РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления

Волгоградский государственный университет

**А. А. Воронин, М. В. Губко,
С. П. Мишин, Д. А. Новиков**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОРГАНИЗАЦИЙ

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по образованию в области математических методов
в экономике в качестве учебно-методического пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 080116
"Математические методы в экономике"
и другим междисциплинарным специальностям

URSS
МОСКВА

ББК 22.18 65.23 65.29

Воронин Александр Александрович, Губко Михаил Владимирович, Мишин Сергей Петрович, Новиков Дмитрий Александрович

Математические модели организаций: Учебное пособие. — М.: ЛЕНАНД, 2008. — 360 с.

Настоящее учебное пособие представляет собой введение в математическую теорию управления организационными системами. В главе 1 «Методология моделирования» дается определение модели, классифицируются виды моделей и методы моделирования, перечисляются функции моделирования и требования к моделям. Рассматриваются этапы построения и исследования математических моделей, формулируются задачи оптимизации и обсуждаются проблемы устойчивости и адекватности моделей. Приводится общая модель управления и технология решения соответствующих задач моделирования.

Глава 2 «Модели принятия решений» содержит минимально необходимые и используемые при построении моделей функционирования организаций сведения из теории принятия решений, в том числе в условиях природной и игровой неопределенности.

В главе 3 «Модели стимулирования в организационных системах» приведены основные подходы и результаты исследования теоретико-игровых задач стимулирования.

В главе 4 «Модели анализа и синтеза организационных структур» проводится обзор моделей иерархических структур, описываются базовая и общая модель иерархии управления, формулируются и решаются задачи синтеза оптимальных иерархических организационных структур.

Каждая глава завершается списком тем для самостоятельного изучения (и/или написания рефератов), снабженным необходимыми библиографическими ссылками. При формировании списков используемой и рекомендуемой для изучения литературы авторы стремились при наличии такой возможности приводить источники, тексты которых находятся в свободном доступе в Интернете.

Пособие предназначено для студентов вузов и аспирантов управленческих специальностей, а также для научных и практических работников.

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. В. Н. Бурков;
д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Лосев;
д-р экон. наук, проф. В. О. Мосейко

Рекомендовано к изданию Редакционными советами ИПУ РАН и ВолГУ

Формат 60×90/16. Печ. л. 22,5. Зак. №

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978–5–9710–0178–2

5810 ID 72421

9 785971 001782

Содержание

Введение

Зачем изучать организации? Чтобы ими управлять? Чтобы управлять собой, работая в них? Чтобы в них жить! Действительно, организации являются таким же родовым признаком человека, как прямохождение, рука, речь, сознание, труд. Человек всю жизнь погружен в организации различной природы от семьи до глобальной цивилизации, ежедневно участвуя в их создании и испытывая их благотворное или губительное влияние.

Как любой продукт человеческой деятельности организации имеют двоякую природу: субъективную, обусловленную личностным творением, и объективную – обусловленную общественным сотворением и предназначением. Объективная природа организаций обусловлена еще и тем, что они – живые. Организации зачинаются, рождаются, взрослеют, стареют, и, наконец, умирают. Жизнь организаций часто течет незаметно, но иногда их кризисы влекут за собой драмы и трагедии личностей, народов и поколений.

Рассмотрим общепринятое содержание понятия «организация» – см. Рис. В.1. В соответствии с определением, данным в [20], «*организация*»:

1) внутренняя упорядоченность, согласованность взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных частей целого, обусловленная его строением;

2) совокупность процессов или действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого;

3) объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил», то есть *механизмов функционирования* – см. [14] (механизм – «система, устройство, определяющее порядок какого-либо вида деятельности» [19, С. 283]).

Применительно к организационным системам механизм функционирования – это совокупность правил, законов и процедур, регламентирующих взаимодействие участников организационной системы. Более узким является понятие *механизма управления* – совокупности процедур принятия управленческих решений в организациях. Таким образом, механизмы функционирования и механизмы управления определяют, как ведут себя члены организации[1] и как они принимают решения.

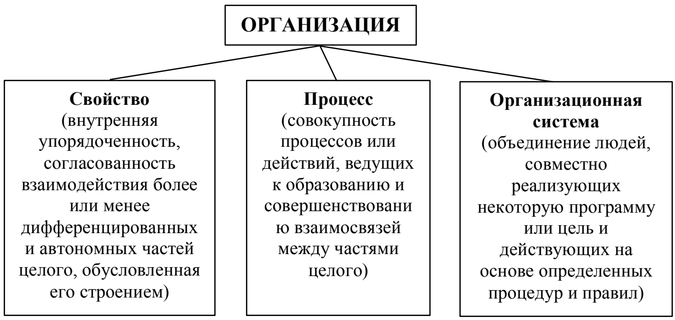


Рис. В.1. Определение «организации»

Наличие в организации определенной совокупности конкретных механизмов управления привлекательно как с точки зрения управляющего органа – так как позволяет предсказать поведение управляемых субъектов, так и с точки зрения управляемых субъектов – так как делает предсказуемым поведение управляющего органа. То есть снижение неопределенности за счет использования механизмов управления является одним из существенных свойств любой организации как социального института.

Для того чтобы управляющий орган (например, руководитель) выбрал ту или иную процедуру принятия решений (тот или иной механизм управления, то есть зависимость своих действий от целей организации и действий управляемых субъектов), он должен уметь предсказывать поведение исполнителей – их реакцию на те или иные управляющие воздействия. Экспериментировать в жизни, применяя различные управляющие воздействия и изучая реакцию подчиненных, не эффективно и практически никогда не представляется возможным. Здесь на помощь приходит *моделирование* – метод исследования, заключающийся в построении и анализе моделей – аналогов исследуемых объектов. Имея адекватную модель, можно с

---

[1] С этой точки зрения механизм управления можно рассматривать как синоним метода управления, так как и тот, и другой определяют, как осуществляется управление.

ее помощью проанализировать реакции управляемой системы (этап анализа), а затем выбрать (на этапе синтеза) и использовать на практике то управляющее воздействие, которое приводит к требуемой реакции.

Как изучать организации? Этот на первый взгляд простой и даже странный вопрос (ведь организации изучаются с античных времен) при ближайшем рассмотрении оказывается совсем не простым и вполне уместным. Дело в том, что организации – пожалуй, самая сложная, разнообразная, изменчивая и, как следствие, наименее изученная из известных в настоящее время «форм жизни».

Разнообразие типов, видов, форм организаций растет постоянно и ускоренно, что не позволяет создать в настоящее время сколько-нибудь общей концепции или теории. Даже наиболее постоянные из известных типов организаций, такие как семья, этнос, государство, претерпевают в последние десятилетия столь значительные изменения, что описывающие их теории часто противоположны.

Что же касается организаций, связанных с производственной деятельностью, то их изменение является прямым следствием их существования, точнее – следствием расширенного воспроизводства. Стремительно развивающиеся в последние десятилетия глобальные сетевые (в том числе, виртуальные) организации, на наших глазах объединяющиеся в интернет-сообщества, создающие интернет-экономику и интернет-культуру, т.е. – глобальный интернет-социум, служат ярким примером сказанного.

Литература, посвященная исследованию организаций, обширна и многообразна. С далекой древности, когда появились первые человеческие коллективы, возник вопрос о рациональной организации взаимодействия людей, вовлеченных в процесс достижения общей цели.

Например, вопросам рационального государственного устройства посвящен широко известный диалог Платона «Государство», где структура государства имеет вид иерархии, возглавляемой мудрецами-правителями[1]. На протяжении последующих веков

[1] *Интересно, что уже в этой работе появляются попытки количественного описания параметров оптимальной организации. Так, Платон говорит о том, что идеальное государство должно состоять из 5040 семей,*

огромное количество мыслителей обращалось к этой теме, и накопленный ими эмпирический опыт с трудом можно описать в каком бы то ни было ограниченном объеме.

Формальные модели организаций начали активно разрабатываться с середины XX века вследствие, с одной стороны, практической потребности управления все усложняющимися экономическими, социальными и военными организациями, а с другой стороны, – появления новой научной методологии исследования сложных систем – системного подхода и системного анализа. С этого времени организации являются предметом приложения и источником развития математических методов (таких как методы оптимизации, исследование операций, теория игр и др.).

Происшедшая в то же время компьютерная революция создала техническую базу нового математического метода – математического моделирования с его новым исследовательским аппаратом – численным экспериментом, и одной из задач численных экспериментов стало моделирование функционирования организаций.

Созданные к настоящему времени модели организаций, в основном, можно разделить на «экономические» и «инженерные».

В течение первой половины XX века происходил непрерывный процесс формализации экономической науки, который в результате привел к формированию развернутой математической теории экономического равновесия [16]. Однако довольно скоро стало ясно, что эта теория, во-первых, не может объяснить многих наблюдаемых на реальных рынках эффектов, а во-вторых, почти не рассматривает закономерности внутренней организации экономических субъектов – фирм [17]. Последовательное совершенствование экономической теории во второй половине XX века привело к осознанию важности информационных аспектов функционирования экономических систем, таких, например, как асимметричная информированность агентов [1] и ограниченные их возможности по обработке информации и принятию решений [4]. В числе прочего неоклассическая экономическая теория позволила пролить свет на роль и место иерархических организаций в процессах производства и распределения благ.

поскольку это число делится нацело на все числа от двух до двенадцати (кроме одиннадцати), что позволяет удобным образом распределять поровну обязанности между подгруппами граждан.

Параллельно с развитием *математической экономики* первая половина XX века была отмечена бурным прогрессом *теории управления техническими системами*. Развитие авиации и ракетной техники, связанное с созданием и эксплуатацией сложнейших технических систем, породило насущную необходимость в формальных моделях организации их разработки и функционирования. Моделирование сложной технической системы невозможно без ее декомпозиции на более простые подсистемы, позволяющей сначала исследовать поведение изолированных подсистем, а затем описать их взаимосвязи [15, 21]. Многоуровневая декомпозиция позволяет представить сложный объект в виде иерархии вложенных друг в друга более простых частей, задающих его структуру, и от того, насколько удачно выбрана структура проектируемой системы, во многом зависят и ее эксплуатационные характеристики [18]. Поэтому количество исследований, посвященных методам оптимизации структуры технических систем, непрерывно росло. Успешное применение результатов этих работ в практике проектирования и управления техническими системами породило стремление расширить область их применения на организационные и биологические системы, что, в числе прочего, и было реализовано в ходе развития новых научных направлений – *кибернетики* [9,22] и *теории систем* [8, 11].

В настоящее время наблюдается сближение позиций экономического и инженерного направлений в моделировании организаций. Не последнюю роль в этом сыграло развитие информационных технологий и вычислительной техники. Оказалось, что связанная с обработкой информации работа распределенных вычислительных систем во многом напоминает работу менеджеров в организациях, и в настоящее время многие экономисты [3, 5] используют при моделировании организационных иерархий терминологию и результаты, пришедшие из инженерных наук, в частности, информатики. Таким образом, можно говорить о появлении синтетических теорий, объединяющих достоинства инженерного и экономического подходов.

Примером такой синтетической теории может служить *теория активных систем* [6, 7], зародившаяся в конце 1960-х годов на фоне бурного развития кибернетики, исследования операций, математической теории управления (теории автоматического регулирования – ТАР) и интенсивного внедрения их результатов при создании новых и модернизации существующих технических систем и объединяющая общесистемные представления о методологии исследования сложных систем и управления ими с теоретико-игровыми моделями[1] принятия решений [10, 12, 13], характерными и для современной экономической науки – см. Рис. В.2.

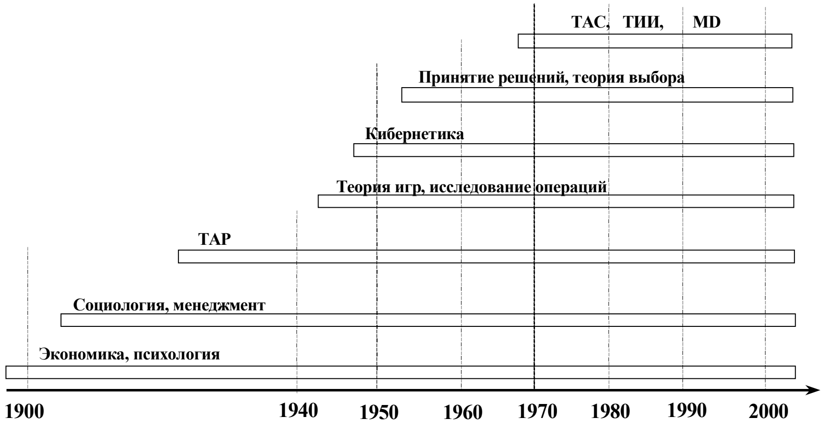


Рис. В.2. Хронология развития представлений об организационных системах

Применение общих подходов теории управления для разработки математических моделей социальных и экономических систем (теория активных систем – ТАС [12], теория иерархических игр – ТИИ [17], Mechanism Design – MD [2] – см. Рис. В.2) привело, в свою очередь, к созданию *теории управления организационными системами*, предмет которой – разработка организационных механизмов управления (получить первоначальное представление о современном состоянии этой теории можно из монографии [14]). В

---

[1] Важным отличием организационных систем от технических является наличие у составляющих их людей и коллективов собственных интересов, отличающихся от интересов организации в целом. Теория активных систем учитывает целенаправленность поведения участников системы, используя для моделирования их поведения результаты теории игр – раздела прикладной математики, занимающегося исследованием моделей принятия решений в условиях конфликтных ситуаций.

рамках этой теории созданы, исследованы и апробированы на практике десятки механизмов управления, которые находят применение при управлении системами самого разного масштаба и отраслевой специфики.

Структура изложения материала настоящего учебного пособия, посвященного математическим моделям организаций, такова (см. Рис. В.3).

В главе 1 «Методология моделирования» дается определение модели, классифицируются виды моделей и методы моделирования, перечисляются функции моделирования и требования к моделям. Рассматриваются этапы построения и исследования математических моделей, формулируются задачи оптимизации и обсуждаются проблемы устойчивости и адекватности моделей. Приводится общая модель управления и технология решения соответствующих задач моделирования.

Глава 2 «Модели принятия решений» содержит минимально необходимые и используемые при построении моделей функционирования организаций сведения из теории принятия решений, в том числе, в условиях природной и игровой неопределенности.

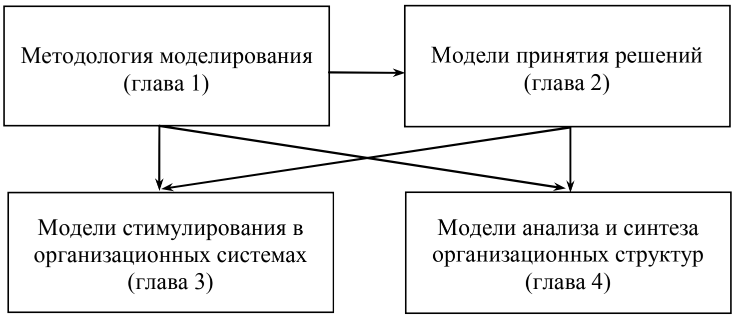


Рис. В.3. Структура изложения

В главе 3 «Модели стимулирования в организационных системах» приведены основные подходы и результаты исследования теоретико-игровых задач стимулирования.

В главе 4 «Модели анализа и синтеза организационных структур» проводится обзор моделей иерархических структур, описываются базовая и общая модель иерархии управления, формулируются и решаются задачи синтеза оптимальных иерарзических организационных структур.

В целом, в пособии принят следующий стиль изложения. Каждая из глав, начиная со второй, содержит последовательное (в порядке усложнения) изложение комплекса моделей, отражающих те или иные аспекты функционирования организаций. Каждая глава завершается списком тем для самостоятельного изучения (и/или написания рефератов), снабженным необходимыми библиографическими ссылками. При формировании списков используемой и рекомендуемой для изучения литературы авторы стремились при наличии такой возможности приводить источники, тексты которых находятся в свободном доступе в Интернете.

Литература[1] к введению

1 Hart O.D. Optimal labor contracts under asymmetric information: an introduction // The Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. № 1. P. 3 – 35.

2 Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.

3 Radner R. The Organization of Decentralized Information Processing / Unpub. ms. AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1989.

4 Simon H. Administrative behavior. 3-rd edition. – N.Y.: Free Press, 1976.

5 Van Zandt T. Efficient Parallel Addition / Unpub. ms. AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1990.

6 *Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977.

7 *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: Синтег. 1999.

---

[1] *Большая часть перечисленных в данном и последующих списках литературы публикаций зарубежных авторов доступна в электронной библиотеке www.jstor.org (российские ученые могут получить доступ к ней, зарегистрировавшись на сайте www.eerc.ru).*

Публикации, отмеченные здесь и далее значком «», имеются в свободном доступе в электронной библиотеке сайта www.mtas.ru.*

8 Ван Г.Д. Общая прикладная теория систем. – М.: Мир, 1981.

9 Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. – М.: Наука, 1983.

10 *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.

11 Месарович М., Такахара И. Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978.

12 Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985.

13 Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.

14 *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007.

15 Овсиевич Б.И. Модели формирования организационных структур. – Л.: Наука. 1979.

16 Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. – М.: Дело, 2001.

17 Полтерович В.М. Кризис экономической теории / Доклад на научном семинаре Отделения экономики и ЦЭМИ РАН «Неизвестная экономика», 1997.

18 Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. – М.: Радио и связь, 1991.

19 Словарь иностранных слов. – М.: Русский язык, 1982.

20 Философский энциклопедический словарь. – М.: Сов. Энциклопедия, 1983.

21 Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем. – М.: Наука. 1982.

22 Эшби У.Р. Введение в кибернетику. – М.: Изд-во иностранной литературы. 1959.

Глава 1. Методология моделирования

В настоящей главе дается определение модели, классифицируются виды моделей и методы моделирования, перечисляются функции моделирования и требования к моделям. Рассматриваются этапы построения и исследования математических моделей, формулируются задачи оптимизации и обсуждаются проблемы устойчивости и адекватности моделей. Приводится общая модель управления и технология решения соответствующих задач моделирования.

1.1. Виды моделей

Как отмечалось выше и в [36, 38], одним из эффективных методов изучения организации является ее *моделирование*, заключающееся в построении и анализе модели. Приведем различные определения *модели*.

Модель – образ некоторой системы; аналог (схема, структура, знаковая система) определенного фрагмента природной или социальной реальности, «заместитель» оригинала в познании и практике [56, С. 382].

Модель – в широком смысле – любой образ, аналог (мысленный или условный: изображение, описание, схема, чертеж, график, план, карта и т.п.) какого-либо объекта, процесса или явления (оригинала данной модели) [7, С. 744, Статья «Модель», 5-е значение].

Моделью можно назвать искусственно создаваемый образ конкретного предмета, устройства, процесса, явления (и, в конечном счете, любой системы) [20].

Академик Н.Н. Моисеев дает следующее определение модели как средства познания [33, С. 166]: «Под моделью мы будем понимать упрощенное, если угодно, упакованное знание, несущее вполне определенную, ограниченную информацию о предмете (явлении), отражающее те или иные его свойства. Модель можно рассматривать как специальную форму кодирования информации. В отличие от обычного кодирования, когда известна вся исходная информация, и мы лишь переводим ее на другой язык, модель, какой бы язык она не использовала, кодирует и ту информацию, которую люди раньше не знали. Можно сказать, что модель содержит в себе потенциальное знание, которое человек, исследуя ее, может приобрести, сделать наглядным и использовать в своих практических жизненных нуждах. Для этих целей в рамках самих наук развиты специальные методы анализа. Именно этим и обусловлена предсказательная способность модельного описания».

Модели делятся на познавательные и прагматические («практические») [45].

Познавательные модели – это предположительные образы будущего научного знания, то есть научные гипотезы.

Прагматические модели отражают не существующее (в практике), но желаемое и, возможно, осуществимое (образ будущей системы).

Прагматические модели являются способом организации (представления) образцово правильных действий и их результатов, то есть являются рабочим представлением, мысленным образцом будущей системы. Таким образом, прагматические модели носят нормативный характер для дальнейшей деятельности, играют роль стандарта, образца, под который «подгоняется» в дальнейшем как сама деятельность, так и ее результаты. Примерами прагматических моделей могут быть любые проекты, планы и программы действий, уставы организаций, должностные инструкции, кодексы законов, рабочие чертежи, экзаменационные требования и т.д.

Познавательное моделирование включает в себя два этапа: *построение* и *исследование* модели. Различают *прямую* и *обратную* исследовательские задачи. Прямая задача – по явному описанию модели (функциональные или алгоритмические зависимости между переменными и параметрами, их величины) находятся ее «неявные» свойства (скрытые зависимости между переменными и параметрами, их величины, динамические свойства, поведение и т.п.). Обратная задача (идентификация) – по заданным (желаемым, проектируемым) свойствам модели находится ее явное описание. Традиционная обратная задача – *оптимизация* (поиск значений переменных и/или параметров, отвечающих оптимальным решениям, то есть оптимальным значениям некоторых функций). Исследование модели может представлять собой *анализ* (прямая и обратная задачи) или *имитацию* (только прямая задача), то есть математическое моделирование можно разделить на аналитическое и имитационное [38].

Для *аналитического моделирования* характерно то, что все системные связи и процессы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (например, уравнений – алгебраических, дифференциальных, интегральных и т.п.) или логических условий. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

- аналитическим, когда стремятся получить в общем (аналитическом) виде явные зависимости для искомых характеристик в виде определенных формул[1];
- численным, когда, не имея возможности решать уравнения в общем виде, пытаются получить (например, с помощью компьютера) числовые результаты при тех или иных конкретных начальных данных;
- качественным, когда, не имея решения в явном или численном виде, можно найти некоторые его свойства. Примером могут служить модели, использующие аппарат качественной теории дифференциальных уравнений, в которой анализ вида уравнений, описывающих самые разнообразные процессы (экономические, экологические, политические и др.) позволяет изучать свойства их решений – существование и тип равновесий, области возможных значений переменных и т.п. [4].

Для *имитационного моделирования* характерно исследование отдельных сценариев или траекторий динамики моделируемой системы с использованием численных или логических методов. Его сильной стороной является возможность исследования очень сложных моделей, слабой – невозможность исследования обратных задач и устойчивости.

Прагматическое моделирование (проектирование) помимо построения и анализа моделей включает в себя оптимизацию и, в ряде случаев, выбор (принятие решений).

Для создания моделей у человека есть всего два типа «материалов» – средства самого сознания и средства окружающего материального мира. Соответственно этому модели делятся на абстрактные (идеальные) и материальные (реальные, вещественные).

---

[1] *Достоинством аналитических моделей является возможность решения как прямых, так и обратных задач моделирования, однако они редко могут быть построены и исследованы для достаточно сложных систем.*

Абстрактные модели являются идеальными конструкциями, построенными средствами мышления, сознания. Абстрактные модели являются языковыми конструкциями. Они могут формироваться и передаваться другим людям средствами разных языков, языков разных уровней специализации.

Во-первых, посредством *естественного языка* (как конечный результат, поскольку в процессе построения моделей человеком используются и неязыковые формы мышления – «интуиция», образное мышление и т.д.). Естественный язык является средством построения любых абстрактных моделей. Его универсальность достигается еще и тем, что языковые модели обладают неоднородностью, расплывчатостью, размытостью. Эта приблизительность является неотъемлемым свойством языковых моделей. Но рано или поздно приблизительность естественного языка оборачивается недостатком, который необходимо преодолевать.

Поэтому, во-вторых, для построения абстрактных моделей используются различные *«профессиональные» языки.* Наиболее ярко это проявляется на примере языков конкретных отраслей *наук сильной версии* – физики, химии и др. (см. [36]). Дифференциация наук объективно потребовала создания специализированных языков, более четких и точных, чем естественный.

В-третьих, когда средств естественного и профессионального языков не хватает для построения моделей, используются *искусственные*, в том числе *формализованные, языки* – например, в логике, математике. К искусственным языкам также относятся компьютерные языки, чертежи, схемы и т.п.

В результате получается иерархия языков и соответствующая иерархия типов моделей. На верхнем уровне этого спектра находятся модели, создаваемые средствами естественного языка, и так вплоть до моделей, имеющих максимально достижимую определенность и точность для сегодняшнего состояния данной отрасли профессиональной деятельности. Наверное, так и следует понимать известные высказывания И. Канта и К. Маркса о том, что любая отрасль знания может тем с большим основанием именоваться наукой, чем в большей степени в ней используется *математика*. Математические (в строгом смысле) модели обладают абсолютной точностью. Но чтобы дойти до их использования в какой-либо области, необходимо получить достаточный для этого объем достоверных знаний. Нематематизированность многих общественных и гуманитарных наук есть следствие познавательной сложности их предметов. В них модели строятся, как правило, с использованием средств естественного языка.

