Данная работа основана на конспектах лекций прочитанных мною в РЭШ весной 2001 года в рамках программы «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах» Инновационного проекта развития образования при содействии НФПК – Национального Фонда подготовки кадров. Я благодарен студентам РЭШ Долгополову С.В., Захаренко Р.Л. и Прудниченко Д.А. за конспектирование лекций и ассистенту РЭШ Рачинскому А.А. за последующее их редактирование.

Полищук Л.И.

МИКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ: ПРОБЛЕМЫ АСИММЕТРИЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ И ОБЩЕСТВЕННЫХ БЛАГ

Россия, 117418, Москва, Нахимовский проспект, 47
Suite 1721, Nakhimovsky Prospekt, 47, 117418, Moscow, Russia
☎Tel: (7)(095) 129-3911 or 129-1700 ✍fax: (7)(095)129-3722 🖫 E-mail nes@nes.ru http://www.nes.ru/

Полищук Л.И. Микроэкономическая теория: проблемы асимметричной информации и общественных благ. Препринт #KL/2003/009- М.: Российская экономическая школа, 2003. -94 стр. (Рус.)

Основное внимание в курсе уделяется микроэкономическому анализу задач с асимметричной информацией, проблемам предоставления общественных благ и началам теории общественного выбора. Курс знакомит студентов с методами преодоления информационной асимметрии, при этом рассматриваются два главных типа задач с асимметричной информацией: задачи с ненаблюдаемыми характеристиками и ненаблюдаемым поведением. Вводятся основные понятия и методы конструирования механизмов в задачах с асимметричной информацией; развитая теория применяется к моделям с общественными благами. Излагаются основные понятия и результаты теории агрегирования индивидуальных предпочтений в задачах общественного выбора.. В курсе доказывается ряд важнейших теорем, в том числе теоремы о невозможности Эрроу и Жибара-Сатеруэйта.

Ключевые слова: микроэкономика, асимметричная информация, общественные блага

Leonid Polishchuk. Microeconomic Theory: asymmetric information and public goods. Working Paper KL #2003/009.- Moscow, New Economic School, 2003.- 94 p. (Rus.)

This course deals with sections of microeconomics, concerning the problem of asymmetric information, public good provision and public choice theory. Analysis is concentrated around equilibria that take place in the case of asymmetric information, economic efficiency losses in such equilibria, reactions of market agents and state on hidden actions and characteristics'. Then mechanism design problem and its application to public good provision are considered. Finally, we address some questions of social choice theory. Several important theorems are proven in the course including Arrow's impossibility theorem and Gibbard-Satterthwaite's theorem.

Key words: microeconomics, asymmetric information, public goods

ISBN

Введение

Результат первой теоремы благосостояния весьма важен. Экономические агенты преследуют свои собственные цели, руководствуясь исключительно мотивами личной выгоды, никто не координирует их действия и в результате оказывается, что их индивидуальные действия не только согласованы друг с другом, не только не возникает хаоса, но напротив, возникает некая гармония. Более того, эта гармония оптимальна. Агент преследует свои собственные интересы, а ресурсы, которыми он располагает используются оптимальным образом, точнее Парето-оптимальным образом.

Этот важный результат не совсем очевиден на практике. В действительности рыночная экономика не столь эффективна, имеются определенные потери эффективности. Для лучшего понимания природы этих потерь следует обратиться к условиям применимости основной теоремы экономики благосостояния.

Условия применимости первой теоремы благосостояния (FFWT):

1. в экономике рынки совершенно конкурентны
2. имеется полная система всех рынков
3. все рыночные агенты имеют доступ к полной информации (условие полноты и симмметричности информации)

Нарушение любого из этих условий ставит под сомнение выводы теоремы. Рынки могут быть несовершенными. Например, вследствие того, что некоторые агенты обладают большей рыночной властью по сравнению с другими (в предельном варианте появляется монополия, олигополия, и т.д.). Некоторые рынки могут отсутствовать и это вновь приведёт к нарушениям выводов теоремы, поскольку нарушено предположение о *полной* системе конкурентных рынков. При нарушении этого условия поялятся проблема экстерналий - нет рынка, который бы учитывал воздействие внешних эффектов и отражал бы это воздействие. Наиболее известным типом экстерналий (внешних эффектов) является предоставление общественных благ. И здесь существует ряд поблем: проблемы с достижением рыночного равновесия, проблемы с эффективностью полученных равновесных состояний. Нарушение предположения об информационной симметрии приводит к различного рода коллизиям, неэффективным равновесиям. Возможно также полное исчезновение некоторых рынков в условиях асимметричной информации.

Главные разделы курса посвящены асимметричной информации и проблеме общественных благ.

ПРОВАЛЫ РЫНКА

(Market Failures)

В этом курсе рассматриваются две причины несостоятельности конкурентной рыночной системы: информационная асимметрия и наличие общественных благ в экономике.

Что значит “информация распределена асимметрично”?

Представим, что два рыночных агента вступают друг с другом в экономические отношения (они собираются заключить сделку). Предположение симметрии информации исходит из того, что агенты полностью осведомлены о том, что представляют из себя контрагент и имеют полную информацию о предмете транзакции (что из себя предсталяет товар). Если это предположение нарушается, то информация распределениа асимметрично.

К примеру, сделка представляет из себя контракт, который предполагает, что некоторая деятельность будет осуществляться после заключения сделки (например, оказание услуги). Однако поведение контрагента в процессе этой сделки ненаблюдаемо. Это ещё один пример асмимметричнной информации.

Асимметричная информация подразделяется на два больших класса:

а) “ненаблюдаемые характеристики” - adverse selection. В русскоязычной литературе не существует однозначного перевода этого термина. В даннном курсе будет использоваться перевод “нежелательный или отрицательный отбор”

б) “ненаблюдаемые действия” – moral hazard. Это ситуации “морального риска”.

Эти понятия пришли в экономическую теорию из практики страхового дела, поскольку именно в этой отрасли информационная асимметрия встречается чаще всего.

Почему возникает нежелательный отбор?

Самым распространённым примером считается моделирование ситуаций при приёме на работу. Работодатель объявляет, что за определенный вид работы он заплатит определенную сумму денег. Он ожидает получить наиболее работоспособного, наиболее эффективного работника. Однако люди знают себе цену и, если работодатель установит верхнюю границу зарплаты, то он может получить достаточно квалифицированных работников. Однако чем менее производителен и талантлив человек, тем более охотно он пойдёт работать за установленную зарплату. Таким образом, отсекается целый класс более трудоспособных кандидатов, поскольку серьёзные работники будут раздумывать при принятии решения о трудоустройстве. Возникает нежелательный отбор.

Другой пример. Страховая компания предлагает автомобилистам застраховаться на случай аварии. Налицо ситуация нежелательного отбора, поскольку в первую очередь придут те, кто наиболее подвержен авариям. Хорошие водители не станут страховаться, особенно если стоимость страховки велика. Для хорошего водителя авария маловероятна, а страховую плату нужно вносить в любом случае.

Покупка подержанного автомобиля – ещё один пример нежелательного отбора. Если покупатель установит верхнюю границу цены машины, то он не должен ожидать, что продавцы действительно хороших автомобилей придут к нему первыми.

Банковское кредитование - выдаются ссуды на осуществление коммерческих проектов. Условия займа и указанный процент предопределят тот контингент заёмщиков, которые обратятся за ссудой в первую очередь. Кто охотнее всего возьмёт ссуду: авантюрист или серьёзный заёмщик? Более вероятно, что авантюрист обратится первым. Таким образом, предложение о банковских ссудах привлекает не совсем тех агентов, с которыми банк хотел бы иметь дело.

Эти примеры демонстрируют происхождение термина “нежелательный отбор” – происходит отбор, но не тот, который желаем, а наоборот.

Всякий раз, имея дело с контрагентом, о котором вам известно совсем немного (кем на самом деле является ваш контрагент), вы находитесь в ситуации асимметричной информации. Или, всякий раз, когда вы приобретаете товар и имеете слабое представление о характеристиках товара, вы находитесь в ситуации информационной асимметрии.

Что касается ненаблюдаемых действий, то нужно заметить, что граница между двумя этими классами весьма подвижна, но всегда можно выяснить, о каком типе информационной асимметрии идёт речь.

В случае информационной асимметрии, где имеет место “ненаблюдаемость действий”, контрагент не является загадкой, но вот как этот контрагент будет действовать, скажем, рамках заключённого контракта, представляет большой вопрос и сферу для изучения. Важно иметь в виду, что большинство контрактов не являются полными (т.е. в них не предусмотрены все возможные ситуации и проблемы). Контракт не может предвидеть все многообразие ситуаций, всегда остается некоторая свобода действий в рамках заключённого контракта. Надо отметить, что ситуации грубого и непосредственного нарушения контракта не рассматриваются. Напротив, рассматриваются ситуации, когда агент действует в соответствии с условиями контракта, но имея указанную свободу действий. Исключительно важно, как поведёт себя агент в этом случае. Налицо ненаблюдаемые действия и моральный риск.

С ситуациями такого типа предполагается работать на протяжении всего курса.

Первое, если информация распределена асимметрично, следует ожидать, что выводы первой теоремы благосостояния окажутся несправедливыми. В частности, равновесие не является Парето-оптимальным. Второе, если вследствие информационной асимметрии возникают определенного рода потери, то кто несёт эти потери? Третье, какого рода равновесия могут возникнуть в условиях информационной асимметрии и как такие равновесия описывать? Четвертое, существует ли возможность улучшить эти равновесия? Если равновесие не является Парето-оптимальным, то теоретически это означает, что существует другой способ перераспределить имеющиеся ресурсы так, что никто не проигрывает, а кто-то, возможно, выигрывает.

Здесь возникает много вопросов: как этот способ реализовать? Если равновесие неоптимально, то как выглядит оптимум?

Важно сделать оговорку: оптимум при каких предположениях? Говоря о Парето-оптимальности или неоптимальности, неявно предполагается, что есть возможность централизовать экономику, т.е. возможно поставить во главе экономики своего рода плановый орган – Госплан, который перераспределит ресурсы в экономике таким образом, что всем станет лучше. Неявным является и предположение о том, что такой Госплан является всесильным и всезнающим (omnipotent and omniscient). Таким образом, Госплан не сталкивается с информационной асимметрией.

Задача формулируется следующим образом: в условиях асимметричной информации возникло некоторое, неэффективное равновесие. Если экономику централизовать, то возможно ли предложить распределение ресурсов, которое будет более привлекательным? При каких условиях? При условиях, что тот, кто занимается альтернативным перераспределением ресурсов, информирован в одинаковой степени с участниками рынка, т.е. он знает то, что знают участники рынка, но не более. Таким образом, Госплан сталкивается с такими же информационными ограничениями, как и участники рынка. Несмотря на это, может ли Госплан предложить более предпочтительное распределение ресурсов. Если ответ утвердительный, то тогда равновесие, полученное рынком, не является условно Парето-оптимальным (constrained Pareto-optimum).

Определение:

Говорят, что рыночное равновесие является ***условно Парето-оптимальным****, если не существует способа предложить иное распределение ресурсов, которое будет Парето-доминировать данное равновесие при дополнительном условии, что для построения этого альтернативного распределения ресурсов достаточно той информации, которая доступна участникам рынка.*

Иначе говоря, если можно придумать Госплан, который знает то же, что и участники рынка, и он способен перераспределить ресурсы лучше, то тогда равновесие не является условно Парето-оптимальным. И наоборот.

Потери эффективности в ситуациях с асимметричной информацией могут возникнуть вследствие двух причин: первая причина заключается в том, что вы не знаете всего того, что нужно для лучшего распределения ресурсов; вторая причина состоит в том, что даже обладая знанием о том, как лучше поступить, то действуя децентрализованно, вы такое распределение вы получить не можете.

Говоря об условном оптимуме Парето, используют термин “оптимум 2-го ранга” - second best allocation.

Таким образом, предметом нашего интереса будет являться равновесие, возникшее в условиях асимметричной информации. В первую очередь, нас интересует вопрос, является ли это равновесие Парето-оптимальным при действующих ограничениях?

Вопрос: если имеется ограниченный Парето-оптимум (second best PO), можно ли утверждать, что он будет неограниченным Парето-оптимумом? Нет, очевидно, является правильным ответом.

С другой стороны, если имеется неограниченный Парето-оптимум (first best PO), можно ли утверждать, что он является ограниченным Парето-оптимумом? Да, очевидно.

Классический пример отрицательного отбора был предложен Джорджем Акерлофом – проблема "лимонов". Типичная ситуация асимметричной информации с ненаблюдаемыми характеристиками - рынок подержанных автомобилей.

Пример 1. Подержанные автомобили.

Представим, что на рынке подержанных автомобилей представлены два типа автомашин – "хорошие" и "плохие" (лимоны). Эти машины наполняют рынок в одинаковой пропорции, т.е. при покупке автомобиля с вероятностью ½ можно приобрести хорошую машину, а с вероятностью ½ - лимон. Покупатель имеет некоторое представление о том, сколько должна стоить хорошая машина (резервная цена, к примеру, равна $ 2400), и о том, сколько должна стоить плохая машина. Пусть покупатель готов заплатить $ 1400 за плохую машину. В свою очередь, продавец хорошего автомобиля согласен продать машину не менее чем за $ 2000. Продавец плохой машины предлагает автомобиль не менее чем за $ 1000.

Если бы информация была полной, то возникло бы два сегмента рынка: рынок плохих машин и хороших, на этих рынках покупатели продавцы заключали бы сделки. Однако в реальности таких рынков нет, существует единый, смешанный рынок автомобилей. Покупатель машины осознает, что он фактически играет в некоторую лотерею, приобретая подержанную машину. Предположим, покупатель нейтрален к риску (т.е. при принятии решений о покупке он ориентируется на ожидаемый выигрыш). В данном случае, ожидаемый выигрыш равен 1900 = ½*2400 + ½*1400. Заметим, что в этом случае рынок хороших автомобилей закрывается: владельцы хороших автомобилей не станут предлагать машину за такую сумму денег. Очевидно, что половина рынка (рынок хороших авто) исчезает. Остается рынок лимонов. Это яркий пример того, как информационная асимметрия вредит рыночному равновесию.

Пример 2. Продажа коровы.

Представим, что есть два крестьянина и один хочет продать другому свою корову. Удойность коровы является важной характеристикой. Представим, что им эта характеристика известна. Состоится ли сделка?

Определим функции полезности участников:

Пусть S – объём потребления молока, m – количество денег

θ - коэффициент, соизмеряющий молоко с деньгами (фактически, то количество денег, которое участник готов заплатить за молоко)

$U = \theta*S + m$

В случае идентичности участников торговля теряет смысл, поскольку они одинаково ценят молоко. Представим, что тот, кто хочет продать корову, ценит молоко меньше.

Функция полезности продавца - $U = \theta_1*S + m_1$

Функция полезности покупателя - $U = \theta_2*S + m_2$

Если $\theta_2 > \theta_1$, то для торговли есть основания, поскольку покупатель ценит корову больше, чем её продавец.

Сильная теорема Коуза (Strong Coase Theorem):

Имеется n участников и их функции полезности квазилинейны:

$U = m_i + \varphi_i(y)$, m_i – сумма денег, которой располагает i-ый участник, y – неденежный, физический параметр.

Допустимые варианты распределения ресурсов в этой экономике:

$X = \{(m_1,\ldots\ldots, m_n, y)\text{: } y \in Y, \Sigma m = P(y)\}$ P – некоторая функция

Теорема:

Распределение ресурсов $(m^*_1,\ldots\ldots, m^*_n, y^*) \in X$ является Парето-оптимальным в том и только том случае, когда

$\Sigma_i m_i = P(y), y \in Y$

$y^* \in \mathrm{Argmax}\ \{y \in Y\text{: } \Sigma_i\varphi_i(y) = P(y)\}$, т.е. физическая компонента максимизирует суммарную выгоду всех агентов.

В данном случае из решения максимизационной задачи мы получаем все оптимумы Парето, что обусловлено специфическим видом функций полезности – они квазилинейны, линейны по деньгам. Таким образом, из одного Парето-оптимума можно перейти к другому Парето-оптимуму, используя денежные трансферты, потому оптимумы Парето будут различны, но различаться они будут только величинами m. В случае единственности физическая компонента будет иметь единственное значение, вне зависимости от выбранного Парето- оптимума. Это означает, что для поиска оптимального (y) необходимо максимизировать сумму выигрышей.

Вернёмся к задаче о продаже коровы

$U_1 = \theta_1*S_1 + m_1$ $\quad U_2 = \theta_2*S_2 + m_2$

$$\text{Где } S_1 = \begin{cases} 1,\text{если корова у первого участника} \\ 0,\text{если корова у второго участника} \end{cases}$$

Сумма денег в этой экономике остается постоянной. Для получения Парето-оптимума необходимо решить максимизационную задачу: $\theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 \rightarrow \max$

s.t. $S_1 + S_2 = 1$

$S_i = \{0,1\}$

Оптимум достигается в том случае, когда $S_1 = 0$, $S_2 = 1$.

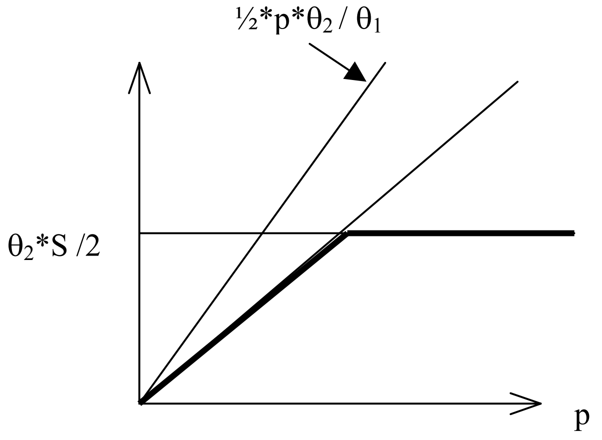
В случае симметрично распределённой информации сделка состоится, причём цена коровы будет содержаться в интервале: $\theta_1 S_1 < p < \theta_2 S_2$, в непустом множестве.

Рассмотрим теперь случай информационной асимметрии: удойность коровы (S – непрерывная величина в данном случае) известна первому участнику (продавцу), но не известна второму (покупателю). Покупателю известно лишь, что удойность коровы равномерно распределена в интервале [0,S*]. Предполагается также, что параметры θ_1, θ_2 известны обоим участникам.

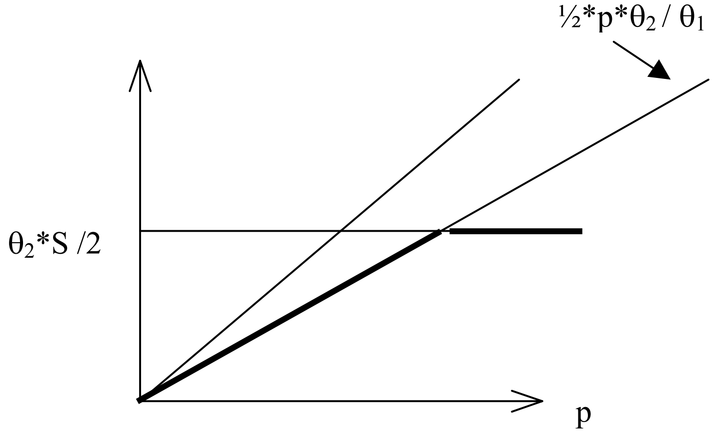
Пусть p - цена продавца. Эта цена воспринимается вторым участником как некий *сигнал*, некоторая дополнительная информация о корове. Покупатель исходит из того, что если продавец согласен расстаться с коровой, то цена, вероятно, достаточна, чтобы компенсировать передачу коровы. Следовательно, удойность располагается в интервале $S \in \{0, \min(S, p/\theta_1)\}$. В случае покупателя, нейтрального к риску, рассматривается ожидаемое значение выигрыша: $\theta_2 \min(S,\ p/\theta_1)/2$. Покупатель согласится на сделку, если $p \leq \theta_2 * \min(S,\ p/\theta_1)/2$.

Графическая интерпретация:

Очевидно, что решение зависит от соотношения θ_2 и θ_1. В данном случае потребность в корове значительна, т.е. $\theta_2 > 2\theta_1$ - выигрыш покупателя в два раза превышает выигрыш продавца. Это не всегда так.



Рассмотрим следующий пример:



Этот график построен в предположении, что $\theta_2/2 < \theta_1 < \theta_2$. Тот факт, что $\theta_1 < \theta_2$ означает, что покупка коровы желательна, но выигрыши сторон не так велики. В этом случае торговля не состоится, возникает провал рынка – ожидаемый выигрыш покупателя будет меньше предлагаемой цены и сделки не будет. Рынок полностью исчез.

Задачи с ненаблюдаемыми характеристиками: рынок труда[1]

Предположим, на рынке труда существует континуум работников. Каждый работник характеризуется своим типом (производительностью) - $\theta \in [\theta_0,\theta_1]$. Работник с типом θ за единицу времени произведёт продукции на сумму, равную θ рублей. Обозначим $F(\theta)$ – кумулятивную функцию распределения производительности, которая принимает следующие значения на границах интервала: $F(\theta_0) = 1$ и $F(\theta_1) = 0$.

Работник может использовать свой потенциал по-разному: он может работать в рыночном секторе и получать зарплату, а может работать в нерыночном секторе, т.е. заниматься натуральным хозяйством. Обозначим за $r(\theta)$ отдачу от занятости в натуральном хозяйстве.

Информация распределена симметрично

Тип работника известен работодателю. Для каждого типа работника сформировался конкурентный рынок труда, где установилась равновесная зарплата. Известно, что в долгосрочном равновесии зарплата, устанавливаемая рынком, равна предельной производительности работника. Таким образом, каждый работник сравнивает рыночный доход $w = \theta$ с внерыночным доходом, равным $r(\theta)$[2].

Очевидно, что по найму будут работать только те работники, для которых $\theta > r(\theta)$. Считаем также, что в случае $\theta = r(\theta)$ работник пойдёт работать по найму (по некоторым причинам – престиж работы, интерес и прочее). Таким образом, множество работников, работающих по найму определяется следующим образом: $\Theta_0 = \{\theta \in [\theta_0,\theta_1] : r(\theta) <= \theta\}$.

Именно так будет выглядеть рыночное равновесие в этом случае и каждый работник из этого множества получает зарплату, равную θ. Работники, занятые в натуральном хозяйстве, получают $r(\theta)$.

Это равновесие является Парето-оптимальным, поскольку в данном случае имеется полная система рынков, информация распределена симметрично и в силу первой теоремы благосостояния рыночное равновесие оказывается эффективным (Парето-оптимальным).

Убедимся в Парето-оптимальности. Вспомним, что согласно сильной теоремы Коуза, в условиях квазилинейных предпочтений (в данном случае предпочтения линейны по доходу, нелинейны по усилиям) Парето-оптимальность проверяется следующим критерием: Парето-оптимум имеет место только в том случае, когда максимален суммарный доход.

Посчитаем суммарный доход, который задаётся следующим интегралом:

$$\int[\theta I(\theta) + r(\theta)(1-I(\theta))]\, dF(\theta) \rightarrow \max \text{ (по } \Theta)$$

$$\text{где } I(\theta) = \begin{cases} 1, \theta \in \Theta \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

---

[1] Самостоятельное чтение: стр.436 – 448 Mas-Colell, Green *Microeconomic Theory*

[2] Предполагается, что рыночная цена продукции конкурентных фирм равна 1.

отражает факт занятости работника в рыночном секторе. Заметим, что на данном этапе Θ не совпадает с Θ_0 (работников, работающих по найму). Вклад в совокупный доход общества выражается следующим образом: $\int\theta I(\theta)dF(\theta)$. Аналогично подсчитывается вклад работников, занятых во внерыночной сфере: $\int r(\theta)(1-I(\theta))dF(\theta)$[1]. Максимизация по Θ означает максимизацию по $I(\theta)$ для каждого типа работника и, так как переменные максимизации между собой не связаны, то нужно максимизировать подынтегральное выражение по параметру θ. Максимум достижим и равновесие является Парето-оптимальным (в условиях симметричной информации).

Информация распределена асимметрично

Прежде всего, начинают пропадать рынки труда разных типов и появляется единый рынок труда, где представлены все типы работников. Каждый работник, если он принят на работу, получает зарплату w. Зарплата не дифференцируется по типу работника. Какие работники откликнутся на предложение работать при существующей зарплате?

Разумно предположить, что откликнутся те, для кого этот уровень зарплаты более привлекателен по сравнению с альтернативой (быть занятым в натуральном хозяйстве и получать $r(\theta)$). Таким образом, по найму придут работники, которые составляют множество $\Theta(w) = \{\theta: r(\theta) <= w\}$. С работниками из этого множества придётся иметь дело работодателю. Предположим, что нанимается большое количество людей и работодателя интересует средняя производительность работников.

Рассчитаем количество работников, которые согласятся работать по найму на предложенных условиях: $\int_{\Theta(w)} dF(\theta)$. Здесь неявно предполагется, что общее число работников нормировано и равно единице.

На какой доход может рассчитывать работодатель в этом случае? Его доход составит: $\int_{\Theta(w)} \theta dF(\theta)$.

Работодатель будет сравнивать валовой доход, полученный от нанятых работников, с валовыми издержками.

$\int_{\Theta(w)} \theta dF(\theta) <> w \int_{\Theta(w)} dF(\theta)$

В равновесии, предполагая постоянную отдачу от масштаба (однородность нулевой степени для производственных функций), фирма должна зарабатывать нулевую прибыль.

Условие равновесия:

$\int_{\Theta(w)} \theta dF(\theta) = w \int_{\Theta(w)} dF(\theta)$

т.е. в равновесии зарплата будет равна средней производительности работников:

$\mathbf{w} = \int_{\Theta(w)} \theta dF(\theta) / \int_{\Theta(w)} dF(\theta) = \mathbf{E}(\theta \mid \Theta(\mathbf{w}))$

Здесь возникает много вопросов: существует ли равновесие? Если существует, то является ли оно Парето-оптимальным (условным или безусловным)?

---

[1] Выводы сильной теоремы Коуза сохраняются для произвольного числа участников.

Можно предположить, что работники с более низкой производительностью будут довольны сложившимся равновесием, поскольку они будут получать зарплату, которая выше, чем при условиях информационной симметрии. Происходит, фактически, субсидирование низкопроизводительных работников высокопроизводительными. Можно также предположить, что работники с высокой производительностью будут чувствовать себя хуже в этом равновесии, потому как они могли бы получать больше в случае информационной симметрии. В некоторых ситуациях высокопроизводительные работники просто отказываются работать на предложенных условиях.

Пример 1.

$\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 1$ $F(\theta) = \theta$, т.е. имеется равномерное распределение; $r(\theta) = \theta^2$ Свойства функции $r(\theta)$:

1. $r(\theta)$ – монотонно возрастающая функция
2. $r(\theta) \leq \theta \ \forall\theta$

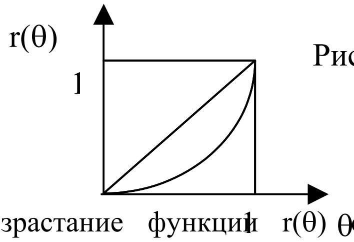


Рис. 2. 1

Интерпретация первого свойства: монотонное возрастание функции $r(\theta)$ обосновывается универсальностью таланта – если человек более производителен в рыночном хозяйстве, то он более производителен и в натуральном хозяйстве. Талантливый человек преуспевает во всех сферах жизнедеятельности.

Смысл второго свойства заключается в том, что в идеале по найму должны работать все, т.е. множество $\Theta_0 = [\theta_0 , \theta_1] = [0, 1]$.

В рассматриваемом примере эти условия выполнены, но, как мы увидим, по найму будут работать не все. Пусть w – это зарплата, при которой возникает рыночное равновесие. Тогда множество

$\Theta(w) = \{\theta:r(\theta)<=w\} = \{\theta: \theta\textasciicircum 2<=w\} = [0, \sqrt{w}]$.

Что касается количества работников, то оно может посчитано как мера отрезка (вспоминая про равномерное распределение): $\int_{\Theta(w)} dF(\theta) = \sqrt{w}$. Выпуск продукции рассчитывается как $\int_{\Theta(w)} \theta dF(\theta) = \int_{[0,\sqrt{w}]} \theta \, d\theta = ½w$.

Здесь неявно предполагается, что заработная плата меньше единицы. Таким образом, $E(\theta \mid \Theta(w)) = ½ w$.

В равновесии $w = ½ \sqrt{w}$. Откуда следует, что $w = ¼$. Отсюда также следует, что по найму будут работать люди из $\Theta(¼) = [0, ½]$. Разумеется присутствует и нулевое равновесие. В случае $w = 0$ никто не работает на рынке, кроме может быть работника с нулевой производительностью. Каждый при этом получает заслуженный доход в натуральном хозяйстве - $r(\theta)$. В равновесии при $w = ¼$ каждый получает более высокий доход. В этом равновесии работники, занятые в рыночной сфере, находятся в более выгодном положении по сравнению с нулевым равновесием. Те работники, для которых $\theta > ½$, безразличны к этому равновесию. Таким образом, имеем дело с Парето-улучшением.

Очевидно, что полученное рыночное равновесие не является безусловным оптимумом Парето, поскольку в безусловном оптимуме Парето должны работать все. Значит, имеются потери эффективности, связанные с информационной асимметрией. Будет ли это равновесие условным Парето-оптимумом? Ответ не так очевиден. Далее будет приведено доказательство того, что такой оптимум является условным оптимумом Парето.

Пример 2:

Предположения, сделанные относительно функции $r(\theta)$, не так очевидны. Эта функция может убывать или быть константой. Пусть $r(\theta) = r$ (постоянная величина). Предположим, что есть люди, у которых рыночная производительность может быть и меньше, и больше r, т.е. $0< F(r) < 1$.

Как выглядит равновесие в этом случае? Прежде всего, очевидно, что множество $\Theta(w)$ будет либо пустым, либо заполнит весь интервал.

Правая часть выражения, дающего равновесие, всегда, при сделанных предположениях, равна $E(\theta)$. Следовательно, в равновесии $w = E(\theta)$. Иначе говоря, в этом равновесии зарплата всегда равна средней производительности. Но кто будет работать при такой зарплате (каков вид множества $\Theta(w)$)? Ответ такой: если $E(\theta) > r$, средняя производительность всего контингента работников больше чем фиксированный для каждого из них внерыночный доход, то в равновесии будут работать все. Как выглядит множество $\Theta_0 = \{\theta\in[\theta_0,\theta_1]: r(\theta) <=\theta\}$? А в силу нашего предположения, что $0 < r(\theta) <1$, $\Theta_0 \neq [\theta_0,\theta_1]$, т.е часть работников не должна работать за зарплату. В этом контингенте много работников с высокой производительностью, который поднимают средний уровень производительности и эти талантливые люди втягивают на рынок труда тех, кто не должен работать.

