издержки.

(2) Предположим, что работник — рискофоб, т.е. $v'(w)$ убывает. Покажите, что если издержки не зависят от усилий ($c_a=const$), то оплата по (оптимальному) контракту не зависит от результатов.

(3) Предположим, что возможны всего два результата и два уровня усилий, причем $y_2>y_1$ и $\mu_{b2}>\mu_{a2}$ $\forall a, b$. Опишите оптимальный контракт, если (a) $c_a>c_b$, (b) $c_a<c_b$.

204. Страхователь с элементарной функцией полезности $u(x)=\ln x$ может вероятностью μ потерять актив ценностью K рублей, и обладает богатством ω (включая актив). Пусть своими усилиями x по обереганию актива страхователь может оказать влияние на вероятность страхового случая. Функция $\mu(x)$ убывает, а тягость усилий для страхователя равна $c(x)=x^2$. Возможны два действия $x=0$ или $x=1$.

Каким окажется выбранный страховой контракт, если ...

1) на рынке страховых услуг условия совершенной конкуренции;

2) на рынке только одна страховая компания.

3) При каких условиях страховой контракт гарантирует полное возмещение убытков?

205. Отметьте такие условия, каждое из которых, независимо от прочих, гарантирует, что оптимальный для нанимателя контракт в модели найма со скрытыми действиями Парето-оптимален:

а) работник — рискофил, а оплата его труда зависит от результата;

б) работник (как и наниматель) нейтрален к риску;

в) действия не оказывают влияния на распределение результата;

г) действия могут быть однозначно вычислены по наблюдаемому результату;

д) резервная полезность для работника равна нулю;

е) действия не сопряжены с издержками для работника;

ё) работник — рискофоб, а оплата его труда зависит от результата;

ж) ожидаемый доход не зависит от усилий;

з) действия, дающие наибольший ожидаемый доход, сопряжены с наименьшими издержками для работника;

и) действия дающие наибольшую прибыль (не обязательно наибольший доход) не могут давать доход, равный доходу от прочих действий;

й) резервная ожидаемая полезность для работника отрицательна и меньше по модулю максимального ожидаемого дохода.

По возможности объясните свой ответ.

206. Модель найма со скрытыми действиями, работник — рискофоб. Утверждение: если плата работника не зависит от результатов деятельности работника, то работник выберет такие действия (усилия) x, при которых его издержки усилий $c(x)$ минимальны. Сформулируйте модель и гипотезы утверждения, докажите и проиллюстрируйте диаграммой.

207. Модель найма со скрытыми действиями. Утверждение: если работник нейтрален к риску, то выбранный начальником контракт окажется Парето-оптимальным. Сформулируйте модель и предположения, докажите и проиллюстрируйте диаграммой.

208. Модель найма со скрытыми действиями, работник — рискофоб. Верно ли утверждение: если схема выплаты работнику, w_s, (контракт) *зависит* от результатов ($w_s \neq w_t\ \forall s \neq t$), то работник выберет такие действия (усилия) b, что $c(b) > \min_{x\in X} c(x)$? Если верно, то обоснуйте его, если неверно, то приведите соответствующий контрпример.

209. Модель найма со скрытыми действиями, работник — рискофоб. Верно ли утверждение: пусть издержки работника не зависят от действий (усилий), тогда выбранный начальником контракт окажется Парето-оптимальным? Если верно, то обоснуйте его, если неверно, то приведите соответствующий контрпример.

210. Рассмотрим модель найма с тремя уровнями усилий и двумя результатами. Резервная полезность равна 1. Вероятности результатов, доходы и издержки задаются следующей таблицей.

	$y_1=0$	$y_2=50$	
$a=L$	3/4	1/4	$c_L=1$
$a=M$	1/2	1/2	$c_M=3$
$a=H$	1/4	3/4	$c_H=4$

(A) Покажите, что один из уровней усилий нереализуем в случае, когда усилия ненаблюдаемы (не существует контракта, при котором он выгоден работнику).

(B) Найдите оптимальный контракт при наблюдаемых и ненаблюдаемых усилиях.

211. Предположим, что в модели найма при наблюдаемых усилиях нанимателю оказывается выгодным минимальный уровень усилий. Может ли при ненаблюдаемых усилиях быть выгоден другой уровень усилий?

212. Рассмотрим модель найма с двумя уровнями усилий и с двумя результатами. Опишите все возможные оптимальные контракты в предположении, что усилия ненаблюдаемы, и работник является нейтральным к риску. Продемонстрируйте, что все они являются оптимальными по Парето, и наниматель получает такую же ожидаемую прибыль, как и при наблюдаемых усилиях.