1.2. Функции моделирования

Функции моделирования (дескриптивная, прогностическая и нормативная) совпадают с функциями научного знания [36].

Дескриптивная функция заключается в том, что за счет абстрагирования модели позволяют достаточно просто объяснить наблюдаемые на практике явления и процессы (другими словами, они дают ответ на вопрос «почему мир устроен так»). Успешные в этом отношении модели становятся компонентами научных теорий и являются эффективным средством отражения содержания последних (поэтому *познавательную функцию* моделирования можно рассматривать как составляющую дескриптивной функции).

Прогностическая функция моделирования отражает его возможность предсказывать будущие свойства и состояния моделируемых систем, то есть отвечать на вопрос «что будет?».

Нормативная функция моделирования заключается в получении ответа на вопрос «как должно быть?» – если, помимо состояния системы, заданы критерии оценки ее состояния, то за счет использования оптимизации (см. ниже) возможно не только описать существующую систему, но и построить ее нормативный образ – желательный с точки зрения субъекта, интересы и предпочтения которого отражены используемыми критериями.

Нормативная функция моделирования тесно связана с решением задач *управления*, то есть, с ответом на вопрос «как добиться желаемого (состояния, свойств системы и т.д.)?».

Взаимные отношения этих функций, очевидно, – иерархические: нельзя достичь цели без описания и прогнозирования реальности. Однако необходимость принятия решений в практической деятельности часто актуализирует нормативную функцию моделирования в условиях весьма ограниченного знания. Это отнюдь не означает его ненаучности, а скорее, характеризует уровень развития науки в соответствующей области.

1.3. Методы моделирования

1.3.1. Моделирование и системный подход

Модели, возникающие внутри сложившихся наук [27], строятся на базе их теоретического и экспериментального аппарата, в то время как исследовательский аппарат «междисциплинарных» количественных моделей сложных систем еще носит во многом эклектичный и конгломеративный характер. Это служит препятствием преемственности моделей и результатов моделирования, что в свою очередь затрудняет создание математизированных теорий сложных (и, в частности, организационных) систем.

Как известно, общей методологией исследования (моделирования) сложных систем является системный подход и сложившийся на его базе *системный анализ*. Действительно, объект системного анализа – абстрактная система – фактически является моделью, предметом системного анализа является процесс моделирования. Множество непротиворечивых взаимодополняющих друг друга вербальных и формальных, абстрактных и конкретных, общих и частных определений системы можно отнести и к моделям. Не случайно некоторые теоретики системного анализа не делают различий между моделями и системами, рассматривая последние в качестве модели реальности [24]: «Система – математическая абстракция, которая служит моделью динамического явления» [50].

Приведем несколько фундаментальных принципов системного подхода [34, 36, 45, 49, 58]: всеобщая полнота описания системы принципиально невозможна; любое описание является упрощенным образом реальности, однако, даже самые сильные упрощения могут принести плодотворные результаты, если они отвечают цели исследования; корректность и продуктивность описания системы определяется степенью достижения цели исследования – получением частичного конкретного знания; допустимы различные (в том числе и несопоставимые) субъективные модели одной и той же объективной системы; личность исследователя включается в модель системы и, таким образом, в процессе исследования возникает новая система, включающая в себя наряду с изучаемой системой также ее исследователя с его научным аппаратом и субъективными качествами [34].

Фактически данные принципы являются методологической базой моделирования. Ряд теоретиков системного подхода, подчеркивающие неустранимую субъективность моделирования, включают в определение системы цели и личность исследователя.

Действительно, в процессе моделирования задействованы как бы четыре «участника» [36]: «субъект» – инициатор моделирования и/или пользователь его результатов; «объект-оригинал» – предмет моделирования, то есть та система, которую хочет создать и/или использовать в дальнейшем «субъект»; «модель» – образ, отображение; «среда», в которой находятся и с которой взаимодействуют все участники. Естественно, все они явно или неявно включаются в «тело» модели.

К сожалению, приведенные выше определения модели неоперативны: они не дают метода и тем более алгоритма ее построения. Однако близость (и во многих случаях – тождественность) понятий и методов моделирования и системного подхода позволяет напрямую использовать последний для конструирования моделей.

Действительно, наряду с общими неоперативными определениями системы-модели, дающими представление о ней как о «комплексе взаимосвязанных элементов» [7, 50], существует ряд в определенном смысле конструктивных определений, фиксирующих внимание на ряде ее типичных признаков и свойств, выявляемых путем эмпирического обобщения. Среди них – признаки, характеризующие внутреннее строение системы, ее функционирование, управление, поведение, развитие и т.п. Такие определения имеют вид кортежей, состав которых постепенно пополняется и варьируется в зависимости от целей и личности исследователя. Например, определение *организационной системы* (ОС): как совокупность ее состава, структуры и функций[1] [38].

---

[1] *В рамках теоретико-игровых и оптимизационных моделей функции организационной системы описываются заданием*: *множеств допустимых действий участников системы, их предпочтений, их информированности и порядка функционирования* (*последовательности получения информации и принятия решений*).

Этот подход к определению системы-модели можно использовать для создания «базовой модели» сложных систем в виде системного метакортежа – потенциально бесконечного семейства частных кортежей, элементами которого служат системные классы К. Боулдинга [8]. Боулдинг с целью выделения уровней изучения любой системы классифицирует последние по *уровням сложности*, каждый из которых привносит новые системные свойства, неразличимые на предыдущих уровнях:

♦ простая структура (элементный состав и межэлементные связи);

♦ простой механизм (функционирование);

♦ динамическая система – замкнутая, открытая (изменение во времени, взаимодействие со средой);

♦ управляемая система (целенаправленность);

♦ кибернетическая система (множественность целей, самоуправление);

♦ живая система (гомеостазис, самоорганизация, эволюция);

♦ организм (взаимодействие самоуправляемых подсистем);

♦ животное (подсознание, поведение);

♦ человек (сознание);

♦ организация (коллективный труд);

♦ социум (создание искусственных систем – социальных институтов, науки, культуры, религии и т.п.).

Перечень уровней не является фиксированным: он может дополняться и дробиться на подуровни в зависимости от целей моделирования. При этом система, определяемая предельной сложностью своего описания, может быть (в зависимости от целей исследования) корректно описана также на любом из предшествующих уровней.

В соответствии с этим подходом можно построить «базовую» метамодель любой системы в виде открытого кортежа ее «базовых» признаков и свойств, упорядоченных в соответствии с эмпирически обоснованным нарастанием системной (модельной) сложности:

(1) *«Базовая» модель системы:*

{*Элементы:*{…}, *структура:*{…}, *функции:*{…}, *динамические свойства:*{…}, *взаимодействие с внешней средой:*{…}, *управление:*{…}, *целеполагание:*{…}, *самоуправление:*{…}, *поведение:*{…}, *гомеостазис:*{…}, *самоорганизация:*$\{...\}$, *развитие:*$\{...\}$, *эволюция:*$\{...\}$,……, *цель исследования:*$\{...\}$, *исследователь:*$\{...\}\}$.

Данный кортеж открыт для дополнения и фрактального углубления каждой позиции в зависимости от объекта, субъекта и цели исследования. Фундаментальное системное свойство фрактальности (самоповторения) реализуется структурой кортежа (1) так, что каждая из его составляющих потенциально имеет такую же структуру описания, т.е., такие, например, позиции как «структура функций», «функция структуры», «структура структуры (сверхструктура)», «структура функций структуры» и т.п. находят в нем свое место и содержание. Действительно, каждая подсистема или свойство большой системы при необходимости подробного изучения может в свою очередь также описываться кортежем (1). Такая модель будет составной частью общего системного кортежа.

Две последние позиции кортежа (1) позволяют оценить с одной стороны возможность, а с другой – необходимость той или иной степени детализации модели. Так, например, проявление свойств замкнутости или открытости, статичности или динамичности модели системы может быть связано с величиной временного интервала ее изучения, неявно входящего в цель исследования.

В каждой конкретной модели, как правило, ряд позиций кортежа пуст, а глубина фракталов невелика.

Важно отметить, что при изучении системы на некотором уровне сложности необходимо достичь необходимой для этого полноты ее описания на всех предыдущих уровнях, поэтому модель системы может изменяться (возможно, самым коренным образом) при переходе к каждому следующему уровню сложности.

Отметим также в этой связи очевидную обусловленность функций моделирования уровнем сложности моделей. Например, нормативная функция модели, как правило, надежно реализуется на низших уровнях ее сложности, и сравнительно редко удается нормировать такие свойства как самоорганизация или развитие.

Сформулируем **требования**, предъявляемые к моделям [36].

<u>Первым требованием</u> является *ингерентность* модели, то есть достаточная степень согласованности создаваемой модели со средой, чтобы создаваемая модель была согласована со средой, в которой ей предстоит функционировать, входила бы в эту среду не как чужеродный элемент, а как естественная составная часть [14]. Сре-

дой прагматических моделей является реальный мир, тогда как для познавательных моделей, как правило, требуется согласование с более общими моделями, теориями и парадигмами.

Ингерентность прагматических моделей состоит еще и в том, что в них должны быть предусмотрены не только «стыковочные узлы» со средой («интерфейсы»), но, и, что не менее важно, в самой среде должны быть созданы предпосылки, обеспечивающие функционирование будущей системы. То есть не только модель должна приспосабливаться к среде, но и среду необходимо приспосабливать к будущей системе.

<u>Второе требование</u> – *простота модели*. Простота модели – ее неизбежное свойство: в модели невозможно зафиксировать все многообразие реальных ситуаций. Простота прагматической модели неизбежна из-за необходимости оперирования с ней, использования ее как рабочего инструмента, который должен быть обозрим и понятен, доступен каждому, кто будет участвовать в реализации модели.

Существует еще один, довольно интересный и непонятный пока аспект требования простоты модели, который заключается в том, что чем проще модель, тем она ближе к моделируемой реальности и тем удобнее для использования. Классический пример – геоцентрическая модель Птолемея и гелиоцентрическая модель Коперника. Обе модели позволяют с достаточной точностью вычислять движение планет, предсказывать затмения солнца и т.п. Но модель Коперника истинна и намного проще для использования, чем модель Птолемея. Ведь недаром древние подметили, что простота – печать истины. У физиков, математиков есть довольно интересный критерий оценки решения задач: если уравнение и/или его решение простое и «красивое» – то оно, скорее всего, истинно.

Можно привести и такой пример. В книге нобелевского лауреата Г. Саймона [51] рассматривается следующая ситуация. Предположим, что мы наблюдаем за тем, как муравей движется по песку из одной точки в другую. Целью муравья может быть стремление минимизировать затраты своей энергии, поэтому он огибает горки песка. Его «целевая функция» характеризует зависимость затрат энергии, которые он хочет минимизировать, от рельефа (внешней среды), и от его траектории (действия). Пусть мы наблюдаем только проекцию на горизонтальную плоскость траектории муравья. Если рельеф, по которому двигался муравей, неизвестен, то объяснить поведение муравья (сложную, петляющую траекторию) довольно непросто, и придется строить весьма хитроумные модели. Но если «угадать», что цель муравья проста, и включить в модель «рельеф», то все существенно упростится. По аналогии Г. Саймон выдвигает гипотезу, что наблюдаемое разнообразие и сложность поведения людей объясняются не сложностью принципов принятия ими решений (выбора действий), которые сами по себе просты, а разнообразием ситуаций (состояний внешней среды), в которых принимаются решения. С этим мнением вполне можно согласиться. Вопрос только в том, как найти эти простые принципы? В этой связи можно высказать (фантастическую) гипотезу об эволюции законов природы, в результате которой «отбираются» наиболее эффективные из них (т.е. имеющие наиболее простой вид при заданной функциональности).

Однако, такая «сложная» простота модели, сохраняющая ее познавательную ценность, достигается лишь на базе развитой методологии моделирования, высокой квалификации и искусности исследователя.

Наконец, третье требование, предъявляемое к модели – ее *адекватность*. Адекватность модели означает возможность с ее помощью достичь поставленной цели моделирования в соответствии со сформулированными критериями (см. также Рис. 1.2 и обсуждение проблем адекватности математических моделей ниже). Адекватность модели означает, в частности, что она достаточно полна, точна и устойчива. Достаточно не вообще, а именно в той мере, которая позволяет достичь поставленной цели. Иногда удается (и это желательно) ввести некоторую меру адекватности модели, то есть определить способ сравнения разных моделей по степени успешности достижения цели с их помощью.

Методы (виды) **моделирования** систем классифицируются по целому ряду оснований [36]. Среди них можно, например, выделить

– методы качественные и количественные;

– методы, использующие средства естественного языка, и методы, использующие специальные языки;

– методы содержательные и формальные.

Все эти (как и другие, не указанные здесь) классификации не точны, поскольку большое число методов обладают признаками нескольких классов.

Существует множество более детальных классификаций моделей и/или видов моделирования. Например, на Рис. 1.1 приведена система классификаций видов моделирования, заимствованная из [54].

Рис. 1.1. Система классификаций видов моделирования

Еще одним основанием классификации моделей является их разделение на «жесткие» и «мягкие». Эти термины обозначают одновременно и виды (методологии) моделирования, и виды (методологии) системного анализа.

«Жесткая» методология допускает единственную интерпретацию объективной системной сущности и эффективна при моделировании технических систем, технологических подсистем и отдельных аспектов функционирования организаций. «Мягкая» – допускает множественность интерпретаций действительности, в которой индивиды и группы, имеющие собственные цели, действуют в значительной мере самостоятельно. В частности, согласно методологии «мягкого» моделирования более или менее полная модель организаций или активных систем (human activity system) является совокупностью явных и неявных моделей *лиц, принимающих решения* (ЛПР) по ее управлению, т.е. содержит неустранимую субъективность.

1.3.2. Качественные методы моделирования

Рассмотрим качественные методы моделирования на примере некоторых из моделей функционирования организаций, в большом числе представленных комплексом научных дисциплин, образующих в совокупности теорию *менеджмента*. Как известно, основной задачей менеджмента является поиск наиболее эффективных методов управления организациями, основным научным методом – качественный анализ и обобщение опыта функционирования организаций, результатом исследований – качественные модели функционирования организаций, включающие в себя, в том числе, анализ их эффективности.

Именно содержательные, т.е. построенные на базе богатого эмпирического материала, его глубокого анализа и широкого обобщения, модели менеджмента служат главным источником математических моделей функционирования организаций. На их основе конструируются целевые функции, множества допустимых состояний, структур, механизмы управления, правила взаимодействия с внешней средой и т.п. Они же являются первичной основой проверки адекватности математических моделей: результаты количественного моделирования должны соответствовать результатам качественного моделирования, послужившим им источником.

Отечественная традиция менеджмента, восходящая к политэкономии социализма и поэтому характеризуемая в значительной степени «жесткой» методологией, ориентирована в основном на нормативную функцию моделирования. При этом базовые модели и полученные при их анализе выводы-рекомендации, как правило, считаются универсальными практически вне зависимости от конкретных условий функционирования организаций.

Западная же традиция менеджмента, в большей степени тяготеющая к частному опыту и исповедующая «мягкую» методологию, в большей степени ориентирована на создание методов анализа и решения проблем. Одним из результатов применения таких методов являются глубоко содержательные модели организаций достаточно высокого уровня сложности. В качестве примера остановимся на модели жизненного цикла организации И. Адизеса [2] и модели организационной структуры К. Минцберга [32] (в главе 4 приводится математическая модель организационной структуры, соответствующая качественной модели К. Минцберга). Более подробно с качественными методами моделирования можно ознакомиться в работах [14, 36, 45].

Модель жизненного цикла организации И. Адизеса. Целью исследования автора является разработка методов преодоления организациями неизбежных кризисов развития для наиболее полной реализации своей «жизненной судьбы». В основе модели организации И. Адизеса лежит представление об организации как о живой системе, структура жизненного цикла которой представляет собой череду метастабильных состояний и кризисов.

Адизес разделяет жизненный цикл организации на десять фаз, совокупность которых составляет ее потенциальную судьбу. Каждая фаза, являющаяся закономерным этапом развития (с характерными для нее структурой, функциями, процессами, целями, механизмами управления и т.п.), представляет собой миниатюрный жизненный цикл с периодами роста, зрелости и увядания. Переход к каждой последующей фазе происходит через успешное преодоление кризиса (столкновения отживающих старых и набирающих силу новых структур и процессов), сопровождаемого неустойчивостью и конфликтами. Адизес выделяет естественные и патологические проблемы роста: наличие первых нормально и свидетельствует о нормальном развитии, тогда как наличие вторых приводит к опасности входа в период стагнации или «тупик развития», с потенциальной возможностью как последующего «форсированного» развития, так и деградации.

Различные части организации переживают собственные жизненные циклы, поэтому жизненная фаза организации в целом определяется большей частью ее поведенческих признаков. Во время стресса организация возвращается на предыдущую стадию, во время успеха – демонстрирует признаки следующей стадии.

Цель развития организации, по Адизесу, состоит в достижении и длительном проживании фазы зрелости с максимальным раскрытием своего потенциала в реализации миссии.

Существенной особенностью модели Адизеса является представление о второй половине жизненного цикла (с характерными для нее структурами, функциями, процессами, целями, механизмами управления и т.п.) как о закономерном и неизбежном периоде жизни организации.

Описав организацию как управляемую целенаправленную динамическую эволюционирующую систему, Адизес переходит к задаче управления: привести организацию на стадию зрелости и удержать её там как можно дольше, а для этого – постоянно предотвращать и лечить патологические проблемы. В поиске решения этой задачи Адизес снова акцентирует внимание на организации как объекте управления, однако теперь он переходит от ее эмпирического макроописания к более подробному аналитическому, выявляя динамику факторов ее развития – фактора (Ц)ели, фактора продуктивности или (Р)уководства, фактора (П)рогнозирования (или (П)предвидения или (П)редпринимательства) и, наконец, фактора (И)нтеграции, и предлагая соответствующие механизмы управления – см. Табл 1.1.

Табл 1.1. Фазы жизненного цикла организации (*по И. Адизесу*)

№	**Фаза**	**Цель**	**Характерные поведенческие модели**	**Опасности, приводящие к патологии развития**
1	Ухаживание (црПи)	Формирование преданности миссии	Мотивация – удовлетворение потребностей рынка. Ориентация на продукт.	Недостаток преданности идее, ранняя ориентация на прибыль.
2	Младенчество (ЦрПи)	Наличность	Ориентация на действие, мало систем, правил, неравномерное качество работы; уязвимость, кризисное управление; мало делегирования полномочий.	Недостаток оборотного капитала. Утеря преданности основателя.

№	Фаза	Цель	Характерные поведенческие модели	Опасности, приводящие к патологии развития
3	Детство (ЦрПи)	Рост оборота и захват рынка	Компания организована вокруг людей, а не вокруг задач. Недостаток преемственности и сосредоточенности. Кризис как результат управления.	Преждевременная децентрализация.
4	Отрочество (цРПи)	Прибыль	Конфликт между администраторами и предпринимателями. Временная потеря видения. Политику разрабатывают, но ее не придерживаются.	Быстрое снижение взаимного доверия и уважения. Уход основателя и предпринимателей.
5	Зрелость (ЦРПи)	Прибыль и оборот	Развитые функциональная и организационная структуры. Институционализированное видение и креативность. Рост объемов продаж и прибыльности. Ориентация на результат.	Самодовольство.
6	Стабилизация (ЦРпи)	Сохранение Status Quo	Организация фокусируется на достижениях прошлого, недоверчива к переменам, вознаграждает послушных, меньше рискует.	
7	Аристократизм (цРпИ)	Прибыльность инвестиций	Системы контроля. Избегание конфликтов. Низкий уровень новаторства. Покупка других компаний.	

№	Фаза	Цель	Характерные поведенческие модели	Опасности, приводящие к патологии развития
8	Ранняя бюрократизация (цР-и)	Собственное выживание	Паранойя, охота на ведьм. Много конфликтов, и междоусобиц. Клиенты являются досадной неприятностью.	
9	Бюрократизация (-Р--)	Политические цели	Неэффективность оргструктур. Оторванность от внешней среды. Недостаток чувства контроля.	
10	Гибель			

Адизес объясняет движение организации по кривой жизненного цикла характером внутреннего взаимодействия факторов, определяемым организационной структурой и повседневной деятельностью менеджмента. Если все четыре фактора развиваются в необходимой и индивидуальной для каждой фазы степени и последовательности, то организация работает эффективно, продуктивно, прогрессивно на протяжении как короткого, так и длительного промежутка времени. Автор выявляет доминирующую или вспомогательную роль каждого из факторов на всех фазах жизненного цикла, т.е. дает своеобразный факторный код жизненного цикла организации, отклонение от которого чревато патологией развития (см. Табл. 1.1).

В поисках механизмов управления факторами развития, автор раскладывает последние на составляющие: человеческие, организационные, институциональные и, таким образом, переходит на следующий микроуровень описания. Развивая в себе и организации соответствующие качества и стили поведения, менеджеры создают разнообразную среду, из которой путем естественного отбора на соответствующих фазах жизненного цикла и формируется необходимый факторный код организации. При этом исходя из цели организации (достижение и удержание фазы зрелости) на восходящей и нисходящей ветвях жизненного цикла наиболее эффективными оказываются стили, реализующие соответственно «опережающий» и «отстающий» факторные коды.

Модель организационной структуры К. Минцберга. Целью исследования К. Минцберга [32], является классификация и анализ эффективности организационных структур в зависимости от ряда внутренних и внешних условий.

Автор выделяет пять основных частей организации: стратегическая вершина, средняя линия, операционное ядро, техноструктура, вспомогательный персонал. Он отмечает существование в организации множества типов структур, называемых им организационными потоками или сущностями: поток властных полномочий, поток регулируемой системы, поток неформальных коммуникаций, рабочие созвездия, поток принятия решений.

Для их систематизации Минцберг дает моделеобразующее базовое определение *организационной структуры* как совокупности способов, посредствам которых процесс труда сначала расчленяется на отдельные рабочие задачи, а затем достигается координация действий по решению этих задач.

Минцберг выделяет пять основных способов координации: два «органических» (взаимное согласование, прямой контроль) и три «бюрократических» (стандарты процесса, квалификации и результата), которые определяют тип организационной структуры: соответственно, два «органических» (адхократический, простая структура) и три «бюрократических», основанных на стандартах (механистическая или профессиональная бюрократия, дивизиональная структура) и множество ее гибридных форм. При этом упомянутые выше основные части организации «тяготеют» к «своим» типам структур, различным внутри и вне этих частей.

Взаимное согласование используется в небольшой группе на начальном этапе развития организации. По мере ее роста взаимное согласование заменяется *прямым контролем* (руководителя). При этом эффективность управления растет, т.к. все решения принимаются единолично. При дальнейшем росте организации эффективность обеспечивается путем *стандартизации рабочих процессов* или программированием содержания труда. Если труд происходит в изменяющейся среде, то программирование процесса может быть неэффективным, и тогда для координации самостоятельных структурных подразделений (дивизионов) используется *стандарт результата*. Высокая эффективность более сложного и нестандартного труда (образование, здравоохранение, наука, культура) достигается при высокой самостоятельности квалифицированных исполнителей и использовании в качестве механизма координации *стандарта квалификации*. Тип наиболее эффективной организационной структуры помимо сложности труда определяют, согласно Минцбергу, и другие, выраженные в оцениваемых параметрах, свойства труда – инновационность, автоматизация, а также ряд ситуационных параметров (возраст и размер организации) и параметров внешней среды (стабильность, разнообразие, неравновесность, враждебность и др.).

Вид организационной структуры связан с рядом ее свойств, называемых Минцбергом параметрами организационного дизайна: горизонтальная и вертикальная специализация индивидуального труда, принцип группирования в организационные единицы (функциональный или рыночный) и их размер, виды инструментов взаимодействий или накладываемых на иерархию горизонтальных связей (связующие должностные позиции, рабочие совещания, постоянные комиссии, менеджеры-интеграторы), обучение и индоктринация (овладение организационной культурой) персонала и др.

Вид базовой организационной структуры, в свою очередь, во многом определяет организацию управления: степень и виды децентрализации (горизонтальная и вертикальная, параллельная и селективная), механизмы планирования и контроля и т.п.