Возможна ситуация, когда $E(\theta) < r$. В этом случае множество $\Theta(w)$ пустое, на рынке никто не работает. В этом равновесии нет ничего хорошего, потому как часть работников (в оптимуме) должна работать по найму. В этом случае преобладают работники низкой производительности и они создают неблагоприятный фон: средний заработок низкий.

Эти примеры показывают, что основной проблемой является способность работодателя различить высокопроизводительных работников и низко производительных. Проблема усугубляется тем, что рынок труда может полностью исчезнуть.

Пример 3:

1. $r(\theta)$ – монотонно возрастающая функция

$r(\theta) \leq \theta$. В совокупности эти условия называют “extreme adverse selection” – экстремальный отрицательный отбор.

3. Дополнительные предположения: функцию $r(\theta)$ будем считать непрерывной (+ условия регулярности), а что касается функции $F(\theta)$, то будем считать, что у этого распределения существует положительная, непрерывная плотность - $f(\theta)$.

По прежнему решаем уравнение $w = E(\theta \mid \Theta(w))$. Как выглядят решения этого уравнения?

Удобно изобразить график функции w, т.е. прямую под углом 45^0 , а затем график правой части этого уравнения – график ожидаемой производительности при зарплате w.

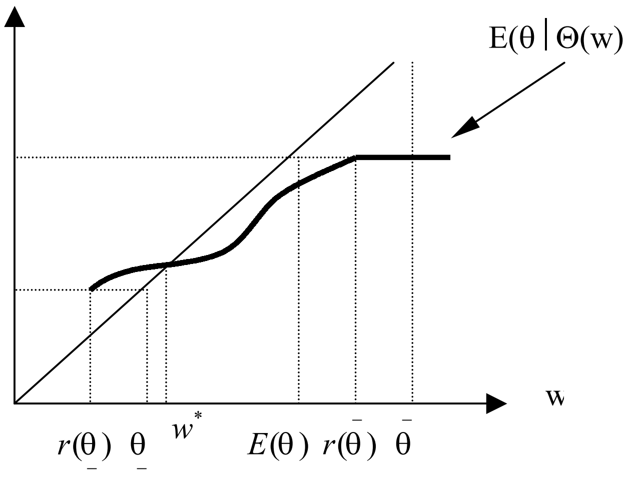


Рис. 2. 2

На горизонтальной оси откладываем уровни производительности работников. Поскольку выполнено условие $r(\theta) \leq \theta$, то на горизонтальной оси можно расположить значения $r(\theta)$.

Предположение: $E(\theta) < r(\theta_1)$. Это предположение исключает возможность того, что по найму будут работать все. Действительно, если по найму работают все, то из уравнения $w = E(\theta \mid \Theta(w))$ следует, что заработная плата будет равна средней производительности. Если это так, то средняя заработная плата, равная средней производительности, должна быть привлекательной и для человека с наиболее высокой производительностью. Вне рынка человек с высокой производительностью может заработать $r(\theta_1)$. Значит, предлагаемое условие исключает возможность получения Парето-оптимального равновесия (оптимум первого порядка требует полной занятости). В конкурентном равновесии будет работать по найму только часть работников.

Очевидно, что если заработная плата $w < r(\theta_0)$, то бессмысленно ожидать, что на эту зарплату кто-то откликнется. Поэтому нам интересны случаи, когда $w \geq r(\theta_0)$.

Если заработная плата $w = r(\theta_0)$, то чему равно значение $E(\theta \mid \Theta(w))$? Единственный работник, который согласится работать на таких условиях, это работник обладающий самой низкой производительностью, т.е. θ_0. Следовательно, в этом случае $E(\theta \mid \Theta(w)) = \theta_0$. Отобразим это на графике.

Будет ли функция $E(\theta \mid \Theta(w))$ монотонно возрастающей по w? По сути, если повышается заработная плата, то можно ли утверждать, что средняя производительность наёмных работников будет расти? В общем случае однозначного ответа нет. Эта функция будет возрастать в предположении, что $r(\theta)$ монотонно возрастающая функция. Если это предположение убрать, то, очевидно, что рост зарплаты не приводит к росту средней производительности работников. Например, если $r(\theta)$ монотонно убывает, тогда чем выше зарплата, тем охотнее пойдут работать по найму те люди, у которых $r(\theta)$ высокая. Они менее производительны, результат будет разочаровывающим.

Упражнение: *Доказать, что* $F(\theta) = E(\theta \mid \Theta(w))$ *есть монотонно неубывающая функция в предположении, что* $r(\theta)$ *монотонно возрастает.*

Таким образом, график функции $E(\theta \mid \Theta(w))$ начинается в точке $r(\underline{\theta})$ и некоторым образом возрастает. В регулярном случае эта функция пересекает биссектрису и мы находим равновесие. Произойдёт ли такое пересечение? Для этого нужно посмотреть значение функции, когда $w = r(\theta_1)$. В этом случае $E(\theta \mid \Theta(w)) = E(\theta)$, работают все, поскольку предлагается зарплата, которая превышает альтернативный доход для самого производительного работника (и для остальных соответственно). Если повышать зарплату сверх уровня $r(\theta_1)$, то функция будет горизонтальной. Таким образом, окончательный вариант представлен на рисунке 2.

При принятых предположениях равновесие обязательно существует, поскольку функция непрерывна и пересекает биссектрису. Единственность не гарантируется, таких равновесий может быть много (это не противоречит предположению монотонного возрастания). В любом случае полученное равновесие не является эффективным, оно не является оптимумом первого порядка, поскольку $w^* < r(\theta_1)$ и значительное количество работников не станет работать по найму на этих условиях.

Ещё раз рассмотрим механизм, вследствие которого рынок труда сужается (по сравнению с тем, каким он мог бы быть в условиях полной информации). На рынке труда представлены работники с низкой, посредственной и высокой уровнями производительности. Представим, что работники с посредственной производительностью преобладают на рынке. Таким образом, производительность посредственных работников станет средней производительностью, если нанимают всех сразу. Тогда хорошие работники уйдут с этого рынка, потому как уровень зарплаты, на который они могут рассчитывать меньше того, что они получат во внерыночной сфере. Таким образом, посредственные работники «выталкивают» с рынка хороших работников. Но когда хорошие работники покинули рынок, то посредственные работник переходят в ранг хороших работников на этом рынке и они обнаруживают, что на рынке есть ещё и плохие работники. И средний уровень зарплаты в этом случае может оказаться неудовлетворительным для посредственных работников, они покидают рынок наёмного труда. Плохие работники могут вытолкнуть с рынка посредственных работников. Процесс может зайти далеко (до полного коллапса рынка).

Графически:

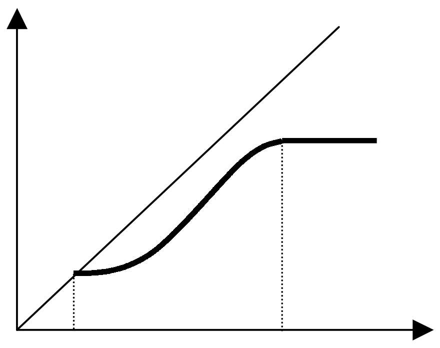


Рис. 2. 3

***Пример**:* Заметим, что если $r(\theta_0) < \theta_0$, как на нашем графике, то какая-то часть работников будет обязательно работать по найму, потому как график $E(\theta \mid \Theta(w))$ расположен строго слева от биссектриссы. Чтобы получить пример полного коллапса рынка, мы должны предположить, что $r(\theta_0) = \theta_0$.

Единственной точкой пересечения является точка θ_0 и на этом рынке останутся работники самой низкой производительности.

Упражнение: $\theta \in$ *[0, 2] и распределена равномерно –* $F(\theta) = ½\,\theta$*;* $r(\theta) = \alpha\theta$*,* $½<\alpha<1$*. Показать, что в этом случае единственным равновесием в этом случае является равновесие, когда работают только те, у кого нулевая производительность (*$\theta = 0$*) – полный коллапс рынка.*

Сколько равновесий будет на рынке?

В промежутках между крайними точками кривая $E(\theta \mid \Theta(w))$, монотонно возрастая, может вести себя довольно необычно. В нашем случае получилось три равновесия (могло быть и больше, континуум равновесий). Все полученные **равновесия упорядочены по Парето.**

Ясно, что они упорядочены по уровню заработной платы. Докажем, что то равновесие, где зарплата выше, доминирует по Парето равновесие, где зарплата ниже. Нужно убедиться, что при повышении зарплаты, при условии их равновесности, никто не проиграет и кто-то выиграет.

При повышении зарплаты те, кто ранее работали, будут продолжать работать и им станет лучше. Также придут новые работники, которые ранее не работали за старую зарплату, им станет лучше [$w_2 > r(\theta)$]. Какая-то часть людей не работала ни за старую зарплату и не работает за новую (таким людям всё равно). Таким образом, получаем Парето-улучшение, что подтверждает наш вывод об упорядоченности равновесий по Парето.

В случае конкуренции все эти равновесия могут возникнуть с одинаковой вероятностью. Рынок может оказаться в любом равновесии. Какие из получаемых равновесий являются условно Парето-оптимальными, а какие безусловно? Можно ли придумать рыночный механизм, который исключит все Парето-доминируемые равновесия и оставит лучшее?

***Обозначение**:* W^* - множество равновесных заработных плат (может состоять из единственной точки, но в данном случае оно содержит три точки); $w^* = \max W^*$

***Предположение**:* в точке w^* кривая $E(\theta \mid \Theta(w))$ пересекает биссектриссу последний раз. Предполагаем, что в малой окрестности точки w^* эта кривая расположена всюду выше диагонали, что исключает вырожденные случаи, когда имеет место касание диагонали.

Таким образом, существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $w \in (w^* - \varepsilon, w^*)$ тогда $E(\theta \mid \Theta(w)) > w$.

Предположим далее, что две фирмы конкурируют по Бертрану за работников. Каждая из фирм предлагает заработные платы w^1 и w^2 соответственно, работники идут работать в ту фирму, где зарплата выше. Если зарплаты совпадают, то рынок работников делится пополам[1]. Как в этой ситуации выглядит равновесие по Нэшу?

Игру можно рассматривать как многошаговую. На первом шаге фирмы независимо делают предложения о зарплате. На втором шаге играют работники –они откликаются на предложения о зарплате, исходя из собственных интересов. Можно рассматривать равновесия *совершенные по подыграм* в этой двухшаговой игре. Проще свести игру к одношаговой считая, что оптимальная реакция работников на предложения фирм известна. Понятно, что работники пойдут работать в ту фирму, где выше зарплата и лишь та часть всех работников, для которых $r(\theta) \leq \max(w^1, w^2)$.

Можно доказать, что в этой неконкурентной ситуации единственным равновесием Нэша будет $w^* = w^1 = w^2$. Таким образом, даже несовершенная конкуренция отсортировывает плохие равновесия, оставляя наилучшие.

Доказательство этого утверждения выглядит примерно следующим образом. Если мы имеем дело с равновесием Нэша, то в равновесии фирмы получают нулевую прибыль. Прежде всего ясно, что ни одна из фирм не получит отрицательную прибыль (установив очень низкую заплату и не получив ни одного работника). Значит, если неверно, что фирмы получают нулевую прибыль, то их суммарная прибыль должна быть положительной. Обозначим эту суммарную прибыль П. Может случиться так, что одна фирма устанавливает зарплату $w^1 < w^2$, тогда прибыль фирмы, установившей зарплату w^1, будет равна нулю. Соответственно, прибыль второй фирмы будет равна П. Однако, эта ситуация не является равновесной. Фирма 1 может поднять зарплату до уровня w^2 или чуть выше, тогда она получит весь рынок и заработает положительную прибыль, чуть меньшую П. Значит в равновесии обязательно $w^1 = w^2$ и пусть, по- прежнему, прибыль положительна. Будет ли это равновесием? Очевидно, нет. Возьмём, к примеру, фирму, которая получает половину прибыли и пусть она немного повышает зарплату, тогда она получает весь рынок и почти весь объём прибыли (заведомо больше ½ П). Таким образом, в равновесии Нэша обе фирмы зарабатывают нулевую прибыль.

Рассмотрим такое равновесие w^1 и w^2 (первоначально эти зарплаты не обязаны совпадать). Пусть $w^* = \max\{w^1, w^2\}$. По наибольшей зарплате в этом равновесии люди реально работают (если зарплаты не равны, то более низкая зарплата номинально присутствует на рынке, на неё никто не откликается). Если люди работают, например, за зарплату w^1, то это означает, что $w^1 \in W^*$ (по определению). Можно утверждать, что $\max\{w^1, w^2\} \in W^*$.

---

[1] Предполагаем, что для фирм не существует ограничений на мощности и они нанимают столько работников, сколько захотят.

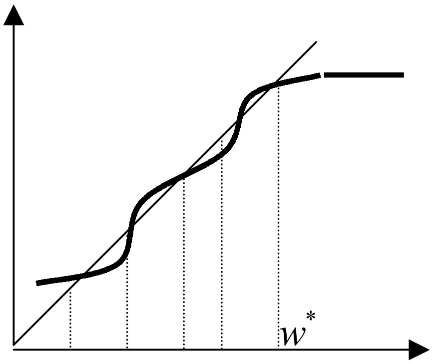


Рис. 2. 4

Если равновесная зарплата (в конкурентном смысле) не является наивысшей из конкурентных зарплат, тогда её можно повысить и фирма получит положительную прибыль. Таким образом, можно утверждать, что наивысшая из зарплат max $\{w^1, w^2\}$ не просто принадлежит W^*, а равна w^* .

Осталось показать, что $w^* = w^1 = w^2$. Пусть есть равновесие Нэша и наивысшая из этих зарплат равна w^* , а вторая зарплата может быть ниже (но тогда это не будет равновесием Нэша). Почему? Очевидно, можно немного уменьшить наивысшую зарплату, тогда вместо нулевой прибыли получим положительную (т.к. у конкурента зарплата ещё ниже). В этой игре есть единственное равновесие Нэша, когда $w^* = w^1 = w^2$.

Из нашего анализа следует, что все равновесия, кроме w^*, не являются условными Парето-оптимумами. В предположениях регулярности w^* (наилучшее конкурентное равновесие) является условным Парето-оптимумом.

Вывод заключается в следующем: в условиях информационной асимметрии в случае несовершенной конкуренции определённого типа появляется возможность отбросить Парето-доминируемые равновесия.

Задачи с ненаблюдаемыми характеристиками: рынок труда (продолжение)

***Постановка задачи*:** На рынке существует континуум потенциальных работников. Тип работника определяется его производительностью $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Известен закон распределения типов работников по их совокупности с функцией распределения $F(\theta)$ и плотностью распределения $f(\theta) > 0$ (для простоты). Считается, что каждый работник имеет возможность зарабатывать как на рынке, так и за пределами рынка. Если работник работает вне рынка, то его заработок составляет $r(\theta)$.

Рассматривается ситуация экстремального нежелательного отбора, которая описывается следующими условиями: $r(\theta) \le \theta$, т.е. в этой ситуации в условиях симметричной информации каждый работник работал бы по найму; предполагается, что $r(\theta)$ есть возрастающая, непрерывная функция.

Равновесие в условиях асимметричной информации: работодатель, не имея возможности распознать тип работника, предлагает всем одну и ту же зарплату – w. На эту зарплату откликаются работники из множества $\Theta(w) = \{\theta: r(\theta) <= w\}$. Равновесной в данном случае выступает зарплата, равная средней производительности всего контингента работников. Имеются также вырожденные равновесия (например, на рынке никто не работает), однако такие ситуации не представляют интереса для исследования.

Случай множественного равновесия представлен на рисунке 3.1

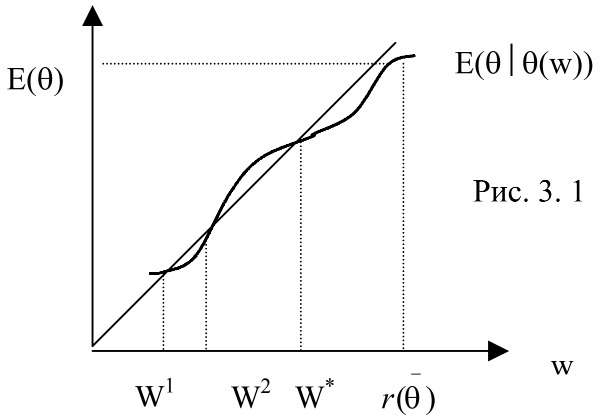


Рис. 3. 1

В данном случае $r(\theta_1)> E(\theta)$. Это означает, что не существует равновесия, при котором все работники работают на рынке. Поскольку если бы они все работали на рынке, то зарплата была бы равна $E(\theta)$, но работники высокой производительности не согласились бы работать на таких условиях. Значит, рыночное равновесие не является безусловным Парето-оптимумом.

Полученные равновесия упорядочены по Парето: чем выше уровень зарплаты, тем лучше. Условный оптимум Парето есть такое распределение работников между рынком труда и внерыночными видами деятельности, которое невозможно улучшить централизованно, при условии, что центральный планировщик (Госплан) располагает такой же информацией, что и рыночные фирмы.

Поскольку указанные равновесия упорядочены по Парето, то можно сразу заключить, что w^1 и w^2 не являются условными оптимумами Парето (они все Парето-доминируются распределением при w^*) и, что более важно, это равновесие w^* может быть достигнуто Госпланом.

Утверждение: *В предположениях регулярности наилучшее конкурентное равновесие является условным Парето-оптимумом.*

Это ещё нужно доказать. Вопрос теперь заключается в следующем: можно ли найти такое (уже неравновесное) распределение ресурсов, которое будет обладать следующими свойствами: во-первых, оно будет не хуже по Парето, чем w^*, во-вторых, оно должно быть сбалансированным и, в-третьих, оно будет реализуемо в условиях неполной информации. Если такое распределение возможно, то анализируемая точка не является условным оптимумом Парето. Если нет, то это распределение есть условный оптимум Парето.

Доказательство*:* мы предполагаем, что экономику можно централизовать и Госплан располагает той же информацией, что и фирмы. Госплан не может наблюдать типы работников, единственное, что он наблюдает, реакцию работников на те или иные условия.

Немного рассуждений. Госплан может поставить своей целью полную занятость – безусловный оптимум Парето. Достигнуть этого можно простым принуждением к работе, Госплану это под силу. Вопрос в том, как это сделать? Задача состоит в том, чтобы каждый работник в конечном итоге получил некоторый доход. Если мы хотим, чтобы работали все, то нужно, не различая типов работника, назначить одинаковую зарплату, которая устраивает всех. Госплан работает в интересах общества и готов платить самую высокую из возможных зарплату. Какая это зарплата? Очевидно, $w = E(\theta)$, самый высокий уровень зарплаты. Будет ли при этом достигнут безусловный оптимум? Да, это безусловный оптимум Парето, работают все. Однако в такой ситуации есть «пострадавшие» – работники высокой производительности (ранее они получали $r(\theta) > E(\theta)$, а теперь вынуждены под давлением Госплана работать за $E(\theta)$).

Госплан может централизованно назначить зарплату (w_e), а те, кто не согласен работать за такую зарплату, получают пособие по безработице – w_u

Госплан может назначать отрицательное пособие по безработице (своеобразный штраф за тунеядство). Нужно следить, чтобы у Госплана хватило денег для выплат зарплат и пособий.

Если можно подобрать такое пособие по безработице и такой уровень зарплаты, чтобы при сбалансированном бюджете Госплана эти обещания удалось выполнить и при этом получили бы улучшение по Парето, по сравнению с этой ситуацией, то тогда эта ситуация не является условным оптимумом Парето. Если такое невозможно, тогда это условный Парето-оптимум.

Множество работников, работающих по найму:

$\Theta(w_u,w_e) = \{\theta \mid w_u + r(\theta) <= w_e\} = [\theta_0, \theta^*]$

Поскольку $r(\theta)$ возрастающая функция, то это означает, что люди с небольшой производительностью пойдут работать, а люди с высокой производительностью останутся во внерыночной сфере. Таким образом, $\theta^* \in [\theta_0,\theta_1]$ Получаем следующие уравнения для θ^*:

$$\begin{cases} w_u + r(\theta^*) = w_e \\ F(\theta^*)\, w_e + (1 - F(\theta^*))\, w_u = \int_{[\theta 0,\, \theta^*]} \theta dF(\theta) \end{cases}$$

Второе уравнение представляет собой бюджетное ограничение Госплана: вся экономика национализирована и все фирмы перечисляют свою прибыль Госплану, который затем выплачивает эти средства в виде зарплат работникам и пособий безработным.

$F(\theta^*)\, w_e$ - расходы Госплана на фонд заработной платы

$(1- F(\theta^*))\, w_u$ - выплаты по безработице

$\int_{[\theta 0,\, \theta^*]} \theta dF(\theta)$ - суммарный доход, который распределяется между работниками.

Заметим, что бюджетное ограничение выполняется как равенстов. В противном случае у Гсоплана остаются свободные денежные средства, которые можно направить на выплату зарплаты и пенсий и получить Парето-улучшение.

Из уравнений видно, что пособие по безработице и заработная плата являются функцией единственного параметра θ^*, получаем однопараметрическое семейство возможных улучшений по Парето. Из системы уравнений получаем:

$w_u(\theta^*) = \int_{[\theta 0,\, \theta^*]} \theta dF(\theta) – r(\theta^*)\, F(\theta^*)$

$w_e(\theta^*) = \int_{[\theta 0,\, \theta^*]} \theta dF(\theta) + r(\theta^*)\, (1 - F(\theta^*))$

Таким образом, вопрос стои следующим образом: возможно ли выбрать такие пособия и зарплату, чтобы добиться Парето-улучшения по сравнению с равновесием w^*?

Равновесие, которе собираемся улучшить: $w^* = \max W^* = E(\theta \mid \Theta(w^*))$, где множество $\Theta(w^*) = \{\theta \mid r(\theta) <= w^*\} = [\theta_0, \theta^*]$ замыкается производительностью самого производительного работника, который работает по найму в рыночном равновесии. Очевидно, что $r(\theta^*) = w^*$. Варьируя параметром в пределах $[\theta_0,\theta^*]$, можно получить весь спектр равновесий. В частности, можно положить $\theta` = \theta^*$, тогда $w_e(\theta^*) = w^*$ и $w_u(\theta^*) = 0$.

Возможно ли улучшить конкурентное равновесие, положив $\theta` \neq \theta^*$?

Покажем, что невозможно улучшить по Парето исходное равновесие, если $\theta`<\theta^*$ (ещё дальше удалимся от безусловного Парето-оптимума). Если эта ситуация не является улучшением по Парето, то, вероятно, кому-то должно стать хуже. Кому? Очевидно, проиграют работающие: занятость упадёт и заработная плата, надо ожидать, также снизится (работник с наименьшей производительностью пострадает в любом случае, т.к. он работает всегда!) В конкурентном равновесии он получал w^*, а в этом равновесии он будет получать $w_e(\theta`)$.

Поскольку $\theta` < \theta^*$, то $w_e(\theta`) < w_e(\theta`) = w^*$.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $\theta` > \theta^*$. В этом случае станет хуже безработным. В конкурентном равновесии они получали $r(\theta)$, а при распределении Госплана безработные будут получать $r(\theta) + w_u(\theta`)$. Таким образом, нужно показать, что в случае $\theta` > \theta^*$ пособие по безработице будет отрицательным, т.е. $w_u(\hat{\theta}) < 0$. Преобразуем

$$w_u(\hat{\theta}) = \left(\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\hat{\theta}} \theta\, dF(\theta)}{F(\hat{\theta})} - r(\hat{\theta}) \right)$$

Нужно показать, что это выражение отрицательно.

Если $w > \hat{w}$, тогда $E(\theta \mid \Theta(w)) < w$ (в этом случае эта кривая лежит всюду ниже биссектрисы).

$F(\hat{\theta}) * \left(\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\hat{\theta}} \theta \, dF(\theta)}{F(\hat{\theta})} - r(\hat{\theta}) \right)$ = $F(\hat{\theta})$* [E $(\theta | \underline{\theta}, \hat{\theta})$] – $r(\hat{\theta})$] = E $(\theta | [\underline{\theta}, \hat{\theta}])$ = {пусть теперь $w = r(\hat{\theta})$, тогда } = $E(\theta | r(\theta) \leq w)$

Отсюда следует отрицательность исследуемого выражения.

Как связаны w и w*?. Мы увеличиваем производительность $\hat{\theta} > \theta^*$, следовательно, зарплата растёт: $w > w^*$.

Повторим: нужно рассчитать величину пособия для безработных, если $\hat{\theta} > \theta^*$. Далее нужно показать, что это пособие будет отрицательным. Далее полагая $r(\hat{\theta}) = w$ (ранее было $r(\theta^*) = w^*$), и поскольку $\hat{\theta} > \theta^*$, то значит $w > w^*$. Если зарплата больше самой высокой из возможных равновесных зарплат, то ожидаемая производительность тех, кто будет работать за эту зарплату, будет меньше зарплаты. Первое выражение в скобке представляет ожидаемую производительность тех, кто согласен работать за зарплату w, а второе выражение есть сама зарплата. Отсюда следует, что исследуемое выражение отрицательно.

Таким образом, мы доказали, что наилучшее из рыночных равновесий в условиях асимметричной информации (в модели экстремального отрицательного отбора) является условным оптимумом Парето, никакой Госплан не может улучшить это равновесие.

СИГНАЛИЗИРОВАНИЕ

Равновесия, возникающие в условиях асимметричной информации, не являются привлекательными для всех работников. Работники высокой производительности в подобных равновесиях не получают того, на что они могут обоснованно рассчитывать. Некоторые проигрывают от таких ситуаций, становятся «жертвами» асимметричной информации. На работников высокой производительности распространяется представление как о средних работниках, поскольку именно такое представление превалирует на рынке (вся совокупность рабочей силы). Те работники, которые лучше простого среднего работника, недовольны своим положением. Появляется заинтересованность в том, чтобы послать сигнал и достоверно заявить о том, что они лучше остальных.

Как послать такой сигнал? Заметим, что сигнал должен быть достоверным, вам должны поверить.

Представим гипотетическую ситуацию, что существует некий прибор – детектор производительности, который точно проверяет уровень θ каждого работника. У работника есть выбор проходить тестирование (которое совершенно бесплатно и безболезненно) или нет. Кто предпочтёт тестирование: высокопроизводительные или низкопроизводительные работники?

Представим следующую игру, которая длится три шага. На первом шаге ходит природа, которая выбирает из данной генеральной совокупности с распределением F(θ) какого-то работника, которому известна его собственная производительность. На втором шаге работник решает, проходить ли тестирование или нет, и предстает либо с результатами, либо нет. На третьем шаге работодатель назначает работнику зарплату. Можно считать, что существуют две фирмы, которые конкурируют за работников по Бертрану. В этом случае фирмы установят зарплату на уровне ожидаемой производительности. Если работник протестировался, то его ожидаемая производительность точно известна фирмам и его зарплата будет равна ожидаемой производительности. Если он не проходил тест, то, вероятно, его ожидаемая производительность равна средней производительности тех, кто не пожелал тестироваться.

Можно ожидать, что в равновесии интервал работников разобьётся на два непересекающихся множества Θ_0 и Θ_1. Множество Θ_1 состоит из тех работников, которые прошли тест, а множество Θ_0 – из тех, кто не стал тестироваться. В равновесии множество Θ_1 представляет собой множество всех типов работников, кроме, может быть, работников с самой низкой производительностью. Таким образом, почти все работники предпочитают тестирование. Других равновесий нет.

Теперь такой возможности нет, но нужно послать достоверный сигнал, свидетельствующий о производительности. Посылка подобных сигналов должно быть сопряжено с издержками, дабы этот сигнал воспринимался как достоверный. Если бы сигнализирование было бесплатным, то каждый воспользовался бы возможностью послать сигнал. Если сигнал стоит определённых затрат (денег, усилий), то тот факт, что работник готов понести эти затраты, свидетельствует, что он действительно заинтересован посылке этого сигнала и это дает уверенность работодателю в том, что сигнал достоверен.

Если сигнализирование бесплатно, то в экономической литературе сигнализирование в этих условиях называется англоязычным термином - cheap talk.

Стандартный пример сигнализирования – **сигнализирование на рынке продукта**. Представим, что две фирмы продвигают на рынок некий товар, одинакового назначения, но различных торговых марок, естественно. Товары сложно различить до тех пор, пока он не попробован потребителем. Хороший товар производится со средними издержками c1, а плохой товар производится с издержками c0, очевидно, что c1 > c0. Хороший товар увеличивает полезность потребителя на θ (денежный эквивалент удовольствия, θ > c1), а полезность от потребления плохого товара равна нулю. Будем считать, что если выбран уровень качества с издержками c1, то этот уровень нельзя поменять в дальнейшем. Попробовав товар, потребитель решает для себя, покупать товар в будущем или нет.

Один из наиболее популярных методов продвижения товара на рынок – метод «цены доброй воли». Цена доброй воли состоит в том, что товар продвигается на рынок по очень низким ценам, или даже бесплатно. На такого рода рекламу производители расходуют огромные деньги и делают это в надежде деньги вернуть. Вернутся эти деньги в том случае, если вы попробуете товар и станете лояльным покупателем, приобретающим этот товар регулярно. Потребитель рассуждает так: «..они тратят большие деньги на то, чтобы убедить меня попробовать этот товар; если бы они не были уверены в том, что товар действительно хорош и мне понравится, то они бы этого не делали. Значит, я не слишком рискну, если я его попробую!»

Представим, что в первый момент времени товар продается по цене p1 (цена доброй воли), эта цена низкая. Тогда в первый момент времени производитель получает прибыль, равную (p1-c1); вообще говоря, это могут быть потери, потому что цена часто не покрывает полностью издержек производства. Но если эти потери, которые несёт производитель, воспринимаются потребителем как свидетельство о высоком качестве товара, то люди покупают этот товар, реагируя таким образом на сигнал. У потребителей сложилась определенная вера (belief), которая состоит в том, что если товар выбрасывается на рынок по очень низкой первоначальной цене и производитель несёт издержки, то такой товар высокого качества. Люди покупают товар и в дальнейшем, но уже по полной цене $\theta > c1$. Однако эти покупки произойдут в будущем, потому расчёт потоков прибыли нужно производить с коэффициентом дисконтирования δ (это полный коэффициент дисконтирования, за весь последующий период!).

Суммарная прибыль, получаемая в результате сигнализирования о качестве товара:

$\pi = p1 - c1 + \delta(\theta - c1) > 0$.

Почему можно верить такому сигналу? Такому сигналу нужно верить, потому что такое сигнализирование требует издержек и продавец хорошего товара готов понести издержки, поскольку знает, что окупит затраты в будущем, а продавец плохого товара не готов тратиться, поскольку не вернет денег в будущем.