213. Рассмотрим модель найма с двумя уровнями усилий и с двумя результатами, в которой усилия ненаблюдаемы, работник является нейтральным к риску, и допустимые контракты ограничены условием ограниченной ответственности $w_s \geqslant \underline{w}$. Покажите, что существует граница w^*, такая что для контракта, обеспечивающего высокий уровень усилий, рента, связанная с ограниченной ответственностью, положительна в том и только в том случае, если $\underline{w} > w^*$.

214. Рассмотрите в модели найма с ненаблюдаемыми действиями с двумя уровнями усилий и с двумя результатами контракты типа издольщины, когда нейтральный к риску работник получает плату в виде фиксированной доли от создаваемого им дохода. Найдите оптимальные контракты и сравните с оптимальными контрактами при наблюдаемых действиях.

215. Объясните, почему контракт типа издольщины не может быть эффективным по Парето.

216. [Тироль] Работник может выбрать два уровня усилий: высокий (H) и низкий (L). Полезность работника в случае низких усилий равна $v(w)$, а в случае высоких — $v(w-c)$, где w — заработная плата, c — издержки, связанные с высокими усилиями. Функция $v(\cdot)$ возрастающая и строго вогнутая (работник — рискофоб). Резервная заработная плата работника равна w_0 (так что резервная полезность равна $v(w_0)$).

Пусть доход нанимателя может принимать два значения, y_1 и y_2, причем $y_1 < y_2$. Если работник выберет высокий уровень усилий, то доход будет равен y_2 с вероятностью μ_H и y_1 с вероятностью $1-\mu_H$. Если же он выберет низкий уровень усилий, то доход будет равен y_2 с вероятностью μ_L и y_1 с вероятностью $1-\mu_L$, причем $\mu_L < \mu_H$.

(A) Рассмотрите сначала случай, когда усилия работника наблюдаемы. Объясните, почему, если наниматель требует от работника выбрать низкий уровень усилий, то он должен назначить оплату $w_1 = w_2 = w_0$, а если высокий, то $w_1 = w_2 = w_0 + c$.

(B) Покажите, что в ситуации пункта (A) нанимателю выгодно требовать от работника высокого уровня усилий в том и только в том случае, если $(\mu_H - \mu_L)(y_2 - y_1) > 0$.

(C) Рассмотрите теперь случай, когда усилия работника ненаблюдаемы, и наниматель хочет побудить работника выбрать высокий уровень усилий. Запишите условие совместимости стимулов и условие участия.

(D) Покажите, что из условия совместимости стимулов следует, что $w_2 > w_1$.

(E) Объясните, почему нанимателю выгодно назначить такую оплату, что оба ограничения выходят на равенство.

(F) Пользуясь тем, что работник — рискофоб, покажите, что ожидаемая зарплата работника выше, а ожидаемая прибыль нанимателя ниже, чем при наблюдаемости усилий (предполагаем, что в обоих случаях нанимателю выгодно побуждать работника выбрать высокий уровень усилий).

(G) Найдите оплату при нейтральности работника к риску.

(H) Найдите оплату в случае, когда нанимателю выгодно побуждать работника выбрать низкий уровень усилий.

217. [Тироль] Акционеры решают, какое жалование w назначить менеджеру компании. Прибыль без учета этого жалования y зависит от усилий менеджера x и случайного фактора («возмущения») ξ: $y = x + \xi$. Предполагаем, что ξ — случайная величина, распределение которой не зависит от x, с носителем $(-\infty, +\infty)$, имеющая нулевое математическое ожидание: $\mathsf{E}(\xi) = 0$. Акционеры нейтральны к риску и максимизируют ожидаемую прибыль $\mathsf{E}(x + \xi - w)$. Менеджер имеет целевую функцию типа Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности вида $u(x, w) = v(w - \gamma x^2)$, где γ — постоянный коэффициент, функция $v(\cdot)$ имеет положительную невозрастающую производную. Менеджер может найти себе работу преподавателя в бизнес-школе, где практически без усилий и риска ему гарантирована заработная плата w_0.

(i) Если акционеры наблюдают уровень усилий менеджера, то они могут найти такую схему оплаты, что менеджер выберет именно тот уровень усилий, какой им требуется. Предложите вариант такого контракта. Найдите оптимальный уровень усилий, то есть такой, который дает максимум ожидаемой прибыли, и при этом менеджер не откажется от контракта.