С изменением возраста, размера организации, ее внутренних и внешних параметров тип наиболее эффективной организационной структуры также меняется. Так, например, профессиональная бюрократия во враждебной среде превращается в простую профессиональную бюрократию, дивизиональная форма с ростом сложности и динамизма внешней среды, взаимозависимости подразделений переходит к дивизиональной адхократии и т.п. Объективные изменения характеристик общественного труда также меняют доминирующий в обществе тип организационной структуры.

Табл. 1.2 иллюстрирует основные результаты описываемой модели.

Табл 1.2. Организационные структуры (по К. Минцбергу)

	Простая структура	***Механистическая бюрократия***	***Профессиональная бюрократия***	***Дивизиональная форма***	***Адхократия***
Основной координационный механизм	Прямой контроль	Стандартизация труда	Стандартизация квалификации	Стандартизация выпуска	Взаимное согласование
Ключевая часть организации	Стратегическая вершина	Техноструктура	Операционное ядро	Срединная линия	Вспомогательный персонал
Параметры дизайна					
Специализация рабочих заданий	Незначительная	Значительная горизонтальная и вертикальная специализация	Значительная горизонтальная специализация	Некоторая гориз. и вертикальная специализация (между подразд. и штаб-квартирой)	Значительная горизонтальная специализация
Обучение и индоктринация	Незначительные	Незначительные	Значительные	Средние	Значительное обучение
Формализация поведения, бюрократическое/органическое	Незначительная формализация, органическое	Значительная формализация, бюрократическое	Незначительная формализация, бюрократическое	Значительная формализация (внутри доднразд.), бюрократическое	Незначительная формализация, органическое
Группирование	Обычно функциональное	Обычно функциональное	Функциональное и рыночное	Рыночное	Функциональное и рыночное

	Простая структура	***Механистическая бюрократия***	***Профессиональная бюрократия***	***Дивизиональная форма***	***Адхократия***
Размеры организационных единиц	Крупные	Крупные внизу	Крупные внизу	Крупные наверху	Все небольшие
Системы планирования и контроля	Значительные	Планирование действий	Незначительные	Значительный контроль над исполнением	Ограниченное планирование действий
Инструменты взаимодействий	Незначительные	Незначительные	В администрации	Незначительные	Значительные
Децентрализация	Централизация	Ограниченная горизонтальная	Горизонтальная и вертикальная	Ограниченная вертикальная	Избирательная

Функционирование:

Стратегическая вершина	Вся административная деятельность	Регулирование, координация функций, разрешение конфликтов	Внешние связи, разрешение конфликтов	Стратегический портфель, контроль над результатами	Внешние связи, разрешение конфликтов, баланс нагрузки, мониторинг проектов
Операционное ядро	Неформальный труд, незначительная свобода действий	Однообразный, формализованный труд, незначительная свобода действий	Квалифицированный, стандартизированный труд, значительная индивидуальная автономия	Тенденция к формализации в силу дивизионализации	Труд в неформальных проектных группах

	Простая структура	***Механистическая бюрократия***	***Профессиональная бюрократия***	***Дивизиональная форма***	***Адхократия***
Срединная линия	Незначительная	Развитая и дифференцированная; разрешение конфликтов, связь с персоналом, поддержка вертикальных потоков	Контролируемая профессионалами; значительное взаимосогласование	Формализация стратегий подразделений, управление операциями	Значительная, но смешанная со вспомогательным персоналом; участвует в проектной деятельности
Техноструктура	Отсутствует	Развита для формализации труда	Незначительная	Развита в штаб-квартире для контроля над результатами	Небольшая и размытая в проектной деятельности
Вспомогательный персонал	Незначительный	Обычно развитый, что позволяет добиться снижения неопределенности	Развитый для поддержки профессионалов; структура механистической бюрократии	Разделен между штаб- квартирой и подразделениями	Сильно развит (особ, в адм. адх.), но размыт средним звеном и проектной деятельности
Поток властных полномочий	Значительный сверху	Значительный везде	Незначительный (за исключением вспомогательного	Значительный везде	Незначительный

	Простая структура	***Механистическая бюрократия***	***Профессиональная бюрократия***	***Дивизиональная форма***	***Адхократия***
			персонала)		
Поток регулируемой системы	Незначительный	Значительный везде	Незначительный (кроме вспом. персонала)	Значительный везде	Незначительный
Поток неформальных коммуникаций	Значительный	Не поощряется	Значительный в администрации	Некоторый между штаб-квартирой и подразделениями	Значительный везде
Рабочие созвездия	Отсутствуют	Незначительные, особ. на нижних уровнях	Некоторые в администрации	Незначительные	Значительные везде (особ, в адм. адх.)
Поток принятия решений	Сверху вниз	Сверху вниз	Снизу вверх	Дифференцированный между штаб-кварт, и подразделениями	Смешанный, на всех уровнях

Ситуационные факторы:

Возраст и размер	Обычно молодая и небольшая (первая стадия)	Обычно давно существующая и крупная (вторая стадия)	Разные	Обычно давно существующая и очень крупная (третья стадия)	Обычно молодая (операц. адх.)

	Простая структура	***Механистическая бюрократия***	***Профессиональная бюрократия***	***Дивизиональная форма***	***Адхократия***
Техническая система	Простая, но регулируемая	Регулируемая, но не автоматическая, не развитая	Не регулируемая и не развитая	Делимая или такая как в мех. бюр.	Очень развитая, часто автоматизированная (в адм. адх.); нерегулируемая и неразвитая (в операц. адх.)
Внешняя среда	Простая и динамичная; иногда враждебная	Простая и стабильная	Сложная и стабильная	Относительно простая и стабильная; разнообразные рынки (особ, товарные и рынки услуг)	Сложная и динамичная; иногда неравновесная
Власть	Контроль со стороны рук.; часто управляется владельцем; не модная	Технократический и иногда внешний контроль: не модная	Контроль профессиональных операторов; модная	Контроль срединной линии; модная (особ, в промышленности)	Контроль специалистов: очень модная

1.3.3. Количественные методы моделирования (математическое моделирование)

Для исследования характеристик процесса функционирования любой системы математическими методами, включая и *компьютерное моделирование*, должна быть проведена формализация этого процесса, то есть построена математическая модель.

Под *математическим моделированием* будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого *математической моделью*, и исследование этой модели, позволяющее устанавливать ее свойства, характеризующие, в конечном счете, свойства моделируемого объекта.

Вид математической модели зависит от природы реального объекта, задач исследования, требуемой достоверности и точности решения этих задач, наконец, от вкуса и квалификации исследователя. Любая математическая модель описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности.

Более или менее развитый теоретический аппарат математического моделирования (т.е., позволяющий описывать бóльшую часть практически значимой действительности) существует сегодня только для нескольких низших (физических или технических) уровней сложности системного описания (см. раздел 1.3.1). Математические модели являются в настоящее время неотъемлемой частью традиционного исследовательского аппарата только в естественных науках. Базой моделей более сложных уровней служат менее формализованные науки о биологических и социально-экономических системах. Элементы теоретической базы математических моделей высших уровней сложности сегодня существуют в виде специфических составных математических объектов – *«базовых моделей»*, т.е. максимально упрощенных моделей фундаментальных системных свойств, позволяющих создавать на их базе более сложные частные модели реальных систем.

Формальность языка математического моделирования, казалось бы, заставляет отнести его методологию к разряду «жестких», однако более глубокий взгляд позволяет увидеть несколько видов «мягкости» математических моделей. «Мягкость» математического моделирования достигается, во-первых, множественностью моделей одной и той же системы, разных уровней сложности, отвечающих различным задачам исследования, во-вторых, – свойством «грубости» или устойчивости модели, сохраняющим ее основные свойства в относительно широком диапазоне параметров, в-третьих – специальным теоретико-игровым аппаратом, допускающим в рамках теории управления организационными системами [38] множественность целей и стратегий поведения членов групп и организаций.

Можно выделить следующие **этапы построения математической модели** (см. Рис. 1.2).

1. Определение предмета и цели моделирования, включая границы исследуемой системы и те основные свойства, которые должны быть отражены.

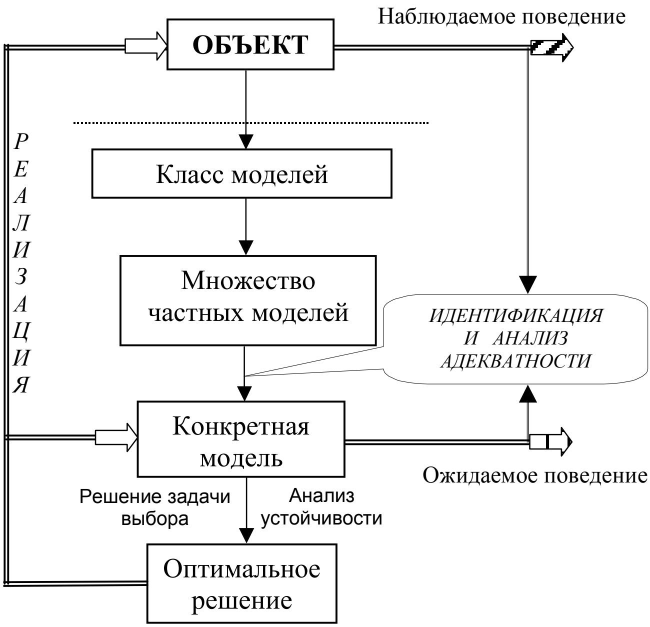


Рис. 1.2. Этапы построения и исследования математической модели

На этом этапе определяется предельный уровень сложности модели и во многом предопределяются результаты следующих этапов.

2. Выбор языка (аппарата) моделирования. Существует несколько сотен «аппаратов» моделирования, каждый из которых представляет собой разветвленный раздел прикладной математики. На сегодняшний день нет общепризнанной классификации аппаратов математического моделирования – один и тот же аппарат используется в различных типах моделей, при различных методах и задачах исследований. Так, например, аппарат теории вероятностей используется в оптимизационных, динамических, теоретико-игровых моделях. С другой стороны, указанные типы моделей изучаются с помощью множества других аппаратов.

Зачастую используемый исследователем аппарат определяется его субъективными качествами – квалификацией, опытом, предпочтением и пр. Следует отметить, однако, что использование того или иного аппарата в конкретной модели должно быть взаимно согласовано с его основными аксиомами и базовыми предположениями модели.

3. Выбор переменных, описывающих состояние системы и существенные параметры внешней среды, а также шкал их измерения и критериев оценки.

Отметим, что при построении моделей сложных систем часто приходится использовать иерархические наборы переменных, то есть использовать *агрегирование информации*. Агрегирование (сжатие) информации объективно присуще, в частности, организационным иерархиям[1] [37].

4. Выбор ограничений, то есть множеств возможных значений переменных и параметров, и (в динамических моделях) начальных условий.

5. Определение связей между переменными с учетом всей имеющейся информации о моделируемой системе, а также известных законов, закономерностей и т.п., описывающих данную систе-

---

[1] *Так, например, руководителю крупной организации вовсе не обязательно знать, чем в каждый момент времени занят каждый из сотрудников этой организации; руководителю необходимо иметь общее представление о текущих результатах деятельности более или менее крупных подразделений.*

му. Именно этот этап иногда называют «построение модели» (в узком смысле).

Относительно пунктов 4 и 5 отметим, что, вообще говоря, существует нетривиальная зависимость связей и ограничений от внешних условий, состояния системы, временно́го интервала ее изучения, отражаемая, в частности, в таких специальных терминах как «заморозка» и «разморозка» связей. В качестве примеров приведем динамические модели с несколькими временными масштабами (описываемые, например, сингулярно-возмущенными дифференциальными уравнениями), «замораживающие» часть связей в предельных переходах, эффект «резонанса» – рост интенсивности межуровневого и горизонтального взаимодействия и, наконец, использование «жестких» механизмов управления в критические периоды жизни организаций.

6. Исследование модели – решение прямой и обратной задач моделирования. Именно этот этап иногда называют «моделированием» (в узком смысле). Тех читателей, которые заинтересуются современными способами формализованного представления моделей, мы отсылаем к достаточно полным их описаниям, выполненным для ряда предметных областей в [10, 13, 14, 16, 18, 20, 29, 37, 41, 43, 45, 47, 49].

7. Изучение устойчивости и адекватности модели (см. разделы 1.4 и 1.5).

Последующие этапы, связанные с практической реализацией модели и/или внедрением результатов моделирования, мы здесь не рассматриваем.

Приведенные этапы математического моделирования иногда приходится повторять, возвращаясь к более ранним этапам при уточнении цели моделирования, обеспечении точности, устойчивости, адекватности и т.д.

1.4. Устойчивость и оптимизация

Как уже отмечалось, важным свойством или требованием, предъявляемым к моделям, является требование их устойчивости. Можно различить несколько аспектов понятия «**устойчивость**».

Устойчивость модели по отношению к изменениям ее параметров означает сохранение аппарата моделирования, основных связей между переменными, типов ограничений в некотором интервале ее параметров. Однако это требование является безусловным лишь в отношении прагматических моделей. Неустойчивость (жесткость) познавательных моделей может быть следствием исследовательского аппарата или объективных свойств изучаемых систем. Жесткость демонстрируют, в частности, модели консервативных динамических систем. Высокоразвитый математический аппарат, позволяющий исследовать весьма тонкие свойства консервативных моделей, стимулирует его широкое использование при изучении реальных систем, всегда в той или иной степени обладающих диссипацией.

Другим аспектом устойчивости является *устойчивость решения задачи* (*результатов*) *моделирования* (обнаруженных свойств, сценариев, траекторий, состояний) по отношению к изменениям параметров модели или начальных условий. Если зависимость от параметров и начальных условий является *регулярной,* то малые ошибки в исходных данных приведут к небольшим изменениям результата. Тогда, решая, например, задачу выбора по приближенным данным, можно обоснованно говорить о нахождении приближенного решения.

Иногда устойчивость является целью практического моделирования. В частности – поиск алгоритмов деятельности человека без разрушения природной экосистемы.

С другой стороны, как отмечено выше, неустойчивость модели или результатов моделирования может быть проявлением объективных системных свойств (качественных изменений, скачков развития). Так, решения, полученные в рамках дискретных моделей, как правило, оказываются неустойчивыми (что часто является не признаком неадекватности модели, а отражением реально существующего разнообразия), традиционный метод исследования сингулярно-возмущенных систем – предельный переход, приводящий к скачкообразному уменьшению системной размерности – является моделированием упомянутого выше свойства «замораживания» системных связей.

Традиционным свойством моделей сложных нелинейных динамических систем является наличие в пространстве параметров точек *бифуркации* (раздвоения), в которых одна траектория теряет устойчивость, и в ее окрестности появляется другая. Термин «бифуркация» в последние годы широко используется, в социологии и политологии, обозначая потерю устойчивости, многовариантность и непредсказуемость ближайшего будущего.

Отражаемые в моделях свойства устойчивости и неустойчивости больших открытых иерархических, и в частности, организационных систем бывают взаимообусловленными на разных иерархических уровнях: неустойчивость подсистем может служить необходимым условием устойчивости системы в целом и, наоборот, их чрезмерно высокая степень устойчивости может привести к неустойчивости всей системы [40]. В целом, мера устойчивости объективно убывает с уменьшением иерархического уровня подсистем. Одной из причин этого является свойственная всем системам концентрация ресурса на высших иерархических уровнях.

Такое же замечание можно сделать и в отношении разных типов системных связей: высокая устойчивость одних типов связей может индуцировать такую же неустойчивость связей других типов (примером могут служить частые структурные изменения в организациях с высоким уровнем институциональных ограничений).

Проблемам устойчивости математических моделей систем посвящена довольно обширная литература (см., например, [17, 35, 43, 45 и др.]).

Оптимизация заключается в том, чтобы среди множества объектов (возможных решений, сценариев, вариантов проектируемой системы) найти наилучшие в заданных условиях, при заданных ограничениях, то есть оптимальные альтернативы.

В этой фразе значение имеет каждое слово. Говоря «наилучшие», мы предполагаем, что у нас имеется критерий (или ряд критериев), способ (способы) сравнения вариантов. При этом важно учесть имеющиеся условия, ограничения, так как их изменение может привести к тому, что при одном и том же критерии (критериях) наилучшими окажутся другие варианты.

Понятие оптимальности получило строгое и точное представление в различных математических теориях, прочно вошло в практику проектирования и эксплуатации технических систем, сыграло важную роль в формировании современных системных представлений, широко используется в административной и общественной практике, стало понятием, известным практически каждому человеку. Это и понятно: стремление к повышению эффективности труда, любой целенаправленной деятельности как бы нашло свое выражение, свою ясную и понятную форму в идее оптимизации.

В математическом смысле суть *оптимизации*, вкратце, заключается в следующем. Пусть состояние моделируемой системы определяется совокупностью *показателей*: $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, принимающих числовые значения. На *множество возможных состояний* системы наложено *ограничение*: $x \in X$, где множество X определяется существующими физическими, технологическими, логическими, ресурсными и другими ограничениями. Далее вводится функция $F(x)$, зависящая от $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, которая называется *критерием эффективности* и принимает числовое значение. Считается, что чем бо́льшие значения принимает функция $F(x)$, тем выше эффективность, то есть, тем «лучше» состояние x системы.

Задача оптимизации заключается в нахождении *оптимального* состояния x^*, то есть допустимого состояния системы ($x \in X$), имеющего максимальную эффективность: для всех x из множества X выполняется $F(x^*) \geq F(x)$.

Приведем пример простейшей задачи оптимизации. Пусть имеется R единиц ресурса и n инвестиционных проектов. Каждый проект характеризуется отдачей $\alpha_i > 0$ на единицу вложенных средств. Величина $x_i \geq 0$ описывает, какое количество ресурса инвестируется в i-ый проект. Множеством X в данном примере будет множество таких векторов инвестиций, сумма компонентов которых не превосходит бюджетного ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \leq R$, то есть допустимы любые комбинации инвестиций, удовлетворяющих ограничению на первоначальное количество ресурса. Критерием эффективности естественно считать суммарную отдачу от инвестиций: $F(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 +... + \alpha_n x_n$. Оптимальным в данном примере будет вложение всех средств в тот инвестиционный проект, который характеризуется максимальной отдачей на единицу вложенных средств (с максимальным значением α_i).

Такой вывод вполне соответствует здравому смыслу, и для его получения вряд ли стоило формулировать математическую задачу оптимизации. Однако, если усложнить модель (например, учесть риск или тот факт, что проекты могут требовать фиксированных инвестиций и давать фиксированную отдачу, и т.п.), то задача станет не столь тривиальной и без оптимизационных моделей нельзя будет обойтись (см. примеры в [10, 13]). Например, пусть имеются 100 единиц ресурса и два проекта. У первого проекта отдача на единицу вложенных средств равна 1,8, у второго – 1,4. Вероятность успешного завершения первого проекта равна 0,85, второго – 0,95. Требуется распределить инвестиции между проектами так, чтобы ожидаемый доход был максимален: $1{,}8 \cdot 0{,}85 \cdot x_1 + 1{,}4 \cdot 0{,}95 \cdot x_2 \to \max$, при условии, что расходуется количество ресурса, не большее имеющегося: $x_1 + x_2 \le 100$, и ожидаемые потери не должны превышать 9 % от имеющегося ресурса: $(1 - 0{,}85) \cdot x_1 + (1 - 0{,}95) \cdot x_2 \le 9$. Данная оптимизационная задача (являющаяся задачей линейного программирования [48]) имеет следующее решение: $x_1^* = 40$, $x_2^* = 60$. Значение критерия эффективности при этом равно 141.

Отметим, что при постановке и решении оптимизационных задач существенное значение имеет выбор критерия эффективности и ограничений. Так, если в рассмотренном выше примере в ограничении на ожидаемые потери заменить 9 % на 11 %, то оптимальным будет совсем другое решение: $x_1^* = 60$, $x_2^* = 40$. Другим (равным 145) станет и значение критерия эффективности.

Мы привели простейший пример задачи оптимизации.

Согласно современной научной парадигме оптимизация лежит в фундаменте эволюционных механизмов и поэтому свойственна как познавательным, так и прагматическим моделям. В терминах оптимальности формулируется большое число фундаментальных законов природы и общества. Среди них – лежащие в основе механики вариационные принципы: например – принцип наименьшего действия Мопертюи-Лагранжа, говорящий о том, что реальное движение механических систем доставляет минимум функции действия, и его частные случаи – принцип Якоби, выделяющий отвечающие реальным движениям кратчайшие траектории в конфигурационном пространстве (геодезические), и принцип Ферма, гласящий, что форма лучей света (траекторий) в оптически неоднородной среде должна быть такой, чтобы время его распространения было наименьшим. На языке оптимизации естественно формулируется любая целенаправленная деятельность (минимизация отклонения от цели при заданных ограничениях) и соответствующие ей модели управления. Отметим здесь же широко известный принцип максимизации полезности, лежащий в основе экономической теории потребления и теории игр.

Поэтому оптимизацию можно считать как задачей моделирования, так и ее этапом (в моделях целенаправленных и эволюционирующих систем).

В прагматических моделях оптимизация сводится, в основном, к сокращению числа альтернатив. Если специально стремиться к тому, чтобы на начальной стадии было получено как можно больше альтернатив, то для некоторых задач их количество может достичь очень большого числа. Очевидно, что подробное изучение каждой из них приведет к неприемлемым затратам времени и средств. На этапе неформализованной оптимизации рекомендуется проводить «грубое отсеивание» альтернатив, проверяя их на присутствие некоторых качеств, желательных для любой приемлемой альтернативы. К признакам «хороших» альтернатив относятся надежность, многоцелевая пригодность, адаптивность, другие признаки «практичности». В отсеве могут помочь также обнаружение отрицательных побочных эффектов, недостижение контрольных уровней по неучтенным в математической модели важным показателям и пр. Предварительный отсев не рекомендуется проводить слишком жестко; для детального анализа и дальнейшего выбора необходимы хотя бы несколько альтернативных вариантов.

Иногда оптимизация приводит к неустойчивости. Неустойчивость всегда присутствует в моделях, использующих аппарат линейного программирования: линейная целевая функция всегда достигает экстремума на границе симплекса, а значит, оптимальное решение может стать недопустимым при малом изменении ситуации (например, минимизация затрат может привести к срыву плана выпуска продукции при малом увеличении расходов). Кроме того, модели, использующие аппарат линейного программирования, являются жесткими (оптимальное решение может сильно меняться при малом изменении коэффициентов целевой функции), однако развитость теоретического и алгоритмического аппаратов стимулирует их широкое использование в качестве «первого приближения».

Для сохранения устойчивости решения свойство оптимальности обычно ослабляют до субоптимальности.

С другой стороны, неустойчивость оптимальных состояний может быть модельным отражением объективных системных закономерностей, что имеет место, например, в моделях развития.

Действительно, оптимальность системной структуры как результат конкурентного отбора, приводит ее к границе, за которой начинается деградация – потеря части или всей совокупности реализуемых функций. Выход за границу в условиях активного взаимодействия с изменяющейся внешней средой фактически неизбежен. Восстановление структурной устойчивости уже не может быть достигнуто путем конкурентного отбора вследствие утери в его процессе структурного разнообразия. Альтернативой является возведение «барьера» на границе старой структуры путем увеличения ее размерности – созданием новой структуры и соответствующей функциональности (например, информационной, управленческой и др.).

Результатом этого многовиткового процесса является рост структурной размерности, сопровождаемый упрощением разнообразия каждой из структур. Появляется иерархическая сверхструктура, элементами которой являются старые теперь уже «элементарные» структуры. Таким образом, потеря устойчивости оптимальной структуры приводит, в конечном счете, к росту ее размерности, при этом сложность моноструктурного разнообразия заменяется сложностью полиструктуры.

Читателей, заинтересованных в изучении теории оптимизации, отсылаем к [10, 13, 16, 18, 45, 48, 49] и спискам литературы в этих источниках.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий приведенные в предыдущем разделе семь этапов построения математической модели: так называемую дуополию Курно, описывающую конкуренцию двух экономических агентов.

1. Предметом моделирования является взаимодействие двух агентов – производителей одного и того же товара, – каждый из которых выбирает свой объем производства (предложение товара), стремясь максимизировать свою прибыль в условиях, когда рыночная цена убывает с ростом суммарного предложения. Целью моделирования является предсказание поведения агентов – объемов производства и цены.

2. В качестве «аппарата» моделирования используется теория некооперативных игр [18].

3. В качестве переменных, описывающих состояние системы, выберем неотрицательные объемы производства x_1 и x_2 соответственно первого и второго агентов и рыночную цену p.