Нужно некоторое сигнализирующее равновесие, которое будет разделяющим (separating equilibrium) – хороший товар отделен от плохого. Это равновесие возникнет в том случае, когда сигнализирование выгодно производителю хорошего товара и невыгодно для производителя плохого товара.

Если продавец плохого товара попытается имитировать поведение производителя хорошего товара. В первый момент времени он получит цену p1, тогда в первый момент времени получает прибыль $(p1 - c0)$, но в будущем он не получит ничего. Следовательно, $(p1 - c0) < 0$.

Условие разделяющего равновесия: $c1 - \delta(\theta - c1) < p1 < c0$.

Видно, что разделяющее равновесие существует не всегда. Для существования таких равновесий необходимо $c1 - c0 < \delta(\theta - c1)$;

Итак, для существования разделяющих равновесий важно: во 1-х, чтобы будущее было значимым (будущими продажами компенсируются понесённые издержки), во 2-х, полная цена должна давать прибыль и в 3-х, чтобы экономия, которую может получить продавец товара низкого в первом периоде, была не слишком большой.

Модель «Сигнализирование на рынке труда»

На рынке присутствуют два типа работников: работники высокой производительности (θ_H)и работники низкой производительности (θ_L). Распределение $F(\theta)$ сосредоточено в двух точках $\theta = \theta_H$ и $\theta = \theta_L$, $\theta_H > \theta_L$ и пусть $P(\theta = \theta_H) =\lambda$, $P(\theta = \theta_L) = 1 - \lambda$.

Для простоты предположим, что внерыночные способы получения денег отсутствуют: $r(\theta_H) = r(\theta_L) = 0$.

Как будет выглядеть рыночное равновесие? Понятно, что работать будут все и заработная плата будет равна средней производительности всех работников:

$W = E(\theta) = \lambda\theta_H + (1 - \lambda)\theta_L$

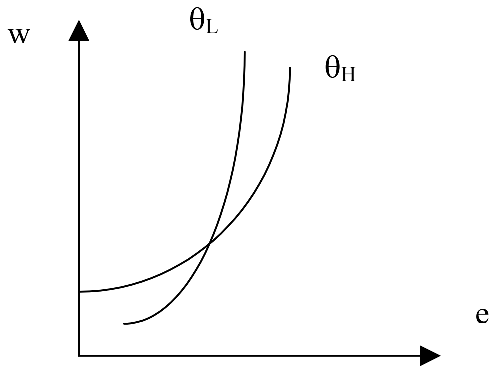
Мы получили безусловный оптимум Парето, но в этом оптимуме работники высокой производительности недовольны, поскольку они получают среднюю зарплату, а могут (и хотят!) получать больше – в случае симметрично распределённой информации они могут рассчитывать на $\theta_H > w$.

Представим, имеется технология сигнализирования. Имеется способ послать сигнал об уровне производительности - $e > 0$. Издержки сигнализирования зависят от усилий **e** и от типа работника θ - $c(e, \theta)$.

***Предположение*:** по интенсивности сигнализирования (e) функция издержек ведёт себя классическим образом – $c_e > 0$, $c_{ee} > 0$. Что касается производительности, то неявно применяется предположение об универсальности таланта – если человек более производителен, то при прочих равных условиях он способен послать сигнал с меньшими издержками, т.е. для данного e выполнено $c_\theta < 0$. Более того, чем выше производительность работника, то тем меньше не только полные издержки, но и предельные издержки также меньше: $c_{e\theta} < 0$.

Последнее условие называют *условием сортировки* (sorting) или *условие однократного пересечения* (single crossing).

Функция полезности работника, который прибегает к сигнализированию, зависит от двух переменных: от трудового дохода (w) и уровня прилагаемых усилий (e) – по доходу полезность возрастает, а по уровню усилий - убывает.



$U(w, e; \theta) = w - c(e, \theta)$ – квазилинейная функция полезности.

Уравнение изокванты: $w - c(e, \theta) =$ const и следовательно, $w = A + c(e, \theta)$

Поскольку функция издержек выпуклая и монотонно возрастающая, то типичные изокванты изображены на рисунке. Эти кривые отражают следующий факт: чем больше интенсивность сигнализирования, тем больший доход нужен для покрытия издержек сигнализирования, чтобы остаться на том же уровне полезности.

Более пологая изокванта описывает работника с высокой производительностью: интенсивность сигнализирования обходится с меньшими издержками по сравнению с работником низкой производительности (работнику с низкой производительностью требуется более высокая компенсация). В силу условия сортировки эти изокванты имеют одну точку пересечения.

Пример:

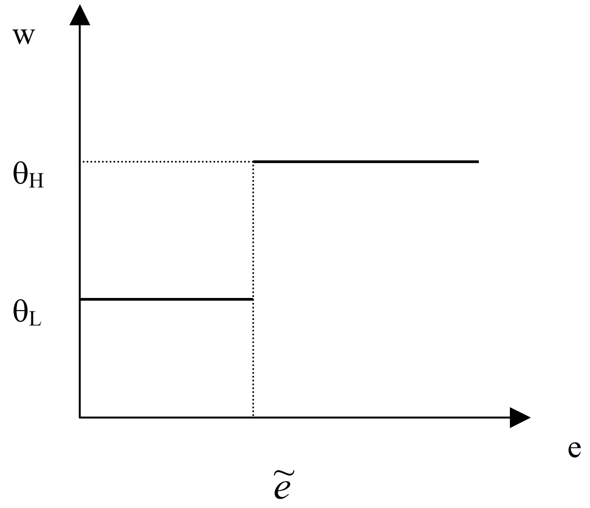
$\theta_L = 1$, $\theta_H = 3$, $\lambda = ¼$.

Тогда заработная плата равна $W = E(\theta) = \lambda\theta_H + (1 - \lambda)\theta_L = 1.5$ (если нет сигнализирования).

Функции издержек сигнализирования $c(e, \theta_L) = e^2$, $c(e, \theta_H) = ½\ e^2$. Важной компонентой сигнализирующего равновесия являются веры работодателя: определенный уровень сигнализирования указывает на определенный тип агента. Равновесие возникает в том случае, когда эти веры рациональны – агенты действительно ведут себя в соответствии с этими верами.

Устройство веры: если $e \geq e^{\sim}$, тогда $\theta = \theta_H$ и на оборот, если $e < e^{\sim}$, тогда $\theta = \theta_L$. Существует некий пороговый уровень сигнализирования, который позволяет думать, что производительность работника высока, если он выбрал уровень усилий выше порогового значения. Эти веры являются общим достоянием (две фирмы конкурируют по Бертрану).

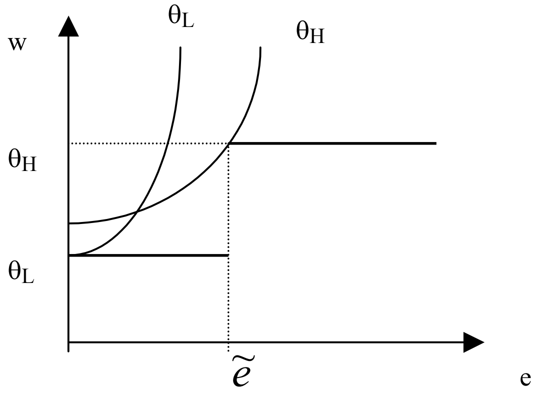
Шкала заработной платы : $w(e) = \begin{cases} \theta_{H,}\ e \geq e^{\sim} \\ \theta_L,\ e < e^{\sim} \end{cases}$



Нужно теперь убедиться в рациональности вер: необходимо, чтобы работники с низкой производительностью посылали сигнал, меньший порогового уровня, а работники высокой производительности посылали сигнал, больший порогового уровня e. В этих условиях получим разделяющее равновесие.

Ясно, что работнику высокой производительности достаточно послать сигнал в точности равный пороговому значению e. Соответственно, работнику с низкой производительности выгодно не посылать сигнал вовсе (e = 0) – если уровень издержек недостаточен для того, чтобы поменять мнение работодателя в лучшую сторону, то издержки бессмысленны.

Таким образом, каждый работник стоит перед выбором: не посылать никакого сигнала и получать θ_L, либо послать сигнал на пороговом уровне и получить $\theta_{H.}$



Условие разделяющего равновесия:

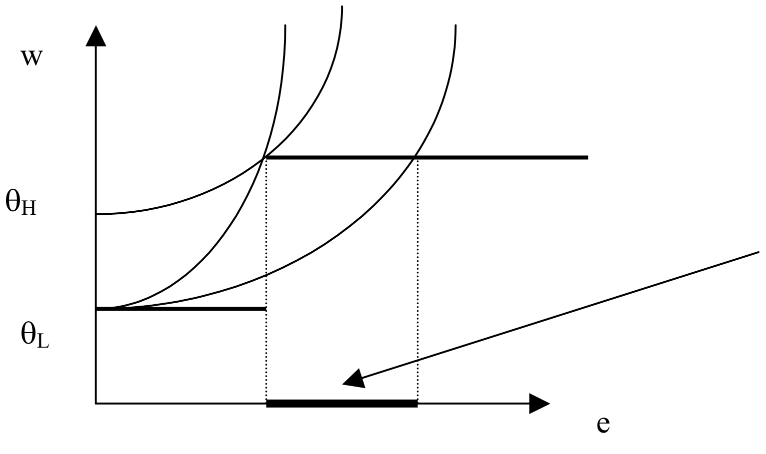
$$\begin{cases} \theta_H - c(e^{\sim}, \theta_H) > \theta_L \\ \theta_H - c(e^{\sim}, \theta_L) < \theta_L \end{cases}$$

Разделяющее равновесие – работники с низкой производительностью не станут имитировать поведение работников с высокой производительностью, поскольку их выигрыш не покроет издержек по сигнализированию.

Рассмотренный пример можно представить в виде игры. На начальном этапе ходит природа, выбирая тип работника из данной генеральной совокупности типов (стратегия природы – выбор типа работника). На втором этапе ходят работники, которые выбирают интенсивность сигнализирования (стратегии работников – выбор уровня сигнализирования). На третьем шагу в игру вступают работодатели и они, пронаблюдав интенсивность сигнала, начинают конкурировать за работника по Бертрану (стратегия работодателя – выбор заработной платы).

Интерес представляет равновесие Байеса-Нэша совершенное на подыграх.

Разделяющих равновесий может быть много. Существует определённая область разделяющих равновесий, которую удобно продемонстрировать на следующем численном примере.



Точка из этого интервала может лежать в основе веры работодателя

Рис. 4. 1

Нужно нарисовать изокванты работников двух типов. Изокванта работника с более высокой производительностью является более пологой, более того, эти изокванты пересекаются лишь в одной общей точке (начальной) и нигде более. Условие сортировки играет немаловажную роль в существовании разделяющих равновесий. Все значения, находящиеся в выделенном интервале, представляют собой разделяющее равновесие. Вычислим границы интервала.

$$\begin{cases}\theta_H - c(\tilde{e}, \theta_H) > \theta_L \\ \theta_H - c(\tilde{e}, \theta_L) < \theta_L\end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}\tilde{e}{}^\wedge 2 > 1 \\ 3 - \tilde{e}{}^\wedge 2 < 1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\tilde{e} > \sqrt{2} \\ \tilde{e} < 2\end{cases}$$

Проведём анализ разделяющих равновесий с точки зрения Парето-оптимальности. В случае отсутствия сигнализирования каждый работник получает заработную плату, равную средней производительности $E(\theta) = 1.5$.

Пусть ввели институт сигнализирования. Работодатели (в предположении, что все работодатели нейтральны к риску), как и прежде, получают нулевую прибыль. Разница лишь в том, что ранее работники получали одинаковую зарплату, распределяясь между фирмами случайным образом, а с введением института сигнализирования стали получать дифференцированную зарплату, поскольку у работодателя есть возможность определить тип работника.

Очевидно, что работники низкой производительности проиграли от введения института сигнализирования, который теперь позволяет их точно идентифицировать и назначить соответствующую зарплату, ниже той, которая была ранее.

Соответственно, работники высокой производительности выигрывают. До сигнализирования эти работники, как и все, получали зарплату, равную 1,5. А теперь они получают выигрыш, равный $3 - \frac{1}{2}\tilde{e}{}^\wedge 2$. Следовательно, они выиграют в том случае, если

$$\begin{cases} w_u + r(\theta^\wedge) = w_e \\ F(\theta^\wedge)\, w_e + (1 - F(\theta^\wedge))\, w_u = \int_{[\theta 0,\, \theta^\wedge]} \theta \, dF(\theta)\end{cases}$$

Отсюда следует, что работники высокой производительности выигрывают от введения института сигнализирования, если их усилия лежат в диапазоне $\sqrt{2} \le \tilde{e} \le \sqrt{3}$.

Таким образом, существует лишь небольшой интервал разделяющих равновесий, в котором не происходит ухудшений (в смысле Парето). Заметим, что улучшение по Парето невозможно в данном случае, поскольку всегда есть проигравшие – работники низкой производительности. Однако в диапазоне $\sqrt{3} < \tilde{e} \le 2$ находятся разделяющие равновесия, в которых проигрывают все работники. Тем не менее, даже в этом случае работнику с высокой производительностью выгодно послать сигнал (потому как такое равновесие уже сложилось и соответствующий институт сигнализирования возник).

Рассмотрим самое лучшее (с точки зрения работников высокой производительности) разделяющее равновесие $\tilde{e} = \sqrt{2}$. Выигрывают ли в этом случае работники с высокой производительностью?

В нашем примере, если $e < \sqrt{3}$, тогда сигнализирование улучшает положение работников с высокой производительностью по сравнению с ситуацией отсутствия сигнализирования.

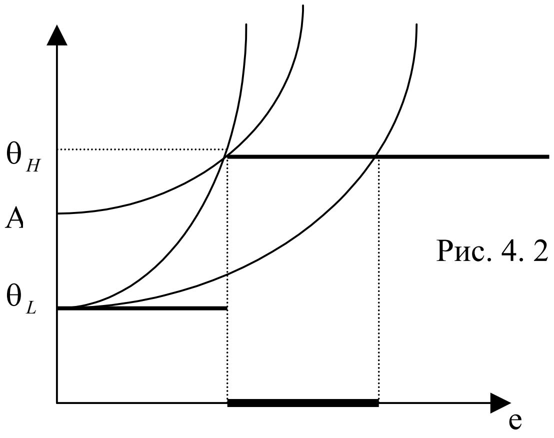


Рис. 4. 2

Заметим, что полученный результат зависит от параметра λ (доля высокопроизводительных работников на рынке труда), а также зависит от функции издержек и производительности.

Если средняя производительность (а следовательно, и средняя зарплата) расположена в интервале $\theta_L <= E\theta <= A$, тогда наилучшее разделяющее равновесие выгодно для высокопроиводительных работников и они проголосуют заведение института сигнализирования. В том случае, когда средняя зарплата находится в интервале $A < E\theta < \theta_H$, тогда самое лучшее из разделяющих равновесий окажется невыгодным для работников высокой производительности и они откажутся от него.

Таким образом, можно заключить, что сигнализирование выгодно высокопроизводительным работникам в том случае, когда их не слишком много на рынке труда. В обществе с высокой производительностью, где присутствует маленькая доля низкопроизводительных работников, лучше отказаться от сигнализирования.

Упражнение: *найти границу пропорций работников с высокой производительностью* λ*: если* $\lambda <= \lambda_0$*, то существует разделяющее равновесие, которое выгодно работникам с высокой производительностью, а при* $\lambda > \lambda_0$ *такого равновесия нет.*

Проведённый анализ является хорошим примером разницы между коллективной и индивидуальной рациональностью. Даже если средняя зарплата находится в интервале $A < E\theta < \theta_H$, для работника высокой производительности сигнализирование является индивидуально-рациональным. Этот работник находится в зоне действия института сигнализирования и должен выбрать оптимальное поведение. Однако с точки зрения коллектива работников с высокой производительностью сигнализирование в такой ситуации нерационально. Если они в состоянии принимать коллективные решения по введению института сигнала , то им выгодно прекратить сигнализирование.

В случае, когда издержки сигнализирования превосходят 2 ($e > 2$), сигнализирования не происходит вообще, поскольку оно не является привлекательным для всех типов работников.

Что происходит в случае $e < \sqrt{2}$?

Понятно, что случае низких затрат сигнализирование выгодно для всех работников. Возникает **смешивающее равновесие (pooling equilibrium)**. Работодатели знают, что в этом равновесии все посылают нужный сигнал и потому их вера строится таким образом:

$$\begin{cases} e \geq e^{\sim}, w=E\theta = 1.5 \\ e < e^{\sim}, w=\theta_L \end{cases}$$

если пороговый уровень сигнала превзойдён работником, то они имеют дело с каким-то (любым) работником и зарплата назначается на уровне средней производительности; наблюдение сигнала не даёт основания для идентификации работника как высокопроизводительного. Если пороговый уровень сигнала не пройдён, то работодатель заключает, что имеет дело с низкопроизводительным работником и назначает ему зарплату $w=\theta_L$.

Если веры работодателей устроены таким образом, то для получения равновесия необходимо, чтобы эти ожидания были рациональными – работники должны вести себя в соответствии с ожиданиями работодателя.

В смешивающем равновесии все типы работников посылают сигнал. Следовательно, для получения этого равновесия нужно, чтобы работникам низкой производительности было выгодно посылать сигнал (работники высокой производительности, разумеется, предпочтут тоже послать сигнал).

Условие: $1.5 – e^{\sim}$^2 >= 1 ➔ $e^{\sim}$<= $1/\sqrt{2}$

Таким образом, мы получили интервал смешивающих равновесий.

Какие равновесия находятся в интервале $1/\sqrt{2} < e^{\sim} < \sqrt{2}$? В этом случае возникают так называемые **гибридные равновесия (hybrid equilibria)**, которые интересны тем, что в них происходит переоценка вероятностей по Байесу. Эти равновесия сочетают в себе свойства смешивающих и разделяющих равновесий.

Построение гибридных равновесий:

Если плохие работники сигнализируют с некоторой положительной вероятностью, это означает, что для них безраличен выбор между сигналом и отсутствием сигнала (плохие работники играют смешанные стратегии). В этой ситуации для хороших работников сигнализирование должно быть лучше (у них меньше издержки сигнала). Таким образом, в этих равновесиях хорошие работники сигнализируют все, а плохие работники лишь какой-то частью.

Пронаблюдав сигнал, работодатель не может уверенно определить тип работника, но может оценить среднюю производительность, которая выше для тех, послал сигнал.

Обозначим пропорцию низкопроизводительных работников, посылающих сигнал, за γ; интенсивность этого сигнала равна $e^{\sim}$. При этом исходим из того, что хорошие работники посылают сигнал все без исключения. Веры работодателя в этом случае (они конкурируют по Бертрану и платят ожидаемую среднюю производительность) устроены так:

$$\begin{cases} e \geq e^{\sim},\ w = [\lambda\theta_H + \gamma(1-\lambda)\theta_L] / [\lambda + \gamma(1-\lambda)]\ ,\ 0 \leq \gamma \leq 1 \\ e < e^{\sim},\ w = \theta_L \end{cases}$$

Рассмотрим диапазон гибридных равновесий в нашем примере.

$w(e) = [\ 0.25 \times 3 + \gamma \times 0.75 \times 1\ ]\ /\ [\ 0.25 + \gamma \times 0.75] = [3 + 3\gamma] / [1+3\gamma]$

Понятно, что при изменении γ (параметра гибридного равновесия) в своём интервале мы получим весь интервал гибридных равновесий.

Очевидно, существует однозначное соответствие между γ и уровнем усилий *e*. Вычислим уровень сигнализирования *e*, который поддерживает гибридное равновесие с параметром γ. Используем тот факт, что работники низкой производительности безразличны между бездействием и сигнализированием:

$1 = [3 + 3\gamma] / [1+3\gamma] - e^2 \quad \rightarrow \quad e = \sqrt{[\ 2/(1+3\gamma)\ ]}$

В самом деле, при $\gamma = 1$ (все работники низкой производительности посылают сигнал) $e=1/\sqrt{2}$ - первое смешивающее равновесие. Другой крайний случай $\gamma = 0$ (никто из работников низкой производительности не сигнализирует), то $e = /\sqrt{2}$ - первое разделяющее равновесие.

Bayes-Nash Subgame Perfect Equlibrium

Представим игру двух агентов: тип первого агента θ известен самому агенту, но неизвестен второму агенту. Существует априорная вероятность того, что наудачу выбранный агент номер 1 имеет данный тип θ и вероятность этого события равна $P(\theta)$ (в непрерывном случае известна плотность). Эта вероятность является общим знанием всех игроков.

У каждого из агентов есть множество стратегий. Агент номер 1 с типом θ выбирает свою стратегию a_1 из множества ***A1***. Предполагаем, что множество стратегий не зависит от типа игрока. Второй агент выбирает свою стратегию a_2 из множества ***A2***. Каждый агент представлен функцией полезности, которая зависит от стратегий, выбранных каждым из агентов, и от типа первого агента – $U_i(a_1,a_2,\theta)$. Таким образом, выигрыш второго агента зависит от типа первого агента, который неизвестен второму. Для второго агента, следовательно, важно получить информацию о первом агенте.

Какие стратегии выберут агенты в этой игре и какова последовательность ходов?

Первой ходит природа, выбирая агента номер 1, который имеет тип θ. На втором шагу ходит первый агент, выбирая стратегию a_1 из множества ***A1***. Эта стратегия важна для второго агента не только потому, что она входит в его функцию полезности, но ещё и потому, что она несёт некоторую информацию о типе первого агента. Второй агент будет пытаться уточнить информацию о типе первого агента, на основе выбранной им стратегии. Таким образом, ход первого агента служит сигналом (первый агент – сигнальщик). Увидев этот сигнал, второй игрок выбирает свою стратеигию и игра заканчивается.

Как выглядит равновесие совершенное на подыграх? В таком равновесии у каждого игрока не существует стимулов отклониться. Для построения этого равновесия используется метод обратной индукции.

Рассмотрим задачу 2-го агента (он, очевидно, пытается максимизировать свой выигрыш). Будем считать, что оба агента нейтрально относятся к риску.

$\sum_{\theta} U_2(a_1,a_2,\theta)\, p(\theta) \rightarrow max$

Такую задачу максимизации ожидаемой полезности решает игрок в стандартной ситуации. Однако в нашем случае, такая постановка задачи нарушила бы предположение о рациональности агента. Поведение рационально в условиях асимметричной информации, когда каждый игрок использует наилучшим образом не только все доступные ресурсы, но и всю доступную информацию. В этом примере второй игрок получил ценную информацию о типе первого агента, поэтому второй агент переоценивает вероятность $p(\theta)$ по формуле Байеса[1].

$\sum_{\theta} U_2(a_1,a_2,\theta)\, \mu(\theta\,|a_1) \rightarrow max$

В этом равновесии первый агент выберет смешанную стратегию $\sigma_1(a_1|\theta)$ - смешанная стратегия 1-го агента, если его тип θ; агент первого типа выбирает из множества A_1 свои чистые стратегии с некоторой вероятностью.

$\sum_a \sigma_1(a|\theta) = 1$ для любого θ

Обозначение: $\Sigma(A_1)$ - множество всевозможных смешанных стратегий на множестве A_1.

По сути, $\sigma'(a_1)$ есть вероятностная мера на множестве A_1.

Равновесие Байеса-Нэша образовано смешанной стратегией 1-го агента, которая задана при всех его типах, т.е. каждый тип первого игрока игрока играет смешанную стратегию: $\sigma_1(a|\theta),\ \ \theta\in\Theta_1$. Вторая компонента равновесия Байеса-Нэша: это чистая стратегия 2-го игрока, которую этот игрок играет в ответ на стратегию первого: $a_2 = S_2(a_1)$

Требования, налагаемые на функции в равновесии Байеса-Нэша:

1. Смешанная стратегия 1-го агента должна быть оптимальным ответом на ожидаемое поведение 2-го агента (предполагается, что функции являются общим знанием):

$\sigma_1(\cdot|\theta) \in Argmax_{\sigma'(a1)} \sum_{a1} U_1(a_1,S_2(a_1);\theta)\, \sigma'(a_1)$

$\sum_{a1} U_1(a_1,S_2(a_1);\theta)\, \sigma'(a_1)$ - суммарный выигрыш 1-го агента

2. стратегии второго агента:

$S_2(a_1) \in Argmax_{a2} \sum_{\theta} U_2(a_1,a_2\,;\theta)\, \mu(\theta\,|a_1)$,

значение θ неизвестно второму агенту, поэтому он переоценивает его по формуле Байеса:

3.пересчёт априорного распределения

---

[1] Формула Байеса: $P(A|B) = P(B|A)\, P(A) / P(B)$

$\mu(\theta\,|a_1) = \sigma_1(a_1|\theta)\, p(\theta) \,/\, [\sum_{\theta} \sigma_1(a_1|\theta)\, p(\theta)\,]$

Первый игрок выбирает свою смешанную стратегию исходя из ожидаемой реакции на наблюдённый шаг второго игрока. Второй игрок выбирает свою стратегию на ход первого игрока, оптимизирую свой ожидаемый выигрыш с учётом пересмотренного распределения типа 1-го игрока (a1 – источник информации).

Пример: задача сигнализирования

В данном случае $\Theta = \{\theta_L,\theta_H\}$, $P(\theta_L) = 1-\lambda$ и $P(\theta_H) = \lambda$.

$e\geq 0$ - интенсивность сигнала работников

$w\geq 0$ – зарплата, выбор работодателя

Первый игрок – это работник, а второй игрок – работодатель. Причём вторых игроков несколько: они играют на второй стадии и конкурируют друг с другом по Бертрану, т.е. на последней стадии разыгрывается игра с равновесием Нэша, где каждый игрок второго типа предлагает свою заработную плату.

Функция полезности:

$U_1(a_1,a_2;\theta) = a_2 - c(a_1|\theta)$, где a_2 - зарплата

$U_2^1(e,w^1,w^2,\theta) = I(\theta - w^1)$, функция полезности работодателя, где I- индикаторная функция (работает или нет работник именно у этого работодателя).

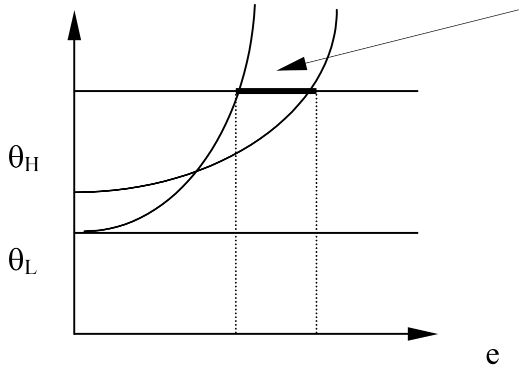
Рассмотрим разделяющие равновесия: в этом случае 1-ый игрок использует чистые стратегии. Известно, что если $\theta=\theta_L$, *то* $e=0$; если $\theta=\theta_H$, *то* $e=e^{\sim}$. Пронаблюдав сигнал первого игрока, работодатель на второй стадии однозначно определяет тип 1-го игрока. На второй стадии два работодателя конкурируют по Бертрану за этого работника. Они точно знают тип этого работника. Исход можно предсказать однозначно: они предложат ему зарплату, равную производительности работника. Таким образом, стратегии работодателя выглядят так:

$S_2(0)=\theta_L$; $S_2(e^{\sim})=\theta_H$, - это следствие условия № 2.

Осталось проверить, что подобное поведение игроков рационально. Проверяем условие № 1.

Первый игрок (работник) зная такую реакцию работодателей, должен оптимизировать свой выбор. Это означает, что игроку с низкой производительностью разумно выбрать нулевой уровень сигнализирования – это его чистая стратегия. Игроку с высокой производительностью оптимально выбрать высокий уровень сигнализирования.

Разделяющее равновесие возникает как вариант равновесия Байеса-Нэша. Остальные известные типы равновесий (смешивающие и гибридные) можно также проинтерпретировать как равновесия Байеса-Нэша.



Равновесия упорядочены по Парето

Рис. 4. 3

Гибридные равновесия: если у работника тип θ_H, то ему выгодно посылать сигнал и он будет посылать его с вероятностью 1. Если работник противоположного типа - θ_L, то он будет играть смешанную стратегию (с вероятностью γ он посылает сигнал, а с вероятностью $(1-\gamma)$ – нет). В этом случае нужно воспользоваться формулой пересчёта вероятности по Байесу.

Очевидно, что безусловного оптимума Парето не достичь в этом случае, поскольку некоторая часть ресурсов затрачивается непроизводительным образом.

Однако заметим, что все полученные разделяющие равновесия упорядочены по Парето. Чем меньше уровень сигнализирования при прочих равных условиях, тем более предпочтительнее равновесие. К примеру, сравнивая равновесия при уровнях сигнализирования e1 и e2 (расположенных внутри заштрихованного отрезка), получаем следующее: в обоих случаях работодатель получает нулевую прибыль (т.е. работодатели нейтрально относятся к тому, какое из равновесий будет выбрано), работники с низкой производительностью получают θ_L (им тоже безразлично); однако работники с высокой производительностью получают выигрыш, равный $\theta_H – c(e^{\sim}, \theta_H)$. Видно, что полезность по усилиям убывает, что свидетельствует о более выгодном положении высокопроизводительных работников в случае e1 (выбирается комбинация, которая обещает меньше усилий при том же уровне дохода). Таким образом, это равновесие является условным Парето-оптимумом.

Рассмотрим модель сигнализирования: на рынке труда присутствуют два типа работников: высокопроизводительные и низкопроизводительные (θ_H – высокопроизводительный тип, доля работников этого типа на рынке равна λ, θ_L - низкопроизводительный тип, их доля – $(1- \lambda)$). Технология сигнализирования описывается функцией издержек $c(e,\theta)$, которая монотонна и выпукла по уровню сигнала и удовлетворяет условию сортировки.

Функция полезности работника описывается следующим образом: $U(w, e, \theta) = w - c(e, \theta)$

Возможные равновесия:

Имеются три типа равновесий: разделяющее, гибридное и смешивающее. В гибридном равновесии все работники высокой производительности посылают сигнал, а также некоторая часть низкопроизводительных работников. Обозначим точки, отделяющие типы равновесий, как e1, e2 и e3.