(ii) Пусть акционеры не могут наблюдать уровень усилий, им известна только величина прибыли y. Предположим, что используется линейная схема оплаты $w(y) = a + by$. Покажите, что уровень усилий, который выберет менеджер не зависит от вида функции $v(\cdot)$. Найдите его как функцию коэффициентов a и b. (Поскольку носитель распределения ошибки не зависит от усилий менеджера, то производная математического ожидания равна математическому ожиданию производной). Покажите, что если менеджеру остается вся прибыль за исключением некоторой постоянной величины, то есть $b = 1$, то он выберет тот уровень усилий, который оптимален в ситуации (i).

(iii) Запишите функцию Лагранжа и найдите условия первого порядка для задачи выбора оптимального линейного контракта. Покажите, что если менеджер нейтрален к риску, то акционеры выберут $b = 1$. Докажите, что если производная функции $v(\cdot)$ убывает (т.е. менеджер является рискофобом), то в оптимальном контракте $0 < b < 1$, то есть это нечто среднее между ситуацией, когда весь риск берут на себя акционеры ($b = 0$) и ситуацией, когда весь риск берет на себя менеджер ($b = 1$). (Подсказка: Воспользуйтесь тем, что если $f(\cdot)$ — возрастающая функция ξ, то ковариация $\mathsf{Cov}(f(\xi), \xi) = \mathsf{E}(f(\xi)\,\xi)$ неотрицательна, и наоборот, если $f(\cdot)$ — убывающая функция ξ, то эта ковариация неположительна).

218. Рассматривается стандартная задача выбора оптимального контракта с двумя неизвестными типами работников (производная издержек одного всюду выше производной другого); предлагается два объема работы и два соответствующих уровня оплаты. Работник какого из типов выбирает уровень усилий более низкий, чем в случае, когда типы наблюдаемы?

219. Рассматривается стандартная задача выбора оптимального контракта с двумя неизвестными типами работников (производная издержек одного всюду выше производной другого); предлагается два объема работы и два соответствующих уровня оплаты. Работник какого из типов получит излишек полезности по сравнению с резервной полезностью?

220. Рассматривается стандартная задача выбора оптимального контракта с двумя неизвестными типами работников (производная издержек одного всюду выше производной другого); предлагается два объема работы и два соответствующих уровня оплаты. Работник какого из типов выбирает уровень усилий такой же, как и в случае, когда типы наблюдаемы?

221. В модели найма со скрытой информацией предположим, что издержки усилий работника типа t равны $c_t(x) = tx^2$, где $t = 1, 2$, и $\pi_1 = \pi_2$, где π_t — доля работников типа t.

Определите характеристики контракта по найму этих двух типов работников (оптимальный уровень усилий, обусловленное контрактом вознаграждение для каждого типа работников).

222. В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника 1-го типа равны $c_1(x) = x^2$, работника 2-го типа — $c_1(x) = \alpha x^2$, причем доли работников обоих типов одинаковы.

Определите характеристики оптимального контракта.

223. В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника 1-го типа равны $c_1(x)=x^2$, работника 2-го типа — $c_1(x)=2x^2$.

Определите характеристики оптимального контракта в зависимости от доли работников первого типа.

224. В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника 1-го типа равны $c_1(x)=x^2$, работника 2-го типа — $c_1(x)=2x^2$, причем доли работников обоих типов одинаковы.

Определите характеристики оптимального контракта в зависимости от резервной полезности работников 1-го типа, в предположении, что резервная полезность работников 2-го типа равна нулю.

225. Заказчик нанимает подрядчика для производства некоторого блага. Ценность каждой единицы этого блага для заказчика равна 8. Подрядчик с вероятностью $1/3$ может оказаться имеющим функцию полезности $u_1=\sqrt{12+w}-Q$, и с вероятностью $2/3$ — имеющим функцию полезности $u_2=\sqrt{5+w}-Q$, где w — величина денежного дохода подрядчика, а Q — это стоимость произведенных благ. Резервный уровень полезности подрядчика любого типа равен $u_0=1$.

Найдите оптимальный контракт вида $\{(Q_1,w_1),(Q_2,w_2)\}$ в условиях асимметричной информации (заказчик не различает подрядчиков).

226. В модели найма со скрытой информацией с n типами работников ($\theta=1,...,n$) покажите, что если $\mu_\theta=\frac{1}{n}$, и $c_\theta(x)=\theta c(x)$, где $c(x)$ — возрастающая выпуклая функция, то ограничение монотонности усилий несущественно, т.е. задача определения оптимального контракта распадается на n независимых задач.

227. Пусть в модели найма со скрытой информацией $c_\theta(x)=\theta x$, функция дохода $y(x)$ такова, что предельный доход положителен и убывает. Предположим, что решение задачи поиска оптимальных пакетов $(\bar{x}_\theta, \bar{w}_\theta)$ является внутренним, причем все типы работников подписывают контракт.