4. Считается, что известны:

- зависимость цены: $p = 5 - (x_1 + x_2)$ от суммарного предложения $x_1 + x_2$ – чем больше предложение, тем ниже цена;
- затраты $3\ (x_1)^2$ и $5\ (x_2)^2 / 4$ соответственно первого и второго агентов – чем больше объем выпуска, тем выше затраты;

5. Прибыль каждого агента представляет собой разность между его выручкой (равной произведению цены на его объем производства) и затратами, то есть целевые функции первого и второго агентов равны соответственно

$$[5 - (x_1 + x_2)]\, x_1 - 3\ (x_1)^2$$

и

$$[5 - (x_1 + x_2)]\, x_2 - 5\ (x_2)^2 / 4.$$

6. Исследование модели заключается в нахождении объемов производства x_1^* и x_2^*, максимизирующих прибыли агентов (точнее, в нахождении так называемого равновесия Нэша – таких объемов производства, одностороннее отклонение от которых не выгодно ни одному из агентов [18]): $x_1^* = 0{,}5$, $x_2^* = 1$ и вычислении соответствующей рыночной цены, равной 3,5.

7. Данная модель устойчива (например, малые ошибки в измерении коэффициентов затрат агентов приведут к малым ошибкам в вычислении равновесной цены).

1.5. Адекватность моделей

Устойчивость результатов моделирования по отношению к изменениям реальности достигается сочетанием свойств устойчивости и адекватности модели.

Адекватность тесно связана со свойством ингерентности и означает соответствие основных предположений, научного аппарата, методов, и, как следствие, результатов моделирования с одной стороны, моделируемой реальности, с другой – близким к ней моделям, теориям, парадигмам. Это, в частности, подразумевает корректное использование научного аппарата, методов компьютерного моделирования.

Более сложной является проблема адекватности базовых основ моделей, относящаяся к методологии моделирования. Отметим в этой связи, что бесконечномерный «каркас» (1), показывающий при «погружении» в него частных моделей одновременно их познавательный потенциал и ограничения, содержит в себе потенциал создания единой систематизации моделей и дает инструмент анализа их корректности. Действительно, корректная модель некоторого уровня сложности должна «содержать в себе» в агрегированном виде модели (или результаты моделирования) предшествующих уровней (при этом степень их детализации, конечно же, зависит от целей исследования). Для того чтобы лучше понять проблему адекватности, вернемся к рассмотрению процесса построения математической модели некоторой реальной системы и проанализируем возможные *ошибки моделирования*. Первым шагом является выбор того «языка», на котором формулируется модель, то есть того математического аппарата, который будет использоваться (горизонтальная пунктирная линия на Рис. 1.2 является условной границей между реальностью и моделями).

Например, не подлежит сомнению свойство динамичности организационных систем, однако использование традиционного при исследовании динамики аппарата дифференциальных уравнений в модели отдельно взятой организации почти всегда некорректно в силу значительной роли в ее динамике субъективных нерегулярных воздействий со стороны отдельных индивидов, а также в силу существенного влияния «истории», то есть той траектории, в результате которой данная организация оказалась в текущем своем состоянии.

Следующим этапом по уровню детализации является построение множества частных моделей, при переходе к которым вводятся те или иные предположения относительно параметров модели. Возникающие здесь ошибки могут быть вызваны неправильными представлениями о свойствах элементов моделируемой системы и их взаимодействии.

После задания структуры модели посредством выбора определенных значений параметров (в том числе – числовых) происходит переход к некоторой конкретной модели, которая считается аналогом моделируемого объекта. Источник возникающих на этом этапе «ошибок измерения» очевиден, хотя он имеет достаточно сложную природу и заслуживает отдельного обсуждения.

Обсудим теперь вторую сторону адекватности модели. Для этого вернемся к Рис. 1.2. Оптимальное решение, полученное в рамках конкретной модели, является оптимальным в том смысле, что при его использовании поведение модели соответствует предъявляемым требованиям. Рассмотрим, насколько обоснованным является использование этого решения в реальной системе – моделируемом объекте.

Наблюдаемое поведение модели является с точки зрения субъекта, осуществляющего моделирование (например, полагающего, что модель адекватна), предполагаемым поведением реальной системы, которое в отсутствии ошибок моделирования будет оптимально в смысле выбранного критерия эффективности. Понятно, что в общем случае наблюдаемое поведение реальной системы и ее ожидаемое поведение могут различаться достаточно сильно. Следовательно, необходимо исследование адекватности модели, то есть – устойчивости поведения реальной системы относительно ошибок моделирования (см. Рис. 1.2).

Действительно, представим себе следующую ситуацию. Пусть построена модель и найдено оптимальное в ее рамках решение. А что будет, если параметры модели «немного» отличаются от параметров реальной системы? Получается, что задача выбора решалась «не для той» системы. Отрицать такую возможность, естественно, нельзя. Поэтому необходимо получить ответы на следующие вопросы:

- насколько оптимальное решение чувствительно к ошибкам описания модели, то есть, будут ли малые возмущения модели приводить к столь же малым изменениям оптимального решения (задача анализа устойчивости);
- будут ли решения, обладающие определенными свойствами в рамках модели (например, оптимальность, эффективность не ниже заданной и т.д.), обладать этими же свойствами и в реальной системе, и насколько широк класс реальных систем, в которых данное решение еще обладает этими свойствами (задача анализа адекватности).

Качественно, основная идея, используемая на сегодняшний день в математическом моделировании, заключается в следующем [35]. Применение оптимальных решений приводит к тому, что они, как правило, оказываются неоптимальными при малых вариациях параметров модели. Возможным путем преодоления этого недостатка является расширение множества «оптимальных» решений за счет включения в него так называемых приближенных решений (то есть, рациональных, «немного худших», чем оптимальные). Оказывается, что ослабление определения «оптимальность» позволяет, установив взаимосвязь между возможной неточностью описания модели и величиной потерь в эффективности решения, гарантировать некоторый уровень эффективности множества решений в заданном классе реальных систем, то есть расширить область применимости решений за счет использования не самых эффективных, но «хороших». Иными словами, вместо рассмотрения фиксированной модели реальной системы, необходимо исследовать семейство моделей (т.е. действовать в рамках «мягкой» методологии).

Приведенные качественные рассуждения свидетельствуют, что существует определенный дуализм между эффективностью решения и областью его применимости (областью его устойчивости и/или областью адекватности).

В качестве отступления отметим, что этот эффект характерен не только для математических моделей, но и для различных отраслей науки. С точки зрения разделения наук на *науки сильной и слабой версии* (см. [36]), эту закономерность можно сформулировать следующим образом: более «слабые» науки вводят самые минимальные ограничивающие предположения (а то и не вводят их вовсе) и получают наиболее размытые результаты, «сильные» же науки наоборот – вводят множество ограничивающих предположений, используют специфические научные языки, но и получают более четкие и сильные (и, зачастую, более обоснованные) результаты, область применения которых весьма заужена (четко ограничена введенными предположениями).

Вводимые предположения (условия) ограничивают область применимости (адекватности) следующих из них результатов. Например, в области управления социально-экономическими системами математика (исследование операций, теория игр и т.д.) дает эффективные решения, но область их применимости (адекватности) существенно ограничена теми четкими предположениями, которые вводятся при построении соответствующих моделей. С другой стороны, общественные и гуманитарные науки, также исследующие управление социально-экономическими системами, почти не вводят предположений и предлагают «универсальные рецепты» (то есть область применимости, адекватности широка), но эффективность этих «рецептов» редко отличается от здравого смысла или обобщения позитивного практического опыта. Ведь без соответствующего исследования нельзя дать никаких гарантий, что управленческое решение, оказавшееся эффективным в одной ситуации, будет столь же эффективным в другой, пусть даже очень «близкой», ситуации.

Поэтому можно условно расположить различные науки на плоскости «Обоснованность результатов» – «Область их применимости (адекватности)» и сформулировать (опять же условно, по аналогии с принципом неопределенности В. Гейзенберга) следующий «*принцип неопределенности*» [36, 57]: текущий уровень развития науки характеризуется определенными совместными ограничениями на «обоснованность» результатов и их общность – см. Рис. 1.3. Иначе говоря, условно скажем, что «произведение» областей применимости и обоснованности результатов не превосходит некоторой константы – увеличение одного «сомножителя» неизбежно приводит к уменьшению другого.

«ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ»

(*Область применимости*) x («Обоснованность») ≤ *Const*

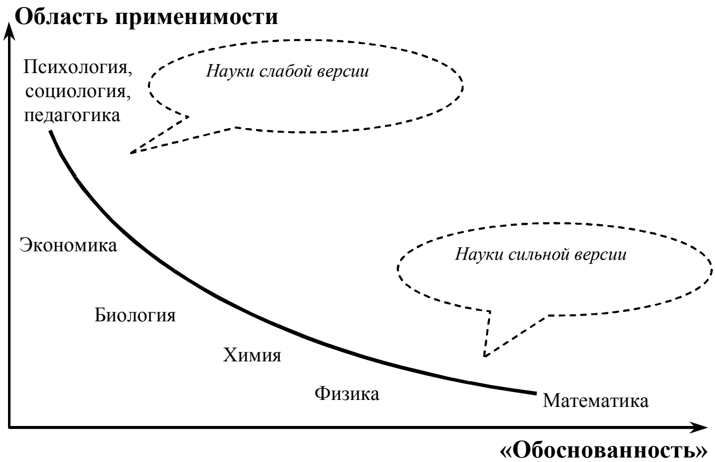


Рис. 1.3. Иллюстрация «Принципа неопределенности»

Сказанное вовсе не означает, что развитие невозможно – каждое конкретное исследование является продвижением либо в сторону повышения «обоснованности», общности, либо/и расширения области применимости (адекватности). Ведь вся история развития науки в целом является иллюстрацией сдвига кривой, приведенной на Рис. 1.3, вправо и вверх (увеличением константы, фигурирующей в правой части неравенства)!

Возможно и другое объяснение – «ослабление» наук происходит по мере усложнения объекта исследования. С этой позиции можно сильные науки назвать еще и «простыми», а слабые – «сложными» (по сложности объекта исследования). Условно, при современном состоянии науки граница между ними это – живые системы (биология). Изучение отдельных систем организма (анатомия, физиология и т.п.) еще тяготеет к сильным наукам (эмпирика подтверждается повторяемыми опытами и обосновывается более «простыми» науками – биофизикой, биохимией и т.п.), поэтому на ее базе возможны и формальные построения, как в физике и химии. Далее при изучении живых систем опыты в классическом понимании (воспроизводимость и др.) становятся все более затруднительными. А затем, при переходе к человеку и социальным системам, и вовсе становятся практически невозможными.

Отобранные и проверенные на устойчивость и адекватность модели становятся основой для последнего, решающего этапа стадии прагматического моделирования – выбора модели для дальнейшей реализации.

1.6. Модели управления

Моделирование организации на уровне управляемой системы требует создания модели управления. Сложная иерархическая структура организаций, разнообразие видов, методов, стилей, форм управления привели к такому же разнообразию соответствующих моделей. Именно модели управления чаще всего составляют основное содержание моделей организаций.

Переходя к разговору о моделях управления, нужно корректно определить, что понимается под управлением. Для этого приведем ряд распространенных определений:

Управление – «элемент, функция организованных систем различной природы: биологических, социальных, технических, обеспечивающая сохранение их определенной структуры, поддержание режима деятельности, реализацию программы, цели деятельности. [56, С. 704; 7, С. 1252]».

Управление – «направление движением кого/чего-нибудь, руководство действиями кого-нибудь» [53, С. 683].

Управление – «воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения» [38, С. 9].

Существует и множество других определений, в соответствии с которыми управление определяется как: элемент, функция, воздействие, процесс, результат, выбор и т.п.

Мы не будем претендовать на то, чтобы дать еще одно определение, а лишь подчеркнем, что, если управление осуществляет субъект[1], то управление следует рассматривать как деятельность. Такой подход: управление – вид практической деятельности[2] (*управленческая деятельность*), многое ставит на свои места – объясняет «многогранность» управления и примиряет между собой различные подходы к определению этого понятия.

Поясним последнее утверждение. Если управление – это деятельность, то осуществление этой деятельности является функцией управляющей системы, процесс управления соответствует процессу деятельности, управляющее воздействие – ее результату и т.д.

Другими словами, в организационных (социально-экономических) системах (где и управляющий орган и управляемая система являются субъектами – см. Рис. 1.5) <u>управление является деятельностью по организации деятельности</u> [36].

Уровень рефлексии можно наращивать и дальше: с одной стороны, в многоуровневой системе управления деятельность топ-

---

[1] *Этим исключаются из рассмотрения ситуации, в которых управление осуществляет техническая система* (*так как деятельность имманентна только человеку*).

[2] *Трактовка управления как одной из разновидностей практической деятельности кажется неожиданной. Ведь управление традиционно воспринимается как нечто «высокое» и очень общее, однако деятельность управленца организована так же* (*по тем же общим законам*)*, как и деятельность любого специалиста-практика: учителя, врача, инженера и т.д. Более того, иногда «управление»* (*управленческая деятельность*) *и «организация»* (*как процесс, то есть деятельность по обеспечению свойства организации*) *рассматриваются рядоположенно, но и в этом случае методология как учение об организации любой деятельности* [36] *определяет общие закономерности управленческой деятельности.*

менеджера можно рассматривать как деятельность по организации деятельности его непосредственных подчиненных, которая заключается в организации деятельности их подчиненных и т.д. С другой стороны, многочисленная армия консультантов (речь идет, прежде всего, об *управленческом консалтинге* – быстро разросшемся в последние годы институте консультантов, консалтинговых, аудиторских и других фирмах) представляет собой специалистов по организации управленческой деятельности.

Постановка и технология решения задач управления. Обсудим качественно общую постановку задачи управления некоторой системой. Пусть имеется управляющий орган (*субъект управления*) и управляемая система (*объект управления*). Состояние управляемой системы зависит от внешних воздействий, воздействий со стороны управляющего органа (управления) и, быть может (если объект управления активен, то есть также является субъектом), действий самой управляемой системы – см. Рис. 1.4. Задача управляющего органа заключается в том, чтобы осуществить такие управляющие воздействия (жирная линия на Рис. 1.4), чтобы с учетом информации о внешних воздействиях (пунктирная линия на Рис. 1.4) обеспечить требуемое с его точки зрения состояние управляемой системы.

Отметим, что приведенная на Рис. 1.4 так называемая входо-выходная структура является типичной для *теории управления*, изучающей задачи управления системами различной природы. На Рис. 1.4 представлен простейший двухуровневый «кирпичик» структуры любой сложной многоуровневой иерархической системы управления. Действительно, например, в *технических системах* техническая система управляет технической системой – см. Рис. 1.5. В *человеко-машинных системах* человек (субъект управления) осуществляет управление технической системой. В *организационных системах* люди руководят людьми. В *организационно-технических системах* (ОТС) имеют место все три вида взаимодействия.

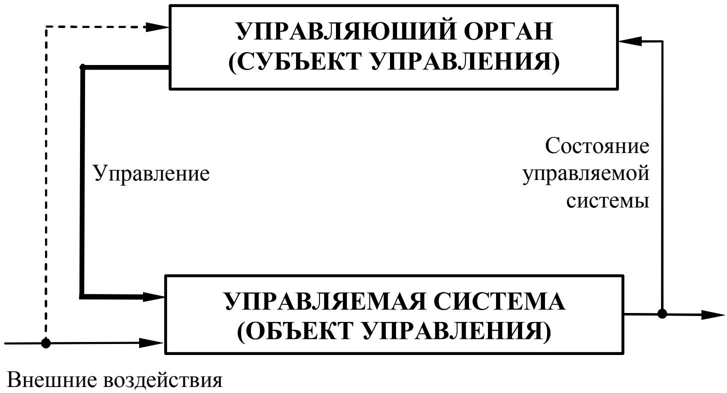


Рис. 1.4. Структура системы управления

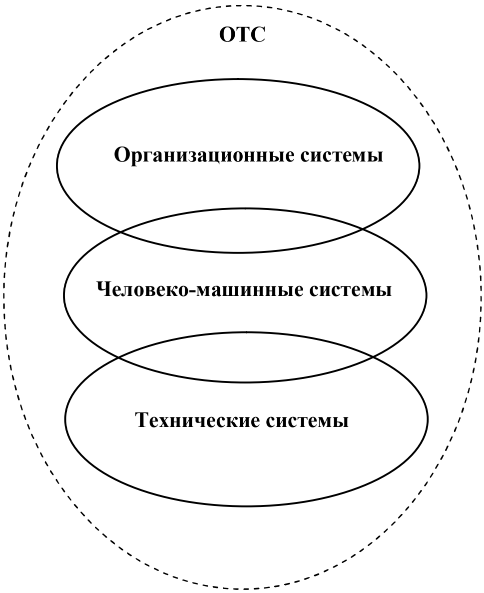


Рис. 1.5. Виды систем в зависимости от субъекта и объекта управления

Иерархичность целей организационных систем приводит к иерархичности задач управления: если главная цель может достигаться различными управляющими воздействиями, то среди них можно выбрать наилучшие в каком-то смысле (достигающие второй по значимости цели) и т.д.

Главные цели управления организацией, как и всякой живой системой, усложняются по мере ее роста путем надстройки новых иерархических уровней: организация и устойчивое функционирование производства, захват и удержание рынка, поддержание эффективности, борьба с конкурентами, развитие и т.п. При этом новые цели становятся главными, а старые переходят в разряд ограничений.

Если подойти чуть более формально, то можно считать, что предпочтения управляющего органа, описываемые *критерием эффективности функционирования управляемой системы*, зависят от состояния управляемой системы и, быть может, от самих управляющих воздействий. Если известна зависимость состояния управляемой системы от управления, то получаем зависимость эффективности функционирования управляемой системы от управляющих воздействий. Этот критерий называется *критерием эффективности управления*. Следовательно, **задача управления** формально может быть сформулирована следующим образом: найти допустимые управляющие воздействия, имеющие максимальную эффективность (такое управление называется *оптимальным управлением*).

Для этого нужно решить задачу *оптимизации* – осуществить *выбор* оптимального управления (оптимальных управляющих воздействий).

Мы привели в самом общем виде формулировку задачи управления. Для того чтобы понять, как эта задача ставится и решается в каждом конкретном случае, рассмотрим общую *технологию* постановки и решения задачи *управления*, охватывающую все этапы, начиная с построения модели и заканчивая анализом эффективности внедрения результатов моделирования на практике (см. Рис. 1.6, на котором в целях наглядности опущены обратные связи между этапами).

Рис. 1.6. Технология постановки и решения (*теоретического и практического*) *задач управления*

Первый этап – построение модели – заключается в описании моделируемой системы в формальных терминах.

Второй этап – *анализ* модели (исследование поведения управляемой системы при различных управляющих воздействиях). Решив задачу анализа, можно переходить к третьему этапу – решению, во-первых, *прямой задачи управления*, то есть задачи *синтеза* оптимальных управляющих воздействий, заключающейся в поиске допустимых управлений, имеющих максимальную эффективность, и, во-вторых, *обратной задачи управления* – поиска множества допустимых управляющих воздействий, переводящих управляемую систему в заданное состояние. Следует отметить, что, как правило, именно этот этап решения задачи управления вызывает наибольшие теоретические трудности и наиболее трудоемок с точки зрения исследователя.

Имея набор решений задачи управления, необходимо перейти к четвертому этапу, то есть исследовать их устойчивость. Исследование устойчивости подразумевает решение, как минимум, двух задач. Первая задача заключается в изучении зависимости оптимальных решений от параметров модели, то есть является задачей анализа *устойчивости решений* (см. выше). Вторая задача специфична для математического моделирования. Она заключается в теоретическом исследовании *адекватности модели* реальной системе, которое, в частности, подразумевает изучение эффективности решений, оптимальных в модели, которые при их использовании в реальных системах могут в силу ошибок моделирования отличаться от модели – см. Рис. 1.2 и обсуждение выше.

Итак, перечисленные четыре этапа заключаются в теоретическом изучении модели. Для того чтобы использовать результаты теоретического исследования при управлении реальной системой, необходимо произвести настройку модели, то есть *идентифицировать* моделируемую систему и провести серию *имитационных экспериментов* – соответственно пятый и шестой этапы. Этап имитационного моделирования во многих случаях необходим по нескольким причинам. Во-первых, далеко не всегда удается получить аналитическое решение задачи синтеза оптимального управления и исследовать его зависимость от параметров модели. При этом имитационное моделирование может служить инструментом получения и оценки решений. Во-вторых, имитационное моделирование позволяет проверить справедливость гипотез, принятых при построении и анализе модели, то есть дает дополнительную информацию об адекватности модели без проведения натурного эксперимента. И, наконец, в-третьих, использование деловых игр и имитационных моделей в учебных целях позволяет участникам системы освоить и апробировать предлагаемые механизмы управления.

Завершающим является седьмой этап – этап внедрения, на котором производится обучение, внедрение результатов в реальной системе с последующей оценкой эффективности их практического использования, коррекцией модели и т.д.

Выбор (принятие решений). Многочисленные виды неопределенностей в моделях организационных систем и, как следствие, невозможность получения единственного решения задачи управления привели к появлению моделей принятия решений. Принципиальным в них является субъективный в конечном счете выбор управления.

Выбор является действием, придающим деятельности целенаправленность.

В системном анализе *выбор* (*принятие решения*) [45 и др.] определяется как действие над множеством альтернатив, в результате которого получается подмножество выбранных альтернатив (обычно это один вариант, одна альтернатива, но не обязательно). При этом выбор тесно связан с *оптимизацией*, так как последняя есть ни что иное, как поиск оптимальной альтернативы.

Каждая ситуация выбора может развертываться в разных вариантах:

– оценка альтернатив для выбора может осуществляться по одному или нескольким критериям, которые, в свою очередь, могут иметь как количественный, так и качественный характер;

– режим выбора может быть однократным (разовым) или повторяющимся;

– последствия выбора могут быть точно известны (выбор в условиях определенности), иметь вероятностный характер (выбор в условиях риска), или иметь неопределенный исход (выбор в условиях неопределенности);

– ответственность за выбор может быть односторонней (в частном случае индивидуальной – например, ответственность директора организации, учреждения) или многосторонней (например, когда за решение несут ответственность несколько субъектов);

– степень согласованности целей при многостороннем выборе может варьироваться от полного совпадения интересов сторон до их полной противоположности (выбор в конфликтной ситуации). Возможны также промежуточные случаи, например, компромиссный выбор, коалиционный выбор, выбор в условиях конфликта и т.д.

Как правило, выбор рационального варианта основывается на последовательном сокращении числа рассматриваемых вариантов за счет анализа и отбрасывания неконкурентоспособных по различным соображениям и показателям альтернатив. При выборе альтернатив следует иметь в виду, что цели могут быть подразделены по их приоритетности на:

– цели, достижение которых определяет успех проекта;

– цели, которыми частично можно пожертвовать для достижения целей первого уровня;

– цели, имеющие характер дополнения.

В любом случае выбор (принятие решения) является процессом субъективным, и лицо (лица), принимающие решение, должны нести за него ответственность. Поэтому в целях преодоления (уменьшения) влияния субъективных факторов на процесс принятия решения используются методы *экспертизы* [29, 30, 52].

Итак, мы кратко рассмотрели построение моделей, в том числе – математических, обсудили специфику управления и принятия решений в организационных системах. Тех читателей, которые заинтересуются современными способами формализованного представления моделей, мы отсылаем к достаточно полным их описаниям, выполненным для ряда предметных областей в [10, 13, 14, 16, 18, 20, 29, 37, 41, 43, 45, 47, 49]. Получить первоначальное представление об общих подходах к моделированию управления техническими системами можно в [25, 44], социально-экономическими и организационными системами – в [21, 38, 46, 57], медико-биологическими системами – в [3, 40]. Подробнее о моделях принятия решений можно узнать в [18, 29, 45, 49].

Отметим, что на сегодняшний день накоплен значительный опыт разработки и использования самых разных методов моделирования, но все равно в этом процессе решающую роль играет творчество, интуитивное искусство создания модели.

Темы для самостоятельного изучения[1]

1.1. Системы и модели [4, 6, 8, 14, 36, 45, 49, 51, 54, 55].

1.2. Исследование операций в управлении организационными системами [10, 13, 16, 18, 19, 20].

1.3. Устойчивость принципов оптимальности [17, 35, 43, 48].

1.4. Проблема идентификации в моделировании организационных систем [38, 43, 57].

1.5. Теория автоматического регулирования [25, 44].

1.6. Моделирование экономических систем [1, 13, 21, 31, 46].

1.7. Моделирование биологических систем [3, 40, 55].