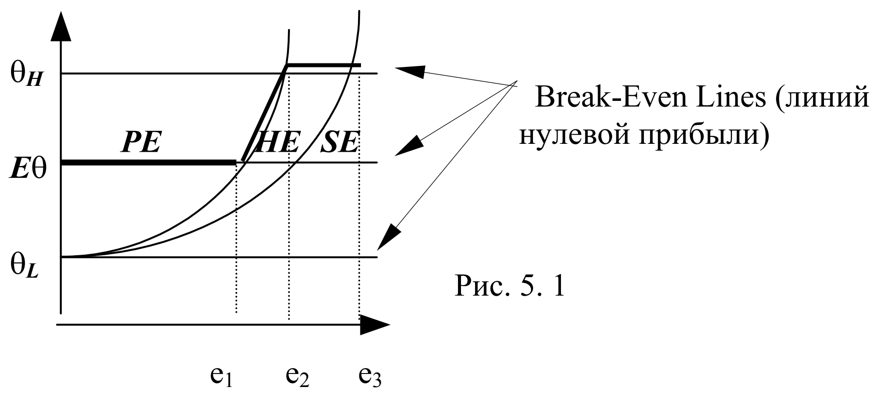


Рис. 5. 1

Эти точки получаются из следующей системы уравнений:

$$e_3 : \theta_H - c(e_3,\theta_H) = \theta_L$$

$$e_2 : \theta_H - c(e_2,\theta_L) = \theta_L$$

$$e_1 : E\theta - c(e_1,\theta_L) = \theta_L$$

Монотонность функции издержек сигнализирования обеспечивает единственность решения этой системы. Легко показать, что получаемые точки удовлетворяют следующим неравенствам: e1< e2 < e3.

Рассмотрим диапазон разделяющих равновесий. Эти равновесия упорядочены по Парето, т.е. при уменьшении уровня сигнализирования, при условии, что мы остаёмся в указанном диапазоне разделяющих равновесий, возникает улучшение по Парето. Таким образом, все разделяющие равновесия, кроме самого лучшего – e_2, заведомо не являются условными Парето-оптимумами. Они также не являются безусловным оптимумом Парето, который требует в данном случае, чтобы все работники были заняты в рыночной сфере (альтернативной сферы нет). Безусловный оптимум Парето возникает в данном случае в условиях асимметричной информации, когда нет сигнализирования, поскольку каждый работник получает зарплату, равную средней производительности и имеет место полная занятость. Однако работники высокой производительности проигрывают в этом оптимуме. Институт сигнализирования возникает как рыночная реакция на несовершенство этого равновесия. Все рыночные равновесия априори являются неоптимальными, поскольку работники расходуют ресурсы непроизводительным образом для подачи сигнала.

Тем не менее, условный оптимум Парето существует при определённых условиях. В случае, когда работников высокой производительности относительно немного на рынке труда (средняя производительность, а следовательно и заработная плата, относительно низка), тогда институт сигнализирования им выгоден, они получают рост полезности в результате подачи сигнала. Наоборот, если работники высокой производительности составляют большую часть рынка труда (т.е. средняя производительность относительно высока), тогда сигнализирование невыгодно для них. В этом случае, самое лучшее из разделяющих равновесий уже не будет условным оптимумом Парето.

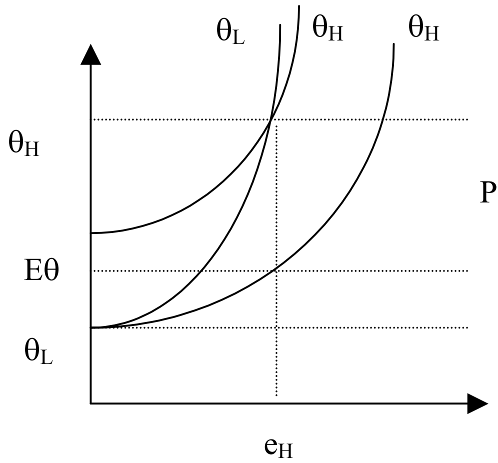


Рис. 5. 2

Представим, что работники высокой производительности в наилучшем из сигнализирующих равновесий находятся в более благоприятном положении.

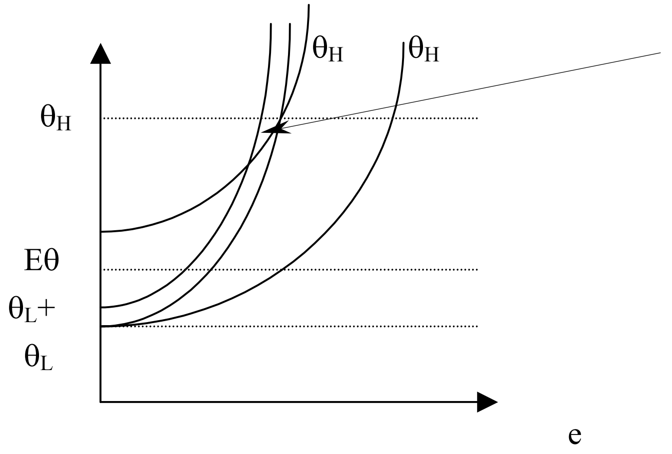
В этом случае равновесие, возникающее в отсутствие сигнализирование, не доминирует по Парето равновесие, наилучшее из разделяющих. Это даёт возможность получить условно Парето-оптимальное равновесие. Тем не менее, существуют способы улучшить и это равновесие.

Перекрёстное субсидирование: работники высокой производительности делятся частью своего дохода с работниками низкой производительности.

Очевидно, что если бы работодатель имел возможность различать типы производительности работников, но при этом уровень сигнализирования был бы ниже, чем в наилучшем разделяющем равновесии, то возникло бы Парето-улучшение.

Простое снижение порогового уровня сигнала не приведёт к желаемому результату, поскольку подобная комбинация зарплаты и сигнала станет привлекательной для работников низкой производительности и они станут посылать «ложные» сигналы.

Решить проблему можно путём увеличения заработной платы работникам низкой производительности. Такой ход предотвратит ситуацию, когда у работников низкой производительности возникают стимулы к подаче сигнала при понижении порогового уровня сигнализирования. Поднимаем уровень зарплаты на величину ε.



Любая точка в этой области даёт Парето-улучшение

Рис. 5. 3

С точки зрения работников низкой производительности произошло улучшение – они получают более высокую зарплату. Нужно убедиться, что работникам высокой производительности стало не хуже (по сравнению с равновесием при средней производительности). С другой стороны, комбинация усилий и заработной платы должна быть непривлекательной для низкопроизводительных работников. Подобные комбинации расположены в указанной на рисунке области. Кроме того, работодатели (фирмы) не должны оказаться в худшем положении. Работникам низкой производительности они теперь платят немного больше их конкурентной оценки, но работникам высокой производительности они выплачивают меньше. Теоретически существует возможность оставить работодателей на прежнем уровне (нулевой прибыльности). Выбирая любую точку из этой области, получаем улучшение по Парето.

Возможность такого рода Парето-улучшений определяется, во-первых, количеством высокопроизводительных работников, и, во-вторых, видом кривых безразличия (технологией сигнализирования).

SCREENING[1]

Рассматривается конкурентный скрининг. В чём заключается принципиальная разница между сигнализированием и скринингом?

На рынке, как ранее, существует два типа работников. Альтернативный внерыночный доход равен нулю. Пропорции работников: λ - доля высокопроизводительных работников, $(1-\lambda)$ – доля низкопроизводительных. В условиях асимметричной информации каждый из работников получает зарплату, равную средней производительности.

Скрининг возникает как реакция рынка на информационную асимметрию. Разница заключается в том, что в случае сигнализирования инициатива по преодолению информационного разрыва принадлежит работникам. В случае скрининга эта инициатива принадлежит работодателю. Скрининг имеет место в краткосрочном равновесии, тогда как в долгосрочном равновесии его нет (все фирмы получают нулевую прибыль).

Обозначим $c(t, \theta)$ – функция издержек работника на производстве; t – интенсивность трудозатрат (тяжесть условий труда), θ - тип работника. Эта функция является возрастающей по t и убывающей по. Свойства функции издержек:

$$c_t > 0,\ c_{tt} > 0,\ c_\theta < 0,\ c_{\theta\theta} < 0$$

Функция полезности работника: $U(w_+,t_-,\theta_+) = w_+ - c(t_-,\theta_+)$.

---

[1] Эта теория появилась в конце 1970-х годов. Основатель – Стиглиц. Терминология не является устоявшейся, в связи с чем предпочтение отдано русскоязычной транслитерации термина screening. Справочно: Mas-Colell pp.-460-466.

Это означает, что чем выше заработная плата и/или производительность, тем лучше для работника, но при росте интенсивности трудозатрат работнику становится хуже. В этом примере выпуск продукции не влияет на тяжесть условий труда.

Рассмотрим конкурентный рынок труда в долгосрочном равновесии. Если скрининга нет, то работник любой производительности получает Eθ. Графически:

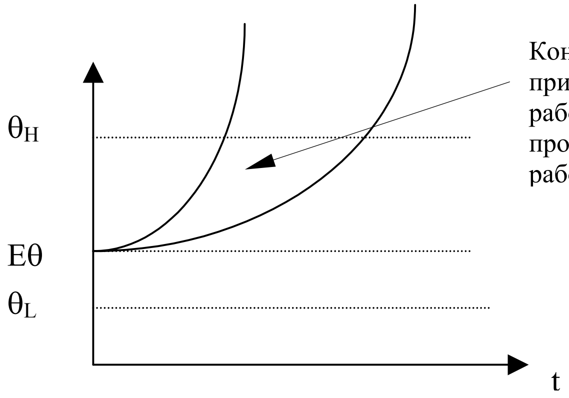


Рис. 5. 4

Работодатель предлагает контракт ***(w,t): w > Eθ, t > 0***.

Работодатель ставит своей целью получить при помощи этого контракта исключительно работников с высоким уровнем производительности. Работники высокой производительности откликаются на это предложение, а фирма получает положительную прибыль. Однако конкуренция среди фирм устраняет это преимущество, а следовательно, и прибыль. И тем не менее, в краткосрочном периоде мотивация для скрининга существует.

Рассмотрим ситуацию, когда на рынке присутствует две фирмы, конкурирующих по Бертрану. Они практикуют скрининг. На этом рынке реализуется следующая игра. На первом шаге ходит работодатель: две фирмы одновременно предлагают работникам контракты, с указанием комбинаций зарплаты и уровня интенсивности усилий. На втором шаге все работники, изучив предлагаемые контракты, выбирает тот, контракт, который оптимален для него.

Предположения:

Работник является *лексикографическим лодырем*, т.е. если работник безразличен между двумя контрактами, то он выберет тот контракт, в котором условия труда наиболее лёгкие (минимальное t). Отсюда следует, что работник данной производительности выберет единственный контракт.

Если работник безразличен между выбором контракта и статусом безработного, то он выберет контракт (предпочтёт работать).

Если фирмы предложили одинаковые контракты (оптимальные с точки зрения работников), то работники делятся поровну между фирмами.

Предложение труда в этом случае: каждый контракт либо привлекает всех работников данной производительности, либо привлекает половину, либо никого не привлекает.

Рассмотрим, как выглядит равновесие совершенное на подыграх.

Для начала нужно рассмотреть ситуацию **информационной симметрии**. Возникнет ли в этом случае равновесие со скринингом с положительным уровнем усилий? Скорее всего нет, поскольку в нём просто нет необходимости. Рынок труда распадается на два сегмента: рынок работников высокой производительности и рынок работников низкой производительности, т.к. их возможно различать. Контракты предлагаются работникам определённой производительности.

В рыночном равновесии работникам низкой производительности предлагаются следующие контракты: $w_L = \theta_L, t_L = 0$.

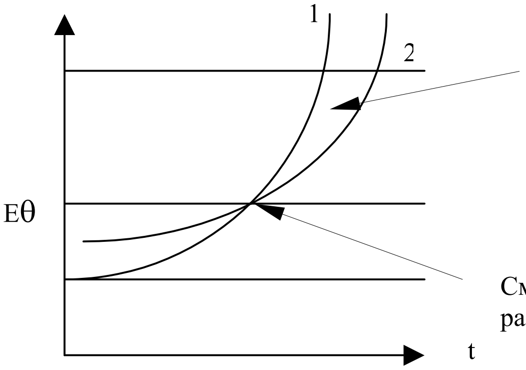
Прежде всего нужно исключить ситуацию, когда $w_L > \theta_L$ - в этом случае фирмы просто теряют деньги, что нерационально. Также легко исключить ситуацию, когда $w_L < \theta_L$ - конкуренция по Бертрану не даст установить зарплату меньше производительности работников. Фирмы, предлагающие подобный контракт, получают суммарную прибыль Π_L (на сегменте рынка труда низкопроизводительных работников). Какая-то из фирм получает прибыль, не превосходящую ½ Π_L. Эта фирма может предложить новый контракт с более высокой заработной платой, тогда все работники перейдут в эту фирму и фирма получит почти всю прибыль. Равновесие наступит при $w_L = \theta_L, t_L = 0$.

Асимметричная информация

Гибридные равновесия невозможны в данном случае, что обусловлено сделанными предположениями: в ситуации, когда работник безразличен между двумя вариантами, то он выбирает только один. Смешивающие равновесия тоже невозможны.

Поскольку фирмы конкурируют по Бертрану, то в долгосрочном равновесии обе фирмы получают нулевую прибыль. В этом равновесии каждая фирма предлагает работнику некоторый набор контрактов, а работники в свою очередь выбирают единственный контракт. Пусть (w_L , t_L) - контракт, выбираемый работниками низкой производительности, (w_H , t_H) - выбор работников высокой производительности. Отрицательной прибыли быть не может. Нужно исключить возможность положительной прибыли. Суммарная прибыль равна П. Одна из фирм, как и раньше, получает прибыль не больше ½ П. В этом случае она может предложить новые контракты, где заработная плата выше на незначительную величину: $(w_L + \varepsilon , t_L)$ и $(w_H + \varepsilon , t_H)$. Все работники выберут контракт этой фирмы (каждый выбирает оптимальный контракт). Прибыль фирмы немного меньше П. Вывод: прибыль положительна и фирме выгодно отклониться. Следовательно, первоначальный набор контрактов не является равновесием по Нэшу. В равновесии все фирмы должны получать нулевую прибыль.

Убедимся, что смешивающие равновесия также не возникают. В смешивающем равновесии работники любой производительности выбирают один и тот же контракт $(w_L , t_L) = (w_H , t_H) = (w , t)$. В этом контракте $\boldsymbol{w = E\theta}$, поскольку прибыль равна нулю. На графике этот контракт расположен в точке пересечения кривых безразличия и линии нулевой прибыли для средней производительности.



Контракты из этой области исключают возможность (доминируют) появления смешивающих равновесий, поскольку фирмы могут получить П>0.

Смешивающее равновесие

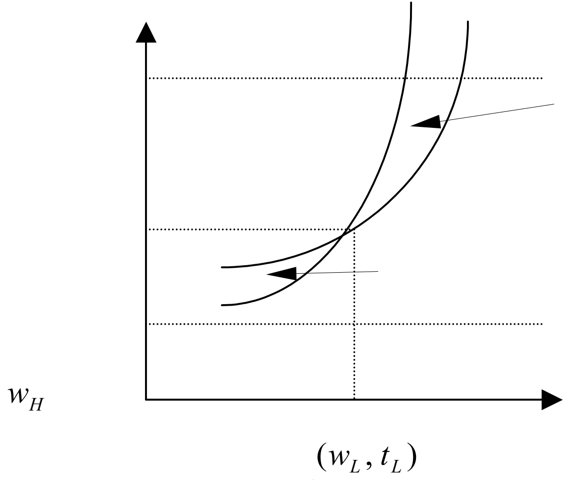
Рис. 5. 5

Условие сортировки (однократного пересечения) в данном случае играет решающую роль: благодаря этому условию смешивающее равновесие не возникнет.

В случае разделяющих равновесий на рынке труда предлагаются два вида контрактов $\boldsymbol{(w_L\ ,\ t_L)}$ и $\boldsymbol{(w_H\ ,\ t_H)}$. В равновесии каждая фирма зарабатывает нулевую прибыль. Означает ли это, что фирма зарабатывает нулевую прибыль на каждом сегменте рынка, т.е. $\boldsymbol{w_L = \theta_L}$ и $\boldsymbol{w_H = \theta_H}$? Строго говоря, нет. На одном из сегментов рынка возможны потери, а на другом их полное возмещение. Однако в этом случае, возможна только указанная ситуация.

Докажем, что $\boldsymbol{w_L = \theta_L}$. Для этого нужно исключить возможность $\boldsymbol{w_L < \theta_L}$. Найдём такой уровень зарплаты для низкопроизводительных работников, что выполнено $\boldsymbol{w_L < w^{\sim} < \theta_L}$ Пусть фирма предлагает теперь контракт с этим уровнем зарплаты, что подразумевает положительную прибыль для фирмы, а это невозможно. Значит, можно утверждать, что $\boldsymbol{w_L \geq \theta_L}$.

Далее докажем, что невозможна ситуация, когда $\boldsymbol{w_H < \theta_H}$. Здесь нельзя просто поднимать зарплату, поскольку на него могут откликнуться работники низкой производительности.



$(\widetilde{w}_H, t_H)$ - этот контракт обеспечит положительную прибыль

Рис. 5. 6

Контракт (w_L,t_L) должен существовать одновременно с контрактом $(\tilde{w}_H,t_H)$. Отсюда можно заключить, что $w_L \geq \theta_L$, $w_H \geq \theta_H$ Эти неравенства в равновесии выполняются как равенства.

В разделяющем равновесии имеет место следующая ситуация:

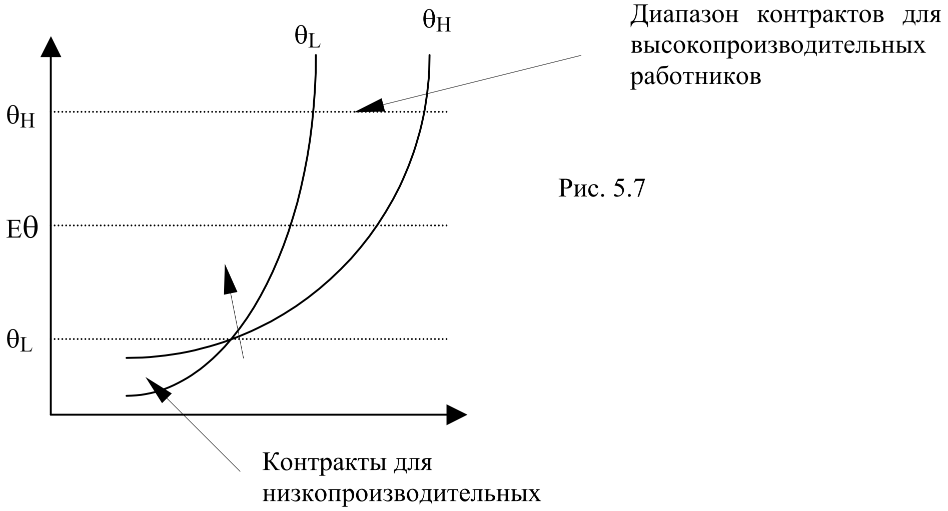


Рис. 5.7

Уровень усилий низкопроизводительных работников равен нулю в равновесии. Таким образом, им предложат следующий контракт: $(w_L,t_L) = (\theta_L,0)$.

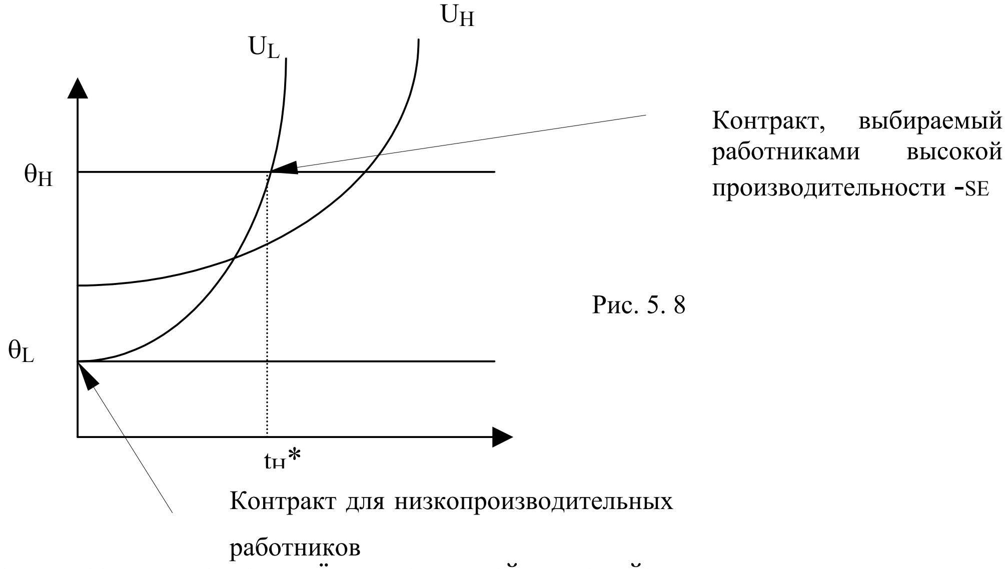


Рис. 5. 8

Разделяющее равновесие задаётся следующей системой:

$(w_L,t_L) = (\theta_L,0)$

$(w_H,t_H) = (\theta_H,t^*_H)$

где t^*_H ищется из условия безразличия для работника низкой производительности

$\theta_H - c(t^*_H\ ,\ \theta_L) = \theta_L - c(0\ \ ,\ \theta_L)$. Здесь работает предположение о том, что работник низкой производительности есть лексикографический лодырь.

Таким образом, единственное равновесие в модели скрининга есть наилучшее разделяющее равновесие, которое возникало в модели сигнализирования. Однако существование таких равновесий в этой модели поддерживается некоторыми условиями. К примеру, если существует отклонения, которые ведут к положительной прибыли для фирм, тогда равновесия нет.

Утверждение: *Равновесие в модели скрининга существует тогда и только тогда, когда наилучшее разделяющее равновесие в модели с сигнализированием является условно Парето-оптимальным.*

Пример отсутствия равновесия:

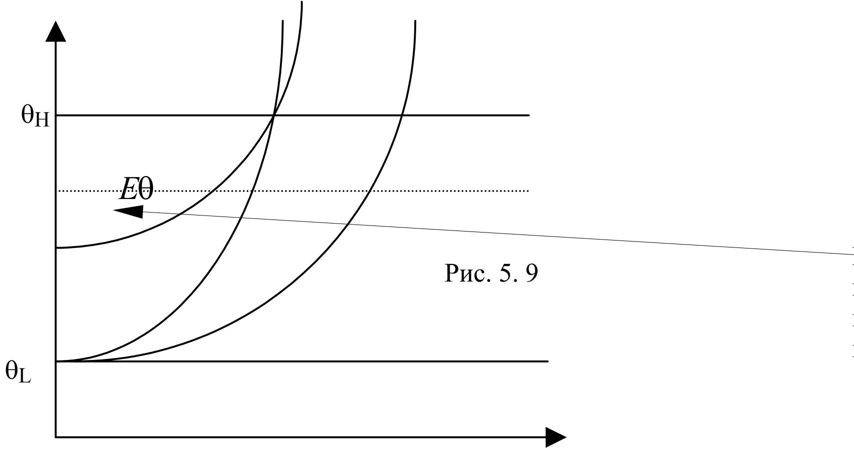


Рис. 5. 9

Контракт из этой области привлечёт всех работников и обеспечит положительную прибыль. Равновесия нет.

МОНОПОЛЬНЫЙ СКРИНИНГ

Рассматривается монополия на товарном рынке. Производится один продукт в объёме q. Технология производства этого продукта описывается линейной функцией затрат: c(q) = cq.

Предполагается, что репрезентативный потребитель обладает квазилинейными предпочтениями и может быть описан квазилинейной функцией полезности: $U(q,x) = x + V(q)$, где $V`(q)>0$, $V``(q)<0$, $V(0) = 0$

Информационная симметрия:

Полезно рассмотреть случай, когда реализуется общественный оптимум и сравнить результат с деятельностью монополии в условиях полной информации.

Общественный оптимум: известно, что в квазилинейной экономике анализировать Парето-оптимальные состояния можно с помощью следующей задачи оптимизации:

$V(q) - c(q) \rightarrow max_q$

Монополия: совершенная ценовая дискриминация (информационная симметрия)

Монополия в данном случае предлагает некоторый контракт – (q,T) , где q- объём продукции, T – стоимость контракта. Для того, чтобы потребитель был готов согласиться на предлагаемый контракт, необходимо выполнение условия участия: $V(q) \geq T$. Это условие гарантирует, что потребитель выберет данный контракт и стоимость контракта не является запретительной.

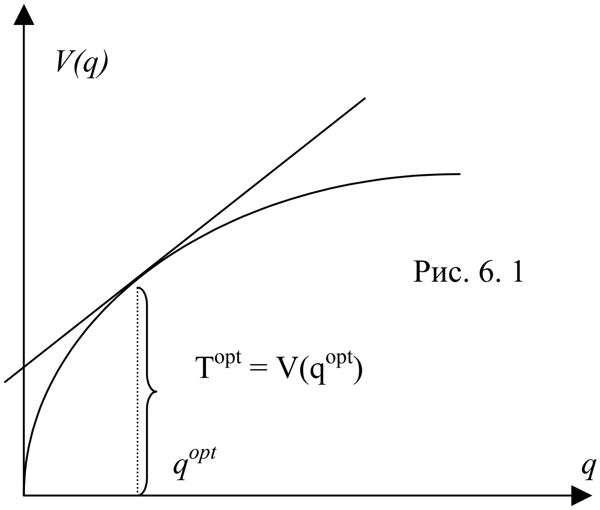


Рис. 6. 1

Монополист решает следующую задачу максимизации:

$$\pi = T - cq \rightarrow max_q$$

$$s.t.\ V(q) \geq T$$

Задачи подобного типа решаются при помощи стандартного метода построения функции Лагранжа и поиска условного оптимума. Легко заметить, что ограничение является связывающим в этой задаче и потому должно выполняться как равенство, т.е. $V(q) = T$. Таким образом, задача, решаемая монополистом, трансформируется в задачу поиска общественного оптимума:

$$\pi = T - cq \rightarrow max_q \qquad s.t.\ V(q) = T$$

Следовательно, в оптимальном для монополии контракте будет предложено общественно оптимальное количество товара. Единственное отличие от задачи общественного оптимума состоит в том, что потребительский излишек в этом случае полностью переходит монополии как прибыль.

Монополия: пакетная дискриминация в условиях информационной симметрии

Пусть на рынке присутствует два типа покупателей:

$U_i = x_i + V_i(q),\ i = 1,2$

В этом случае условие однократного пересечения задаётся следующей системой: $V_1(q) < V_2(q)$; $V`_1(q) < V`_2(q)$ для любого $q>0$

Обозначим долю покупателей первого типа λ, долю покупателей второго типа за (1-λ). Покупатель каждого типа решает свою максимизационную задачу, выбирая оптимальный контракт:

$V_i(q) - cq \rightarrow max$

$V`_i(q^{opt}) = c$

Предполагаем, что монополия различает покупателей и покупатель не может изменить свой тип.

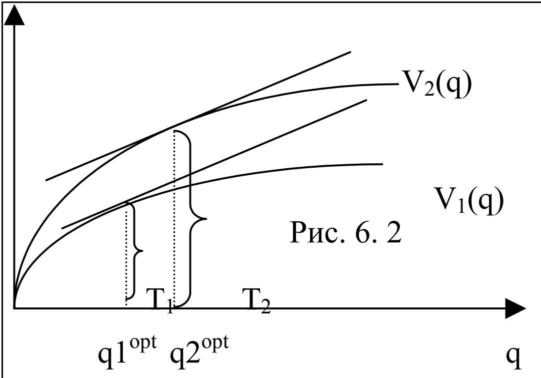


Рис. 6. 2

Таким образом, получаем оптимальные решения:

(T_1,q_1) $q_1=q_1^{opt}$

$T_1=V_1(q_1^{opt})$

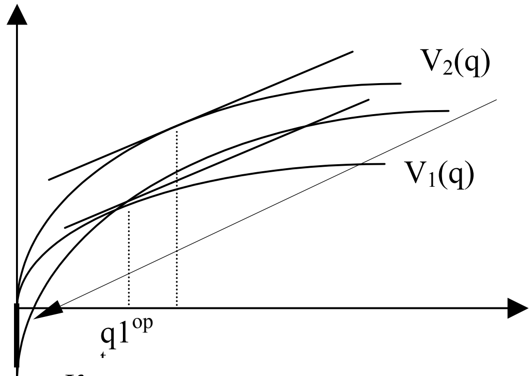
(T_2,q_2) $q_2=q_2^{opt}$

$T_2=V_2(q_2^{opt})$

Монополия: пакетная дискриминация в условиях информационной асимметрии

В этом случае монополия уже не может различать покупателей и организует скрининг.

Действительно, если монополия не в состоянии различить покупателей, то, предлагая два пакета всем покупателям, монополия весьма скоро обнаружит, что приобретается в основном один пакет (предназначенный для покупателей первого типа). Это означает, что покупатели второго типа, которые могли бы приобретать второй пакет, остаются с положительным уровнем потребительского излишка, что, конечно, не совсем устраивает монополию.



Положительная полезность потребителя 2-го типа после приобретения пакета, предназначенного для 1-го типа

Рис. 6. 3

Как в этом случае должна реагировать монополия?

Обозначим цену товара, предлагаемого покупателям монополией, - р. Считая, что потребители обладают квазилинейными функциями полезности, можно выписать следующую задачу:

$x - pq + V(q) \rightarrow max_q$

FOC: $V`(q) = p$

Условие первого порядка задаёт обратную функцию спроса потребителя на товар, т.е. спрос потребителя в квазилинейном случае представляется предельной полезностью от потребления блага.

Для простоты положим, что издержки производства товара равны нулю и $\lambda = ½$.