(A) Покажите, что если имеется два типа работников, θ_1 и θ_2, причем $\theta_1<\theta_2$, то уровни усилий удовлетворяют соотношениям

$$y'(\bar{x}_2)=\theta_2+\frac{\mu_1}{\mu_2}(\theta_1-\theta_2),$$

а

$$y'(\bar{x}_2)=\theta_1.$$

(B) Покажите, что если имеется три типа работников, θ_1,θ_2 и θ_3, причем $\theta_2-\theta_1=\theta_3-\theta_2>0$, то ограничение монотонности усилий является существенным тогда и только тогда, когда $\mu_2<\mu_1\mu_3$. Вычислите оптимальные пакеты для случая, когда $\mu_2<\mu_1\mu_3$ и

гда, когда $\mu_2<\mu_1\mu_3$. Вычислите оптимальные пакеты для случая, когда $\mu_2<\mu_1\mu_3$ и $\mu_2\geqslant\mu_1\mu_3$.

(C) Покажите, что если имеются n типов работников, причем

$$\theta_i-\theta_{i-1}=\theta_{i+1}-\theta_i>0,$$

то достаточным условием несущественности ограничения монотонности усилий является неубывание отношения

$$\frac{\mu_1+...+\mu_{i-1}}{\mu_i}.$$

Покажите, что это достаточное условие, вообще говоря, не является необходимым.

228. Пусть в модели найма со скрытой информацией допустимые усилия задаются условием $x\geqslant 0$, функция дохода $y(x)$ обладает следующими свойствами:

(1) $y'(x)\to\infty$ при $x\to 0$;

(2) $y'(x)x\to 0$ при $x\to 0$,

и существуют работники двух типов, издержки усилий которых линейны ($c_\theta(x)=\theta x$). Докажите, что наниматель наймет работников обоих типов, т.е. $\bar{x}_\theta>0\ \forall\theta$.

229. Рассмотрим ситуацию ценовой дискриминации следующего типа Единственный производитель и продавец частного блага, производство которого характеризуется постоянными издержками. сталкивается с двумя типами покупателей этого блага, оценками которых имеют вид

$$v_\theta(x)=\theta\sqrt{x},\ \theta=1,2.$$

Покупатели двух типов встречаются с вероятностями μ и $1-\mu$ соответственно. Проинтерпретируйте эту модель как модель найма и найдите оптимальный контракт. Проделайте то же самое для трех типов покупателей.

230. В модели найма со скрытой информацией с двумя типами работников предположим, что издержки усилий работника 1-го типа равны $c_1(x)=0{,}5x^2$, работника 2-го типа — $c_1(x)=x^2$. Пусть контракт ищется среди линейных по усилиям схем (базовая заработная плата плюс премия за усилия, пропорциональная величине усилий).

Определите характеристики оптимального контракта в зависимости от доли работников первого типа. Сравните с оптимальным пакетным контрактом.

231. На рынке страховых услуг имеются два типа страхователей — с низкой или высокой вероятностью μ_θ наступления страхового случая — потери актива ценностью K рублей. Во всех других аспектах они одинаковы — каждый обладает каждый богатством W (включая рассматриваемый актив) и его предпочтения характеризуются функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией $v(w)=\ln(w)$.

На рынке страховых услуг имеется только одна страховая компания

(А) Сформулируйте задачу страховой компании и проинтерпретируйте ее как модели найма со скрытыми типами.

(Б) Каким окажется выбранный страховой контракт, в случае симметричной информации, т.е. в условиях, когда страховая знает тип страхователя?

(В) Каким окажется выбранный страховой контракт, в случае асимметричной информации, т.е. в условиях, когда страховая знает только распределение вероятностей типов страхователя?

(Г) Предположим, что на рынке существует несколько страховых компаний. Какие страховые контракты предложат в этом случае страховые фирмы?

Общие задачи

232. Рассмотрим несколько модифицированную задачу Рамсея. Квазилинейная конкурентная экономика состоит из двух человек, потребляющих три частных блага x, y и z. В потреблении блага x присутствует экстерналия.

Функция полезности потребителя 1 равна $u_1(x_1, x_2, y_1, z_1) = 2\ln(x_1 - x_2/2) + 4\ln(y_1) + z_1$.

Функция полезности потребителя 2 равна $u_2(x_1, x_2, y_2, z_2) = 2\ln(x_2 - x_1/2) + 4\ln(y_2) + z_2$.