1.8. Имитационное моделирование и деловые игры [5, 45, 49, 54, 57].

1.9. Комплексное оценивание [23, 29, 30, 38, 42, 49].

1.10. Экспертные оценки в принятии решений [29, 30, 42, 49, 52].

1.11. Многокритериальное принятие решений [41, 42, 47, 49].

1.12. Рефлексия в принятии решений [28, 39].

Литература к главе 1

1 Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.

2 Адизес И. Управление жизненным циклом корпорации.– М.: Питер, 2007.

3 Антомонов Ю.Г. Моделирование биологических систем. – Киев: Наукова думка, 1977.

4 Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» модели / Математическое моделирование социальных процессов. М.: МГУ, 1998. С. 29 – 51.

[1] *Приводимые в конце каждой главы темы для самостоятельного изучения представляют собой достаточно обширные разделы современной науки. Подразумевается, что заинтересованный читатель может в целях расширения своего кругозора получить первоначальные представления о соответствующей проблематике, ознакомившись с указанной литературой, а также с работами, на которые приведены ссылки в этой литературе.*

5 Бабкин В.Ф., Баркалов С.А., Щепкин А.В. Деловые имитационные игры в организации и управлении. – Воронеж: ВГАСУ, 2001.

6 Берталанфи Л. Общая теория систем: критический обзор / Исследования по общей теории систем. – М.: Прогресс, 1969. С. 23 – 82.

7 Большой энциклопедический словарь. – М.: Большая российская энциклопедия, 2002.

8 Боулдинг К. Общая теория систем – скелет науки / Исследования по общей теории систем. – М.: Прогресс, 1969. С. 106 – 124.

9 Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. – Тбилиси: Мецниереба, 1974.

10 *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001.

11 Бурков В.Н., Ланда Б.Д., Ловецкий С.Е., Тейман А.И., Чернышев В.Н. Сетевые модели и задачи управления. – М.: Советское радио, 1967.

12 *Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977.

13 Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1972.

14 Волкова В.Н., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа. Изд. 2-е. – СПб.: СПб.ГТУ, 1999.

15 *Воронин А.А. Устойчивое развитие – миф или реальность // Математическое образование. 2000. № 1(12). С. 59 – 68.

16 Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971.

17 *Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.

18 *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.

19 Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990.

20 Дегтярев Ю.И. Системный анализ и исследование операций. М.: Высшая школа, 1996.

21 Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979.

22 Каган М.С. Человеческая деятельность. – М.: Политиздат, 1974.

23 Каплан Р.С., Нортон Д.П. Сбалансированная система показателей. – М.: Олимп-Бизнес, 2003.

24 Келле В.В. Переосмысление системной методологии: версия П. Чекленда / Системные исследования 1995-1996. – Москва, 1996. С. 376 – 389.

25 Красовский А.А. Справочник по теории автоматического управления. – М.: Наука. 1987.

26 Краткий психологический словарь / Сост. Л.А. Карпенко. Под общ. ред. А.В. Петровского, М.Г. Ярошевского. – М.: Политиздат, 1985.

27 Кун Т. Структура научных революций. – М.: АСТ, 2006.

28 *Лефевр В.А. Конфликтующие структуры. – М.: Советское радио, 1973.

29 Литвак Б.Г. Экспертная информация. Методы получения и анализа. – М.: Радио и связь, 1982.

30 Литвак Б.Г. Экспертные оценки и принятие решений. – М.: Патент, 1996.

31 Математические основы управления проектами / Под ред. В.Н. Буркова. – М.: Высшая школа, 2005.

32 Минцберг Г. Структура в кулаке: создание эффективной организации. – М.: Питер, 2001.

33 Моисеев Н.Н. Математика в социальных науках / Математические методы в социологическом исследовании. – Москва, 1981.

34 Моисеев Н.Н. Прощание с простотой. – М.: АГРАФ, 1998.

35 Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. – М.: Наука, 1989.

36 *Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. – М.: Синтег, 2007.

37 *Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.

38 *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007.

39 *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003.

40 Новосельцев В.Н. Теория управления и биосистемы. – М.: Наука, 1978.

41 Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физматлит, 2002.

42 *Орлов А.И. Теория принятия решений. Учебное пособие. – М.: Издательство «Экзамен», 2005.

43 Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. – М.: Наука, 1979.

44 Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. – М.: Наука, 1986.

45 *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989.

46 Плотинский Ю.М. Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. – М.: Логос, 1998.

47 Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето – оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.

48 Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.

49 Рыков А.С. Модели и методы системного анализа: принятие решений и оптимизация. – М.: МИСИС, 2005.

50 Садовский В.Н. Основания общей теории систем. – М.: Наука, 1974.

51 Саймон Г. Науки об искусственном. – М.: Мир, 1972.

52 Сидельников Ю.В. Теория и практика экспертного прогнозирования. – М.: ИМЭМО РАН, 1990.

53 Словарь русского языка С.И. Ожегова. М.: Русский язык, 1988.

54 Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа, 1998.

55 *Турчин В.Ф. Феномен науки: Кибернетический подход к эволюции. – М.: Наука, 1993.

56 Философский энциклопедический словарь. – М.: Сов. Энциклопедия, 1983.

57 Человеческий фактор в управлении / Сборник статей. – М.: КомКнига, 2006.

58 Эшби У.Р. Введение в кибернетику. – М.: Изд-во иностранной литературы. 1959.

Глава 2. Модели принятия решений

В настоящей главе последовательно (в порядке усложнения) рассматривается ряд моделей принятия решений. В рамках базовой модели рационального поведения (принятия решений одним субъектом в условиях полной информированности, то есть отсутствия неопределенности) предпочтения субъекта (лица, принимающего решения – ЛПР) могут описываться функцией полезности или отношением предпочтения – см. Рис. 2.1.

Рис. 2.1. *Модели принятия решений*

Усложнением базовой модели является добавление *неопределенности – природной* (относительно внешних по отношению к рассматриваемой системе параметров) или *игровой* (относительно действий других участников рассматриваемой системы). Соответствующие модели рассматриваются в разделах 2.2 и 2.3.

В свою очередь, природная неопределенность в зависимости от той информации, которой обладает ЛПР относительно неопределенных факторов, подразделяется на интервальную, вероятностную и нечеткую (подразделы 2.2.1-2.2.3).

Игровая неопределенность может описываться в рамках *игр в нормальной форме* [8, 9], когда субъекты принимают решения однократно, одновременно и независимо в условиях общего знания (см. ниже) относительно ситуации принятия решений (раздел 2.3.1). Возможно, последовательность принятия решений фиксирована, тогда для моделирования принятия решений используются *иерархические игры* (раздел 2.3.2). Также возможны ситуации, когда общее знание отсутствует, тогда применяется аппарат *рефлексивных игр* (раздел 2.3.3).

Отметим, что вне рамок нашего рассмотрения остаются ситуации, когда предпочтения ЛПР описываются несколькими критериями (так называемая задача принятия решений при многих критериях – см. [34, 36, 39, 40]); ситуации кооперативного принятия решений (см. [8, 22, 38]) и ситуации принятия решений в динамике (см. [4, 19, 35]).

В разделе 2.4 устанавливается соответствие между играми и организационными структурами; заключительный раздел настоящей главы (раздел 2.5) содержит классификацию задач управления организационными системами.

2.1. *Базовая модель рационального поведения*

В настоящем разделе описываются два «варианта» модели рационального поведения субъекта, осуществляющего выбор. В первой модели предпочтения моделируются функцией полезности, и рациональность поведения заключается в стремлении выбора альтернатив, максимизирующих полезность. Во второй модели предпочтения моделируются бинарным отношением предпочтения, и рациональность поведения заключается в стремлении выбора альтернатив, недоминируемых с точки зрения этого отношения предпочтения.

2.1.1. Функции полезности

Как описывается поведение человека? В экономике с середины XIX века существует концепция максимизации полезности, т.е. концепция экономического человека (homo economicus), который ведет себя таким образом, чтобы максимизировать свою полезность [1]. Несмотря на всю априорную ограниченность этой теории (потому что не всегда понятно, что такое полезность, почему человек стремиться ее максимизировать), концепция оказалась плодотворной.

Пусть имеется один субъект (*агент*), который может выбирать действия из какого-то множества. Предположим, что предпочтения этого субъекта описывается *функцией полезности* $f(y): A \to \Re^1$ (или целевой функцией, функцией предпочтения – будем использовать в настоящем разделе эти термины как синонимы), которая отображает множество его допустимых *действий* (альтернатив) A на числовую ось $\Re^1$. Значения этой функции позволяют сравнивать разные альтернативы (действия). Если есть два варианта – два элемента из множества допустимых действий, то лучшим будет тот, который приводит к большему значению функции. Предположим, что агент будет максимизировать свою полезность и производить выбор из *множества выбора*, которое представляет собой множество максимумов его целевой функции:

(1) $P(f(\cdot), A) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in A} f(y)$.

Значит, множество выбора агента зависит от его предпочтений $f(\cdot)$ и от того множества A, из которого он производит выбор.

Множество выбора зависит от двух составляющих: от функции и от допустимого множества. Описывая модель поведения управляемого субъекта и зная, что управление – некоторое воздействие на субъект, в рамках этой модели видно, что воздействовать на субъект можно, влияя на его целевую функцию и влияя на то множество, из которого он делает выбор. Предположение, что агент производит выбор из множества выбора (то есть, стремится максимизировать свою целевую функцию) называется *гипотезой рационального поведения*, которая заключается в том, что агент выбирает с учетом всей имеющейся у него информации наилучшую с его точки зрения допустимую альтернативу, т.е. одну из альтернатив y^*, на которых достигается максимум его целевой функции:

(2) $y^* = \arg \max\limits_{y \in A} f(y)$.

Пример 2.1. Рассмотрим экономического агента – производственное предприятие – принимающего решение об объеме выпускаемой продукции y. Технология производства такова, что может быть произведен любой объем продукции, не превышающий технологического ограничения $y^+ > 0$, то есть множество допустимых действий агента $A = [0; y^+]$. Предположим, что известна рыночная цена $\lambda > 0$ на продукцию, производимую агентом, и известна функция затрат агента $c(y) = y^2 / 2\, r$, где $r > 0$ – *тип* агента (параметр, отражающий эффективность его деятельности).

Если считать, что агент заинтересован в максимизации своей прибыли (разности между выручкой от продаж и затратами), то его функция полезности примет вид:

(3) $f(y) = \lambda\, y - y^2 / 2\, r$.

Максимум этой функции на положительной полуоси достигается при выборе действия $y_{\max} = \lambda\, r$. Значит решение задачи (2) имеет вид:

(4) $y^* = \min \{\lambda\, r, y^+\}$,

то есть агенту следует выбирать объем производства, максимизирующий его прибыль, если такой объем является технологически допустимым, или, в противном случае – максимально возможный с точки зрения технологических ограничений объем производства. •

Помимо принципа (1) принятия решений, агент может использовать *принципы ограниченной рациональности* [41], то есть выбирать ε-оптимальные действия [21, 26]:

(5) $P_\varepsilon(f(\cdot), A) = \{y \in A \mid f(y) \geq f(y^*) - \varepsilon\}$,

или действия, обеспечивающие ему заданный уровень полезности $\bar{f}$:

(6) $P(f(\cdot), A, \bar{f}\,\} = \{y \in A \mid f(y) \geq \bar{f}\,\}$.

Пример 2.2. Рассмотрим Пример 2.1, в котором агент готов выбирать ε-оптимальные действия, то есть, действия, которые обеспечивают ему прибыль, отличающуюся от максимально возможной не более чем на некоторую величину ε. Предполагая, что технологические ограничения отсутствуют ($y^+ = +\infty$), из (3) и (5) получим:

(7) $P_\varepsilon(f(\cdot), A) = [\lambda\, r - \sqrt{2\,\varepsilon\, r}\,;\, \lambda\, r + \sqrt{2\,\varepsilon\, r}\,]$,

В свою очередь, из (3) и (6) получим:

(8) $P(f(\cdot), A,\ \bar{f}\ \} = [\lambda\, r - \sqrt{\lambda^2 r^2 - 2r\bar{f}}\,;\, \lambda\, r + \sqrt{\lambda^2 r^2 - 2r\bar{f}}\,]$.

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ или $\bar{f} = f(y^*)$, получаем, что (7) и (8) превращаются в соответствующее целевой функции (3) выражение (1). Последнее свойство называется *принципом обобщения* – при предельном переходе к случаю, который был обобщен, все результаты должны соответствовать обобщаемым результатам (отметим, что принцип обобщения справедлив в рамках одной научной парадигмы – см. подробности в [15, 25]).

Кроме того, интересно отметить, что имеет место *принцип монотонности по уровню притязаний* – с ростом ε (тех потерь, которые агент считает допустимыми) или с уменьшением значения $\bar{f}$ (той полезности, которой агент считает достаточной), множества (7) и (8) расширяются. •

Альтернативой описанию предпочтений агента в терминах функции полезности является их описание в терминах отношений предпочтения.

2.1.2. Отношения предпочтения

Как отмечалось выше, в основе теории принятия решений лежит предположение, что человек, поставленный перед проблемой выбора, в процессе выработки решения (выбора альтернативы) руководствуется своими предпочтениями, то есть выбирает действие, которое, по его мнению, приведет к наиболее предпочтительному для него результату деятельности (исходу). Формальное описание процесса сравнения альтернатив может быть дано через *отношения предпочтения и неразличимости* [2, 20, 45, 46].

Бинарное отношение $\wp$ на множестве A – это подмножество $\wp \subseteq A \times A$, где $A \times A$ – множество всех упорядоченных пар (a,b), $a, b \in A$. Если $(a, b) \in \wp$, говорят, что отношение $\wp$ выполнено (или имеет место) для (a, b) и пишут $a \wp b$.

Если бинарное отношение $\wp$ не имеет места для a, b, этот факт обозначается $a \wp^c b$.

Отношение предпочтения $\succ$ – это бинарное отношение, определяемое свойством: $a \succ b$ тогда и только тогда, когда a предпочтительнее (лучше) для ЛПР, чем b.

Отношение неразличимости $\approx$ имеет место для пары a, b тогда и только тогда, когда $a \succ^c b$ и $b \succ^c a$.

Отношение $\wp$ называется *рефлексивным*, если для всех $a \in A$ выполнено $a \wp a$, *антирефлексивным*, если для всех $a \in A$ выполнено $a \wp^c a$.

Отношение $\wp$ называется *антисимметричым*, если из $a \wp b$ и $b \wp a$ следует $a = b$, *асимметричным*, если из $a \wp b$ следует $b \wp^c a$.

Далее рассматривается отношение *строгого* предпочтения $\succ$, для которого выполнено условие асимметричности.

Отношение $\wp$ называется *транзитивным*, если для всех $a, b, c \in A$ из $a \wp b$ и $b \wp c$ следует $a \wp c$.

Отношение $\wp$ называется *полным*, если для всех $a, b \in A$ выполнено $a \wp b$ или $b \wp a$.

Пусть на *множестве исходов* A_0 задано предпочтение ЛПР, то есть отношение типа $\succ$, которое для пары a, b исходов из A_0 выполняется, если a лучше b с точки зрения лица, принимающего решение. Определим также множество действий A. Это множество содержит все возможные действия ЛПР и состоит из элементов вида «Сделать то-то», «Приказать то-то», «Купить то-то…» и пр.

Рассмотрим пример, который иллюстрирует описание предпочтений агента бинарными отношениями (см. также Пример 2.7 ниже).

<u>Пример 2.3.</u> Рассмотрим фирму, принимающую решение о выходе на новый для нее рынок. Пусть она имеет три возможных способа действий: выходить на еще неосвоенный рынок с некоторой принципиально новой продукцией (обозначим это действие через y_1), выходить на один из «традиционных» рынков (y_2) или не выхо-

дить на новые рынки вовсе (y_3). То есть множество A возможных действий фирмы состоит из трех элементов: $A = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Выход на новый рынок (действие y_1) требует существенных инвестиций в научные исследования и новое производство, характеризуясь, в то же время, потенциально высокими рисками – новая продукция может не найти спроса и фирма разорится. С входом на традиционные рынки (действие y_2) связана другая проблема – конкуренция. Фирма может не выдержать давления конкурентов, что также приведет к ее разорению. Помимо этого, даже при удачном развитии событий прибыль фирмы в этом случае будет меньше, чем при успешном выходе на новый рынок. «Пассивная» позиция (действие y_3) характеризуется отсутствием новых прибылей, но и полным отсутствием рисков (сохранение status quo).

Рассмотрим возможные исходы – результаты, к которым может привести то или иное действие фирмы. Пусть в настоящее время прибыли фирмы характеризуются как «низкие». Исход, соответствующий сохранению текущей прибыльности, обозначим через z_1. Кроме того, будем считать, что возможны еще два значения прибыльности, которые условно назовем «средние прибыли» (соответствующий исход обозначим через z_2) и «высокие прибыли» (z_3). Исход, соответствующий разорению фирмы, обозначим через z_0.

Таким образом, три возможных действия фирмы приводят к четырем возможным исходам, то есть в данном примере множество исходов $A_0 = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$.

Предпочтения фирмы на множестве исходов задаются строгим упорядочением $z_3 \succ z_2 \succ z_1 \succ z_0$. Это бинарное отношение говорит просто о том, что бóльшие прибыли более предпочтительны для фирмы, а наихудшим исходом для нее, очевидно, является разорение (z_0).

Однако определением множеств A_0, A и отношения предпочтения на A_0 формулировка задачи принятия решения не исчерпывается. Необходимо определить еще и связь между принятым решением и реализующимся результатом.

Задача принятия решения – это задача выбора ЛПР действия из множества A, которое приводит к наилучшему с точки зрения предпочтения ЛПР результату из A_0. Чтобы решить эту задачу, необходимо тем или иным образом из отношения предпочтения на множестве исходов A_0 вывести отношение предпочтения на множестве действий A, а затем выбрать наиболее предпочтительное действие.

Пусть имеется некоторая функция $w: A \to A_0$ – детерминированное (однозначное) соответствие между выбранным действием и его результатом. В этом случае выбор действия равнозначен выбору результата. Задача, таким образом, состоит лишь в нахождении реализуемого исхода (то есть исхода, для которого есть действие, его реализующее), предпочтительного по отношению ко всем остальным реализуемым исходам. Выбранное действие будет принадлежать множеству («аналог» выражения (1) раздела 2.1.1):

(1) $P(\wp, A) = \{a \in A \mid \overline{\exists}\, b \in A : w(b) \succ w(a)\}$.

Если бы в рассматриваемом примере с фирмой, выходящей на рынок, функция $w(\cdot)$ была задана следующим образом:

1. $w(y_1) = z_3$,
2. $w(y_2) = z_2$,
3. $w(z_3) = z_1$,

то, очевидно, решением задачи принятия решения было бы действие y_1 – «выходить на новый рынок», то есть действие, приводящее к наилучшему реализуемому результату z_3.

Такая задача называется *детерминированной задачей принятия решения*. Более сложная модель, учитывающая риски принимаемых фирмой решений, описывается ниже (см. Пример 2.6). •

Возникает вопрос, как связаны между собой функции полезности и отношения предпочтения? Соответствие между отношением предпочтения $\succ$ и функцией полезности $f : A \to \Re^1$ определяется условием

(2) $\forall\ a, b \in A \quad f(a) > f(b) \Leftrightarrow a \succ b$.

Очевидно, что функция полезности порождает полное транзитивное бинарное отношение. Рассмотрим, каким ограничениям должно удовлетворять отношение предпочтения, чтобы можно было рассматривать вместо него функцию полезности. Эта задача является предметом изучения *математической теории полезности* [20, 24, 44, 46, 48] (впервые вопрос о представимости отношения предпочтения функцией полезности – см. (2) – рассматривался Г. Кантором (1895 г.) – см. подробности в [48]).

Как отмечалось выше, отношение предпочтения – бинарное отношение на множестве исходов A_0, удовлетворяющее, как минимум, свойству асимметрии. Для продуктивного использования, однако, необходимы дополнительные условия на отношение предпочтения (см. [24, 48]). При этом то, какие дополнительные предположения необходимо сделать, чтобы получить инструмент, с которым можно работать, не отходя в то же время от встречающихся в реальной жизни предпочтений, – это вопрос, который на протяжении многих лет служил предметом дискуссий и продолжает обсуждаться до сих пор. Дело в том, что подобные дополнительные предположения вводятся в виде аксиом, некоторых гипотез о закономерностях процесса выбора. Подробно останавливаться на этом вопросе мы не будем, отослав заинтересованного читателя к [24, 38, 44, 46, 48].

2.2. *Принятие решений в условиях природной неопределенности*

Модель принятия решений, рассмотренная в разделе 2.1, слишком простая, и в жизни редко бывает так, что выбор агента однозначно определял его выигрыш. Иногда вмешиваются какие-то факторы, которые не подконтрольны ЛПР. Попробуем учесть их в модели следующим образом: пусть существует неопределенный фактор $\theta \in \Omega$ – *состояние природы*. Предпочтения ЛПР уже зависят от того, что выбирает он, и от состояния природы, т.е. предпочтения определены на декартовом произведении множества допустимых действий и множества возможный состояния природы, и целевая функция (функция полезности) отображает это декартово произведение в числовую ось: $f(y, \theta): A \times \Omega \to R^1$.

Написать такую же формулу, как и выражение (1) раздела 2.1.1, для такой целевой функции мы уже не можем, потому что, если агент будет выбирать действие, максимизирующее его целевую функцию, то максимум будет зависеть от того, каково будет состояние природы. Для того чтобы описать принятие решений в условиях неопределенности, нужно ввести новую гипотезу – *гипотезу детерминизма* [11, 13]: субъект, принимая решение, стремится *устранить неопределенность* и принимать решения в условиях полной информированности. Для этого он должен перейти от целевой функции, зависящей от неопределенных факторов, к целевой функции, которая зависит только от того, что он может выбрать сам.

В зависимости от той информации о состоянии природы, которой обладает ЛПР на момент принятия решений, выделяют:

- *интервальную неопределенность* (ЛПР известно только множество Ω возможных значений состояния природы);

- *вероятностную неопределенность* (ЛПР известно распределение вероятностей значений состояния природы на множестве Ω);

- *нечеткую неопределенность* (ЛПР известна функция принадлежности различных значений состояния природы на множестве Ω).

Рассмотрим последовательно модели принятия решений в рамках перечисленных видов неопределенности.

2.2.1. Интервальная неопределенность

Так, пусть ЛПР известно только множество Ω возможных значений состояния природы. Тогда возможны следующие варианты:

1. Подстановка в целевую функцию $f(y, \theta)$ какого-то конкретного значения $\theta' \in \Omega$ состояния природы, после чего задача сводится к известной (см. выражение (2) радела 2.1.1), и остается найти максимум $f(y, \theta')$ по y.

2. Предположим, что агент – пессимист и считает, что реализуется наихудшее состояние природы. Такой принцип принятия решений называется принципом *максимального гарантированного результата* (МГР) и заключается в следующем: действие агента будет доставлять максимум его целевой функции при условии, что он рассчитывает на наихудшее для себя значение неопределенного параметра. Тогда он берет сначала минимум по состоянию природы, а потом максимум по своему действию:

(1) $y^г \in \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \min_{\theta \in \Omega} f(y, \theta)$.

Преимущества данного принципа принятия решений: он дает оценку снизу значения целевой функции, т.е. это точка отсчета снизу [6]. Плох этот принцип своей крайней пессимистичностью, т.к., если природа «нейтральна» (не настроена против агента), то такое допущение неверно. Если под природой понимать не социально-экономическое окружение, а дословно природные факторы, то в этом смысле природе безразлично то, что мы с вами делаем.

3. Поэтому, естественно, можно использовать и другую крайность – крайний оптимизм. Т.е., рассчитывать на то, что природа к нам благосклонна, и выбирает действие, которое для нас наиболее благоприятно. Тогда нужно выбирать максимум целевой функции при условии реализации наилучшего состояния природы:

(2) $y^o \in \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \max_{\theta \in \Omega} f(y, \theta)$.

Это называется *критерий оптимизма*, и он дает оценку сверху. Этим принцип оптимизма хорош, но этим он и плох.

Понятно, что крайний оптимизм, как и крайний пессимизм, в жизни редко встречаются и редко выживают.

Возможны любые комбинации этих критериев, можно брать их линейную свертку, то есть «балансировать» между оптимизмом и пессимизмом [5, 6, 23, 40].

Мы перечислили три наиболее распространенных варианта устранения неопределенности в условиях, когда о неопределенном параметре агент знаем только то, что он принадлежит заданному множеству. Такая неопределенность называется интервальной – агент знает «интервал» значений неопределенного параметра. Эту информацию он использует, когда берет минимум или максимум по множеству возможных значений неопределенного параметра.