В этом случае монополия конструирует оптимальные пакеты следующим образом:

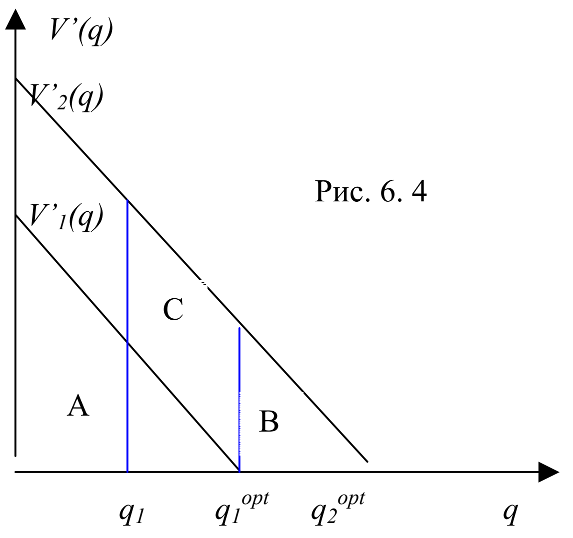


Рис. 6. 4

Контракт для 1-го типа покупателей:

Плата: T = A

(площадь треугольника под линией предельной полезности первого типа покупателей)

Объем товара: $q_1=q_1^{opt}$

Контракт для 2-го типа покупателей:

Плата: T = A+B+C

Объём товара: $q_2=q_2^{opt}$

В этом случае, если каждый потребитель выбирает контракт, предназначенный только ему, он получает нулевую полезность после совершения сделки. Однако у второго типа потребителей могут возникнуть стимулы к переключению на контракт, предназначенный для первого типа. Следовательно, нужно наложить определённые ограничения, не позволяющие второму типу потребителей переключаться. Немного видоизменяется контракт для второго типа потребителей:

Плата: T = A+B

Объём товара: $q_2=q_2^{opt}$

Таким образом, в случае информационной асимметрии монополия несёт потери в прибыли (от максимально возможной отходит доля C), т.е. прибыль = ½ A+ ½ (A+B)

Дабы полностью обезопаситься от неверных действий второго типа потребителей и по максимуму захватить их излишек, монополия может изменить контракт таким образом, что стоимость контракта для второго типа потребителей вырастет ровно на величину уменьшения его полезности. Это возможно сделать, поменяв контракт для первого типа потребителей: потребителю 1 предлагается пакет с объёмом $\tilde{q}_1 < q_1^{opt}$. Таким образом, монополия увеличивает стоимость контракта для второго типа на величину уменьшения его полезности до тех пор, пока предельные выигрыши от такого контракта не сравняются с предельными потерями.

Заметим, что внутреннего решения может и не существовать при таком подходе: если рынок потребителей первого типа чрезвычайно мал ($V`_1(\bullet)$ мало по сравнению с предельной полезностью участников второго типа), то, с точки зрения монополиста, уход с рынка первого типа может оказаться экономически оправданным.

Итак, характеристиками оптимальных контрактов являются:

1. полезность потребителей первого типа равна нулю;

2. полезность потребителей второго типа положительна;

3. в точке оптимума второй тип потребителя безразличен между выбором из двух контрактов;

4. участник с низким уровнем спроса (первый тип) потребляет на субоптимальном уровне.

5. участник с высоким уровнем спроса (второй тип) потребляет оптимальный уровень блага.

Нужно иметь в виду, что у каждого потребителя есть три возможности:

приобрести контракт (T_1,q_1);

приобрести контракт (T_2,q_2);

отказаться от предлагаемых контрактов.

Монополия желает добиться ситуации, когда потребитель 1 выбирает контракт (T_1,q_1). Это означает, что этот контракт должен быть для него не менее привлекателен, чем (T_2,q_2) и был доступен.

Participation Constraint (условие участия) – потребитель определённого типа соглашается купить свой контракт (пакет услуг) и не отказывается от сделки вовсе.

Также используется условие самоотбора (self-selection condition)[1].

Для 1-го потребителя:

$V_1(q_1) \geq T_1$ - условие участия (1)

$V_1(q_1) - T_1 \geq V_1(q_2) - T_2$ - условие самоотбора (2)

Для 2-го потребителя:

$V_2(q_2) \geq T_2$ - условие участия (3)

$V_2(q_2) - T_2 \geq V_2(q_1) - T_1$ - условие самоотбора (4)

При условии, что монополия максимизирует свою прибыль, задача выглядит следующим образом:

$$\lambda\, (T_1 - c_1 q_1) + (1 - \lambda)\, (T_2 - c_2 q_2) \rightarrow \max\ T_1,q_1,T_2,q_2$$

Заметим, что условия (1) и (4) выполняются жёстко, т.е. в оптимальном решении эти неравенства переходят в равенства. Потребитель первого типа получит нулевую полезность, потому первое условие будет жёстким. Первое условие, по сути, устанавливает верхнюю границу на T_1. Условия для второго потребителя налагают ограничения на T_2.

Это можно увидеть, из нижеследующего:

$T_1 \leq V_1(q_1)$

$T_1 \leq V_1(q_1) - V_1(q_2) + T_2$

и также,

$T_2 \leq V_2(q_2)$

---

[1] Если на рынке предлагается много контрактов, то условий самоотбора может быть много (их число будет равно количеству предлагаемых альтернативных контрактов).

$T_2 \le V_2(q_2) - V_2(q_1) + T_1$

Представим, что неравенство (3) выполняется как жёсткое - $T_2 = V_2(q_2)$. Тогда из (4) следует, что $T_1 \ge V_2(q_1) > V_1(q_1)$, что противоречит условию $T_1 \le V_1(q_1)$.

Таким образом, условие (3) не является жёстким. Отсюда следует также, что условие (4) является жёстким (т.к. в оптимуме одно из двух условий обязательно должно быть жёстким) $V_2(q_2) - T_2 = V_2(q_1) - T_1$.

Что касается T_1, то в этом случае, если второе неравенство является жёстким, имеет место равенство $V_1(q_1) - T_1 = V_1(q_2) - T_2$. Однако такая ситуация не может устраивать, поскольку вступает в противоречие с условием однократного пересечения $V_1(q) < V_2(q)$; $V`_1(q) < V`_2(q)$ для любого $q>0$. Следовательно, первое условие выполняется жёстко.

Упр. Доказать, что если выполнено $V_1(q_1) - T_1 = V_1(q_2) - T_2$, то имеет место противоречие с условием однократного пересечения.

Исключим переменные T_i

$T_1 = V_1(q_1)$

$T_2 = V_2(q_2) - V_2(q_1) + V_1(q_1)$

Задача оптимизации принимает вид:

$\pi = \lambda (V_1(q_1) - c_1 q_1) + (1-\lambda) (V_2(q_2) - V_2(q_1) + V_1(q_1) - c_2 q_2) \rightarrow \max q_1, q_2$

FOC:

$V`_2(q_2) = c$

$V`_1(q_1) = \lambda c + (1-\lambda) V`_2(q_1), \quad if\ q_1>0$

и т.к. $V`_2(q_1) > V`_1(q_1)$ в силу условия сортировки, то получаем $V`_1(q_1)>c$

Из вышесказанного следует, что в оптимизационной задаче мы получаем субоптимальное решение, т.е. q_1 выбирается меньшим, чем в оптимальном решении в условиях информационной симметрии. Таким образом, монополия предлагает вариант, который не является общественным оптимумом, что можно было ожидать.

Упр 1. доказать, что если выполнены условия (1) и (4) как равенства, то неравенства (2) и (3) удовлетворяются автоматически.

Упр 2. необходимо решить аналогичную задачу при следующих условиях: имеется 2 типа потребителей, λ -доля потребителей первого типа

$V_i(q) = \theta_i V(q)$

$V(q) = (1 - (1 - q)^2)/2$

$c < \theta_1 < \theta_2$

Найти оптимальные контракты для этой задачи.

SCREENING при помощи качества продукции

Известно, что потребитель с высокой полезностью не склонен покупать низкосортный товар. Цену товара различного качества можно варьировать, осуществляя таким образом скрининг (сортировку в данном случае) покупателей. Другими словами, осуществляется ценовая дискриминация при помощи качества продукции. Например, предлагается два уровня качества (высокое и низкое). Если монополия желает выделить потребителя с высокими требованиями к товару, то низкосортный товар должен быть действительно низкого качества, чтобы у этого потребителя не возникло желания его приобретать.

В дальнейшем предполагается, что потребитель приобретает только одну единицу товара, но эта единица может быть различного качества; полезность потребителя определяется следующим образом:

$U = \{ \theta s - p,$ покупка $|\ 0,$ нет $\}$

где s- качество продукции, p- цена, θ - параметр вкуса.

Функция полезности устроена таким образом, что чем больше θ, тем выше чувствительность к качеству продукции.

Пусть имеются два потребителя, причём $\theta_1 < \theta_2$ (т.е. второй потребитель более чувствителен к качеству продукции); доля потребителей первого типа равна λ.

Издержки производства характеризуются следующим:

c= c(s) – функция издержек (выпуклая) $c`(s)>0$, $c``(s)>0$

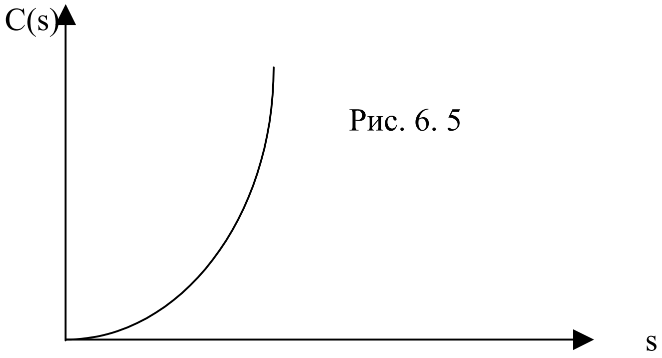


Рис. 6. 5

Задача монополистов состоит в том, чтобы подобрать соответствующие контракты (p_1,s_1) и (p_2,s_2)

$\pi = \lambda\ (p_1 - c(s_1)) + (1 - \lambda)\ (p_2 - c_2(s_2)) \rightarrow max\ p_1,q_1,p_2,q_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} \theta_1 s_1 \geq p_1 \\ \theta_1 s_1 - p_1 \geq \theta_1 s_2 - p_2 \\ \theta_2 s_2 \geq p_2 \\ \theta_2 s_2 - p_2 \geq \theta_2 s_1 - p_1 \end{cases}$$

Полезно выписать задачу общественного оптимума и проанализировать результаты:

$\theta_i s_i - c(s_i) \rightarrow \max s_i \qquad i=1,2$

$c`(s_1^{opt}) = \theta_2 \qquad c`(s_2^{opt}) = \theta_2$

Нетрудно заметить сходство рассматриваемой задачи с задачей монопольного скрининга, достаточно произвести замену переменных:

$q = c(s)$

$s = c^{-1}(q) = V(q) \quad \Rightarrow \quad V = c^{-1}$

Отсюда следуют знакомые условия:

$$\begin{cases} \theta_1 V(q_1) \geq p_1 \\ \theta_1 V(q_1) - p_1 \geq \theta_1 V(q_2) - p_2 \\ \theta_2 V(q_2) \geq p_2 \\ \theta_2 V(q_2) - p_2 \geq \theta_2 V(q_1) - p_1 \end{cases}$$

при с=1 получаем

$\pi = \lambda (p_1 - q_1) + (1 - \lambda) (p_2 - q_2) \rightarrow \max p_1,q_1,p_2,q_2$

$p_1 = \theta_1 s_1 \qquad p_2 \leq \theta_2 s_2$

Таким образом, потребитель 1 получает нулевую полезность, а потребитель 2 получает положительную полезность.

Далее,

$\theta_2 V`(q_2) = 1 \qquad c`(s_2) = \theta_2$

$\theta_1 V`(q_1) > 1 \qquad c`(s_1) = \theta_1$

В итоге, второй потребитель получает оптимальный уровень качества, в то время как потребитель 1 недополучает качество.

MORAL HAZARD

В русскоязычной литературе этот термин переводится как «моральный риск». Будем предполагать, что

- Два агента заключают контракт
- Контракт не отражает все условности (контракт не идеален)
- Ситуация ненаблюдаемых действий (действия контрагентов после заключения контракта не фиксируются сторонами)

PRINCIPAL – AGENT PROBLEM

Ситуация «начальник-подчинённый» может рассматриваться следующим образом. Сторона (principal) нанимает другую (agent) сторону для выполнения некоторых действий. После заключения контракта начальник не может наблюдать действий агента. Таким образом, контракт должен быть составлен так, чтобы действия подчинённого не наносили ущерба начальнику.

Эту ситуацию можно часто наблюдать на практике. Например, отношения «граждане - правительство» или «страховщик – страхователь» представляют частный случай и непосредственный интерес для исследователей в этой области микроэкономики. Мы рассмотрим рынки страховых услуг и возникающие проблемы на этом рынке.

СТРАХОВЫЕ РЫНКИ

Посылки модели:

- Страховая компания не может видеть, насколько «аккуратен и чистоплотен» её клиент;
- Индивид обладает след. функцией полезности U(x):

  $U`(x)>0, U``(x)<0, U(0)=0$

Пусть p_n – набор состояний, x_n – реализация дохода в n-ом состоянии. Построим функцию полезности Неймана – Моргенштерна:

$$U(x) = \Sigma_{i=1..n} p_i U(x_i)$$

Предполагается, что индивид обладает начальным запасом богатства в объёме w. Однако он находится под угрозой несчастного случая, который может произойти с вероятностью p и может нанести урон в размере L.

Схематично ситуацию можно изобразить так:

$$x = \begin{cases} w, \text{ с вероятностью } (1 - p) \\ w-L, \text{ с вероятностью } p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad EU = (1 - p)\ u(w) + p\ u(w - L)$$

Так выглядит ожидаемая полезность. Ожидаемый доход равен $w - pL$.

Графическая интерпретация:

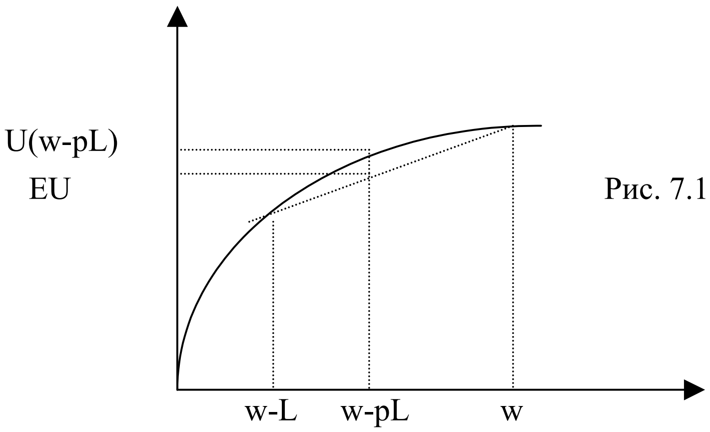


Рис. 7.1

Агент стремится избегать риска. Страховая компания предлагает страховой полис (insurance policy) следующего вида: если страхуемый страхует своё имущество в размере $q>0$, то эта сумма будет выплачена после наступления страхового случая; стоимость страховки составляет π единиц, $0 < \pi < 1$, где π - страховая премия (insurance premium). Таким образом, агент заплатит за страховку сумму в размере πq.

Предполагается, что вероятность наступления страхового случая (p) всем известна и не зависит от поведения агента. Каждый участник оптимизирует свою функцию полезности (страховая компания стремится максимизировать функцию прибыли, а агент – функцию полезности). Агент выбирает величину q, т.е. на объём страхования имущества.

В случае принятия решения о покупке страхового полиса индивид решает следующую максимизационную задачу:

$$p\ U(w - L + q - \pi q) + (1 - p)\ U(w - \pi q) \rightarrow \max_q \quad (*)$$

Заметим, что если $q^{opt}<0$, то агент начинает продавать страховку, однако для рискофоба $q^{opt}>0$. Известно также, что для конкурентного рынка выполнено условие $\pi = q$. Покажем это.

Страховая компания, по предположению, является нейтральной по отношению к риску. Следовательно, она максимизирует ожидаемую прибыль

$\Pi=(1-p)\pi - p(1-\pi)$. На совершенно конкурентном рынке в долгосрочном периоде прибыль равна нулю. Следовательно, $(1-p)\pi = p(1-\pi)$. Отсюда непосредственно получаем $\pi = p$.

Такая ситуация называется «справедливая цена страховки» - fair insurance.

Теперь рассмотрим, как агент выбирает оптимальное q. Для этого необходимо выписать условия первого порядка для задачи (*). Поскольку анализируемая функция полезности U(x) является вогнутой, то F.O.C. представляются необходимыми и достаточными условиями.

F.O.C.

$$p\ (1 - p)U(w - L + q - \pi q) - \pi\ (1 - p)\ U(w - \pi q) = 0$$

$$\pi = p \Rightarrow U(w - L + q - \pi q) = U(w - \pi q)$$

$$\Rightarrow w - L + q - \pi q = w - \pi q \Rightarrow q=L$$

Такая ситуация называется «полное страхование». Добавим, что полное страхование возникает в предположении совершенной конкуренции страховых рынков и определённых ограничений на функцию полезности ($U`(\cdot)$ - монотонно убывающая функция).

Таким образом, $w - \pi q =$ - весь риск передан страховой компании. Ожидаемая полезность = $U(w - pL) > EU$.

Получили Парето-улучшение по сравнению с ситуацией, когда страховка недоступна: прибыль страховой компании была и осталась равной нулю, а полезность агента увеличилась. Следовательно, первоначальная ситуация не являлась Парето-оптимумом, но полученная ситуация есть Парето-оптимум.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда **действия ненаблюдаемы**. Вероятность наступления страхового случая (p) априори неизвестна. Поскольку действия ненаблюдаемы, то они не могут стать частью страхового контракта.

Пример:

Первоначальное богатство индивида w.

$$x = \begin{cases} w, \text{ с вероятностью } (1 - p) \\ w-L, \text{ с вероятностью } p \end{cases}$$

Индивид несёт потери в размере L при наступлении страхового события, описанного в контракте. Однако теперь вероятность наступления этого события зависит от усилий (e), которые ненаблюдаемы и, вследствие этого, не отражены в контракте.

$p=p(e)$ $p`(e)<0$

e – ненаблюдаемые усилия.

Усилия сопряжены с некоторыми издержками, которые могут быть описаны следующей функцией издержек: $g(e)$

$g(0)=0$ $g`(e)>0$

Полезность агента задаётся функцией: $w(x) - g(e)$

Пусть страховка продаётся по цене π, тогда выигрыш агента вычисляется по формуле:

$$p(e)\, U(w - L + q - \pi q) + (1 - p(e))\, U(w - \pi q) - g(e) \equiv \Phi(q,e) \rightarrow \max_{q,e}$$

Равновесие на страховом рынке $<q,e,\pi>$

оптимальность покупателя (при заданном π)

$q,e = \mathrm{Argmax}\ \Phi(q,e \mid \pi)$

конкурентность страхового рынка

$\pi = p(e)$

Заметим, что возможно следующее равновесие: $e=0$, $\pi = p(0)$, $q=L$. При этом цена страховки $\pi = p(0)$ будет очень большой (т.к. $e=0$ предполагает оппортунистическое поведение – нет желания прилагать усилия по избежанию страхового случая). Такое равновесие не является «нормальным», поскольку при большой вероятности наступления страхового события стоимость страховки, соответственно, будет высокой. В этом случае агент, скорее всего, откажется от приобретения страховки, предпочитая потратить немного усилий на предотвращение несчастного случая. Это можно увидеть из нижеследующего:

Если агент страхуется на вышеуказанных условиях, то

$V_1 = U(w-p(0)L)$

Если прилагает усилия по предотвращению страхового случая, то

$V_2 = p(e^*)U(w-L) + (1-p(e^*))U(w-q(e^*))$

Возможно что $V_2>V_1$ т.е. рынок страхования исчезает.

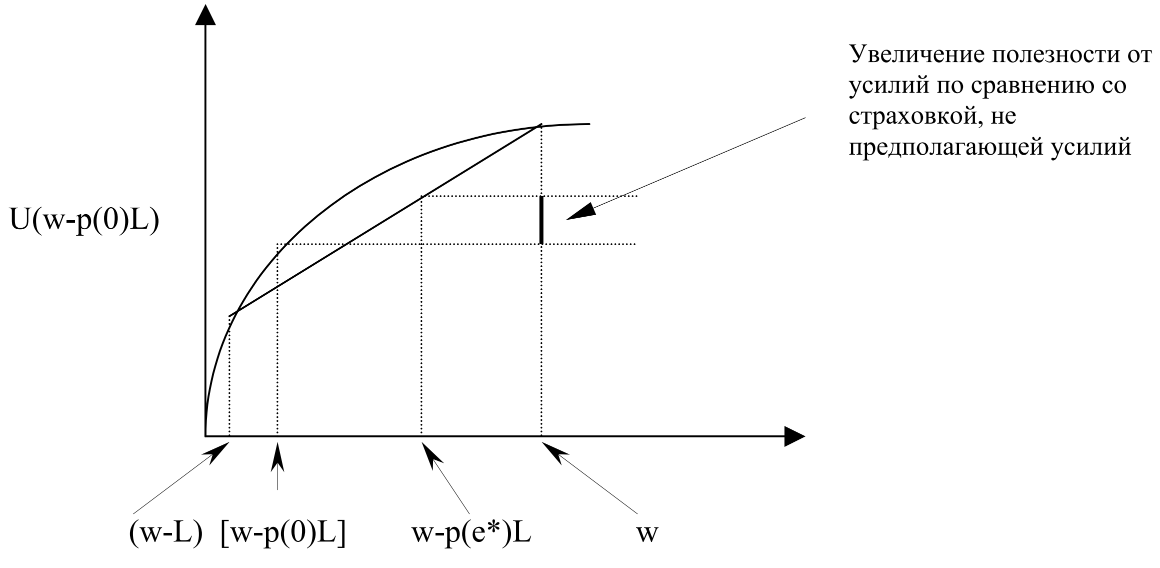
Оппортунистическое поведение – поведение экономического агента в собственных интересах в ущерб другому агенту.

Страховая компания должна защитить себя от подобного поведения страхуемого. Информационная асимметрия заставляет страховую компанию требовать высокую цену за страховые услуги, но компания не может назначить слишком высокую цену – в этом случае агент просто откажется от страховки.

Предлагается поделить риски между страховой компанией и агентом. Как это сделать? Страховая компания может ввести ограничение на максимум суммы страховки, т.е. компания ограничивает возможное q: $q \leq q^{\sim}$, $q^{\sim}$ - максимальная сумма страховки.

То, что не будет покрыто страховкой, называется deductibles (вычеты) и равняется $L-q^{\sim}$.

Графическая интерпретация «провала рынка»:



Если $g(e^*)$ вписывается в выделенный отрезок, то агент откажется от приобретения страховки, т.к. приложить усилия выгоднее страховки.

Оптимум Парето (усилия наблюдаемы):

Если бы поведение (усилия) агента можно было сделать частью контракта (в случае наблюдаемости усилий, к примеру, e_0). Предполагается, что механизм исполнения контрактов работает хорошо. Страховые компании получают нулевую прибыль. Следовательно, для поиска оптимума необходимо максимизировать полезность агента.

На конкурентном страховом рынке $\pi = p(e_0)$ - Парето-оптимум.

$U(w - p(e_0)L) - g(e_0) \rightarrow maxe_0$

Решением этой задачи является Парето - оптимальное значение уровня усилий.

Deductibles: компания предлагает выбирать q в некотором диапазоне

$[0;q^{\sim}]$, где $q^{\sim}<L$

Поиск рыночного равновесия происходит в ограниченной области:

$\Phi(q,e|\ \pi) \rightarrow max\ 0\leq q\leq q^{\sim}\ e\geq 0$ при заданном π.

При выполнении $q\leq q^{\sim}$ агент не может полностью застраховаться ($q\neq L$). Таким образом, для богатства индивида всегда верно, что $w_{good}>w_{bad}$, где

$w_{bad} = w - L + q$

$w_{good} = w - \pi q$

Условие по e: $p`(e)\ [U(w_b) - U(w_g)] = g`(e)$

Оптимум усилий (e) является некраевым, т.е. e > 0. Таким образом, появляется возможность восстановления страхового рынка, т.к. на конкурентном рынке $w - pL$ уменьшится. Потери также уменьшатся, но не исчезнут полностью (т.к. для этого нужно застраховаться полностью). Тем не менее, это положительное $q^{\sim}$ ещё не обещает существования рынка.

Упр. Доказать, что в равновесии $q=q^{\sim}$.

PRINCIPAL - AGENT PROBLEM (общая задача)

- какая необходима система стимулов, чтобы вынудить подчинённого прилагать уровень усилий = e.
- каким должен быть уровень усилий (с учётом того, что стимулы затратны для начальника).

Переменные оптимизации: уровень усилий (e), механизм стимулирования m(e).

Первоначально, при заданном ***e***, выбирается механизм стимулирования m(e), затем решается максимизационная задача $U(e,m(e)) \rightarrow max_e$

Усилия ненаблюдаемы, но наблюдаем результат усилий ***π=π(e)***, причём эта зависимость от усилий – стохастическая. В связи с этим вводится условное распределение результата F(***π***|***e***). Предполагается, что начальник нейтрален по отношению к риску, в то время как подчинённый избегает риска (рискофоб); функция полезности подчинённого представлена ***U = v(x) – g(x)*** и, кроме того, он имеет резервную полезность U_0.

В данном случае контракт представляет собой функцию заработной платы ***w = w(π)***, которую ему предлагает начальник. При заданном контракте подчинённый выберет оптимальный для него уровень усилий ***e***.

Таким образом, в зависимости от типа контракта подчинённый выберет соответствующий уровень усилий. Начальнику предстоит, зная , что контракт влияет на уровень усилий, составить контракт таким образом, чтобы подчинённый выбрал оптимальный для начальника уровень усилий.

Задача «начальник – подчиненный»

Задача начальника – выбор оптимальных условий контракта:

$$\int \pi\, dF(\pi|e) - \int w(\pi)\, dF(\pi|e) \to \max_{w(.),e} \qquad [1]$$

Первый интеграл соответствует ожидаемой прибыли начальника, второй – ожидаемому платежу подчиненному. Условие участия (условие того, что подчиненный не откажется работать: ожидаемый выигрыш подчиненного должен быть не меньше его резервной полезности):

$$\int v(w(\pi))\, dF(\pi|e) - g(e) \ge \bar{u} \qquad [2]$$

Условие совместимости со стимулами – подчиненному выгодно выбрать именно тот уровень усилий, который от него ожидает начальник:

$$\int v(w(\pi))\, dF(\pi|e) - g(e) \ge \int v(w(\pi))\, dF(\pi|e') - g(e'); \quad \forall e' \in E \qquad [3]$$

Если усилия подчиненного наблюдаемы начальником, то условие [3] исчезает, так как можно явным образом прописать в контракте уровень усилий.

Теперь представим себе, что начальник заранее знает, на какой уровень усилий он хотел бы вывести подчиненного. Тогда единственной оптимизируемой переменной остается функция заработной платы. Она не влияет напрямую на ожидаемую прибыль начальника, то есть не входит в первое слагаемое формулы [1]. Тогда задача начальника состоит в следующем: нужно минимизировать затраты для данного уровня усилий и сохранить необходимые ограничения:

$$\int w(\pi)dF(\pi|e) \to \min_{w(.)} \qquad [4]$$

при условиях [2], [3] (или только [2] в случае наблюдаемых усилий).

Обозначим за Ф*(e)* минимальное значение функционала [4] при соответствующих ограничениях. Ф*(e)* – это те издержки, которые должен понести начальник, чтобы обеспечить выполнение подчиненным усилий на уровне *e*. Найдя Ф*(e)*, уже можем поставить задачу поиска оптимальных (для начальника) усилий подчиненного:

$$\int \pi dF(\pi|e) - \Phi(e) \to \max_{e\in E} \qquad [5]$$

при условиях [2], [3] или только [2].

Осталось понять, какой уровень усилий начальник заложит в контракт явным (наблюдаемые усилия) или неявным (ненаблюдаемые) образом. Забегая вперед, можно сказать, что в некоторых случаях отбрасывание условий совместимости со стимулами может не повлиять на решение задачи. Это произойдет в том случае, если зарплата – константа, *g(e)* монотонно возрастает (тогда подчиненный выберет минимальный уровень усилий) и начальник сам ожидает от подчиненного минимальный уровень усилий. Возникает вопрос: рационально ли начальнику желать, чтобы подчиненный выбрал минимальные усилия? Ответ – да, это может иметь место, если *g(e)*возрастает слишком быстро – тогда может оказаться, что увеличение уровня усилий принесет больше издержек, чем прибыли, и выгоднее всего выбрать именно наименьший уровень усилий.

Рассмотрим теперь серию примеров, которые приведут нас к задаче общего вида.

Пример 1. Усилия наблюдаемы, полезность подчиненного: *v(w)=w* (т.е. подчиненный нейтрален к риску), распределение прибыли детерминировано: π=π*(e)*.

Усилия наблюдаемы – условия совместимости со стимулами нам не нужны, требуется только проследить выполнение условия участия [2]:

$w = g(e) + \overline{u}$ (равенство потому, что начальник всегда стремится уменьшить зарплату подчиненному). Отсюда немедленно следует, что

$$\Phi(e) = g(e) + \overline{u}$$

Задача [4] перепишется в виде:

$$\pi(e) - g(e) - \overline{u} \to \max_{e\in E}$$

Условие первого порядка: $\pi'(e^*) = g'(e^*)$, где *e** - оптимальный уровень усилий. Контракт примет вид <*e*, w=g(e*)+u*>. Этот контракт оптимален по Парето, т.к. он максимизирует суммарный выигрыш, равный, согласно сильной теореме Коуза, $\pi(e) - g(e)$.

Что изменится, если усилия станут ненаблюдаемыми? В общем случае прибыль начальника уменьшается. В нашем же случае прибыль – детерминированная функция усилий, т.е. наблюдая прибыль, можем вычислить усилия. Предположим, что начальник «не догадывается» проделать это и не видит усилий. В этом случае начальник должен «продать» бизнес подчиненному за некоторую фиксированную сумму (в реальности это называется франчайзингом). Пусть $w(\pi) = \pi - \alpha$. Тогда задача интернализуется, условие [3] принимает вид $\pi(e) - g(e) - \alpha \to \max_{e \in E}$. Решение задачи Парето-оптимально, усилия выбираются на уровне *e**. Чтобы выполнилось условие участия [2], нужно ограничение на параметр: $\alpha \le \pi(e^*) - g(e^*) - \bar{u}$. Прибыль начальника в точности равна α, он стремится ее максимизировать, значит, ограничение участия выполнится с равенством. Прибыль начальника полностью совпадает с прибылью при наблюдаемой информации.

<u>Пример 2.</u> Риск присутствует (зависимость прибыли от усилий – не детерминированная функция), подчиненный избегает риска (полезность – вогнутая функция зарплаты), усилия наблюдаемы. Нужно максимизировать [1] при условии [2].

В этом случае нет смысла предлагать сложный контракт, в котором зарплата зависит от результата, поскольку изначально в контракте закладывается уровень усилий, который подчиненный обязан прилагать. Подчиненного не нужно стимулировать зарплатой, если в контракте явно прописан уровень усилий. Однако, возникает вопрос: может ли быть так, что, предлагая дифференцированную в зависимости от результата зарплату, начальник сможет уменьшить издержки на оплату труда? Ответ – нет, т.е. начальнику выгодно полностью застраховать подчиненного от риска, предложив зарплату, не зависящую от результата. Покажем это формально.