Издержки производства единицы благ x, y (выраженные в квазилинейном благе) равны, соответственно, $c_x = 4$, $c_y = 5$. Правительству требуется собрать сумму $R = 4$ путём взимания налогов на продажи благ x и y. Первоначальные запасы блага z достаточно велики, чтобы обеспечить внутреннее решение.

Предположим, что потребление благ x и y облагается налогами. Найдите ставки налогов, соответствующие Парето-оптимуму второго ранга. Будет ли оптимум второго ранга оптимумом первого ранга?

233. Для доказательства различных утверждений использовались разные предположения о функциях полезности: вогнутость, локальная ненасыщаемость, квазилинейность по одному из аргументов, сепарабельность по отдельным аргументам, непрерывность, дифференцируемость, строгое возрастание; предположение о строгой положительности начальных запасов; предположение о внутренности рассматриваемого состояния экономики по потреблению; полный ранг матрицы доходностей, и др.

Вам известны утверждения:

(1): первая т. благосостояния для классической экономики

(2): вторая т. благосостояния для классической экономики

(3): т. о неоптимальности равновесий в экономике с экстерналиями

(4): т. об эквивалентности равновесий модели Эрроу—Дебре и равновесий Раднера

(5): т. о медианном избирателе

(6): т. Самуэльсона о полной диверсификации портфеля

(7): т. о Парето-оптимальности равновесия с долевым финансированием и голосованием большинством (при некоторых условиях)

(8): т. о реализуемости Парето-оптимума через равновесие с долевым финансированием и голосованием большинством (при некоторых условиях)

(9): т. о реализуемости Парето-оптимума в экономике с экстерналиями через равновесие с налогами

(10): утверждение о единогласии голосования об уровне общественного блага большинством (при некоторых условиях)

(11): утверждение о Парето-оптимальности для участников исхода процедуры Гровса-Кларка (при некоторых условиях)

(12): т. об оптимальности равновесия Раднера (при некоторых условиях).

Расставьте, насколько возможно, логические цепочки использования предположений и промежуточных результатов в доказательстве утверждения (7):

(*предположение* 1 + *предположение* 2 + ...) → (*утверждение* 1) → (*утверждение* 2) …

Решите ту же задачу для предположения (8), (11) и (12).

234. Пусть спрос в отрасли линеен: $D(p) = d - bp$, где $d > 0, b > 0$, и предельные издержки постоянны. Пусть устанавливается налог t с единицы товара. Как изменится цена блага для потребителя, при

а) совершенной конкуренции;

б) монополии.

235. Аэропорт обслуживает y самолетов в месяц, что дает ему прибыль в размере $100y - y^2$ тыс. руб. в месяц. Самолеты пугают коров в m расположенных в окрестностях фермерских хозяйствах, снижая надои молока. Шум самолетов наносит ущерб i-му фермеру в размере $a_i y^2$ тыс. руб. в месяц, где a_i — некоторая константа.

(1) Какой налог на деятельность аэропорта должно наложить государство, чтобы экстерналии снизились до Парето-оптимального уровня?

(2) Аэропорт согласен сократить свою деятельность, если фермеры компенсируют ему потери прибыли. Что произойдет, если фермеры будут производить такие платежи за счет добровольных взносов? Покажите, что количество самолетов в равновесии больше оптимального.

(3) Инициативная группа фермеров хочет улучшить положение дел. Предположим, что они знают целевые функции всех фермеров. Члены инициативной группы не могут обязать других платить. Какой способ собрать деньги при добровольности взносов у них есть? Предложите и опишите возможный механизм. Сколько заплатит каждый фермер? Каким будет количество самолетов?

Литература

1. Аткинсон Э. Б. Стиглиц Дж. Э. Лекции по экономической теории государственного сектора. — М.: Аспект Пресс, 1995. [Аткинсон, Стиглиц]

2. Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности. — СПб.: Экономическая школа, 1996. [Тироль]

3. Bergstrom T. "Theory of Public Goods and Externalities" (lecture notes), http://www.econ.ucsb.edu/~tedb/econ230b.html. [Bergstrom]

4. Laffont J.-J. *Fundamentals of Public Economics*, MIT Press, 1988. [Laffont]

5. Mas-Colell A., Whinston M., Green J., *Microeconomic theory*, Oxford University Press, 1995. [MWG]

6. Varian H., *Microeconomic Analysis*, 3rd ed., Norton, 1992. [Varian]

Коковин Сергей Гелиевич

Цыплаков Александр Анатольевич

Учебно-методическое пособие

Задачи по курсу «Методы микроэкономического анализа»

(сборник задач)