Пример 2.4. Усложним Пример 2.1, предположив, что неопределенной является рыночная цена λ единицы продукции, то есть $\lambda \in \Omega = [\theta^-; \theta^+]$.

В соответствии с первым вариантом агент может рассчитывать, например, на «среднюю» цену $\theta' = (\theta^- + \theta^+) / 2$. Тогда ему следует выбирать действие (см. выражение (4) раздела 2.1.1)

(3) $y' = \min \{(\theta^- + \theta^+) r / 2, y^+\}$.

При использовании принципа МГР агент будет рассчитывать на минимальную цену и выберет действие

(4) $y^г = \min \{\theta^- r, y^+\}$.

При использовании принципа оптимизма агент будет, наоборот, рассчитывать на максимальную цену и выберет действие

(5) $y^o = \min \{\theta^+ r, y^+\}$.

В данном примере из (3)-(5) видно, что $y^г \le y' \le y^o$. Отметим, что модель принятия решений ничего не говорит о том, каков будет реальный выигрыш агента. Для этого нужно знать, какое на самом деле реализуется состояние природы, в примере – какова будет рыночная цена. Если реализуется значение цены $\hat{\theta} \in [\theta^-; \theta^+]$, а агент рассчитывал на наихудший случай (то есть, выбрал действие (4)), то его выигрыш будет равен $f(y^{г}, \hat{\theta}) = \hat{\theta}\, y^{г} - (y^{г})^2 / 2\, r$, что выше выигрыша $f(y^{г}, \theta^-) = \theta^-\, y^{г} - (y^{г})^2 / 2\, r$, на который он рассчитывал (так как $\theta^- \leq \hat{\theta}$). С другой стороны, выигрыш агента меньше, чем тот выигрыш, который он мог бы получить, если бы ему на момент принятия решений было известно значение состояния природы. В последнем случае он выбрал бы действие $y^*(\hat{\theta}) = \min\{\hat{\theta}\, r, y^+\}$ и получил бы выигрыш

$$f(y^*(\hat{\theta}), \hat{\theta}) = \hat{\theta}\, y^*(\hat{\theta}) - (y^*(\hat{\theta}))^2 / 2\, r \geq f(y^{г}, \hat{\theta}) = \hat{\theta}\, y^{г} - (y^{г})^2 / 2\, r. \bullet$$

Вывод, сделанный в заключении последнего примера, является достаточно универсальным: при наличии неопределенности выигрыш ЛПР не выше его выигрыша в условиях полной информированности (хотя бывают и исключения – см. [7, 30]).

2.2.2. Вероятностная неопределенность

Предположим, что у агента появилась дополнительная информация о значении неопределенного параметра θ, принадлежащего множеству Ω. Допустим, агенту известно распределение вероятностей $p(\theta)$ на этом множестве (соответствующая неопределенность называется *вероятностной*), тогда логично использовать это знание, и устранять неопределенность следующим образом. У агента есть целевая функция $f(\cdot)$, зависящая от его действия и значения неопределенного параметра. Давайте возьмем от нее математическое ожидание по известному распределению, получим функцию *ожидаемой полезности* («ожидаемой» с точки зрения математического ожидания) $Ef(y) = \int_{\Omega} f(y, \theta)\, p(\theta)\, d\theta$. Таким образом, устранив неопределенность взятием математического ожидания, снова получили детерминированную модель (в выражение (2) раздела 2.1.1 можно вместо $f(y)$ подставить $E f(y)$) и теперь можно максимизировать функцию ожидаемой полезности, зависящей только от действия агента, выбором этого действия.

Возможны и другие способы устранения неопределенности. Можно рассчитать риск, например, вероятность того, что значение целевой функции окажется меньше, чем заданное. И этот риск минимизировать, т.е. использовать не первый момент распределения, а дисперсию и другие характеристики. Подходы могут быть разными, но, главное – устранить зависимость от неопределенного параметра (что необходимо в силу гипотезы детерминизма), а потом принимать решения в условиях полной информированности.

<u>Пример 2.5.</u> Усложним Пример 2.1, а именно, предположим, что агент полагает, что рыночная цена λ описывается вероятностным распределением $p(\lambda)$. Обозначим $E\,\lambda = \int\limits_0^{+\infty} \lambda\ p(\lambda)\ d\lambda$ – математическое ожидание цены. В силу линейности целевой функции (3) раздела 2.1.1 по цене, получаем, что $E\,f(y) = (E\,\lambda)\,y - y^2 / 2\,r$. В данном примере действием агента, максимизирующим его ожидаемую полезность, будет $y^* = \min\,\{(E\lambda)\,r, y^+\}$. •

Отношения предпочтения. Неопределенность может присутствовать и в моделях предпочтений, описываемых бинарными отношениями. Приведем пример.

<u>Пример 2.6.</u> Усложним Пример 2.3 с фирмой, выходящей на рынок, а именно, предположим, что результат z действия y зависит не только от самого действия ЛПР, но и от некоторых внешних по отношению к ЛПР факторов, то есть зависимость результата от действия имеет вид $z = w(y, \theta, u)$, где θ и u – факторы, не зависящие от ЛПР. Множества возможных значений этих параметров обозначим Ω и U соответственно. Если эти факторы известны на момент принятия решения, задача сводится к детерминированному случаю. Если же они неизвестны, возникает неопределенность.

Так, множество Ω может быть совокупностью объективных рыночных факторов. Например, состояние θ_1 = «новая продукция фирмы найдет спрос» приводит к высоким прибылям (исход z_3), а состояние θ_2 = «новая продукция не найдет спроса» – к исходу «разорение» (z_0). Множество U описывает неопределенность действий других лиц и может иметь, например, вид: $\{u_1, u_2\}$, где вариант u_1 соответствует тому, что конкуренты предпримут активные действия по вытеснению фирмы с традиционного рынка, а вариант u_2 – их пассивному поведению по поводу нового конкурента. Будем считать, что в первом случае фирма сможет получать лишь низкие прибыли (исход z_1), а во втором – средние (z_2).

Теперь уже выбор ЛПР некоторого действия y^* не приводит к единственному возможному результату. В зависимости от реализации не зависящих от ЛПР факторов θ и u может реализоваться любой результат из множества $R(y^*) = \{w(y^*, \theta, u) \mid \theta \in \Omega, u \in U\}$. Чтобы сделать выбор, ЛПР необходимо научиться сравнивать эти множества. Однако отношение предпочтения на системе множеств $R(\cdot)$ не задано условиями задачи. Его необходимо получать (возможно, используя некоторые дополнительные предположения) из отношения предпочтения на множестве результатов A_0.

Так, если известно распределение вероятностей реализации событий из Ω и U, то можно определить вероятности появления различных результатов при выборе определенного действия.

Например, пусть $P(\theta_1) = 80$ %, $P(\theta_2) = 20$ % (то есть шансы того, что новая продукция найдет спрос – четыре к одному), и, кроме того, $P(u_1) = 50$ %, $P(u_2) = 50$ % (то есть различное отношение к новому конкуренту на традиционном рынке равновероятно).

Тогда, если фирма выходит на новый рынок (выбирает действие y_1), то:

$P(z_3|y_1) = 80\%$.

$P(z_0|y_1) = 20\%$.

Соответственно, для других действий вероятности различных исходов будут следующими:

$P(z_1|y_2) = 50\%$.

$P(z_2|y_2) = 50\%$.

$P(z_1|y_3) = 100\%$.

Остальные исходы имеют нулевую вероятность.

В соответствии с терминологией, введенной выше, описанная задача – это *задача принятия решения в условиях вероятностной неопределенности*.

Немногим отличается случай, когда ЛПР не имеет информации о вероятностях некоторых значимых событий, но имеет предположения о них. В этом случае объективные вероятности заменяются субъективными, и реализуется та же схема решения.

Таким образом, в данном примере каждое решение (действие) ЛПР приводит к *лотерее*, случайному процессу, в котором исходы могут реализовываться с некоторыми вероятностями. Для того, чтобы от предпочтения на множестве исходов перейти к предпочтениям на множестве действий, ЛПР должен уметь сравнивать свои предпочтения на множестве подобных лотерей, то есть определять, какая из лотерей для него лучше или хуже. Тогда оптимальным решением будет действие, приводящее к наилучшей лотерее. Описание того, каким образом осуществляется этот переход, можно найти в [8, 24]. •

2.2.3. Нечеткая неопределенность

Помимо интервальной или вероятностной, возможен другой тип информированности – агент может знать значения *функции принадлежности* для состояний природы (*нечеткая неопределенность*).

В качестве отступления приведем необходимые для дальнейшего изложения определения нечетких множеств, нечетких отношений и принципа обобщения, описание их свойств, а также модель принятия решений при нечеткой исходной информации.

Нечеткие множества. Пусть X – некоторое множество. *Нечетким подмножеством* $\tilde{A}$ множества X называется множество пар $\tilde{A} = \{\mu_{\tilde{A}}(x), x\}$, где $x \in X$, $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]$. Функция $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0, 1]$ называется *функцией принадлежности* нечеткого множества $\tilde{A}$, а X – *базовым множеством*. Ниже нечеткие множества обозначаются тильдой.

Носителем множества $\tilde{A}$ называется подмножество множества X, содержащее те элементы из X, для которых значения функции принадлежности больше нуля: $\operatorname{supp} \tilde{A} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$.

Свойства нечетких множеств.

1. Нечеткое множество $\tilde{A}$ называется *нормальным*, если

$$\sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1.$$

2. Два нечетких множества *равны* (записывается $\tilde{A} = \tilde{B}$), если

$$\forall x \in X, \ \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x).$$

3. Нечеткое множество $\tilde{B}$ *содержится* в нечетком множестве $\tilde{A}$ или является подмножеством (или принадлежит) $\tilde{A}$ (т.е. $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$), если $\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{B}}(x) \le \mu_{\tilde{A}}(x)$. Пользуясь определением принадлежности множеств, получаем $B \subseteq A$. Таким образом, для четких множеств определение принадлежности приобретает стандартный вид.

4. *Пересечением* нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ ($\tilde{A} \bigcap \tilde{B}$) называется наибольшее нечеткое множество, содержащееся как в $\tilde{A}$, так и в $\tilde{B}$, с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \ x \in X.$$

5. *Объединением* нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется наименьшее нечеткое множество, содержащее как $\tilde{A}$, так и $\tilde{B}$, с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, x \in X.$$

5. *Дополнением* нечеткого множества $\tilde{A}$ в X называется нечеткое множество $\neg\tilde{A}$ со следующей функцией принадлежности:

$$\mu_{\neg\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X.$$

Нечеткие отношения. Под четким бинарным отношением, определенным над множеством X, понимается подмножество множества $X \times X$ (см. выше). Перенося определение нечетких множеств на отношения, определим нечеткое отношение как нечеткое подмножество X^2. Таким образом, под *нечетким отношением* $\tilde{R}$ будем понимать функцию принадлежности $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$ такую, что $\mu_{\tilde{R}} : X \times X \to [0, 1]$. Значение функции принадлежности понимается как степень выполнения отношения $x\tilde{R}y$.

Свойства нечетких отношений.

1. *Рефлексивность*:

- если $\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ рефлексивно в смысле Р1;

- если $\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{R}}(x, x) = \frac{1}{2}$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ рефлексивно в смысле Р2.

2. *Антирефлексивность* (для Р1): если $\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{R}}(x, x) = 0$ то нечеткое отношение $\tilde{R}$ антирефлексивно в смысле Р1.

3. *Симметричность*: если $\forall x, y \in X$ выполняется $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x)$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется симметричным.

4. *Асимметричность*: если $\forall x, y \in X$ из $\mu_{\tilde{R}}(x, y) > 0$ следует $\mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется асимметричным.

5. *Линейность* (*полнота*): нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется λ-линейным в смысле определения Л1, если $\forall x, y \in X$ выполняется $\max\{\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{R}}(y, x)\} > \lambda$, где $\lambda \in [0, 1)$; при $\lambda = 0$, $\tilde{R}$ называется слабо линейным.

Если $\forall x, y \in X$ выполняется $\max\{\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{R}}(y, x)\} = 1$, то отношение $\tilde{R}$ называется *сильно линейным*.

Нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется линейным в смысле определения Л2, если $\forall x, y \in X$ выполняется $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(y, x)$.

6. *Отрицание* $\tilde{R}'$ отношения $\tilde{R}$ определяется как отношение, функция принадлежности которого $\forall x, y \in X$ определяется

$$\mu_{\tilde{R}'}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y).$$

7. *Обратное* к отношению $\tilde{R}$ отношение $\tilde{R}^{-1}$ определяется $\forall x, y \in X$ выражением $\mu_{\tilde{R}^{-1}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x)$.

8. *Композицией отношений* (произведением) называется отношение:

К1 – максиминная композиция:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2}(x, y) = \sup_{z \in X} \min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x, z), \mu_{\tilde{R}_2}(z, y)\};$$

К2 – минимаксная композиция:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2}(x, y) = \inf_{z \in X} \max\{\mu_{\tilde{R}_1}(x, z), \mu_{\tilde{R}_2}(z, y)\};$$

К3 – максмультипликативная композиция:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2}(x, y) = \sup_{z \in X} \{\mu_{\tilde{R}_1}(x, z)\, \mu_{\tilde{R}_2}(z, y)\}.$$

9. *Транзитивность*. В соответствии с тремя определениями композиции – (К1), (К2) и (К3) – можно построить три определения транзитивности – (Т1), (Т2) и (Т3) – по следующей схеме:

$\tilde{R} \cdot \tilde{R} \subseteq \tilde{R}$. Определение максиминной транзитивности в случае четких бинарных отношений совпадет с определением их транзитивности, приведенным выше.

Нечетким отношением предпочтения (НОП) называется нечеткое отношение, удовлетворяющее (Р1), (Л1) и (Т1).

Принцип обобщения определяет образ нечеткого множества при отображении последнего. Образом четкого множества A при четком отображении $f: X \to Y$ является множество таких элементов множества Y, для которых существует прообраз в множестве A:

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in A: f(x) = y\}.$$

В соответствии с *принципом обобщения* образом нечеткого множества $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $x \in X$, при четком отображении $f: X \to Y$ является нечеткое множество $\mu_{\tilde{B}}(y)$, $y \in Y$, с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_{\{x \in X \mid f(x) = y\}} \mu_{\tilde{A}}(x),\ y \in Y,$$

то есть значение функции принадлежности элемента $f(x)$ множества Y равно максимуму из функций принадлежностей его прообразов.

Принцип обобщения является удобным инструментом «перевода» четких моделей и задач в нечеткие и широко используется как в моделях принятия решений [36, 37], так и в задачах управления организационными системами [30, 31].

Модели принятия решений при нечеткой исходной информации. Сформулируем описанное в разделе 2.1.2 для четких бинарных отношений предпочтения правило индивидуального рационального выбора в терминах функций принадлежности:

$$P(R_{A_0}, A_0) = \{z \in A_0 \,\big|\, \forall t \in A_0 \quad zR_{A_0}t\}$$

в терминах функций принадлежности. Функция принадлежности четкого бинарного отношения предпочтения R задается в виде: $\mu_R(x, y) = 1$, если xRy. Строгая (асимметричная, антирефлексивная, транзитивная) его компонента (*отношение строгого предпочтения*) определяется функцией принадлежности:

$$\mu_P(x, y) = \max\{\mu_R(x, y) - \mu_R(y, x), 0\}.$$

Множество альтернатив $x \in A_0$, доминируемых хотя бы одной альтернативой $y \in A_0$, имеет функцию принадлежности $\mu_P(y, x)$.

Дополнение этого множества, то есть множество альтернатив $x \in A_0$, не доминируемых данной альтернативой $y \in A_0$, имеет функцию принадлежности $1 - \mu_P(y, x)$. Вычисляя пересечение по всем $y \in A_0$, находим множество альтернатив, недоминируемых по четкому бинарному отношению R_{A_0}:

$$P(R_{A_0}, A_0) = \inf_{y \in A_0} \{1 - \mu_P(y, x)\} = 1 - \sup_{y \in A_0} \mu_P(y, x).$$

<u>Пример 2.7.</u> Рассмотрим следующее четкое рефлексивное, полное, транзитивное бинарное отношение (отношение предпочтения) над множеством из трех действий y_1, y_2, y_3, такое, что y_1 не менее предпочтительно, чем y_2, а y_2 не менее предпочтительно чем y_3, y_1 не менее предпочтительно, чем y_3. Это четкое отношение предпочтения приведено в Табл. 2.1.

Табл. 2.1

	y_1	y_2	y_3
y_1	1	1	1
y_2	0	1	1
y_3	0	0	1

Матрица соответствующего ему строгого отношения предпочтения приведена в Табл. 2.2.

Табл. 2.2

	y_1	y_2	y_3
y_1	0	1	1
y_2	0	0	1
y_3	0	0	0

Функция $\mu_{\tilde{R}}^{НД}(x)$ для этого отношения предпочтения будет задаваться Табл. 2.3.

Табл. 2.3

	y_1	y_2	y_3
$\mu_{\tilde{R}}^{НД}$	1	0	0

Множество недоминируемых действий будет состоять из одного элемента – действия y_1. •

Повторим приведенные рассуждения для нечетких множеств. Воспользовавшись принципом соответствия, определим *нечеткое отношение строгого предпочтения* (НОСП) $\tilde{P}$, соответствующее НОП $\tilde{R}$, следующим образом:

$$\mu_{\tilde{P}}(x, y) = \max\{\mu_{\tilde{R}}(x, y) - \mu_{\tilde{R}}(y, x), 0\},\ x, y \in A.$$

Далее определим нечеткое множество недоминируемых альтернатив (действий):

$$\mu_{\tilde{R}}^{НД}(x) = 1 - \sup_{y \in A} \mu_{\tilde{P}}(y,\ x),\ x \in A.$$

Величину $\mu_{\tilde{R}}^{НД}(x)$ можно интерпретировать как степень недоминируемости действия $x \in A$, поэтому рациональным будем считать выбор активным элементом действий, имеющих по возможности бóльшую степень принадлежности четкому множеству недоминируемых альтернатив. Множество

$$A^{НД}(\tilde{R}) = \{x \in A \mid \mu_{\tilde{R}}^{НД}(x) = \sup_{z \in A} \mu_{\tilde{R}}^{НД}(z)\}$$

называется *множеством максимально недоминируемых действий* (*множеством С.А. Орловского* [37]).

Будем считать, что индивидуально рациональный выбор агента при НОП $\tilde{R}$ на множестве допустимых действий определяется следующим правилом рационального выбора:

$$P(\tilde{R}, A) = A^{НД}(\tilde{R}).$$

Четкое множество

$$A_{\alpha}^{НД}(\tilde{R}) = \{x \in A \mid \mu_{\tilde{R}}^{НД}(x) \ge \alpha\},\ \alpha \in (0, 1],$$

будем называть *множеством* α*-недоминируемых действий*.

Более полное представление о свойствах нечетких множеств и моделях принятия решений при нечеткой исходной информации можно получить в [7, 37].

Пример 2.8. Напомним Пример 2.6, где связь между действием агента и его результатом (исходом) описывалась вероятностным распределением, и рассмотрим теперь модель, в которой эта связь описывается нечеткими множествами. А именно, каждому возможному действию соответствует нечеткое множество возможных при этом действии результатов. Например, зададим связь между действиями $\{y_1, y_2, y_3\}$ и их результатами $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ следующей таблицей:

Табл. 2.4

Исход / Действие	z_0	z_1	z_2	z_3
y_1	0.5	0	0.8	1
y_2	0.1	0,7	1	0
y_3	0	1	0	0

Строки Табл. 2.4 соответствуют действиям, столбцы – результатам, а число из интервала [0, 1] в каждой ее ячейке описывает степень *возможности* реализации данного результата при данном действии[1].

Содержательно приведенная таблица говорит о том, что в результате выхода на новый рынок (действие y_1) достоверно возможно получение высокого уровня прибылей (исход z_3). Достоверности этого события соответствует единица в соответствующей ячейке таблицы. Менее достоверно, но также возможно (степень достоверности – 0.8) получение средней прибыли (исход z_2). Рискованность выхода на новый рынок описывается степенью достоверности 0.5 разорения фирмы (исход z_0). Аналогично интерпретируются и две другие строки таблицы.

---

[1] *Эта таблица, на самом деле, определяет нечеткое отображение множества действий фирмы во множество исходов. Отметим, что, в отличие от вероятностных моделей, здесь не соблюдается условие сбалансированности (сумма достоверностей реализации различных исходов данного действия не обязана равняться единице).*

Пусть, как и выше (см. Пример 2.3), предпочтения фирмы на множестве исходов заданы четким отношением предпочтения *R*, согласно которому исходы упорядочены по предпочтительности: $z_3 \succ z_2 \succ z_1 \succ z_0$. Для того чтобы воспользоваться описанным выше подходом для выделения множества максимально недоминируемых действий, необходимо от предпочтений на множестве исходов перейти к т.н. *индуцированному* отношению предпочтения (возможно, нечеткому отношению) на множестве действий. Как показано в [37] применение к этой задаче принципа обобщения приводит к следующей формуле для индуцированного отношения предпочтения:

$$\mu_{\tilde{R}}(y', y'') = \sup_{z'Rz''} \min[\mu_{\varphi}(y', z'); \mu_{\varphi}(y'', z'')],$$

где $\mu_{\tilde{R}}$ – это функция принадлежности нечеткого отношения предпочтения $\tilde{R}$ на множестве действий, индуцированного четким отношением предпочтения *R* на множестве исходов, а $\mu_{\varphi}(y, z)$ – это изображенная в Табл. 2.4 функция принадлежности нечеткого отображения множества действий во множество исходов.

Функция принадлежности построенного по этой формуле индуцированного отношения описывается следующей таблицей:

Табл. 2.5

	y_1	y_2	y_3
y_1	1	1	1
y_2	0.8	1	1
y_3	0,5	0,7	1

Единица на пересечении строки y_1 и столбца y_2 говорит о том, что действие y_1 предпочтительнее для фирмы действия y_2 с достоверностью 1. В то же время, легко видеть, что согласно этому отношению предпочтения, действие y_2 предпочтительнее действия y_1 с достоверностью 0.7.

Выделим индуцированное отношение строгого предпочтения:

Табл. 2.6

	$\boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{y}_2$	$\boldsymbol{y}_3$
$\boldsymbol{y}_1$	0	0.2	0.5
$\boldsymbol{y}_2$	0	0	0,3
$\boldsymbol{y}_3$	0	0	0

И, наконец, построим нечеткое множество недоминируемых альтернатив. Оно будет иметь следующую функцию принадлежности (см. также Пример 2.7 (Табл. 2.3), где рассматривается четкое отношение предпочтения на множестве действий):

Табл. 2.7

	$\boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{y}_2$	$\boldsymbol{y}_3$
$\mu_{\tilde{R}}^{НД}$	1	0.8	0.5

Таким образом, в данном примере у фирмы есть четко недоминируемое действие – выходить на новый рынок (действие y_1). Однако остальные два возможных действия также имеют ненулевую степень недоминируемости, и то, что эти степени (0,8 и 0,5 для действий y_2 и y_3 соответственно) существенно больше нуля, говорит о высокой неопределенности принятия решения в данном примере. •

2.3. *Принятие решений в условиях игровой неопределенности*

Выше рассмотрены модели принятия решений в условиях природной неопределенности. Давайте усложнять ситуацию дальше – см. Рис. 2.1. Мы начали с того, что агент описывался функцией полезности, зависящей только от его действия, потом добавили неопределенность в виде параметра, описывающего внешнюю среду. Но, возможно, помимо рассматриваемого агента, существуют другие агенты, с которыми он взаимодействует, а, значит, необходимо отразить в моделях принятия решений и это взаимодействие.

В настоящем разделе рассматриваются модели принятия решений в условиях *игровой неопределенности*, в том числе – игры в нормальной форме (раздел 2.3.1), иерархические игры (раздел 2.3.2) и рефлексивные игры (раздел 2.3.3).

2.3.1. Игры в нормальной форме

Теория игр описывает взаимодействие рациональных субъектов в ситуации, когда выигрыш одного зависит от действий всех (в общем случае), то есть *игра* определяется как такое взаимодействие, в котором выигрыш каждого агента зависит как от его собственного действия, так и от действий других агентов.