Формулировка задачи (если *e* уже фиксировано):

$$\int w(\pi|e)dF(\pi|e) \to \min_{w(.)}$$

при условии $\int w(\pi|e)dF(\pi|e) - g(e) \ge \bar{u}$

Это – классическая задача условной оптимизации. Функция Лагранжа:

$$L = \int \left[w(\pi|e) - \lambda v(w(\pi|e))\right] dF(\pi|e) \to \min_{w(.)}$$

Заметим, что на значения *w(.)* при различных значениях π нет никаких ограничений, поэтому можем оптимизировать подынтегральное выражение при каждом значении *F(*π*)*:

$$w(\pi|e) - \lambda v(w(\pi|e)) \to \min_{w()} \qquad [5]$$

(это то же самое, что минимизация суммы, в которой каждое слагаемое независимо от других). Заметим, что функция полезности *v(.)* вогнута, значит, минимизируемое выражение [5] выпукло по *w*.

Следовательно, условия первого порядка будут необходимыми и достаточными для нахождения минимума.

Условие первого порядка:

$$v'(w) = 1/\lambda = const$$

Из этого уравнения и строгой вогнутости *v(.)* следует, что зарплата постоянна, как мы и предполагали. Найти точное выражение для зарплаты мы можем, обращая условие участия в равенство:

$$w_e = v^{-1}\left(g(e) + \bar{u}\right)$$

Такую зарплату начальник должен предложить подчиненному, если хочет получить от него уровень усилий *e*. Функция издержек начальника – это ожидаемый уровень заработной платы. Т.к. в этом случае зарплата – константа, то функция издержек:

$$\Phi(e) = \int w(\pi|e) dF(\pi|e) = w = v^{-1}\left(g(e) + \bar{u}\right)$$

Второй этап задачи начальника – выбор оптимальных (для начальника) усилий подчиненного, т.е. максимизация чистой прибыли по усилиям подчиненного:

$$\int \pi dF(\pi|e) - v^{-1}\left(g(e) + \bar{u}\right) \to \max_{e \in E}$$

Решив задачу, найдем оптимальное e^*, затем найдем $w^* = v^{-1}\left(g\left(e^*\right) + \bar{u}\right)$. Это и будет оптимальным контрактом.

До сих пор мы предполагали, что усилия – какой-то параметр, принадлежащий множеству *E*. Теперь будем считать, что усилия – это неотрицательное число, то есть можно сказать, больше усилий затрачивается или меньше. Логично предположить, что функция *g(e)* будет монотонно возрастающей – чем больше усилий, тем тяжелее подчиненному. Логично также предположить, что усилия должны благотворно влиять на результат – чем больше усилий, тем больше и прибыль. Математически это формулируется тривиально для случая детерминированной функции $\pi(e)$. Но если связь результата и усилий не детерминирована и описывается функцией распределения $F(\pi|e)$, то утверждение «чем больше усилий, тем выше результат» на математическом языке называется *стохастическим доминированием (stochastic dominance)*. Дадим определение этому понятию.

Стохастическое доминирование первого порядка. Пусть имеется две функции распределения: $F_1(\pi)$ и $F_2(\pi)$. Будем говорить, что случайная величина $\xi_1 \sim F_1(\pi)$ стохастически доминирует (в смысле первого порядка) другую случайную величину $\xi_2 \sim F_2(\pi)$, если (и только если) для каждого π выполнено:

$$F_1(\pi) \le F_2(\pi)$$

и хотя бы для одного значения π это неравенство строгое.

Интуитивное объяснение: для каждого значения π вероятность того, что одна случайная величина примет значение, не большее π, меньше, чем вероятность того, что другая случайная величина будет не больше π. То есть «в среднем» первая случайная величина больше.

Можно дать эквивалентное определение этому понятию: случайная величина $\xi_1 \sim F_1(\pi)$ стохастически доминирует случайную величину $\xi_2 \sim F_2(\pi)$, если и только если для любой монотонно неубывающей функции $u(.)$ выполнено:

$$\int u(\pi)dF_1(\pi) \geq \int u(\pi)dF_2(\pi) \qquad [6]$$

и хотя бы для одной $u(.)$ это неравенство строгое.

(если $u(.)$ интерпретировать как полезность, то это условие означает, что ожидаемая полезность от первой случайной величины не меньше ожидаемой полезности от второй случайной величины для каждой монотонно неубывающей функции полезности $u(.)$).

<u>Упражнение.</u> Доказать эквивалентность двух определений.

Из стохастического доминирования также следует $E(\xi_1) \geq E(\xi_2)$.

Дадим также определение стохастического доминирования второго порядка. $\xi_1 \sim F_1(\pi)$ стохастически доминирует $\xi_2 \sim F_2(\pi)$ в смысле второго порядка, если [6] выполнено для любой монотонной и вогнутой функции $u(.)$. Эквивалентное определение: . $\xi_1 \sim F_1(\pi)$ стохастически доминирует $\xi_2 \sim F_2(\pi)$ в смысле второго порядка, если

$$\int_{-\infty}^{\pi} F_1(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\pi} F_2(x)dx$$

Очевидно, стохастическое доминирование первого порядка – более строгое ограничение на функции распределения.

Вернемся к нашей модели. Будем предполагать, что если есть два произвольных уровня усилий e_1 и e_2 и $e_1 < e_2$, то $F(\pi|e_2)$ стохастически доминирует $F(\pi|e_1)$ в смысле первого порядка – если подчиненный повышает уровень усилий, то новое распределение стохастически доминирует предыдущее.

<u>Пример 3.</u> Усилия принимают всего 2 значения: $e_L=1$ и $e_H=2$. Функции распределения следующие:

$$e = 1 \Rightarrow \pi = \begin{cases} 1, p = \frac{1}{2} \\ 2, p = \frac{1}{2} \end{cases}; \qquad e = 2 \Rightarrow \pi = \begin{cases} 2, p = \frac{1}{2} \\ 3, p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(то есть имеем стохастическое доминирование первого порядка). Будем считать, что $g(e)=e^2$; $v(w)=w^{1/2}$; $\overline{u} = 0$. Найдем оптимальный контракт, предполагая усилия наблюдаемыми.

Если начальник хочет получить уровень усилий *e*, то он должен соблюсти условие участия для подчиненного: $w_e^{1/2} = e^2 + 0$, или $w_e = e^4$. если *e=1*, то *w=1*; если *e=2*, то *w=16*.

Теперь нужно рассчитать, какой уровень усилий закладывать в контракт. Найдем ожидаемую чистую прибыль при каждом уровне усилий.

$e=1 \Rightarrow E(\pi)=1.5,\ w=1 \Rightarrow$ чистая прибыль равна 0.5.

$e=2 \Rightarrow E(\pi)=2.5,\ w=16 \Rightarrow$ чистая прибыль равна -13.5.

Очевидно, выгоднее выбирать низкий уровень усилий. Оптимальный контракт: *e=1*, *w=1*.

Перейдем теперь к задачам с ненаблюдаемыми усилиями. В этом случае потеря эффективности будем неизбежной, попробуем понять почему.

Если подчиненный избегает риска, то при наблюдаемых усилиях выгодно предложить ему фиксированную зарплату, то есть полностью его застраховать от риска. Когда усилия становятся ненаблюдаемыми, начальник уже не может предложить подчиненному фиксированную зарплату, потому что в этом случае усилия будут выбраны на минимальном уровне. Если это не то, чего хочет начальник, то зарплату нужно дифференцировать, и получается, что мы предъявляем к функции зарплаты два противоречивых требования: во-первых, зарплата должна давать подчиненному страховку от риска, для этого она должна быть постоянной; во-вторых, зарплата должна стимулировать подчиненного, для этого она должна быть переменной в зависимости от результата. Стараясь найти компромисс между этими целями, начальник вынужден нести потери по сравнению с ситуацией наблюдаемых усилий.

Пример 4. Выше мы рассмотрели ситуацию наблюдаемых усилий и отрицательного отношения подчиненного к риску. Рассмотрим противоположный случай: усилия ненаблюдаемы, подчиненный нейтрален к риску. Тогда нет нужды делать зарплату постоянной, так как подчиненный относится к риску так же, как и начальник, и его не нужно страховать.

Пусть $v(w) = w$. Будем решать задачу стандартным методом: сначала рассчитаем, во что обойдется начальнику вывод подчиненного на некоторый уровень усилий, а потом найдем, какой уровень усилий оптимален.

Предположим, мы создали контракт (с ненаблюдаемыми усилиями), который дает начальнику ту же чистую прибыль, что и оптимум в случае с наблюдаемыми усилиями, то, очевидно, такой контракт будет оптимален и в случае ненаблюдаемых усилий, так как добавление ограничения самоотбора не может увеличить максимизируемую функцию чистой прибыли, а может ее только уменьшить либо оставить неизменной.

Пусть сначала усилия наблюдаемы – мы можем забыть об ограничениях самоотбора, единственное ограничение: $\int w(\pi|e)dF(\pi|e) - g(e) = \bar{u}$ [7]

Заработную плату делаем постоянной (это оптимум при наблюдаемых усилиях), тогда [7] преобразуется следующим образом:

$$w_e = g(e) + \bar{u}$$

Такую зарплату мы должны предложить подчиненному, если усилия наблюдаемы. Найдем теперь оптимальный уровень усилий:

$\int \pi dF(\pi|e) - g(e) - \bar{u} \to \max\limits_{e \in E}$, пусть $e=e^*$ - оптимальное решение этой задачи. Это означает, что максимум, на что может рассчитывать начальник при наблюдаемых усилиях, это

$$\int \pi dF(\pi|e^*) - g(e^*) - \bar{u} \qquad [8]$$

Если мы придумаем контракт, который при ненаблюдаемых усилиях даст такой же результат, то такой контракт, очевидно, тоже будет оптимален.

Предложим при ненаблюдаемых усилиях следующий контракт:

$w = w(\pi) = \pi - \alpha$ - по сути, продаем бизнес подчиненному. Эта идея работает здесь потому, что подчиненный нейтрален к риску и передача ему всех рисков оказывается эффективной. Задача подчиненного (условие самоотбора):

$\int \pi dF(\pi|e) - \alpha - g(e) \to \max\limits_{e \in E}$. Очевидно, в результате решения этой задачи получим $e=e^*$.

Платеж α находится из условия участия:

$\int \pi dF(\pi|e^*) - \alpha - g(e^*) = \bar{u}$, отсюда

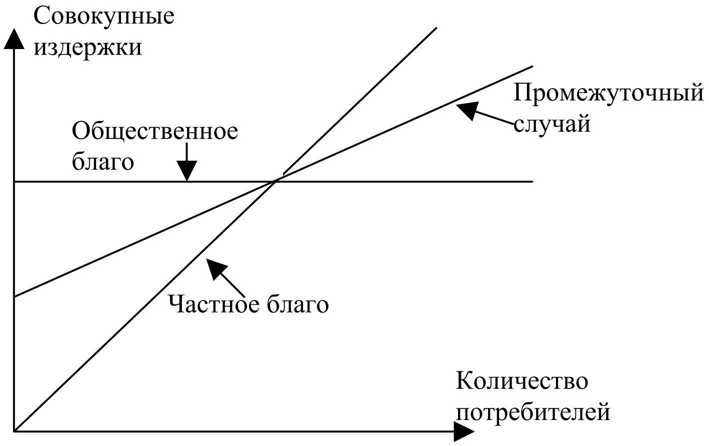
$\alpha = \int \pi dF(\pi|e^*) - g(e^*) - \bar{u}$ - ровно то же самое, что начальник получал при наблюдаемых усилиях (см. [8]). Значит, такой контракт оптимален.

Эту теорию можно трансформировать в следующую жизненную ситуацию. Предположим, имеется монопольный производитель товара («начальник»), который продает товар через розничную сеть, которой он не владеет («подчиненный»). Возникает вопрос: продавать товар через эксклюзивного дилера или через конкурентную сеть дилеров? У каждого варианта есть достоинства и недостатки. Если иметь дело с единственным дилером, то ему нужно передать весь бизнес за фиксированную сумму, которая будет извлекать всю монопольную прибыль. В этом случае дилер принимает на себя все риски. Если же продавать на конкурентном рынке, производитель не может получить всю монопольную прибыль (так как дилеры конкурируют между собой и, следовательно, снижают розничную цену), но при этом каждый дилер в отдельности сталкиваются с меньшими рисками. Фактически дилеры страхуют друг друга. В результате выбор между эксклюзивным дилером и конкурентным рынком определяется рискованностью розничного рынка и отношением дилеров к риску.

Общественные блага (Public goods)

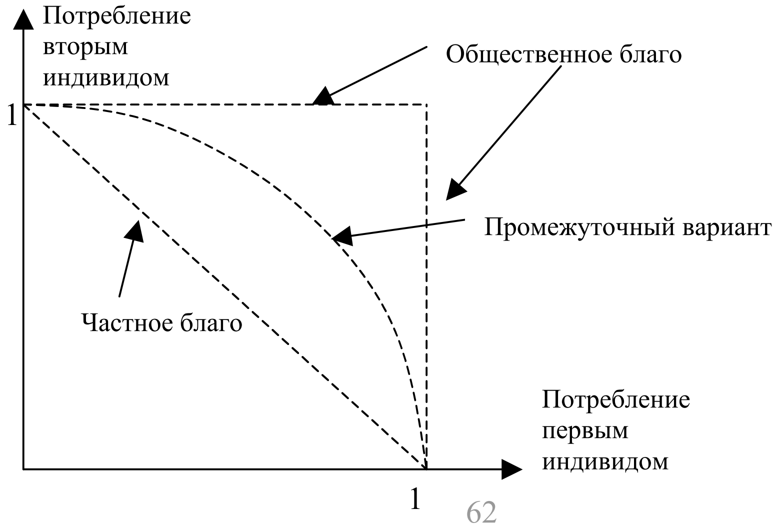
Общественные блага – это товары, обладающие двумя характерными свойствами: неконкурентностью и неисключаемостью. Неконкурентность (joint consumability) означает, что индивиды могут вместе и одновременно потреблять благо, никак не мешая друг другу. В реальности это достаточно гибкое понятие – возможны ситуации, когда товар частично неконкурентен. Иллюстрировать это можно следующим образом: представим, что каждый индивид хотел бы получить единицу некоторого блага. На горизонтальной оси отложим количество потребителей, на вертикальной – издержки, с которыми связано предоставление возможности потребить единицу блага. Если благо частное, то мы имеем дело с лучом, исходящим из начала координат:

В случае общественного блага издержки постоянны независимо от числа потребителей.



Другая иллюстрация: представим, что потребителей всего двое, и что у нас есть единица блага. Изобразим границу допустимых распределений блага для различных случаев (предполагаем делимость):

Второе свойство общественного блага – свободный доступ (открытый доступ, неэксклюзивность,



неисключаемость, non-excludability) – невозможно ограничить доступ потребителей к этому благу. Существуют товары, являющиеся неконкурентными, но не обладающие свойством свободного доступа – платные автодороги, например. Такие блага называются *клубными* (club goods).

Начнем теперь анализ общественных благ. Первый вопрос – выяснить, как выглядят условия эффективности предоставления общественных благ.

Представим, что объем общественного блага дискретен и принимает только два значения: $Y = \{0,1\}$. Имеется два потребителя, они потребляют частное благо x и общественное y. Их функции полезности, для простоты, квазилинейны: $u_i(x, y) = x_i + v_i(y)$. Зададим функцию $v_i(y)$ следующим образом: $v_i(y) = \begin{cases} r_i, y = 1 \\ 0, y = 0 \end{cases}$. То есть r_i – выигрыш индивида i (в денежной форме) от наличия общественного блага. Пусть предельные издержки по созданию общественного блага равны c.

Упражнение. Доказать, что при $r_1 + r_2 > c$ Парето-оптимальность требует, чтобы общественное благо было предоставлено. Для доказательства нужно воспользоваться сильной теоремой Коуза.

Получим теперь условия оптимальности предоставления общественного блага для более общего случая, когда размер общественного блага принимает континуум значений (условия Самуэльсона). Предположим, что объем общественного блага y, имеется n потребителей с функциями полезности $u_i(x_i,y)$, полезность возрастает по обеим переменным, предполагаем функции полезности гладкими. Издержки по производству общественного блага в объеме y равны $c(y)$ – это гладкая возрастающая функция.

Посмотрим теперь, как можно оптимальным образом распределить ресурсы в такой экономике, если суммарный начальный запас ресурсов равен w (суммарный начальный запас денег у агентов). Допустимыми состояниями в этой экономике будут наборы $n+1$-мерных векторов, которые показывают, сколько общественного блага предоставлено в экономике и сколько частного блага потребляется каждым агентом: $\{(x_1,\ldots,x_n, y) | \sum x_i + c(y) \le w, x_i \ge 0, y \ge 0\}$. На этом множестве допустимых состояний задано n целевых функций $u_i(x_i, y) \to \max$, и мы хотим охарактеризовать оптимальные по Парето распределения.

Заметим, что на этот раз мы не можем воспользоваться сильной теоремой Коуза, поскольку в общем случае функции полезности не являются квазилинейными. Если функции полезности были квазилинейны, мы получили бы:

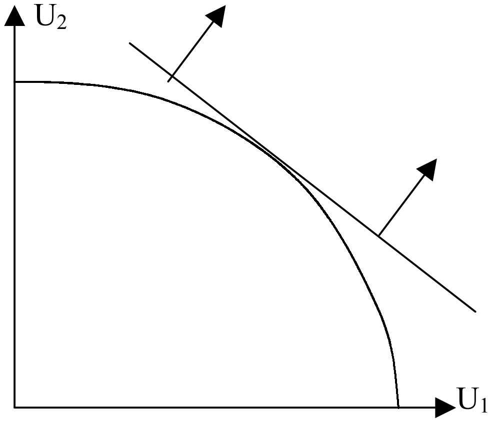
$$\sum u_i(x_i, y) = \sum v_i(y) + \sum x_i \to \max$$
$$s.t. \sum x_i + c(y) \le w$$

Подставляя ограничение в оптимизируемую функцию и удалив константу, получим:

$\sum v_i(y) - c(y) \to \max$, условие первого порядка (оно будет не только необходимым, но и достаточным, если функция издержек выпукла, а функция полезности вогнута):

$\sum v_i'(y) = c'(y)$. Из этого условия определяется общественный оптимум при предоставлении общественного блага. Левая часть этого равенства убывает по объему общественного блага y, правая – возрастает. Значит, это уравнение разрешимо единственным способом. Это означает, что если полезности квазилинейны, то во всех вариантах Парето-оптимального распределения ресурсов количество общественного блага будет одним и тем же. Остается лишь заметить, что если начальный запас w достаточно мал, то нам придется израсходовать все деньги на общественное благо и мы можем «не добраться» до уравнения, задаваемого условием первого порядка.

Теперь вернемся к более общему виду функции полезности. Наиболее простой способ вывода уравнения Самуэльсона, описывающего Парето-оптимальное распределение ресурсов, состоит в следующем. Изобразим множество достижимых полезностей:



Мы можем искать оптимум Парето, максимизируя взвешенную сумму критериев: фиксируем весовые коэффициенты и максимизируем взвешенную сумму. Однако нельзя утверждать, что таким образом мы можем найти *все* оптимумы Парето, поскольку множество достижимых полезностей не обязательно выпукло. Если же хотим найти *все* оптимумы Парето, то таким методом пользоваться нельзя.

Этот метод иногда называется *методом линейного взвешивания*.

Упражнение. Доказать, что в случае вогнутых функций полезности множество допустимых полезностей выпукло.

Следует заметить, что вогнутость функции полезности никак не интерпретируется экономически (за исключением квазилинейных полезностей), потому что любое монотонное преобразование функции полезности отражает те же предпочтения, но не обязательно сохраняет вогнутость.

Условие Самуэльсона – это необходимое условие Парето-оптимальности первого порядка (но не достаточное). Корректный способ нахождения этого условия может быть описан следующим образом. Вне зависимости от вида множества допустимых полезностей мы можем перебрать все оптимумы Парето, максимизируя одну из целевых функций и накладывая ограничение снизу на все остальные:

$$\begin{aligned} &u_1(x_1, y) \to \max \\ &s.t. \quad u_i(x_i, y) \geq b_i, \forall i = \overline{2, n} \end{aligned}$$

<u>Упражнение.</u> Для любого оптимума Парето (вне зависимости от вида целевых функций) всегда найдется набор $b_2, \ldots, b_n$ такой, что решение вышеописанной задачи даст нам искомый Парето-оптимум, то есть таким способом мы можем “добраться” до любого оптимума Парето.

Этот метод называется *методом ограничений*.

Решим эту задачу методом множителей Лагранжа, в ней будет n ограничений: n-1 на функции полезностей и одно ресурсное. Тогда

$$L = u_1(x_1, y) + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \left(u_j(x_j, y) - b_j\right) + \mu\left(w - c(y) - \sum x_j\right) \to \max$$

Условие первого порядка по x_j:

$$\lambda_j \frac{\partial u_j(x_j, y)}{\partial x_j} = \mu, \qquad \forall j \in \overline{1, n}$$ (можем предположить λ_1 равным единице).

Условие первого порядка по y: $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial u_i(x_i, y)}{\partial y} = \mu c'(y)$$

Хотелось бы исключить множители Лагранжа. Из первых n уравнений можем получить: $\lambda_i = \mu \Big/ \frac{\partial u_i(x_i, y)}{\partial x_i}$, подставляя эти значения в условие первого порядка по y и сокращая на μ, получим **условие Самуэльсона** (Samuelson condition): $$\sum \frac{\frac{\partial u_i}{\partial y}(x_i, y)}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, y)} = c'(y).$$

Все внутренние оптимумы Парето должны удовлетворять этому условию. Каждое слагаемое суммы показывает, каким количеством частного блага i-й индивид готов пожертвовать ради дополнительной единицы общественного. Правая часть уравнения – предельные издержки на производство общественного блага. Поэтому альтернативной записью условия Самуэльсона будет: $\sum MRS_i = MC$.

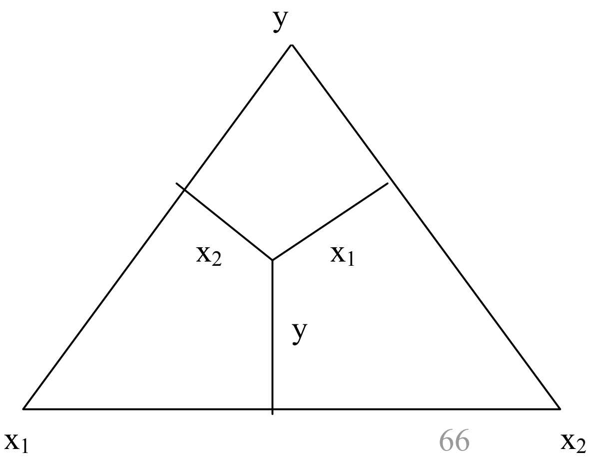
Заметим, что если $\sum MRS_i > MC$, то общественное благо недопредоставлено, так как предельная норма замещения – убывающая функция y, а предельные издержки – возрастающая. То есть существует возможность улучшить распределение ресурсов по Парето, увеличив количество общественного блага.

В обратную сторону: если $\sum MRS_i < MC$, то общественное благо перепредоставлено.

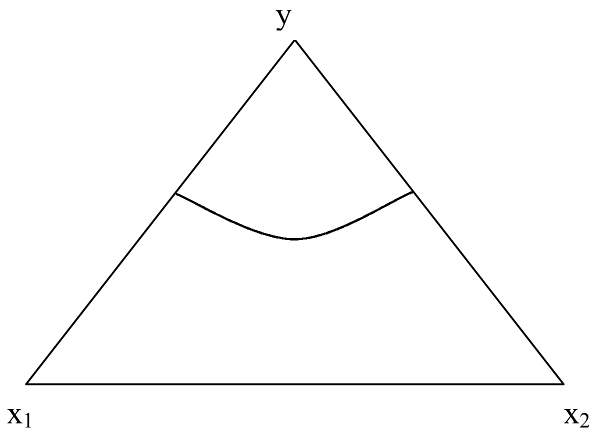
Еще несколько замечаний. Представим, что в экономике имеется n агентов, максимизирующих гладкие функции полезности. Тогда размерность множества оптимумов Парето – n-1 (в общем случае). В нашей задаче это именно так: имеется $n+1$ переменных (n переменных характеризуют частное благо, одна – общественное) и два уравнения – баланс ресурсов и условие Самуэльсона. Таким образом, размерность множества оптимумов Парето получается в точности n-1.

В случае экономики обмена с частными благами распределения ресурсов удобно иллюстрировать с помощью ящика Эджворта (сейчас мы его приводить не будем). В задаче с общественным благом существует его аналог. Пусть имеется два потребителя, одно частное и одно общественное благо, технология производства общественного блага линейна: $c(y) = y$, тогда множество допустимых распределений принимает вид: $x_1 + x_2 + y = w$. Мы можем проиллюстрировать это множество с помощью треугольника, который называется *треугольником Кольма*.

Свойство любого треугольника: сумма его высот постоянна. Поэтому значением переменной, скажем, x_1 будет высота, опущенная к стороне, противоположной к вершине x_1.



В этом треугольнике, как и в ящике Эджворта, мы можем рисовать кривые безразличия наших агентов, из которых можем вывести контрактную кривую, которая и будет множеством оптимумов Парето. В случае квазилинейных предпочтений оптимальный объем общественного блага во всех Парето-точках одинаков – контрактная кривая будет прямой горизонтальной линией.



Почему общественные блага принято выделять в отдельный раздел экономической теории? Причина состоит в том, что при наличии общественных благ децентрализованные рыночные механизмы не обеспечивают Парето-оптимальности. Поэтому возникает потребность в особых механизмах, и именно наличием общественных благ теоретически обосновывается потребность в государстве. Покажем, что в децентрализованной экономике в общем случае предоставление общественного блага неэффективно.

Начнем с простого примера: предпочтения квазилинейны, объем общественного блага дискретен и принимает значения 0 или 1, если объем 0, то потребители не получают полезности от общественного блага, если 1, то i-й потребитель получает полезность r_i, издержки по созданию общественного блага равны c. В этом случае оптимум Парето при условии $r_1 + r_2 \geq c$ требует создания общественного блага. Вопрос: как предоставить это общественное благо? В экономике есть два агента, которые должны каким-то образом совместно финансировать это благо.

Предположим, государство устраивает нечто вроде подписки на сбор средств для создания этого блага. Затем, когда подписка заканчивается, суммарные издержки на создание блага делятся на число подписчиков, и каждый из подписавшихся платит свою долю.

Тогда мы имеем дело с игрой, в которой у каждого из игроков две стратегии: участвовать в подписке или не участвовать:

	игрок 2: да	игрок 2: нет
игрок 1: да	выигрыши $r_1 - c/2; r_2 - c/2$	$r_1 - c; r_2$

игрок 1: нет	$r_1; r_2 - c$	0;0

Будем считать, что для каждого игрока выполнено неравенство: $c/2 < r_i < c$. Заметим, что в этом случае $r_1 + r_2 > c$, то есть в Парето-оптимуме общественное благо должно быть создано. Очевидно также, что, поскольку $r_i - c < 0$ для *i=1,2*, благо создано не будет, так как мы имеем дело с дилеммой заключенного – стратегия «нет» является доминирующей для каждого игрока, хотя если оба выберут «да», обоим станет лучше. Неэффективность возникает потому, что у каждого из агентов возникает проблема стать «зайцем» (free-rider), то есть получить общественное благо за счет другого игрока. То есть, что бы ни делали остальные, всегда выгодно выбрать стратегию «нет».

Один из выходов из этой ситуации – выбрать «управляющего», или «государство», решения которого будут обязательными для остальных, в результате выиграют все – Парето-оптимальность восстанавливается. Причем этот результат верен не только для дискретной модели, но и непрерывной. Пусть имеется *n* агентов, их полезность зависит от частного потребления и общественного блага: $u_i = u_i(x_i, y)$. Издержки на производство общественного блага - $z = c(y)$. Удобнее работать с обратной функцией: $y = g(z)$ - это производственная функция (то количество общественного блага, которое можем получить при данных затратах). Будем считать, что у каждого участника экономики есть некоторый начальный запас частного блага w_i, который распределяется между частным потреблением и добровольным вкладом в создание общественного блага. Вклад агентов в создание блага обозначим z_i, $0 \le z_i \le w_i$. Очевидно, снова имеем дело с игрой, в которой у каждого игрока в распоряжении интервал стратегий, выигрыш каждого игрока:

$$u_i\left(w_i - z_i; g\left(z_i + \sum_{j \ne i} z_j\right)\right) = \Phi(z_i; z_{-i}) \to \max_{z_i}, \text{ здесь } z_{-i} = \sum_{j \ne i} z_j .$$

Таким образом, решение игрока об объеме финансирования общественного блага влияет на его полезность двояко: с одной стороны, оно увеличивает объем создания общественного блага и таким образом увеличивает полезность этого игрока (и всех остальных заодно), с другой стороны, оно уменьшает потребление частного блага и тем самым уменьшает полезность этого игрока.

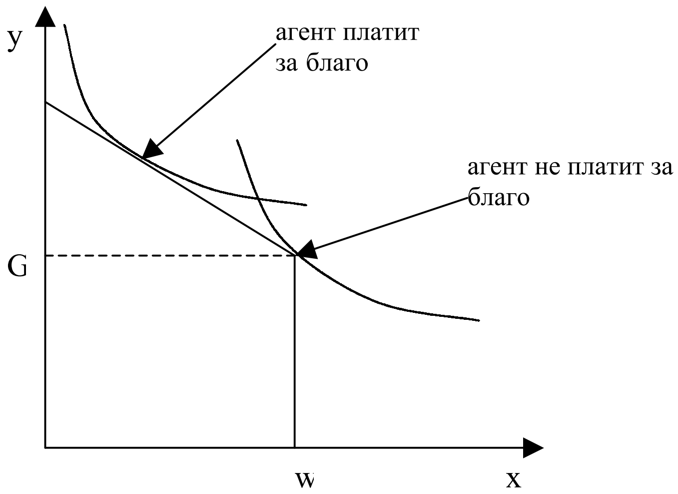
В результате игрок найдет некоторый оптимум, который и будет его вкладом. Не исключено, что этот оптимум будет нулем. Если все выберут такую стратегию, то это будет полным провалом рынка. Однако в непрерывном случае такая ситуация нехарактерна. Если при малых значениях z производство сверхэффективно ($g'(0) = \infty$) или близко к этому, то случай $z = 0$ не будет равновесием. Если дополнительно предположить, что все агенты одинаковы и мы ищем симметричное равновесие, то каждый агент будет что-то вкладывать: $z_i \neq 0$. Вопрос: будет ли это количество общественного блага эффективным? Ответ, очевидно, – нет, потому что каждый агент, решая свою задачу, сопоставляет *свои* предельные выгоды со своими предельными издержками, в то время как *общественные* выгоды от общественного блага, очевидно, больше частных. То есть каждый агент находит решение уравнения $MRS_i = MC$, в то время как общественный оптимум - $\sum MRS_i = MC$ - значит, имеет место недофинансирование. Покажем это более формально. Будем считать, что оптимум внутренний, запишем условие первого порядка в задаче максимизации полезности:

$$-\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, y) + \frac{\partial u_i}{\partial y}(x_i, y) g'(z) = 0, \quad \forall i = \overline{1, n}$$, то есть $MRS_i = \dfrac{1}{g'(z)} = MC$ - это равновесие добровольных вкладов (voluntary contribution equilibrium). Как уже сказано, в этом случае имеет место недостаточное предоставление общественного блага. При этом чем больше участников, тем дальше будет добровольное равновесие от общественного оптимума.