Формализуем эту ситуацию. Пусть задано множество *игроков* $N = \{1, 2, ..., n\}$. i-ый игрок выбирает действие y_i из множества своих допустимых действий $y_i \in A_i$, $i \in N$. Совокупность действий всех игроков называются *ситуацией игры* (*игровой ситуацией*): $y = (y_1, ..., y_n)$. Целевая функция i-го игрока зависит от игровой ситуации y и описывается отображением $f_i(y) : A' \to \Re^1$, где $A' = \prod_{i \in N} A_i$. Т.е. каждой комбинации действий игроков соответствует некоторый выигрыш каждого из них. Совокупность множества игроков (агентов), целевых функций и допустимых множеств агентов $\Gamma_0 = \{N, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N}, \{A_i\}_{i \in N}\}$ называется *игрой в нормальной форме*. При этом предполагается, что каждый из игроков выбирает свои действия однократно, одновременно с другими игроками и независимо, то есть, не имея возможности договариваться с ними о своих стратегиях поведения (так называемая *модель некооперативного поведения*). *Решением игры* (*равновесием*) называется множество устойчивых в том или ином смысле векторов действий агентов.

Возьмем i-го игрока и попробуем применить к нему гипотезу рационального поведения. Так как игрок рационален и выбирает i-ю компоненту вектора y, то своим выбором он пытается максимизировать свою целевую функцию: «$f_i(y) \to \max_{y_i \in A_i}$». Но то его действие, на котором достигается максимум целевой функции, будет зависеть от выбора других агентов. Задача такого вида в некотором смысле бессмысленна, т.к. ее решением будет действие $y_i^*(y_{-i})$, зависящее от действий всех других игроков – вектора $y_{-i} = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$, который называется *обстановкой игры* для i-го агента.

Рассмотрим возможные рассуждения отдельного игрока (агента): «Если остальные будут вести себя таким-то образом, то мне нужно вести себя таким образом, который максимизирует мою целевую функцию при данной обстановке. Но для того, чтобы выбрать свое действие, мне нужно знать, как будут себя вести остальные. Значит, мне нужно делать предположения о поведении остальных игроков». По аналогии с тем, как мы устраняли неопределенность в случае, когда имелся субъект, здесь присутствует множество игроков с так называемой *игровой неопределенностью*, т.е. неопределенностью, порождаемой целенаправленным поведением других игроков. Каждый игрок не может априори сказать, что сделают остальные. Рассмотрим возможные варианты.

Гарантирующее равновесие. Пусть i-ый игрок считает, что все остальные игроки действуют против него. Это – критерий пессимизма (максимального гарантированного результата – МГР, см. также раздел 2.2.1), который соответствует тому, что игрок выбирает действие

(1) $y_i^г \in \operatorname{Arg} \max\limits_{y_i \in A_i} \min\limits_{y_{-i} \in A_{-i}} f_i(y_i, y_{-i})$,

где $A_{-i} = \prod\limits_{j \neq i} A_j$. Он считает, что остальные игроки, независимо от своих собственных интересов, будут действовать против него, а уж выбором своего действия он будет максимизировать то, что зависит от него. Конструкция аналогична рассмотренному выше принципу максимального гарантированного результата в условиях интервальной неопределенности: берется сначала минимум по тому, что не зависит от рассматриваемого субъекта, потом – максимум по тому, что от него зависит. Такой принцип хорош тем, что всегда дает решение. Плох такой принцип тем, что игрок, принимающий решения, считает, что все остальные играют «против него», и забывает про то, что у других есть свои интересы, и, наверное, цель каждого игрока – максимизировать свою целевую функцию, а не сделать хуже партнеру (это может быть частным случаем целевой функции, но, к счастью, не всегда в жизни так бывает).

Определенный выше вектор действий игроков (состоящий из компонентов, описываемых (1), $i \in N$) называется *максиминным*, или *гарантирующим равновесием*. Это один из вариантов определения исхода игры. Можно сказать, что один из возможных вариантов поведения игроков – каждый из них выберет гарантирующее действие, т.е. реализует максиминное равновесие.

Пример 2.9. Обобщим Пример 2.1 на случай двух игроков (экономических агентов), принимающих решения об объемах выпускаемой продукции. То есть: $N = \{1; 2\}$, $y_i \geq 0$ – действие i-го игрока, $c_i(y_i, r_i) = (y_i)^2 / 2\, r_i$ – его функция затрат, $i = 1, 2$. Предположим, что рыночная цена на продукцию, производимую агентами, зависит от суммарного предложения: $\lambda(y) = \lambda_0 - y_1 - y_2$. Тогда целевые функции игроков примут вид (рассматриваемая модель называется *дуополией Курно* [10]):

(2) $f_i(y) = (\lambda_0 - y_1 - y_2)\, y_i - (y_i)^2 / 2\, r_i$, $i = 1, 2$.

Целевая функция каждого агента убывает по действию его оппонента, поэтому максиминным равновесием будет выбор всеми агентами нулевых объемов производства. Выигрыши агентов в этом равновесии равны нулю, то есть максиминное равновесие дает оценку выигрышей снизу. Однако с практической точки зрения такое равновесие выглядит неправдоподобным – никто ничего не производит. •

Рассмотренный вариант принятия агентами решений (максиминное равновесие) не единственен. И основная проблема теории игр на сегодняшний день заключается в том, что не существует единственной общепринятой концепции решения игры, т.е. мы не можем, глядя на целевые функции и допустимые множества, сказать, что игроки сыграют именно так. Необходимо вводить дополнительные предположения, что приводит к разным прогнозируемым исходам игры. Ввели предположение о выборе гарантирующих действий – получили максиминное равновесие. В разных моделях используются разные предположения, которые приводят к различным концепциям равновесия. Поэтому рассмотрим некоторые другие варианты.

Равновесие в доминантных стратегиях. Представим ситуацию, в которой целевая функция i-го игрока $f_i(y)$ достигает максимума по его действию в точке, которая не зависит от действий других игроков, т.е. у игрока существует его действие, которое является наилучшим независимо от того, что делают оппоненты. Это оптимальное действие, не зависящее от обстановки, называется *доминантным действием* агента.

Формально: действие y_i^d будет доминантным, если какая бы обстановка игры не складывалась и какое бы действие не выбирал i-ый игрок при этой обстановке, его выигрыш будет максимальным при выборе именно доминантного действия:

(3) $\forall y_i \in A_i \;\; \forall y_{-i} \in A_{-i} \quad f_i(y_i^d, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i})$.

Отметим, что в обеих частях неравенства фигурирует произвольная, но одна и та же игровая обстановка.

Если у каждого игрока существует доминантное действие, то совокупность доминантных действий называется *равновесием в доминантных стратегиях* (РДС) $\{y_i^d\}_{i \in N}$. Это – идеальная ситуация для исследователя, создающего математическую модель. Если удалось построить такую модель, в которой есть равновесие в доминантных стратегиях игры управляемых субъектов – это замечательно, т.к. не нужно описывать взаимодействие субъектов между собой, учитывать, как они друг на друга влияют, как они принимают решения. Если есть равновесие в доминантных стратегиях, то каждый агент принимает решение независимо. А анализировать независимое принятие решений гораздо проще. Но такая ситуация встречается очень редко.

Если рассмотреть Пример 2.9, то окажется, что в нем не существует РДС. Хрестоматийными примерами игр, в которых существует РДС, являются игры с сепарабельными целевыми функциями агентов, и игры с такими целевыми функциями, которые монотонны по действию агента, независимо от обстановки игры. Частным случаем сепарабельных целевых функций, являются аддитивные.

<u>Пример 2.10.</u> Пусть целевые функции агентов аддитивны и линейны

(4) $f_i(y) = \alpha_{i0} + \sum_{j \in N} \alpha_{ij} y_j$,

где $\{\alpha_{ij}\}$ и $\{\alpha_{i0}\}$ – известные константы, причем без потери общности можно считать, что $A_i = [0; 1]$, $i \in N$. В линейном случае у каждого агента существует доминантное действие:

$$y_i^d = \mathrm{Sign}(\alpha_{ii}),\ i \in N.$$

где $\mathrm{Sign}\,(z) = \begin{cases} 1, & z \ge 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$. •

Равновесие Нэша. Гораздо чаще, чем РДС, существует *равновесие Нэша* (РН). Джон Нэш, американский математик, в начале 50-х годов XX века предложил следующее: устойчивым исходом взаимодействия агентов можно считать такой вектор их действий, от которого в одиночку никому из них не выгодно отклоняться. Это значит, что ни один из агентов, в одиночку меняя свое действие на другое, не может увеличить свой выигрыш при условии, что остальные своих действий не меняют.

Формальное определение равновесия Нэша $y^N \in A'$ таково:

(5) $\forall i \in N\ \ \forall y_i \in A_i\ \ f_i(y_i^N, y_{-i}^N) \ge f_i(y_i, y_{-i}^N)$,

то есть для любого агента и для любого допустимого его действия выбор им равновесного по Нэшу действия дает ему выигрыш не меньший, чем при выборе любого другого действия при условии, что остальные игроки выбирают равновесные по Нэшу действия.

Отличие между изложенными подходами (РДС и равновесием Нэша) заключается в том, что в формулировке равновесия в доминантных стратегиях (3) фигурирует произвольная обстановка, то есть доминантное действие – наилучшее при любой обстановке. А действие, устойчивое по Нэшу, – наилучшее при «нэшевской» обстановке (см. (5)).

Равновесие Нэша хорошо тем, что в большинстве моделей оно существует. Одним из его недостатков является то, что оно не всегда единственно. Ведь если есть два равновесия, то как предсказать, в каком из них окажутся агенты? Нужны дополнительные предположения.

Кроме того, равновесие по Нэшу не устойчиво к отклонению двух и более игроков. По определению одному агенту не выгодно отклоняться, но это не значит, что если два агента договорились и одновременно отклонились от равновесной ситуации, то они не смогут оба выиграть. То есть равновесие Нэша – существенно некооперативная концепция равновесия.

Пример 2.11. Возьмем Пример 2.9 и найдем для него равновесие Нэша игры агентов, выбрав $\lambda_0 = 5$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Для этого продифференцируем целевую функцию каждого агента по его действию, приравняем производную нулю, и решим систему уравнений. Получим равновесные действия агентов: $y_1^N = 15/13$, $y_2^N = 20/13$.

Из решения видно, что второй агент, имеющий бóльший тип (и, соответственно, меньшие издержки производства), выбирает в равновесии больший объем производства. •

Пример 2.12. Пусть целевая функция i-го агента $f_i(y, r_i)$ представляет собой разность между доходом $h_i(y)$ от совместной деятельности и затратами $c_i(y, r_i)$, где r_i – параметр эффективности (тип) агента, то есть

(6) $f_i(y, r_i) = h_i(y) - c_i(y, r_i),\ i \in N.$

Выберем следующий вид функций дохода и затрат:

(7) $h_i(y) = \gamma_i\, \lambda\, Y,\ i \in N,$

(8) $c_i(y, r_i) = \dfrac{y_i^2}{2(r_i \pm \beta_i \sum\limits_{j \neq i} y_j)},\ i \in N,$

где $Y = \sum\limits_{i \in N} y_i$, $\sum\limits_{i \in N} \gamma_i = 1$. Для случая, когда в знаменателе выражения (8) стоит знак «–», предполагается, что $\sum\limits_{j \neq i} y_j < \dfrac{r_i}{\beta_i}$.

Содержательно набор агентов может интерпретироваться как некоторая фирма, подразделения которой (агенты) производят однородную продукцию, реализуемую на рынке по цене λ. Суммарный доход $\lambda\, Y$ распределяется между агентами в соответствии с фиксированными долями $\{\gamma_i\}$. Затраты агента возрастают по его действиям, а эффективность деятельности (знаменатель выражения (8)) определяется типом агента. Взаимодействие агентов моделируется зависимостью затрат (эффективности деятельности) каждого из них от действий всех (других) агентов. Знак «+» в знаменателе выражения (8) соответствует эффективному взаимодействию агентов (убыванию затрат на масштаб) – чем большие действия выбирают другие агенты, тем меньше затраты (выше эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать снижению удельных постоянных издержек, обмену опытом, технологиями и т.д. Знак «-» в знаменателе выражения (8) соответствует неэффективному взаимодействию агентов (возрастанию затрат на масштаб) – чем большие действия выбирают другие агенты, тем больше затраты (ниже эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать нехватке основных фондов, ограничениям на побочные показатели (например, загрязнение окружающей среды) и т.д. Коэффициенты $\{\beta_i \geq 0\}$ отражают степень взаимозависимости агентов.

Пусть рыночная цена λ известна всем агентам. Тогда, дифференцируя целевые функции агентов, приравнивая производные нулю и складывая получившиеся при этом выражения

$$y_i = \gamma_i \, \lambda \, (r_i \pm \beta_i \sum_{j \neq i} y_j \,), \; i \in N,$$

получим следующую зависимость суммарных действий от параметра λ:

$$Y(\lambda) = \frac{\sum_{i \in N} \frac{\gamma_i \lambda r_i}{1 \pm \gamma_i \lambda \beta_i}}{1 \mp \sum_{i \in N} \frac{\gamma_i \lambda \beta_i}{1 \pm \gamma_i \lambda \beta_i}}.$$

Пусть $n = 2$, $\gamma_i = \beta_i = 1/2$, $i = 1, 2$, тогда суммарное действие и равновесные по Нэшу действия агентов равны, соответственно:

(9) $Y(\lambda) = 2 \, \lambda \, R \, / \, (4 \mp \lambda)$,

(10) $y^*_i(\lambda) = \dfrac{2\lambda}{16 - \lambda^2} \; (4 \, r_i \pm \lambda \, r_{-i}), \; i = 1, 2.$ •

Эффективность по Парето. Помимо перечисленных выше концепций равновесия (которые далеко не исчерпывают имеющегося на сегодняшний день разнообразия определений равновесия – см. [8, 9, 47, 49]), необходимо ввести понятие эффективности по Парето (названное в честь предложившего это понятие итальянского экономиста В. Парето). Игровая ситуация $y^P \in A'$, принадлежащая множеству A' допустимых векторов действий, будет *эффективной по Парето* (являться точкой Парето), если для любой другой игровой ситуации найдется агент такой, что значение его целевой функции будет строго меньше, чем в точке Парето:

$$\forall y \neq y^P \;\; \exists i \in N \;\; f_i(y) < f_i(y^P)\,.$$

Т.е. точка Парето – такая точка, отклоняясь от которой, мы не можем одновременно увеличить значения целевых функций всех игроков. Концепция эффективности по Парето хороша тем, что позволяет говорить, что, если мы можем увеличить выигрыши всех без исключения агентов, то это надо делать.

Один из ключевых вопросов, исследованием которого занимается теория игр, заключается в том, как соотносятся все вышеперечисленные концепции равновесия (максиминное равновесие, РДС и равновесие Нэша) с эффективностью по Парето, т.к. хочется, чтобы результат, приносящий индивидуальный оптимум, был бы еще эффективным для общества (коллектива агентов) в целом. Оказывается, что эффективность по Парето, к сожалению, никак не соотносится ни с одной из трех концепций решения игры (равновесия), изложенных выше.

Пример 2.13. Рассмотрим Пример 2.10, в котором обозначим $\beta_j = \sum\limits_{i \in N} \alpha_{ij}$, $\beta_0 = \sum\limits_{i \in N} \alpha_{i0}$. Тогда суммарный выигрыш агентов равен

(11) $\Sigma(y) = \beta_0 + \sum\limits_{j \in N} \beta_j y_j$.

Доставляющее максимум выражению (11) и эффективное по Парето действие i-го агента есть:

(12) $y_i^P = \mathrm{Sign}(\beta_i)$, $i \in N$.

Если $\forall\, i \in N$ $\mathrm{Sign}(\alpha_{ii}) = \mathrm{Sign}(\beta_i)$, то РДС является эффективным по Парето. Если $\exists\, i \in N$: $\mathrm{Sign}(\alpha_{ii}) \neq \mathrm{Sign}(\beta_i)$, то требуется согласование интересов агентов. •

Пример 2.14. Рассмотрим пример с конкретными целевыми функциями. Пусть каждый игрок выбирает действия из отрезка $A_i = [0; 1]$. Выигрыш i-го агента – $f_i(y) = y_i + \sum\limits_{j \neq i} (1 - y_j)$. Исследуем, существует ли равновесие в доминантных стратегиях или равновесие по Нэшу.

Если внимательно посмотреть на целевую функцию, то видно, что i-му агенту выгодно, максимизируя свою целевую функцию, выбирать максимальное значение своего действия независимо от того, что делают остальные (производная по действию i-го агента строго положительна независимо от обстановки). Значит, каждый агент будет выбирать максимальное значение своего действия, т.е. для него существует доминантное действие. Чтобы не выбрали остальные, он, увеличивая свое действие, выигрывает, а больше единицы он выбрать не может, значит, $y_i^d = 1$, $i \in N$.

Вычислим выигрыш каждого агента от равновесия в доминантных стратегиях. Если все выбрали по единице, то каждый получил выигрыш, равный единице: $f_i(y^d) = 1$, $i \in N$.

Рассчитаем теперь один из векторов действий, эффективных по Парето (вычислив, например, максимум суммы целевых функций всех агентов). Это – вектор нулевых действий: $y_i^P = 0$, $i \in N$. Если все агенты выбирают нулевые действия, то выигрыш i-го агента равен $f_i(y^P) = n - 1$, $i \in N$, и нельзя увеличить выигрыш одновременно всех агентов. Если мы хотим увеличить выигрыш i-го агента и начинаем увеличивать его действие, то тем самым уменьшаем выигрыши остальных, потому что это действие входит с минусом в целевые функции других агентов.

Если играют три или более агентов, то, выбирая действия, эффективные по Парето, они получают строго больше, выбирая доминантные действия, так как $n - 1 > 1$ при $n \geq 3$.

Спрашивается, будет ли точка Парето точкой равновесия Нэша (ведь любое РДС является равновесием Нэша), то есть рациональной с точки зрения индивидуального поведения? Если кто-то из игроков выберет ненулевое действие, он выиграет. Поэтому он увеличит свое действие до единицы, остальные поступают аналогично, и все «скатывается» к ситуации равновесия в доминантных стратегиях, которая никому не выгодна, но устойчива. •

Другим хрестоматийным примером неэффективности по Парето равновесия Нэша является следующий. Представим себе толпу зрителей, наблюдающих за уличным театральным представлением. У каждого зрителя есть два действия – стоять «как обычно» или встать «на цыпочки». Ситуация, когда все стоят «как обычно» не устойчива – один встает «на цыпочки», чтобы лучше видеть, но загораживает обзор другим. В результате все страдают, стоя «на цыпочках». Получили неэффективную по Парето (всем неудобно), но устойчивую по Нэшу ситуацию игры (если все стоят «на цыпочках», то отдельный зритель, встав «как обычно», ничего не увидит).

Рассмотренные примеры иллюстрирует, что устойчивость относительно индивидуальных отклонений никак не связана с эффективностью по Парето. Решить эту проблему можно следующим образом: если разыгрывается повторяющаяся игра, и игроки договариваются наказывать того, кто отклоняется от коллективного оптимума, т.е. равновесия по Парето, то оказывается, что, если наказание достаточно сильно, то каждый будет выбирать индивидуально устойчиво то действие, которое выгодно для всех [47, 49].

Другой вариант, как можно достичь «коллективного оптимума». Мы, описывая взаимодействие агентов, которые равноправны, принимаем решение назначить над ними «начальника», который будет ответственен за то, чтобы они не отклонялись от «коллективного оптимума», не пытались локально увеличить свой выигрыш, а выбирали равновесие, эффективное по Парето. Т.е. функция «начальника» – предотвратить отклонения агентов от оптимума по Парето. Можно даже рассчитать, сколько агенты могут выделить на содержание такого начальника (как разность между тем, что они получают в сумме в точке Парето и тем, что они имеют при равновесии в доминантных стратегиях). Это – одно из теоретико-игровых обоснований возникновения иерархий [28]. Более подробное обсуждение проблем взаимосвязи между различными концепциями равновесия можно найти в учебниках по теории игр [8, 9, 47, 49].

Итак, выше описана игра в нормальной форме, где выигрыш каждого агента зависит от действий всех, и все агенты принимают решения одновременно. Рассмотрим модели ситуаций, когда решения принимаются однократно, но последовательно.

2.3.2. Иерархические игры

Наиболее подходящим инструментом для моделирования процессов организационного управления являются игры, в которых игроки принимают решения не одновременно, а последовательно, т.е., если имеется управляющий орган – центр – и управляемые субъекты (агенты), то сначала центр определяет правила игры, а дальше агенты принимают решения, исходя из этих правил. Такие игры называются иерархическими. По определению, *иерархическая игра* – игра с фиксированной последовательностью ходов.

Простейшая иерархическая игра – такая, в которой есть первый игрок – центр, второй игрок – агент (см. Рис. 2.2).

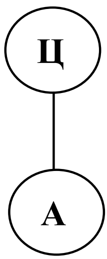


Рис. 2.2. Базовая структура «центр-агент»

Для иерархических игр характерно использование максимального гарантированного результата (МГР) в качестве базовой концепции решения игры. При этом «пессимистичность» МГР (взятие минимума по множеству неопределенных параметров) компенсируется возможностью передачи информации между игроками, что, очевидно, снижает неопределенность при принятии решения.

Критерии эффективности (целевые функции) первого и второго игроков обозначим[1] $w_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $w_2 = f_2(x_1, x_2)$ соответственно. Выигрыши игроков зависят от их действий x_1 и x_2 из множеств действий X_1^0, X_2^0.С одной стороны, получается игра двух лиц в нормальной форме, поэтому, если не введено условие последовательности выбора действий, то возможно достижение равновесия по Нэшу и т.п.

Во всех моделях иерархических игр считается, что *первый игрок* (*центр*) имеет право первого хода. Его ход состоит в выборе *стратегии* $\tilde{x}_1$. Понятие стратегии существенно отличается от понятия действия и тесно связано с информированностью первого игрока о поведении *второго игрока – агента*. Под стратегией игрока здесь и далее понимается правило его поведения, то есть правило выбора конкретного действия в зависимости от содержания и конкретного значения той информации, которую он получит в процессе игры.

[1] *В настоящем и следующем разделах мы используем систему обозначений, принятых, соответственно, в теории иерархических игр и в теории рефлексивных игр.*

Выбирать же собственно действие центр может и после выбора действия агентом.

Самая простая стратегия центра состоит в выборе непосредственно действия x_1 (если поступления дополнительной информации о действии агента в процессе игры не ожидается), более сложная – в выборе функции $\tilde{x}_1(x_2)$ (если в процессе игры ожидается информация о действии агента). Также стратегия центра может состоять в сообщении агенту некоторой информации, например, о планах своего поведения в зависимости от выбора агентом действия. При этом агент должен быть уверен, что первый игрок может реализовать эту стратегию, то есть что первый игрок будет точно знать реализацию действия x_2 на момент выбора своего действия x_1.

Например, если агент (выбирающий стратегию вторым) не ожидает информации о действии центра, то реализация права первого хода центра может состоять в сообщении центром агенту функции $\tilde{x}_1(x_2)$. Такое сообщение может рассматриваться, как обещание выбрать действие $x_1 = \tilde{x}_1(x_2)$ при выборе агентом действия x_2. Тогда стратегия агента состоит в выборе действия в зависимости от сообщения центра, $x_2 = \tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1(\cdot))$. Если при этом агент доверяет сообщению центра, он должен выбрать действие x_2^*, реализующее

$$\max_{x_2 \in X_2^0} f_2(\tilde{x}_1(x_2), x_2).$$

Игра с описанным выше порядком функционирования называется для краткости *игрой $Г_2$* (примером такой игры служит, как раз, задача стимулирования в условиях информированности центра о действии агента – см. ниже) [6].

Если центр не ожидает информации о действии агента, и это известно агенту, то стратегия центра состоит, как уже было сказано, просто из выбора некоторого действия x_1^*. Стратегия агента состоит в выборе $x_2 = \tilde{x}_2(x_1^*)$ (он делает ход вторым, уже зная действие центра). Такая игра называется *игрой $Г_1$* (это, например, та же задача стимулирования, но уже в условиях отсутствия у центра информации о действии агента) [6].

Рассмотрим сначала игру $Г_1$. Пара действий (x_1^*, x_2^*) в игре $Г_1$ называется *равновесием Штакельберга*, если

(1) $x_1^* \in \underset{x_1 \in X_1^0,\, x_2 \in R_2(x_1)}{\operatorname{Arg\,max}} f_1(x_1, x_2)$,

(2) $x_2^* \in R_2(x_1^*) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^*, x_2)$,

то есть $R_2(x_1)$ – функция наилучшего ответа агента на действие центра.