Упражнение. Пусть функции полезности участников таковы: $u_i(x_i, y) = \ln(x_i) + \gamma \ln(y)$, общее количество участников n, общий запас ресурсов - w - фиксирован и делится между участниками поровну: $w_i = {}^{w}\!/_{n}$. Рассчитать симметричное (и единственное) равновесие добровольных вкладов и симметричный оптимум Парето, сравнить их, устремляя n к бесконечности. Получим, что в равновесии добровольных вкладов объем общественного блага стремится к нулю, в симметричном оптимуме Парето – будет константой.

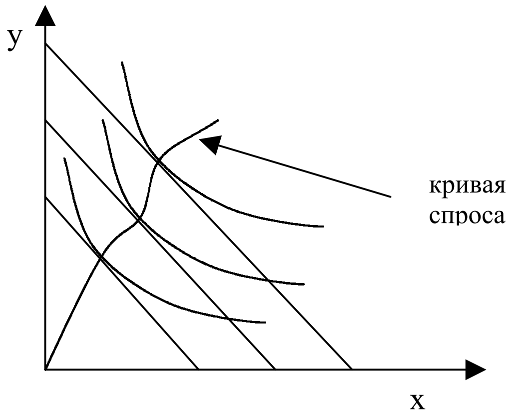
Перепишем задачу потребителя в следующем виде. Пусть G - сумма средств, которую выделили на общественное благо остальные участники, размер финансирования данного участника - g, тогда общий размер блага $y = g + G$ (предполагаем технологию линейной). Если начальный запас равен w, то на частное потребление останется $w - g$, общественное потребление будет равно $g + G$. Получаем бюджетное ограничение: $x + y = w + G$, вся задача перепишется в виде: $u(x, y) \to \max$ s.t. $x + y \leq w + G$; $y \geq G$. Возникает «усеченное» бюджетное множество.

Очевидно, размер вклада зависит от того, сколько вложат все остальные: $g = \rho(G)$. Логично предположить, что ρ монотонно убывает, а также предположить, что $\exists G_0 : \quad \forall G \geq G_0 \quad \rho(G) = 0$ - существует порог, после которого агенты не будут добавлять своих денег.

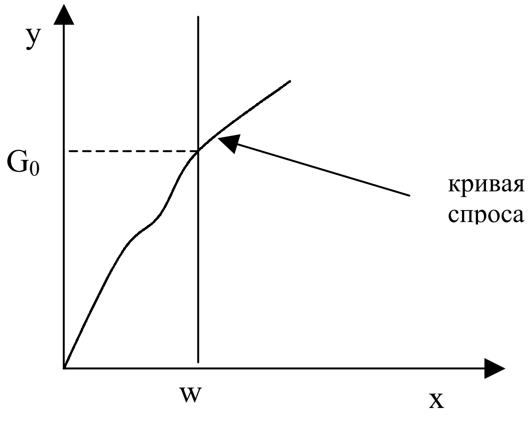


Проверим эти факты. Рассмотрим следующую задачу:

$u(x,y) \to \max$ s.t. $x + y \le I$, где I - некий совокупный доход потребителя. Варьируя I, можем получить кривую спроса (оптимальные точки для разных значений дохода):



Отложим теперь на горизонтальной оси начальный запас частного блага данного потребителя.



Если $G < G_0$, то усеченное бюджетное множество пересекает кривую спроса в своей «наклонной» части, и оптимальная точка является внутренней – некоторое количество частных ресурсов будет отдаваться на общественное благо. Если $G > G_0$, то бюджетное множество пересекает кривую спроса в своей «вертикальной» части, и агент выбирает потребление частного блага на уровне w, а его вклад в общественное благо – нулевой.

Чтобы $\rho(G)$ убывала, необходимо, чтобы частное благо было нормальным. В этом случае с возрастанием «реального» дохода $w+G$ спрос на частное благо будет возрастать, соответственно вклад в общественное благо $g=w-x$ будет убывать, так как «номинальный» доход w неизменен.

Если все участники одинаковы и их число увеличивается, что будет с предоставлением общественного блага в этой экономике – будет ли оно расти? Здесь действую два эффекта – с одной стороны, большее число участников при неизменном вкладе увеличивает финансирование. С другой стороны, это эффект бесплатного проезда – он становится все сильнее с ростом числа участников и мотивирует уменьшение вклада каждым участником.

Упражнение. При каких условиях на функцию $\rho(G)$ суммарный объем предоставления общественного блага увеличивается, а при каких – уменьшается? Число участников можно считать непрерывной переменной (нужно сравнивать $|\rho'|$ и единицу).

В нашем примере с ростом числа участников суммарный объем предоставления общественного блага стремится к G_0.

Как было показано, при наличии общественных благ конкурентные механизмы не обеспечивают Парето-эффективности. Это означает, что необходимы дополнительные механизмы, «поддерживающие» свободный рынок и приводящие к повышению эффективности распределения.

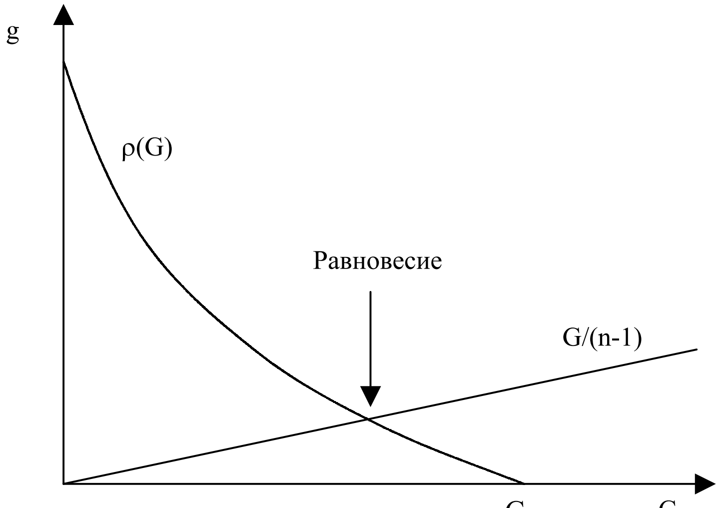
Мы по-прежнему рассматривает экономику, состоящую из n агентов, каждый из которых максимизирует функцию полезности u_i, которая зависит от (одного и того же) частного блага (как правило, в денежной форме) и общественного блага y, значение которого одинаково для всех. Издержки по созданию общественного блага описываются функцией издержек $c(y)$ - количество ресурса, который можно использовать на частное потребление, которое необходимо затратить, чтобы профинансировать общественное благо в размере y. Чтобы получить Парето-оптимальное распределение ресурсов в экономике, необходимо выполнение условия Самуэльсона (предполагается гладкость функций полезности, см. прошлую лекцию).

Если предположить линейность функции издержек ($c(y)=y$), задачу агента можем записать следующим образом: $u_i\left(w_i-z_i, z_i+\sum_{j\neq i} z_j\right)=\Phi_i(z_i, z_{-i})\to \max\limits_{z_i}$

Мы имеем дело с игрой n лиц. Равновесие в этой игре – равновесие добровольных вкладов. Если в этой игре равновесия являются внутренними, то условие Самуэльсона, очевидно, нарушается, так как для каждого агента $MRS_i = MC$, следовательно, $\sum MRS_i > MC$ - общественное благо недопредоставлено.

Упростим задачу: пусть все агенты абсолютно идентичны; вклад каждого агента в общественное блага - g, всех остальных - G, получается задача, описанная в конце прошлой лекции. В результате решения этой задачи мы определили зависимость вклада агента от вклада остальных: $g = \rho(G)$, которая является убывающей. Также мы показали, что существует некоторое пороговое значение G_0, после которого $\rho(G)$ обращается в нуль. По сути, мы определили функцию реакции (best response function), необходимую для поиска равновесия Нэша. Специфика ее в том, что при выборе стратегии агент не учитывает, что одно из благ является общественным – он просто сравнивает собственные потери с собственными выгодами от того или иного решения. При этом игнорируется то, что при создании общественного блага потери от недопредоставления частного блага несет только сам агент, а выигрыш от увеличения общественного блага ощущается всеми.

Найдем теперь симметричное равновесие в этой игре. Все агенты одинаковы - $G/_{n-1} = g = \rho(G)$. Изобразим это на графике.



Можно сделать вывод: если $n \to \infty$, то $G \to G_0$. В то же время $y = \dfrac{n}{n-1} G \to G_0$, и мы получаем, что при увеличении числа участников суммарный объем общественного блага стремится к конечному пределу. Здесь действует два эффекта – эффект масштаба (чем больше людей, тем больше можно собрать денег) и эффект бесплатного проезда (чем больше людей, тем больше у них стимулов получить благо за счет других).

А каким был бы объем блага в Парето-оптимальном распределении с ростом числа участников? Как известно, Парето-оптимальность требует $\sum MRS_i = MC$. Пусть по-прежнему $c(y) = y$, предпочтения квазилинейны: $u_i(x_i, y) = x_i + v(y)$ (предпочтения всех одинаковы). Тогда $MRS_i = v'(y)$, условие Самуэльсона преобразуется в условие $nv'(y) = 1$, или $v'(y) = 1/n$. Если обозначить за y_n количество общественного блага в экономике n участников, то мы получим $v'(y_n) = 1/n \to 0$. Из свойств функции $v(y)$ получаем $y_n \to \infty$. Если же $v'(\infty) > 0$, то мы получим угловое решение, когда все деньги будут вкладываться в общественное благо и соответственно его объем тем более будет стремиться к бесконечности.

Таким образом, в любом случае в оптимуме объем общественного блага должен стремиться к бесконечности, а в добровольном равновесии общем общественного блага имеет конечный предел.

Упражнение. Пусть функция полезности – функция общего вида, гладкая по обеим переменным, монотонно возрастающая, пусть $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) > 0$ для всех допустимых y. Каждый агент имеет некоторый положительный запас начальных ресурсов w. Доказать, что в этом случае в симметричном оптимуме Парето $y_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Таким образом, мы можем констатировать, что чем больше людей, получающих выгоду от общественного блага, тем сильнее разрыв между добровольным равновесием и оптимальным распределением ресурсов. То есть чем больше участников, тем выше «спрос» на внешнюю координацию решений. Именно осознанием этого факта экономистами объясняется потребность в государстве, которое обладало быть законными правами принуждать людей финансировать общественное благо (в идеале – в их собственных интересах).

Еще одна грань проблемы общественных благ – людей может быть не обязательно слишком много, но они могут быть разными и по-разному быть заинтересованными в общественном благе.

Начнем с простейшего примера. Пусть имеется два агента, полезности их таковы: $u_i(x_i, y) = x_i + a_i \ln(y)$, у каждого есть достаточно большой запас денег, пусть для определенности $a_1 < a_2$. Оптимум Парето требует, чтобы объем общественно блага был равен $a_1 + a_2$ (следует из условия Самуэльсона). Посмотрим, как будет выглядеть равновесие добровольных вкладов. Задача агента:

$w_i - z_i + a_i \ln(z_i + z_{-i}) \to \max\limits_{z_i}$ при условии $z_i \geq 0$ и $z_i \leq w_i$, второе условие будем считать заведомо выполненным. Условие оптимальности в этой задаче будет выглядеть так:

$-1 + \dfrac{a_i}{z_i + z_{-i}} \begin{cases} = 0, z_i \geq 0 \\ \leq 0, z_i = 0 \end{cases}$. Из этого следует $z = z_1 + z_2 \geq a_1$ и $z \geq a_2$. Учитывая $a_1 < a_2$, получаем $z \geq a_2 > a_1$. Это означает, что в условии оптимальности для первого участника строгое неравенство, значит, $z_1 = 0$. В тоже время суммарный объем общественного блага не может быть нулевым (так как иначе участники получат полезность, равную минус бесконечности) – значит, $z_2 > 0$. Значит, условие оптимальности для второго участника выполняется с равенством – следовательно, $z_1 + z_2 = a_2 \Rightarrow z_2 = a_2$, учитывая $z_1 = 0$. Суммарный объем общественного блага получается равным a_2, что строго меньше, чем оптимальный уровень общественного блага $a_1 + a_2$.

Проведем теперь более общий анализ. Пусть в экономике n агентов, их функции полезности одинаковы $u_i = u(x_i, y)$, но богатство у каждого свое и равно w_i. Как в этом случае будет выглядеть равновесие добровольных вкладов?

Теорема. Существует некоторый единственный уровень богатства w^* такой, что *i*-й агент участвует в финансировании общественного блага, если и только если $w_i \geq w^*$, причем размер финансирования составляет $g_i = w_i - w^*$. То есть все богатство сверх некоторого критического уровня идет на финансирование общественного блага, бедные же не платят ничего. Докажем теорему.

Рассмотрим снова задачу каждого агента. Пусть g_i - то, что вкладывает в общественное благо агент *i*, G_i - то что платят остальные. Тогда *i*-й агент решает задачу:

$$u(w_i - g_i, g_i + G_i) \to \max_{0 \leq g_i \leq w_i}$$

Эту же задачу можно записать так:

$u(x_i, y) \to \max$ при условиях $x_i + y \leq w_i + G_i$ и $y \geq G_i$.

Снова рассмотрим, как ведет себя спрос на блага x и y, если эти блага финансируются индивидуально, в зависимости от дохода.

Решим задачу $u(x, y) \to \max$ при условии $x + y \le I$, где I - суммарный доход. Будем предполагать, что оба блага являются нормальными, то есть оптимальные x и y - возрастающие функции дохода. Будем также предполагать, что зависимость оптимального спроса от дохода – гладкая. Пусть спрос на общественное благо, получающийся в результате решения этой задачи, задается некоторой функцией $y = \xi(I)$. Можно утверждать, что $0 < \xi'(I) < 1$. Меньше единицы потому, что частное благо – тоже нормальный товар. Если обозначить спрос на частное благо $x = \zeta(I)$ и продифференцировать бюджетное ограничение по доходу (предполагая тождество в бюджетном ограничении), получим $\xi' + \zeta' = 1$ при положительности обоих слагаемых. Это и даст нам $\xi' < 1$. Заметим также, что ξ^{-1} - также возрастающая функция, $\left(\xi^{-1}\right)' > 1$.

Вернемся теперь к первоначальному варианту задачи. Если *i*-й агент вносит вклад в создание общественного блага и $g_i > 0$, то условие $y \ge G_i$ не является лимитирующим. Тогда условие $x_i + y \le w_i + G_i$ будет выполняться как равенство, и мы можем написать:

$$y = \xi(w_i + G_i) = \xi(x_i + y).$$

Теперь обратим это выражение: $x_i + y = \xi^{-1}(y)$. Получаем, что $x_i = \xi^{-1}(y) - y$. Как мы уже заметили, $\left(\xi^{-1}\right)' > 1$ - значит, $x_i = \xi^{-1}(y) - y = \Phi(y)$ является монотонно возрастающей функцией. Вспомним, что такой x_i - оптимальный уровень потребления частного блага *i*-м агентом, если тот что-то вкладывает в общественное благо. Это означает, что частное потребление таких агентов одинаково, так как $x_i = \Phi(y)$, а y одинаков для всех. Обозначим $\Phi(y) = w^*$.

Получаем, что если $g_i > 0$, то $x_i = w^*$ для каждого *i*. Отсюда мы можем определить g_i для такого агента: $g_i = w_i - x_i = w_i - w^*$. Если же последняя разность отрицательна, то $g_i = 0$.

Теперь нам нужно найти w^* и показать его единственность. По определению, $y = \sum_{i \in +} g_i = \sum_{i \in +} \left(w_i - w^*\right) = \Phi^{-1}\left(w^*\right)$, причем $\sum_{i \in +} \left(w_i - w^*\right)$ убывает по w^*, а $\Phi^{-1}\left(w^*\right)$ - возрастает. Значит, решение единственно. Здесь «+» – множество участников, финансирующих общественное благо.

Итак, существует пороговый уровень дохода, после которого участники весь свой излишек вкладывают в общественное благо. Значит, если есть заметное неравенство в распределении богатства, большая часть агентов в финансировании блага участвовать не будет.

Как показал весь наш предыдущий анализ, децентрализованное предоставление общественного блага является неэффективным.

Один из вариантов решения этой проблемы – ввести в экономике институт принуждения. Участники добровольно наделяют некоторого правителя властью принуждать агентов к тем или иным шагам, а именно к финансированию общественного блага, так как каждый стремится уклониться от финансирования. Для общества же в целом такое уклонение невыгодно.

Но ограничения свободы – не самый лучший метод с точки зрения современной экономики, поэтому экономистами еще с конца девятнадцатого века исследуется возможность создания эффективных добровольных механизмов финансирования общественного блага. Одна из наиболее ранних моделей – модель равновесия Линдаля.

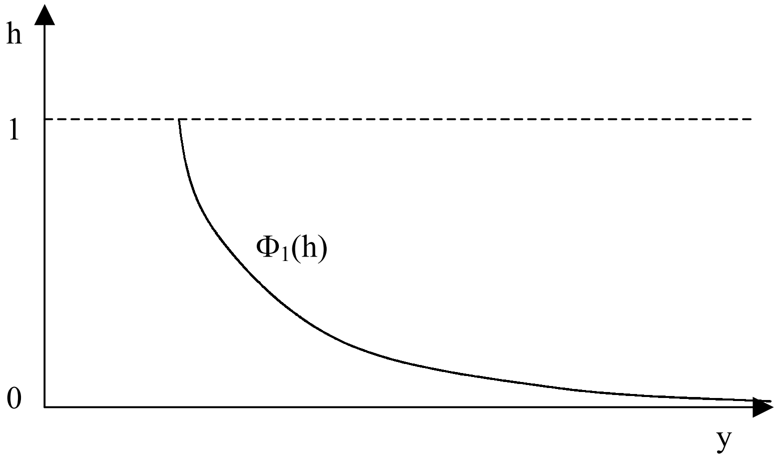
В этой модели во многом заимствована концепция равновесия Вальраса (последовательное изменение цены, ведущие к равновесию).

Предположим, имеется два агента, у каждого из которых есть своя функция полезности $u_i(x_i, y)$, а также у каждого имеется некоторый запас частного блага w_i. По-прежнему технология производства линейна $c(y) = y$. Задача состоит в том, чтобы разделить каким-то образом издержки на производство блага между каждым участником. Аукционер Линдаля действует следующим образом: для каждого агента он устанавливает цену, которую тот должен заплатить за единицу общественного блага. Пусть цена для первого агента равна p_1, для второго - p_2. Тогда аукционер, объявляя эти цены, должен руководствоваться следующим ограничением: $p_1 + p_2 = 1$ (так как собранные деньги должны быть в точности равны издержкам на финансирование блага). Для простоты обозначим $p_1 = h$, тогда $p_2 = 1 - h$. Задача аукционера Линдаля – выбрать h.

При заданном h первый агент решает следующую задачу:

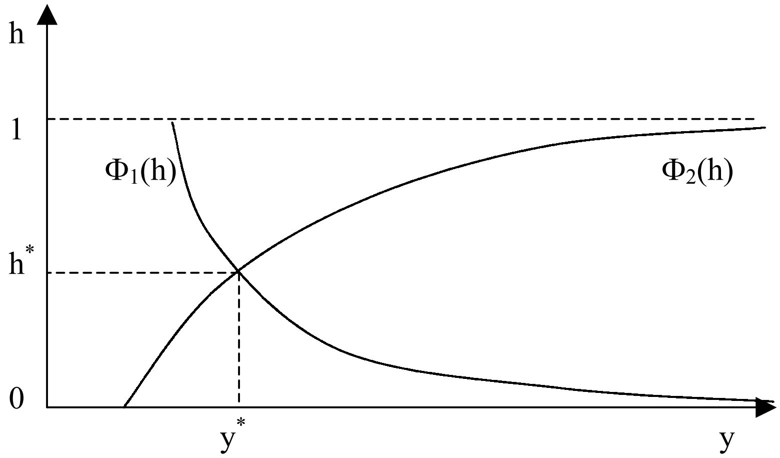
$u_1(w_1 - hy, y) \to \max\limits_y$. Получаем некоторую функцию спроса: $y = \Phi_1(h)$.

Очевидно, $\Phi_1(.)$ является убывающей функцией аргумента. Это следует из нормальности спроса на общественное благо. Изобразим эту функцию на графике:



Задача второго агента выглядит следующим образом:

$u_2(w_1 - (1-h)y, y) \to \max\limits_y$, отсюда находим $y = \Phi_2(h)$. Исходя из той же логики,

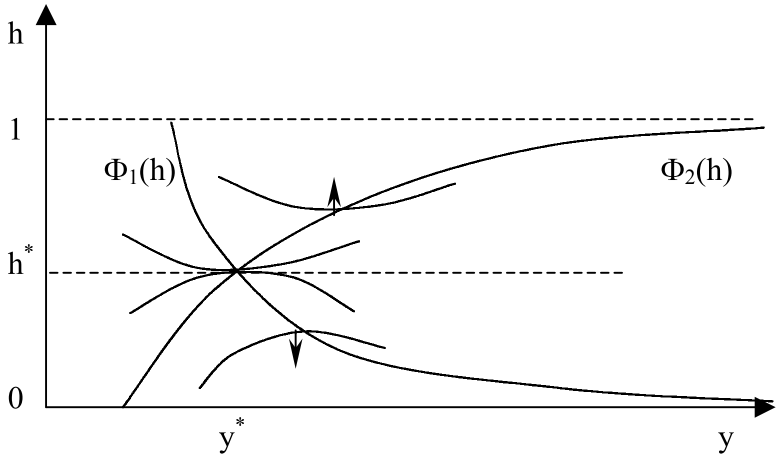


$\Phi_2(.)$ будет монотонно возрастающей функцией. Изобразим одновременный график этих функций:

Обе функции монотонны – значит, пересекаются в одной точке, которая и будет равновесием Линдаля. Покажем, что эта точка является оптимумом Парето.

$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -hu'_{1,1} + u'_{1,2} = 0$. Здесь $u'_{1,i}$ - производная u_1 по i-му аргументу. Отсюда $MRS_1 = \frac{u'_{1,2}}{u'_{1,1}} = h$, аналогично можем вывести $MRS_2 = 1 - h$. Получаем $MRS_1 + MRS_2 = h + (1-h) = 1 = MC$. Мы получили, что условие Самуэльсона выполнено, и если оба агента выбрали одинаковый уровень общественного блага, то мы имеем дело с оптимумом Парето.

Еще один способ увидеть Парето-оптимальность – показать касание двух кривых безразличия. Нарисуем кривые безразличия на нашем графике. Определим функцию $v_1(h, y) = u_1(w_1 - hy, y)$. Каждое значение функции спроса $y = \Phi_1(h)$ - результат решения задачи максимизации полезности. Значит, в каждой точке кривой спроса кривая безразличия имеет горизонтальный наклон. Кроме того, чем меньше h, тем лучше агенту – значит, он будет стремиться перейти на более низкую (в рамках нашего графика) кривую безразличия. Из этого можно предположить, что кривые безразличия первого агента будут выпуклы вверх. Аналогично, кривые безразличия второго будут выпуклы вниз и горизонтальны на линии $y = \Phi_2(h)$. Изобразим все на графике:



Кривые безразличия касаются именно в точке равновесия Линдаля – значит, она является оптимумом Парето.

Казалось бы, легко найти это равновесие «нащупыванием», то есть соответствующим изменением h при наличии диспропорций. Но у этого механизма есть существенный недостаток: он уязвим к манипулированию.

Будем предполагать, что имеется 2 агента с функциями полезности U_i, зависящими от потребления частного и общественного благ. Общественное благо производится, ради простоты, по линейной технологии:

$$C(y) = y\,.$$

Предельные издержки производства общественного блага, равные 1, следует поделить между двумя агентами. Будем обозначать индивидуальные цены агентов как h и $1-h$. В таком случае каждый из агентов формирует спрос на общественное благо, исходя из того, что ему придется оплачивать это благо по вмененной цене, которая устанавливается линдалевским аукционером. Таким образом, каждый из участников решает следующую задачу:

1) первый участник: $U_1\left(w_1 - hy, y\right) \rightarrow \max\limits_{y}$; (1)

2) второй участник: $U_2\left(w_2 - \left(1-h\right)y, y\right) \rightarrow \max\limits_{y}$. (2)

Из (1) и (2) определяются $y = \varphi_1\left(h\right)$ и $y = \varphi_2\left(h\right)$. Функции φ_1 и φ_2 монотонны нужным образом, и возникает единственное равновесие, которое является одним из оптимумов Парето. Однако данная ситуация очень уязвима к манипулированию, т.е. к искажению информации, которую аукционер Линдаля должен получить от агентов, т.к. агенты отдают себе отчет, каким образом эта информация будет использована и, естественно, задаются вопросом относительно возможности искажения информации в свою пользу. Ответ на данный вопрос, как было рассмотрено в предыдущей лекции, положительный.

Отметим, что поиск равновесия по Линдалю устроен почти так же, как и поиск равновесия по Вальрасу. Аукционер Линдаля выбирает некоторое распределение предельных издержек между двумя агентами, и спрашивает каждого из них, каким будет спрос на общественное благо каждого из них. Из рисунка 1 видно, что поскольку спрос 1-го агента больше, чем спрос второго, то необходимо h (долю первого агента) увеличить. Агенты осведомлены об этом и понимают, что если они при прочих равных условиях уменьшат свой спрос, то их доля в финансировании общественного блага будет уменьшена. Это означает, что у первого агента возникают достаточно мощные стимулы приуменьшить свой спрос, т.е. сдвинуть кривую $y = \varphi_1\left(h\right)$ влево. Таким образом, возникает новое равновесие (в точке B). Из рисунка видно, что первый агент в результате выигрывает. Очевидно, что второй агент будет поступать аналогично, смещая тем самым кривую спроса $y = \varphi_2\left(h\right)$ влево. В итоге возникнет новое равновесие (в точке C). Не очень ясно, куда сойдется процесс в результате такого манипулирования, но видно, что если каждый из агентов преуменьшает свой спрос, то новое равновесие уже не является оптимумом

Парето, и общественного блага будет в результате меньше, чем должно быть. В результате оба агента теряют.

Из сказанного можно сделать вывод, что для эффективного представления общественного блага нужна не только координация, но и централизация. Разница между координацией и централизацией состоит в том, что в первом случае необходимо согласовать индивидуальные решения, а во втором случае принимается решение, которое касается большого количества агентов, без их согласия или разрешения. Вопрос: как поступать в этом случае?

По-прежнему, имеется n агентов с функциями полезности $U_i(x_i, y)$, технологией производства общественного блага с издержками $c = c(y)$ и суммарным запасом $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Задача – оптимальным образом распределить ресурсы. Распределение ресурсов производится некоторым центром, например, Госпланом либо правительством. Предполагается, что центр руководствуется целями экономической эффективности, т.е. в случае, когда центр – правительство, то считается, что оно действует в интересах граждан, а именно пытается максимизировать некоторое «всеобщее счастье». Минимальное требование к «всеобщему счастью» заключается в том, что ресурсы не должны использоваться неэффективно, т.е., по крайней мере, должен быть достигнут оптимум Парето. В частности, правительство определяет размер общественного блага. Известно, что если предпочтения не квазилинейны, то оптимальный размер общественного блага меняется при переходе от одного оптимума Парето к другому, поэтому предпочтения предполагаются квазилинейными, т.е. имеют вид:

$$U_i(x_i, y) = x_i + v_i(y).$$

Размер общественного блага определяется из условия Самуэльсона:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(y) = c'(y). \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет единственное решение (при разумных предположениях о виде $c(y)$ и $v(y)$). $c'(y)$ - производная функции издержек, т.е. возрастающая функция, $v'(y)$ - производная функции полезности, т.е. убывающая функция. Следовательно, решение (3) – единственное.

Основной вопрос – как правительство соберет информацию относительно предпочтений агентов?

Предположим, что $v_i(y) = \theta_i v(y)$, $c(y) = y$. В этом случае уравнение (3) имеет вид:

$$v'(y)\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1.$$

Очевидно, что выбор правительством величины общественного блага сильно зависит от того, как правительство оценит θ_i. Таким образом, возникает задача сбора информации. В конкурентной рыночной экономике без общественных благ, экстерналий, в условиях действия первой теоремы благосостояния эта проблема не возникает в принципе, т.к. в ней нет центра, а оптимум Парето реализуется и без него. Информация о предпочтениях и производственных возможностях выявляется автоматически, когда люди формируют свой спрос и предложение. Поскольку экономика конкурентна, то искажать информацию нет смысла. Таким образом, при выполнении вышеперечисленных условий, рынок – эффективный механизм сбора и агрегирования информации, причем на рынке собирается и агрегируется только информация, которая необходима. Механизм передачи информации - цены. Если экономика централизуется, причем неоправданно (т.е. не с целью максимизации общественных благ, коррекции провалов рынка и т.д.), то в этом случае задача сбора информации становится ключевой.

Сбор информации. Конструирование механизмов

Имеется экономика, которая состоит из n агентов. Решения, которые принимаются в этой экономике, обозначаются $a \in A$. Пример решения: $a = (x_1, ..., x_n, y)$.

У каждого из агентов имеется функция полезности $U_i = U_i(a, \theta_i)$. Параметр θ_i характеризует тип агента. Т.е. функция U_i есть отображение произведения множества A и множества типов в R:

$$U_i : A \times \Theta_i \to R, \qquad \theta_i \in \Theta_i .$$

Сообщество агентов есть некоторая выборка, т.е. набор типов $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$, который принадлежит множеству $\Theta = \Theta_1 \times ... \times \Theta_n$.

Функция общественного выбора (Social Choice Function) – некоторая функция f, которая определена на множестве типов агентов и принимает значения во множестве решений A. Иначе говоря, функция общественного выбора устроена следующим образом: если известны типы агентов, то будет реализовано состояние $a \in A$, которая является функцией от $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$. Функция общественного выбора связывает состояние, которое будет реализовано в экономике, с типами агентов, которые эту экономику составляют.

Функции полезности $U_i = U_i(a,\theta_i)$ считаются заданными априори и представляют некоторую информацию, которая аккумулирована функцией f. Если общественный выбор эффективен, то функция общественного выбора называется паретовой.

Определение: функция общественного выбора – паретова, если для $\forall\theta_i \in \Theta_i$ $\exists\, \tilde{a} \in A : U_i(\tilde{a},\theta_i) \geq U(f(\theta),\theta_i), \forall\theta_i$ и хотя бы одно из этих неравенств – строгое. Единственное отличие от обычного оптимума Парето состоит в том, что это должно быть верно для любых типов.

Понятие функции общественного выбора централизации не предполагает. Общественный выбор может реализовываться, например, как равновесие.

Предположим, что общественный выбор реализуется некоторым центром, которому необходима информация о типах агентов. Очевидно, что нужно обращаться к агентам с некоторыми вопросами, т.е. вступать с ними в диалог.

Механизм – набор информационных множеств по числу агентов $M_1,...,M_n$, и функция g, которая отображает декартово произведение этих множеств во множество решений A. Схема работы механизмов представлена на рисунке 1.

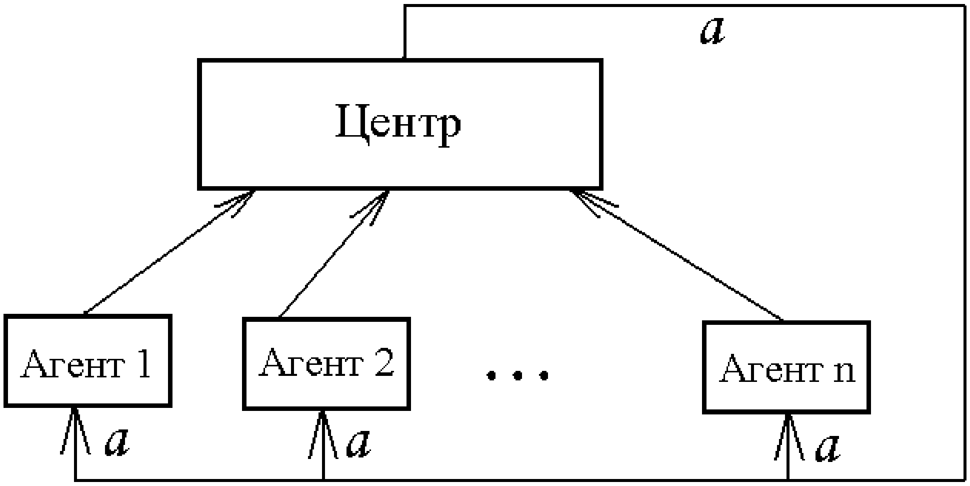


Рисунок 1

Центр задает агентам вопрос о том, какой элемент информационного множества они сообщают. $m_i \in M_i$ - информация, которую агент направляет в центр. Агрегируя полученные ответы, центр принимает общественное решение a.

Механизм называется прямым, если центр непосредственно спрашивает агентов, каковы их типы, т.е. $M_i = \Theta_i, \forall i$.

Обозначим сообщение i-го агента в центр через m_i, остальных – через m_{-i}. Решение, принимаемое центром - $g(m_i, m_{-i})$, влияет на полезность i-го агента в виде $U_i = U_i(g(m_i, m_{-i}), \theta_i)$. Таким образом, возникает игра, в которой стратегии агентов – сообщения, которые посылаются в центр, а функции выигрыша - U_i. Ответы, выбираемые агентами, составляют определенное равновесие в игре. Равновесие Нэша, часто используемое для описания равновесий в игре, оказывается не самым удобным при описании механизмов. Иногда используют равновесия Байеса-Нэша, но наиболее часто используют концепцию равновесия в доминирующих стратегиях.

Пусть C - концепция равновесий. В данной игре возникает равновесие относительно данной концепции (либо в доминирующих стратегиях, либо как равновесие Нэша, либо иное равновесие). Для простоты будем считать, что данное равновесие – единственное. Данное равновесие – набор сообщений, т.е. $E_C(\theta) = (m_1, \ldots, m_n)$. Общественный выбор:

$$g(m) = g(E_C(\theta)). \tag{4}$$

Формула (4) показывает, как механизм реализует функцию выбора, т.е. механизм $< M_1, \ldots, M_n, g >$ реализует функцию выбора $f(\theta)$ согласно концепции равновесия C, если $f(\theta) = g(E_C(\theta)), \forall \theta \in \Theta$. Иллюстрация этого определения приведена на рисунке 2.

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "E_C"'] & & A \\
& M \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Рисунок 2

Определение: прямой механизм является выявляющим, если $E_C(\theta) = \theta, \forall \theta \in \Theta$.

Другими словами, выявляющий механизм защищен от манипулирования (cheating-proof). Т.е. механизм выявляющий, если в игре при данной концепции равновесия говорить правду есть равновесная стратегия.

Принцип выявления (revelation principle): пусть имеется механизм $< M_1, \ldots, M_n, g >$, реализующий функцию выбора $f(\theta)$ в доминирующих стратегиях. Тогда существует выявляющий механизм, который также реализует данную функцию выбора в доминирующих стратегиях.

Теорема: пусть задан прямой механизм $< \Theta_1, \ldots, \Theta_n, g >$. Это механизм является выявляющим в доминирующих стратегиях тогда и только тогда, когда он выявляет в смысле равновесия Нэша.

Вопрос: существует ли механизм, который является, во-первых. выявляющим (это необходимое условия для принятия эффективных централизованных решений), и во-вторых, является паретовым? Ответ: в общем случае нет (теорема Жибара-Сатерттуэйта). Результат теоремы следующий: при некоторых предположениях относительно предпочтений агентов (не накладываются никакие ограничения на профили предпочтений агентов, т.е. агрегируются любые возможные предпочтения агентов на некотором множестве A - множестве альтернатив) существуют паретовские выявляющие (score неманипулируемые) механизмы, которые являются диктаторскими, т.е.

$$f(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \arg\max\{U_1(a, \theta_1 \mid a \in A)\}.$$

Поскольку агент 1–диктатор–знает, что решение определяется из максимизации его функции полезности, то ему невыгодно скрывать от центра свои предпочтения θ, то данный механизм – выявляющий. Поскольку максимизируется одна функция полезности, то решение является оптимумом Парето. Универсальность (независимость от профиля предпочтений агента) также гарантирована. Будем считать также, что данный механизм – прямой.

Теорема Жибара-Сатертуэйта точно формулируется следующим образом: не существует паретовской функции общественного выбора при $n > 2$, определенной при всех θ, такой что механизм, построенный при данной функции - универсальный, паретовский, выявляющий и недиктаторский.

Вывод: в общем случае нельзя построить механизм, который является выявляющим, гарантирует оптимум Парето и является универсальным и недиктаторским.

Однако при определенных ограничениях на профили предпочтений, которые данный механизм должен агрегировать, то выявляющие механизмы удается построить, хотя и в этом случае они не всегда оказываются паретооптимальными.

Задача предоставления общественных благ (продолжение)

Имеется n агентов. Множество A состоит из частного потребления x и общественного y: $a = (x_1, \ldots, x_n, y) \in A$. Функции полезности – квазилинейные:

$$U_i(x_i, y) = x_i + v_i(y, \theta_i).$$

Функция издержек $C = C(y)$. Начальные запасы агентов w_i.

Решения, принимаемые центром:

$$g(\theta_1, ..., \theta_n) = \langle y(\theta_1, ..., \theta_n), t_1(\theta_1, ..., \theta_n), ..., t_n(\theta_1, ..., \theta_n) \rangle,$$

где t_i - платежи из центра агенту (трансферт). В случае, когда агент платит центру, $t_i < 0$.

Рассмотрим «наивный механизм». Пусть y может принимать только два значения: 0 и 1 (реализация проекта либо отказ от его реализации).

$$C(0) = 0, C(1) = c.$$

Целевые функции:

$$v_i(y, \theta_i) = \begin{cases} 0, y = 0 \\ \theta_1, y = 1 \end{cases}.$$

Для реализации паретооптимального механизма необходимо, чтобы:

$y = 1$, если $\sum_{i=1}^{n} \theta_i \geq c$ и $y = 0$, если $\sum_{i=1}^{n} \theta_i < c$.

Центр спрашивает агентов относительно их θ_i, получает ответ $\tilde{\theta}_i$. Первый элемент механизма:

$$y(\tilde{\theta}_1, ..., \tilde{\theta}_n) = \left\{ \begin{matrix} 1, \sum_i \tilde{\theta}_i \geq c \\ 0, \sum_i \tilde{\theta}_i < c \end{matrix} \right\}.$$

Трансферты:

$$-t_i(\tilde{\theta}_1, ..., \tilde{\theta}_n) = \left\{ \begin{matrix} 0, \sum_i \tilde{\theta}_i < c \\ \dfrac{\tilde{\theta}_i}{\sum_i \tilde{\theta}_i}, \sum_i \tilde{\theta}_i \geq c \end{matrix} \right\}.$$

Данный механизм не является выявляющим.

Пусть i-й агент дает правдивый ответ и $\theta_i + \sum_{j \neq i} \tilde{\theta}_j > c$.

В результате полезность агента: $U_i = \theta_i + t_i + w_i$. Поскольку можно отклониться от правдивого ответа, слегка уменьшив $\tilde{\theta}_i$, что не повлияет на коллективную часть, и таким образом уменьшить платеж, то говорить правду в этом случае невыгодно.

Отличительным свойством данного механизма является то, что можно повлиять на платеж, не изменяя при этом решение относительно общественного блага. Если строятся механизмы, не обладающие этим свойством (механизмы Гровса), то такие механизмы почти автоматически оказываются неманипулируемыми.

Идеи механизмов Гровса – прямое обобщение идей, заложенных в аукционе второй цены.

Механизмы Гровса

Введение

Рассмотрим аукцион второй цены. Участники подают заявки в закрытых конвертах. Источник торга получает участник, назвавший бóльшую по значению цену, но плата за товар равняется второй по значению цене (в случае, когда никто из оставшихся участников не назвал ту же цену). В случае, когда несколько человек называют одну и ту же цену, обладатель товара определяется согласно заранее установленному правилу (по списку, случайным образом и т.д.), и платит максимальную цену.

Описанный выше механизм – выявляющий. Пусть истинная оценка одного из участников (участник А), который ценит товар больше других – 1000 рублей, следующая по величине оценка товара – 900 руб. Если участник А говорит правду, он получает товар и платит 900 руб. (при этом его чистый выигрыш равен U=1000-900=100 руб.); если он завышает оценку, то это ничего не меняет (он по-прежнему платит 900 руб.); если он аккуратно (до 900 руб.) занижает оценку, он получает товар и платит 900 руб., но если он сильно занижает оценку (меньше 900 руб.), то его чистый выигрыш равен 0. Таким образом, при данной стратегии всех остальных игроков нет стимула искажать правдивый ответ. Задание: проверить, что стратегия говорить правду выгоднее при любых стратегиях других игроков.

Свойства данного механизма:

1) При аукционе второй цены товар попадает участнику с наивысшей оценкой этого предмета, т.е. аукцион приводит к условному оптимуму Парето (без учета того, что сумма трансфертов участников не рана 0, т.е. деньги уходят из системы).

2) Нельзя изменить платеж t_i участника i, не повлияв на общесистемное решение относительно y (в отличие от «наивного» механизма).

3) Трансферт участника, получившего товар, равен величине компенсации ущерба, который наносится остальной части экономики участием в аукционе данного агента (в вышеприведенном примере эта величина равна 900 руб.).

Рассмотрим механизмы финансирования общественного блага, которые являются выявляющими и обладают необходимыми свойствами.

Постановка задачи: общественное решение $a = (y, t_1, ..., t_n)$, функции полезности $U_i(x_i, y_i, \theta_i) = x_i + v_i(y, \theta_i) - \frac{C(y)}{n}$. Предполагается, что все издержки по предоставлению общественного блага $C(y)$ делятся между всеми участниками поровну:

$$\widetilde{v}_i(y_i, \theta_i) = v_i(y, \theta_i) - \frac{C(y)}{n}.$$

В дальнейшем предполагается, что издержки учтены в функции полезности участников, т.е. вместо $\widetilde{v}_i(y_i, \theta_i)$ используется $v_i(y_i, \theta_i)$.

Описание механизмов

Механизмы Гровса воплощают идею аукциона второй цены для задачи предоставления общественных благ. Парето оптимум находится из решения задачи (с учетом того, что издержки уже включены в функции полезности):

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(y, \theta_i) \to \max_y. \qquad (1)$$

Пусть $\widetilde{y} = y(\widetilde{\theta}) = \arg\max\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i(y, \theta_i) \middle| y \in Y\right\}$. (2)

Платеж агента в механизмах Гровса определяется следующим образом:

$$t_i(\widetilde{\theta}) = \sum_{j \neq i} v_j\left(y(\widetilde{\theta}), \widetilde{\theta}_j\right) + h_i(\widetilde{\theta}_{-i}),\ i = 1...n, \qquad (3)$$

где $h_i(\cdot)$ – произвольная функция.

Свойства механизма, построенного вышеописанным образом:

1) Достигается условный оптимум Парето (без учета несбалансированности трансфертов), что следует из (1).

2) Величина трансферта i-го агента меняется только при изменении y, что следует из (3).

Покажем, что механизмы Гровса – выявляющие.

Выигрыш i-го агента:

$$V = v\left(y(\widetilde{\theta}_i, \widetilde{\theta}_{-i}), \theta_i\right) + \sum_{j \neq i} v_j\left(y(\widetilde{\theta}_i, \widetilde{\theta}_{-i}), \widetilde{\theta}_j\right) + h_i(\widetilde{\theta}_{-i})$$

Поскольку каждый агент хочет получить величину y, исходя из решения задачи: $v_i\left(y,\theta_i\right)+\sum_{j\neq i}v_j\left(y,\tilde{\theta}_j\right)\rightarrow\max_y$, то для решения этой задачи агент должен говорить правду, т.к. в этом случае y выбирается т.о., чтобы максимизировать суммарный выигрыш всех агентов, и тем самым максимизировать выигрыш i-го агента.

Теорема: пусть функции $v_i(\cdot)$ – гладкие и задан механизм $\left(y\left(\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_n\right),t_i\left(\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_n\right)\right)$ такой, что $y(\cdot)$ и $t_i(\cdot)$ – гладкие, и выполнено условие (2). Данный механизм является выявляющим тогда и только тогда, когда он является механизмом Гровса.

Выигрыш i-го агента:

$$V_i=v\left(y\left(\tilde{\theta}_i,\tilde{\theta}_{-i}\right),\theta_i\right)+t_i\left(\tilde{\theta}_i,\tilde{\theta}_{-i}\right).$$

Условие первого порядка:

$$\frac{\partial v_i\left(y\left(\theta_i,\tilde{\theta}_{-i}\right),\theta_i\right)}{\partial y}\frac{\partial y\left(\theta_i,\tilde{\theta}_{-i}\right)}{\partial\tilde{\theta}_i}+\frac{\partial t_i\left(\theta_i,\tilde{\theta}_{-i}\right)}{\partial\tilde{\theta}_i}=0. \qquad (4)$$

Из условий первого порядка для (1):

$$\frac{\partial v_i\left(y\left(\theta_i,\tilde{\theta}_{-i}\right),\theta_i\right)}{\partial y}+\sum_{j\neq i}\frac{\partial v_j\left(y\left(\theta_i,\tilde{\theta}_{-i}\right),\tilde{\theta}_j\right)}{\partial y}=0. \qquad (5)$$

Тогда из (4) и (5):

$$\frac{\partial t_i\left(\theta_i,\tilde{\theta}_{-i}\right)}{\partial\tilde{\theta}_i}=\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}_i}\sum_{j\neq i}v_j\left(y\left(\theta_i,\tilde{\theta}_{-i}\right)\tilde{\theta}_j\right),$$

откуда получим: $t_i\left(\theta_i,\tilde{\theta}_{-i}\right)=\sum_{j\neq i}v_j\left(y\left(\theta_i,\tilde{\theta}_{-i}\right)\tilde{\theta}_j\right)+const$,

где $const=h_i\left(\theta_{-i}\right)$.

Механизм Гровса-Кларка-Викри

Является разновидностью механизмов Гровса. Рассмотрим простейшую задачу предоставления общественного блага. Общественное благо y может принимать только два значения: 0 и 1 (реализация проекта либо отказ от его реализации). Функции полезности агентов $v_i\left(y,\theta_i\right)=\begin{cases}0, y=0\\ \theta_1, y=1\end{cases}$. Издержки по предоставлению общественного блага $C(y)=\begin{cases} c, y=1 \\ 0, y=0 \end{cases}$ в случае реализации проекта делятся между всеми агентами поровну, т.е. информация, которой обменивается центр с агентами: $\xi_i = \theta_i - \frac{c}{n}$.

Согласно механизму Гровса, трансферт агенту равен

$$t_i(\tilde{\theta}) = \sum_{j \neq i} v_j\left(y(\tilde{\theta}_j), \tilde{\theta}_j\right) + h_i(\tilde{\theta}_{-i}).$$

Выделим среди механизмов Гровса некоторый подкласс, который реализует третье свойство аукционов Викри – каждый агент полностью компенсирует тот ущерб, которое несет сообщество оттого, что этот агент участвует в принятии решений. Уточним, что это значит. Представим себе, что агент исключен из процесса принятия решений. Зафиксируем, каким при этом будет выбор общества и его выигрыш. Затем нужно рассчитать, насколько сократится этот выигрыш оттого, что агент стал участвовать в принятии решений. Именно этот убыток и должен возместить агент.

В нашем случае это – механизм Гровса-Кларка. Это механизм Гровса, задающий конкретную форму функции h_i:

$h_i(\tilde{\theta}_{-i}) = -\sum_{j \neq i} v_j\left(\bar{y}(\tilde{\theta}_{-i}), \tilde{\theta}_j\right)$. Здесь $\bar{y}(\tilde{\theta}_{-i}) = \arg\max \sum_{j \neq i} v_j\left(y(\tilde{\theta}_{-i}), \tilde{\theta}_j\right)$. При таком выборе функции h_i имеем дело с механизмом Гровса-Кларка. Интуитивно это объясняется так: $\bar{y}(\tilde{\theta}_{-i})$ - это тот объем общественного блага, которое выбирается, если i-й агент не участвует в принятии решений. $-h_i$ - это суммарный выигрыш, который получат игроки при отсутствии i-го агента.

Приведем пример такого механизма. Механизм Гровса-Кларка-Викри – частный случай механизма Гровса-Кларка. Размер общественного блага принимает всего два значения – ноль или единица, выигрыши агентов: $v_i(y,\theta_i)=\begin{cases} \theta_i, y=1 \\ 0, y=0 \end{cases}$, издержки по созданию общественного блага: $c(y)=\{0,c\}$. Согласно механизму Гровса, мы должны разбить издержки по финансированию объекта между агентами, для простоты поделим их поровну, тогда чистый выигрыш агента от предоставления общественного блага: $\xi_i = \begin{cases} \theta_i - {c}/{n}, y = 1 \\ 0, y = 0 \end{cases}$. Таким образом, агенты сообщают центру именно величину ξ_i, на основании этих сообщений принимается решение о величине трансферта и о том, предоставлять или нет общественное благо. Мы хотим, чтобы решение было Парето-оптимальным в случае сообщения правдивой информации о ξ_i. Как известно, условие Парето-оптимальности: $\begin{matrix} \sum \xi_i \geq 0 \Rightarrow y = 1 \\ \sum \xi_i < 0 \Rightarrow y = 0 \end{matrix}$. Решение об объеме общественного блага будет приниматься именно таким образом (разумеется, не следует забывать, что решение принимается не по истинным ξ_i, а по тому, что сообщили агенты - $\tilde{\xi}_i$). Остается только указать величину трансфертов:

$$t_i\left(\tilde{\xi}\right) = \begin{cases} 0, \left(\sum\limits_{\forall j} \tilde{\xi}_j\right)\left(\sum\limits_{j \neq i} \tilde{\xi}_j\right) \geq 0 \\ -\left|\sum\limits_{j \neq i} \tilde{\xi}_j\right|, \left(\sum\limits_{\forall j} \tilde{\xi}_j\right)\left(\sum\limits_{j \neq i} \tilde{\xi}_j\right) < 0 \end{cases}.$$

Объясним странное, на первый взгляд, выражение для трансфертов. Если две суммы $\tilde{\xi}_i$ имеют один и тот же знак, то их произведение неотрицательно. Кроме того, если они имеют один и тот же знак, то и при наличии i-го агента, и при его отсутствии решение о предоставлении общественного блага остается одним и тем же. Значит, существование i-го агента никак не влияет на полезности остальных, и поэтому трансферт i-го агента должен быть равен нулю. Если же участие агента меняет решение и затрагивает интересы всех остальных, то суммы $\tilde{\xi}_i$ будут разного знака, и, следовательно, их произведение будет отрицательно. Тогда агент должен возместить потери, которые понесут все остальные при учете мнения этого агента. Остается лишь напомнить, что эти трансферты не распределяются потом среди участников, а уходят из системы. В этом случае обман становится невыгодным, то есть механизм является выявляющим.

Проверим это. Ограничимся лишь частным случаем. Представим, что остальные агенты сообщают $\tilde{\xi}_{-i}$. Решим задачу i-го агента. Пусть, для определенности, $\left(\sum\limits_{j \neq i} \tilde{\xi}_j\right) \geq 0$ и

$\left(\xi_i + \sum_{j \neq i} \tilde{\xi}_j\right) \geq 0$, то есть в случае правдивого ответа агент не платит и не получает трансфертов, общественное благо предоставляется. Если агент сообщает правдивую оценку, его выигрыш равен $\theta_i - c/n = \xi_i$. Может ли возникнуть соблазн говорить неправду? Изменить свой выигрыш агент может, лишь изменив общесистемное решение, то есть, сообщив настолько малое $\tilde{\xi}_i$, что общественное благо не будет предоставлено. Тогда выигрыш от общественного блага будет ноль (так как его не будет), платить за него, соответственно, тоже не придется. Но при этом i -му агенту придется платить «штраф» в размере $\sum_{j \neq i} \tilde{\xi}_j$ (или получить трансферт в размере $-\sum_{j \neq i} \tilde{\xi}_j$, что то же самое). Сравним выигрыши агента при правдивой стратегии и при манипулировании. По предположению, $\left(\xi_i + \sum_{j \neq i} \tilde{\xi}_j\right) \geq 0$, значит, $\xi_i \geq -\sum_{j \neq i} \tilde{\xi}_j$, то есть выигрыш при правдивой стратегии больше. Аналогичные рассуждения делаются для трех остальных частных случаев.

Упражнение. Доказать, что механизм Гровса-Кларка-Викри является механизмом Гровса. Доказать также, что это механизм Гровса-Кларка.

Посмотрим теперь, что можно сказать о Парето-оптимальности механизмов Гровса. Нам известно, что эти механизмы выявляют, то есть, заставляют агентов сообщать истинные значения θ_i, объем общественного блага выбирается на Парето-оптимальном уровне. Механизм Гровса не является оптимумом Парето из-за потенциальной несбалансированности трансфертов: в общем случае $\sum t_i \neq 0$. Если эта сумма отрицательна, то деньги уходят из системы, и в явном виде есть чистые потери, если же эта сумма положительна, то система просто несбалансированна и поэтому недопустима.

Таким образом, необходимое и достаточное условие Парето-оптимальности - $\sum t_i \equiv 0$. Можно ли построить такой механизм? Вспомним, что $t_i(\tilde{\theta}) = \sum_{j \neq i} v_j\left(y(\tilde{\theta}), \tilde{\theta}_j\right) + h_i\left(\tilde{\theta}_{-i}\right)$, причем функции h_i выбираются произвольно – значит, у нас есть некоторые степени свободы, которые мы можем использовать для получения необходимого тождества. Нельзя ли выбрать h_i так, чтобы

$\sum_i \sum_{j \neq i} v_j\left(y(\tilde{\theta}), \tilde{\theta}_j\right) + \sum_i h_i\left(\tilde{\theta}_{-i}\right) \equiv 0$? В общем случае этого сделать нельзя. Приведем пример, когда это сделать невозможно. Пусть число участников равно двум. Тогда $h_i\left(\tilde{\theta}_{-i}\right)$ - функции одной переменной. Тогда $\sum_i h_i\left(\tilde{\theta}_{-i}\right)$ сепарабельна, то есть это сумма функций, зависящих от одной переменной. В то же время $\sum_i \sum_{j \neq i} v_j\left(y(\tilde{\theta}), \tilde{\theta}_j\right)$, в общем случае, не является сепарабельной, а это означает, что их сумма $\sum_i \sum_{j \neq i} v_j\left(y(\tilde{\theta}), \tilde{\theta}_j\right) + \sum_i h_i\left(\tilde{\theta}_{-i}\right)$ не может быть тождественно равной нулю. Значит, в экономике двух участников в общем случае достижение Парето-оптимума в механизме Гровса невозможно.

<u>Пример.</u> $u_i(y, \theta_i) = \theta_i v(y)$, $c(y) = y$. Тогда условие оптимальности требует (условие Самуэльсона): $v'(y)\sum \theta_i = 1$, или $v'(y) = \frac{1}{\sum \theta_i}$, тогда $y = v'^{-1}\left(\frac{1}{\sum \theta_i}\right)$. Это не является сепарабельной функцией. Значит, в случае двух участников механизма Гровса, дающего оптимум Парето, не существует.

Попытаемся построить механизм, реализующий Парето-оптимум. Нам, очевидно, нужен выявляющий механизм со сбалансированными трансфертами. Если будем пытаться найти механизм, выявляющий с точки зрения равновесия Нэша, то ничего хорошего не получается. Изменим концепцию равновесия и будем искать механизм, выявляющий с точки зрения Байесова равновесия. Вспомним определение равновесия Байеса (не Байеса-Нэша!).

Пусть имеется n игроков, каждый игрок характеризуется параметром $\theta_i \in \Theta_i$, каждый игрок знает свой тип (параметр), но не знает типа других агентов, однако имеет некоторые представления (веры), которые описываются функциями плотности , эти функции предполагаются заданными. Тогда агент типа i в равновесии Байеса играет стратегию $a_i(\theta_i)$, зависимость стратегии от типа тоже предполагается известной. То есть все бы знали, какую стратегию будет играть i-й агент в равновесии, если бы был известен тип этого агента. Функция выигрыша каждого агента зависит от стратегий всех агентов и их типов: $v_i(a_1, \ldots, a_n, \theta_1, \ldots, \theta_n)$.

Определим теперь равновесие Байеса. i-му агенту известен его тип, известна собственная функция выигрыша, известна зависимость стратегии других агентов от их типа $a_j(\theta_j)$. Тогда стратегия i-го агента – решение задачи максимизации полезности:

$$\int_{\Theta_{-i}} v_i(a_1,...,a_n,\theta_1,...,\theta_n)h_i(\theta_{-i}|\theta_i)d\theta_{-i} \to \max_{a_i \in A_i}$$

Заметим, что этот интеграл зависит от θ_i как от параметра и не зависит от других параметров. Оптимальным решением этой задачи будет некоторая стратегия $a_i(\theta_i)$. То есть ожидания должны быть рациональны: мы ожидаем от агента именно то, что он в конечном счете выбирает. Тогда имеет место равновесие Байеса.

Теорема. (Возвращаемся к задаче финансирования общественного блага). Функции полезности $v_i(y,\theta_i)$ предполагаются известными, $\theta_i \in \Theta_i$. Будем считать, что у каждого агента есть ожидания относительно распределения типов всех остальных агентов, предполагаем, что функция распределения $h_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ не зависит от типа данного агента, то есть, не зависит от θ_i.

Утверждается, что тогда существует механизм, выявляющий в смысле равновесия Байеса, который дает Парето-оптимальное решение. Построим такой механизм. По-прежнему мы должны решить, как принимать решение об объеме общественного блага в зависимости от полученной информации и какими должны быть трансферты. Если хотим построить выявляющий механизм и при этом получить оптимум Парето, то ясно, что по-прежнему $y(\widetilde{\theta}) = \arg\max \sum_{j=1}^{n} v_j(y,\widetilde{\theta}_j)$. Теперь нужно сделать этот механизм выявляющим, а трансферты – сбалансированными. Будем строить трансферты не по Гровсу (т.к. в этом случае не получим Парето-оптимальности), а следующим образом:

$t_i = r_i(\widetilde{\theta}_i) + s_i(\widetilde{\theta}_{-i})$ - первая компонента зависит только от собственного решения агента, а вторая – только от решений остальных. Теперь нужно выбрать r_i и s_i таким образом, чтобы обеспечить выявляемость и сбалансированность. Сначала решим проблему выявляемости. Выигрыш i-го агента выглядит так:

$v_i(y(\widetilde{\theta}_i,\widetilde{\theta}_{-i}),\theta_i) + r_i(\widetilde{\theta}_i) + s_i(\widetilde{\theta}_{-i})$. Нужно выбрать θ_i таким образом, чтобы максимизировать свой выигрыш.

В механизме Гровса выявляющие стратегии были доминирующими, то есть их оптимальность не зависела от действий остальных. Теперь же выявляющая стратегия доминирующей не является, и решение агента зависит от того, что говорят другие. Но ему неизвестно, что говорят другие, более того, ему неизвестен их тип. Равновесие Байеса считаем выявляющим, то есть ожидаем, что каждый агент говорит правду, то есть i-й агент решает свою задачу в предположении, что остальные говорят правду: $\tilde{\theta}_{-i} = \theta_{-i}$. Тогда задача агента выглядит так:

$$\int v_i\left(y\left(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i}\right), \theta_i\right) h_i\left(\theta_{-i}\right) d\theta_{-i} + c + r_i\left(\tilde{\theta}_i\right) \to \max_{\tilde{\theta}_i}$$

Найдем условие оптимальности первого порядка, предполагая гладкость:

$$\int_{\Theta_{-i}} \frac{\partial v_i}{\partial y}\left(y\left(\theta_i, \theta_{-i}\right), \theta_i\right) \frac{\partial y}{\partial \theta_i}\left(\theta_i, \theta_{-i}\right) h_i\left(\theta_{-i}\right) d\theta_{-i} + r_i'\left(\theta_i\right) = 0$$

(здесь нет волны над θ_i потому, что хотим, чтобы выгодно было сообщать правду). Мы получили дифференциальное уравнение одной переменной θ_i, из которого мы можем найти функцию r_i.

Значит, можем построить механизм, в котором трансферты имеют вид $t_i = r_i\left(\theta_i\right) + s_i\left(\theta_{-i}\right)$ и которые вынуждают агентов сообщать правду при правильно выбранной функции θ_i. Заметим, что он будет выявляющим вне зависимости от вида функций s_i.

Осталось только подобрать s_i так, чтобы имела место сбалансированность: $\sum\left(r_i\left(\theta_i\right) + s_i\left(\theta_{-i}\right)\right) = 0$. Очевидно, s_i нужно выбрать такими: $s_i\left(\theta_{-i}\right) = -\frac{1}{n-1}\sum_{j \neq i} r_j\left(\theta_j\right)$. Тогда получим сбалансированный механизм.