Равновесие в игре Γ_1 отличается от равновесия Штакельберга (1) тем, что при определении оптимальной стратегии первого игрока вычисляется минимум по множеству $R_2(x_1)$:

(3) $x_1^* \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x_1 \in X_1^0} \min\limits_{x_2 \in R_2(x_1)} f_1(x_1, x_2)$.

<u>Пример 2.15.</u> Рассмотрим Пример 2.1, в котором

$$f_1(x_1, x_2) = \alpha\, x_1 - x_1\, x_2,\ f_2(x_1, x_2) = x_1\, x_2 - (x_2)^2 / 2\, r.$$

Содержательно, центр по тем или иным причинам заинтересован ($\alpha > 0$ – известная константа) в завышении цены $x_1 \in X_1^0 = [0; +\infty)$, но, в то же время, он выбирает цену, по которой он готов приобрести продукцию, производимую агентом, и сообщает эту цену агенту, после чего агент принимает решение об объеме выпуска x_2.

При отсутствии технологических ограничений ($X_2^0 = [0; +\infty)$) максимум функции $f_2(x_1, x_2)$ по x_2 достигается при выборе агентом действия $x_2^*(x_1) = x_1\, r$ (отметим, что в рассматриваемом примере множество $R_2(x_1)$ состоит из единственной точки $x_2^*(x_1)$, поэтому равновесия (1) и (3) совпадают).

Находим $x_1^* = \arg\max\limits_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1,\ x_2^*(x_1)) = \alpha / 2\, r$, после чего вычисляем $x_2^* = \alpha / 2$. •

В игре Γ_1 агент выбирает действие в условиях полной информированности, уже зная действие центра. Максимизация выигрыша выбором своего действия является здесь частным случаем применения принципа МГР. Равновесное по Штакельбергу действие центра также дает ему гарантированный результат, если центр уверен в том, что агент выбирает свое действие в соответствии с (2) и принципом благожелательности. Таким образом, равновесные стратегии как центра, так и агента, являются для них и гарантирующими.

Однако ситуация, когда первый ход дает преимущество, все же более типична. Тогда, если порядок ходов определяется самими игроками, между ними возникает борьба за лидерство. Игре двух лиц в нормальной форме можно поставить в соответствие две игры Γ_1 (игры первого порядка), отличающиеся последовательностью ходов. Тогда борьба за лидерство (первый ход) определяется выгодностью перехода от исходной игры к какой-либо из иерархических игр первого порядка. Известно [8], что, если в игре двух лиц имеются хотя бы два различных оптимальных по Парето равновесия Нэша, то в этой игре имеет место борьба за первый ход.

Тем не менее, во многих случаях соответствующее игре Γ_1 поведение центра нельзя назвать эффективным – см. примеры в [31]. Поэтому, когда центр наблюдает действие агента, он заинтересован сообщить агенту о своих планах по выбору действия в зависимости от действия агента, реализуя тем самым игру Γ_2.

Приведем формулировку теоремы о максимальном гарантированном результате центра в игре типа Γ_2. К этой игре сводятся многие модели управления, например, задача стимулирования в условиях полной информированности (см. ниже). Определим необходимые для формулировки теоремы понятия.

Целевые функции игроков: $w_1 = f_1(x_1, x_2)$, $w_2 = f_2(x_1, x_2)$ непрерывны на компактных множествах $x_1 \in X_1^0$ $x_2 \in X_2^0$ допустимых действий.

Стратегия центра – $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(x_2)$, то есть предполагается следующий порядок функционирования: игрок 1 (центр), обладая правом первого хода, сообщает игроку 2 (агенту) план выбора своей стратегии в зависимости от выбранной игроком 2 стратегии x_2. После этого второй игрок выбирает действие x_2, максимизируя свою целевую функцию с подставленной туда стратегией первого игрока, а затем первый игрок – действие $\tilde{x}_1(x_2)$.

Стратегия наказания $x_1^н = x_1^н(x_2)$ определяется из условия

$$f_2(x_1^н(x_2), x_2) = \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Если стратегий наказания несколько, то будем называть *опти-*

мальной стратегией наказания ту из них, на которой достигается максимум выигрыша первого игрока.

Гарантированный результат второго игрока (при использовании первым игроком стратегии наказания) равен

$$L_2 = \max_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^{н}(x_2), x_2) = \max_{x_2 \in X_2^0} \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Множество действий второго игрока, обеспечивающих ему максимальный выигрыш при использовании первым игроком стратегии наказания, есть $E_2 = \{x_2 \mid f_2(x_1^{н}(x_2), x_2) = L_2\}$.

Множество достижимости $D = \{(x_1, x_2) : f_2(x_1, x_2) > L_2\}$ – это договорное множество рассматриваемой игры, то есть множество сочетаний стратегий первого и второго игроков, которые гарантировали бы второму результат, строго больший того, что тот может получить даже при наихудших для него действиях первого игрока (то есть при использовании первым игроком стратегии наказания).

Наилучший результат первого игрока на множестве достижимости есть $K = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2) \in D} f_1(x_1, x_2), & D \neq \varnothing \\ -\infty, & D = \varnothing \end{cases}$. Принадлежность ситуации множеству достижимости гарантирует реализуемость этого результата путем использования стратегии наказания.

Определим действие первого игрока, дающее ему выигрыш $K - \varepsilon$ при выборе вторым игроком рекомендуемого действия из D:

$$f_1(x_1^{\varepsilon}, x_2^{\varepsilon}) \geq K - \varepsilon, \ (x_1^{\varepsilon}, x_2^{\varepsilon}) \in D \neq \varnothing .$$

Вычислим $x_2 \in E_2$ – гарантированный результат центра при применении им стратегии наказания (так как стратегии второго игрока ограничены множеством E_2).

Определим стратегию $x_1^{a\varepsilon}(x_2)$, которая реализует (с точностью до ε) наилучший ответ центра на действие x_2 агента (ε-доминантная стратегия), то есть

$$L_2 = \inf_{x_1} f_2(x_1, x_2) \leq f_2(\tilde{x}_1, x_2) \leq \sup_{x_2 \in X_2^0} f_2(\tilde{x}_1, x_2) = L_2 .$$

Теорема Ю.Б. Гермейера [6]. В игре $Г_2$ наибольший гарантированный результат центра равен $\max[K, M]$. При $K > M$ εоптимальная стратегия центра $\tilde{x}_1^{\varepsilon}(x_2) = \begin{cases} x_1^{\varepsilon}, & \text{при}\, x_2 = x_2^{\varepsilon} \\ x_1^{н}(x_2), \text{при}\, x_2 \neq x_2^{\varepsilon} \end{cases}$. При $K \leq M$ оптимальная стратегия центра заключается в применении оптимальной стратегии наказания.

Каким же образом соотносятся выигрыши центра в играх $Г_1$ и $Г_2$ с одинаковыми функциями выигрыша? Существуют ли более рациональные для центра методы обмена информацией, дающие ему больший выигрыш? Ответ на эти вопросы дает рассмотрение *информационных расширений* игры, или *метаигр*.

Если центр не планирует самостоятельно получить информацию о действии агента, он может первым выбрать действие, реализуя игру $Г_1$. Однако ему можно порекомендовать и более сложное поведение. Центр может попросить агента сообщить ему свою стратегию $x_2 = \tilde{x}_2(x_1)$, которая основана на ожидаемой агентом информации о действии центра. Реализация права первого хода центром состоит в этом случае в сообщении агенту стратегии $\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2(x_1))$. Эту стратегию можно интерпретировать, как обещание центра выбрать действие $\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2(x_1))$ при условии, что агент обещает выбирать свое действие в соответствии с $\tilde{x}_2(x_1)$. Так образуется игра $Г_3$.

Если центр определяет порядок обмена информацией, он может выбирать, играть ему $Г_1$ или $Г_3$. В обеих играх центр вынужден выбирать действие, не зная действия, выбранного агентом. Можно считать $Г_3$, в некотором роде, усложнением игры $Г_1$.

Аналогично тому, как, с помощью образования дополнительной «петли обратной связи», из $Г_1$ была образована $Г_3$, можно усложнить и игру $Г_2$. Так образуется игра $Г_4$. В ней агент, ожидая от центра, как и в $Г_2$, информацию вида $\tilde{x}_1(x_2)$, формирует и сообщает центру свою стратегию $\tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1)$. Центр, обладающий правом первого хода, пользуется стратегиями $\tilde{\tilde{\tilde{x}}}_1(\tilde{\tilde{x}}_2)$, которые определяют, какую функцию $\tilde{x}_1(x_2)$ выберет центр в зависимости от сообщения агента $\tilde{\tilde{x}}_2$.

Таким же способом можно на основе $Г_3$ построить игру $Г_5$, и так далее. В каждой из построенных четных игр $Г_{2m}$, $m = 1, 2, \ldots$, центр использует в качестве стратегий отображения множества стратегий агента в этой игре на множество стратегий центра в игре $Г_{2m-2}$. Аналогично, стратегиями агента являются отображения множества стратегий центра в $Г_{2m}$ на множество стратегий агента в игре $Г_{2m-2}$.

Такую рефлексию можно было бы наращивать бесконечно, переходя к все более сложным схемам обмена информацией, если бы рассмотрение этих игр увеличивало выигрыш центра (в интересах которого и проводится исследование всех метаигр). Однако имеет место следующий результат.

Теорема Н.С. Кукушкина [6, 14]. Максимальный гарантированный результат центра в игре $Г_{2m}$ при $m > 1$ равен максимальному гарантированному результату центра в игре $Г_2$. В играх же $Г_{2m+1}$ при $m > 1$ максимальный гарантированный результат центра равен его максимальному гарантированному результату в игре $Г_3$.

Таким образом, при исследовании гарантированного результата центра можно ограничиться только играми $Г_1$, $Г_2$ и $Г_3$. Кроме того, известно [20, 34], что максимальный гарантированный результат центра в игре $Г_2$ не меньше его гарантированного результата в игре $Г_3$, а тот, в свою очередь, не меньше гарантированного выигрыша в игре $Г_1$. Этот факт показывает, что $Г_2$ является «идеальной» игрой для центра. Соответственно, если центр имеет возможность определять порядок и содержание обмена информацией, и, кроме того, при выборе своего действия знает действие, выбранное агентом, он должен играть $Г_2$. Если центр на момент выбора своего действия не знает действия агента – ему наиболее выгодна игра $Г_3$.

Приводить здесь примеров, иллюстрирующих нахождение «равновесия» в игре $Г_2$, мы не будем, так как множество задач управления, использующих теорему Ю.Б. Гермейера, описаны ниже.

2.3.3. Рефлексивные игры

Как отмечалось выше, основная задача теории игр заключается в описании взаимодействия нескольких агентов, интересы которых не совпадают, а результаты деятельности (выигрыш, полезность и т.д.) каждого зависят в общем случае от действий всех. Итогом подобного описания является прогноз разумного исхода игры – так называемого *решения игры* (*равновесия*).

Описание *игры* заключается в задании следующих параметров:

- *множества агентов*;

- *предпочтений агентов* (зависимостей выигрышей от действий): при этом предполагается (и этим отражается целенаправленность поведения), что каждый агент заинтересован в максимизации своего выигрыша;

- *множеств допустимых действий агентов*;

- *информированности агентов* (той информации, которой они обладают на момент принятия решений о выбираемых действиях);

- *порядка функционирования* (*порядок ходов* – последовательность выбора действий).

Условно говоря, множество агентов определяет, кто участвует в игре. Предпочтения отражают, что хотят агенты, множества допустимых действий – что они могут, информированность – что они знают, а порядок функционирования – когда они выбирают действия.

В теории игр, философии, психологии и в других областях науки (см. [33]) существенны не только *представления* (beliefs) агентов о существенных параметрах, но и их представления о представлениях других агентов и т.д. Совокупность этих представлений называется *иерархией представлений* (hierarchy of beliefs) и моделируется деревом информационной структуры рефлексивной игры (см. ниже). Другими словами, в ситуациях интерактивного принятия решений (моделируемых в теории игр) каждый агент перед выбором своего действия должен предсказать поведение оппонентов. Для этого у него должны быть определенные представления о видении игры оппонентами. Но оппоненты должны проделать то же самое, поэтому неопределенность относительно той игры, которая будет разыграна, порождает бесконечную иерархию представлений участников игры.

Приведем пример иерархии представлений. Предположим, что имеются два агента – А и Б. Каждый из них может иметь собственные нерефлексивные представления о неопределенном параметре θ, – *состоянии природы*. Обозначим эти представления $\theta_А$ и $\theta_Б$ соответственно. Но каждый из агентов в рамках процесса *рефлексии первого ранга* может задуматься о представлениях оппонента. Эти представления (*представления второго порядка*) обозначим $\theta_{АБ}$ и $\theta_{БА}$, где $\theta_{АБ}$ – представления агента А о представлениях агента Б, $\theta_{БА}$ – представления агента Б о представлениях агента А. Но этим дело не ограничивается – каждый из агентов в рамках процесса дальнейшей рефлексии (*рефлексии второго ранга*) может задуматься над тем, каковы представления оппонента о его представлениях. Так порождаются представления *третьего порядка* – $\theta_{АБА}$ и $\theta_{БАБ}$. Процесс порождения представлений более высоких порядков может продолжаться до бесконечности (никаких логических ограничений увеличению ранга рефлексии не существует). Совокупность всех представлений – $\theta_А$, $\theta_Б$, $\theta_{АБ}$, $\theta_{БА}$, $\theta_{АБА}$, $\theta_{БАБ}$ и т.д. – образует иерархию представлений.

Частным случаем информированности – когда все представления, представления о представлениях и т.д. до бесконечности совпадают – является *общее знание*. Более корректно, термин «общее знание» (common knowledge) обозначает факт, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) о нем известно всем агентам;

2) всем агентам известно 1;

3) всем агентам известно 2 и т.д. до бесконечности

Отметим, что для реализации равновесия Нэша (см. раздел 2.3.1 выше) необходимо, чтобы все параметры игры (множество игроков, их целевые функции и множества допустимых действий) были общим знанием среди игроков, ведь выражение (5) должно быть доступно каждому игроку, при этом он должен быть уверен, что это выражении доступно и другими игроками, которые должны быть уверены в том, что выражение (5) доступно ему и т.д. до бесконечности. А что произойдет, если общее знание отсутствует? Тогда пользоваться концепцией равновесия Нэша уже нельзя. Следовательно, возникает необходимость в разработке и исследовании математических моделей игр, в которых информированность агентов не является общим знанием и агенты принимают решения на основе иерархии своих представлений. Этот класс игр называют *рефлексивными играми* (термин «рефлексивные игры» был введен В.А. Лефевром [18]). Перейдем к формальной модели.

Рассмотрим игру, в которой участвуют агенты из множества $N = \{1, 2, ..., n\}$. Если в целевых функциях агентов присутствует неопределенный параметр $\theta \in \Omega$, то *структура информированности I_i* (как синоним будем употреблять термины *информационная структура* и *иерархия представлений*) i-го агента включает в себя следующие элементы. Во-первых, представление i-го агента о параметре θ – обозначим его θ_i, $\theta_i \in \Omega$. Во-вторых, представления i-го агента о представлениях других агентов о параметре θ – обозначим их θ_{ij}, $\theta_{ij} \in \Omega$, $j \in N$. Агента ij называют *фантомным агентом*, так как он существует в сознании реального агента i. В третьих, представления i-го агента о представлении j-го агента о представлении k-го агента – обозначим их θ_{ijk}, $\theta_{ijk} \in \Omega$, j, $k \in N$. И так далее.

Таким образом, структура информированности I_i i-го агента задается набором всевозможных значений вида $\theta_{ij_1 \dots j_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 \dots j_l} \in \Omega$.

Аналогично задается *структура информированности I игры* в целом – набором значений $\theta_{i_1 \dots i_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 \dots j_l} \in \Omega$. Подчеркнем, что структура информированности I «недоступна» наблюдению агентов, каждому из которых известна лишь некоторая ее часть (а именно – I_i). Таким образом, структура информированности – бесконечное n-дерево (то есть тип структуры постоянен и является n-деревом), вершинам которого соответствует конкретная информированность реальных и фантомных агентов.

Рефлексивной игрой Γ_I называется игра, описываемая следующим кортежем [33]:

$$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, I\},$$

где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, Ω – множество возможных значений неопределенного параметра, I – структура информированности. Подчеркнем, что все элементы рефлексивной игры кроме структуры информированности являются *общим знанием* среди агентов.

Далее для формулировки некоторых определений и свойств нам понадобятся следующие обозначения:

Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N;

Σ – объединение Σ_+ с пустой последовательностью;

$|\sigma|$ – количество индексов в последовательности σ (для пустой последовательности принимается равным нулю), которое выше было названо длиной последовательности индексов.

Если θ_i – представления i-го агента о неопределенном параметре, а θ_{ii} – представления i-го агента о собственном представлении, то естественно считать, что $\theta_{ii} = \theta_i$. Иными словами, i-й агент правильно информирован о собственных представлениях, а также считает, что таковы и другие агенты и т. д. Формально это означает, что выполнена *аксиома автоинформированности*, которую далее будем предполагать выполненной:

$$\forall\ i \in N\ \ \forall\ \tau, \sigma \in \Sigma\ \theta_{\tau ii\sigma} = \theta_{\tau i\sigma}\,.$$

Эта аксиома означает, в частности, что, зная θ_τ для всех $\tau \in \Sigma_+$, таких что $|\tau| = \gamma$, можно однозначно найти θ_τ для всех $\tau \in \Sigma_+$, таких что $|\tau| < \gamma$.

Наряду со структурами информированности I_i, $i \in N$, можно рассматривать структуры информированности I_{ij} (структура информированности j-го агента в представлении i-го агента), I_{ijk} и т.д. Отождествляя структуру информированности с характеризуемым ею агентом, можно сказать, что, наряду с *n реальными* агентами (*i-агентами*, где $i \in N$) со структурами информированности I_i, в игре участвуют *фантомные агенты* (*τ-агенты*, где $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \geq 2$) со структурами информированности $I_\tau = \{\theta_{\tau\sigma}\}$, $\sigma \in \Sigma$, существующие в сознании реальных агентов.

Определим фундаментальное для дальнейших рассмотрений понятие тождественности структур информированности. Структуры информированности I_λ и I_μ ($\lambda, \mu \in \Sigma_+$) называются *тождественными*, если выполнены два условия:

1. $\theta_{\lambda\sigma} = \theta_{\mu\sigma}$ для любого $\sigma \in \Sigma$;

2. последние индексы в последовательностях λ и μ совпадают.

Будем обозначать тождественность структур информированности следующим образом: $I_\lambda = I_\mu$.

Понятие тождественности структур информированности позволяет определить их важное свойство – сложность. Заметим, что наряду со структурой I имеется счетное множество структур I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, среди которых можно при помощи отношения тождественности выделить классы попарно нетождественных структур. Количество этих классов естественно считать *сложностью структуры информированности*.

Будем говорить, что структура информированности I имеет *конечную сложность* $\nu = \nu(I)$, если существует такой конечный набор попарно нетождественных структур $\{I_{\tau_1}, I_{\tau_2}, \ldots, I_{\tau_\nu}\}$, $\tau_l \in \Sigma_+$, $l \in \{1, \ldots, \nu\}$, что для любой структуры I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_{τ_l} из этого набора. Если такого конечного набора не существует, будем говорить, что структура I имеет бесконечную сложность: $\nu(I) = \infty$.

Структуру информированности, имеющею конечную сложность, будем называть *конечной* (еще раз отметим, что при этом дерево структуры информированности все равно остается бесконечным). В противном случае структуру информированности будем называть *бесконечной*.

Ясно, что минимально возможная сложность структуры информированности в точности равна числу участвующих в игре реальных агентов (напомним, что по определению тождественности структур информированности они попарно различаются у реальных агентов).

Любой набор (конечный или счетный) попарно нетождественных структур I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, такой, что любая структура I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, тождественна одной из них, назовем *базисом* структуры информированности I.

Если структура информированности I имеет конечную сложность, то можно определить максимальную длину последовательности индексов γ такую, что, зная все структуры I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \gamma$, можно найти и все остальные структуры. Эта длина в определенном смысле характеризует ранг рефлексии, необходимый для описания структуры информированности.

Будем говорить, что структура информированности I, $\nu(I) < \infty$, имеет *конечную глубину* $\gamma = \gamma(I)$, если

1. для любой структуры I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \leq \gamma$;

2. для любого целого положительного числа ξ, $\xi < \gamma$, существует структура I_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, не тождественная никакой из структур I_τ, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \xi$.

Если $\nu(I) = \infty$, то и глубину будем считать бесконечной: $\gamma(I) = \infty$.

Понятия сложности и глубины структуры информированности игры можно рассматривать τ-субъективно. В частности, глубина структуры информированности игры с точки зрения τ-агента, $\tau \in \Sigma_+$, называется *рангом рефлексии* τ-агента.

Если задана структура I информированности игры, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и фантомных). Выбор τ-агентом своего действия x_τ в рамках гипотезы рационального поведения определяется его структурой информированности I_τ, поэтому, имея перед собой эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить это его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет рефлексию). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Набор действий x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, назовем *информационным равновесием* [33], если выполнены следующие условия:

1. структура информированности I имеет конечную сложность ν;

2. $\forall \lambda, \mu \in \Sigma \quad I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$;

3. $\forall\ i \in N, \forall\ \sigma \in \Sigma$

(1) $x_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \ldots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^* \ldots, x_{\sigma i, n}^*)$.

Первое условие в определении информационного равновесия означает, что в рефлексивной игре участвует конечное число реальных и фантомных агентов.

Второе условие отражает требование того, что одинаково информированные агенты выбирают одинаковые действия.

И, наконец, третье условие отражает рациональное поведение агентов – каждый из них стремится выбором собственного действия максимизировать свою целевую функцию, подставляя в нее действия других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента в рамках имеющихся у него представлений о других агентах.

Удобным инструментом исследования информационного равновесия является *граф рефлексивной игры*, в котором вершины соответствуют реальным и фантомным агентам, и в каждую вершину-агента входят дуги (их число на единицу меньше числа реальных агентов), идущие из вершин-агентов, от действий которых в субъективном равновесии зависит выигрыш данного агента.

Рассмотрим ряд иллюстративных примеров [33], обобщающих Пример 2.1 на случай нетривиальной взаимной информированности агентов. В этих примерах участвуют три агента с целевыми функциями следующего вида:

$$(2)\ f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$; $\theta \in \Omega = \{1, 2\}$.

Содержательно, x_i – объем выпуска продукции i-ым агентом, θ – спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж (см. модели олигополии Курно в [10]), а второе слагаемое – как затраты на производство.

Для краткости будем называть агента, считающего, что спрос низкий ($\theta = 1$), пессимистом, а считающего, что спрос высокий ($\theta = 2$) – оптимистом. Таким образом, во всех трех приведенных ниже примерах ситуации различаются лишь вследствие различных структур информированности.

Пример 2.16. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы. Сложность данной структуры информированности равна трем, а глубина равна единице. Граф рефлексивной игры изображен на Рис. 2.3.

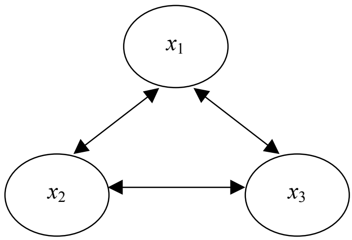


Рис. 2.3. *Граф рефлексивной игры в примере* 2.16

Подставив (2) в (1), получим, что для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_1^* - x_2^*}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_2^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

Таким образом, действия агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 1/2$, $x_3^* = 0$. •

Пример 2.17. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами. Первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте. Сложность данной структуры информированности равна пяти, а глубина равна двум. Граф рефлексивной игры изображен на Рис. 2.4.

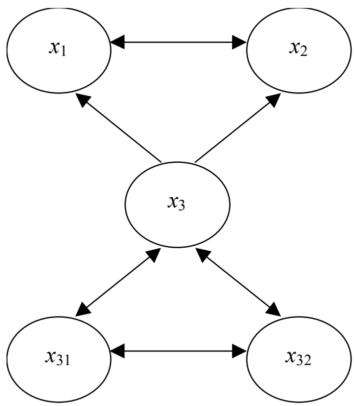


Рис. 2.4. *Граф рефлексивной игры в примере* 2.17

Подставив (2) в (1), получим, что для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\
x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\
x_3^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\
x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\
x_{32}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3},
\end{cases}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{cases}
x_1^* = \dfrac{9}{20}, \\
x_2^* = \dfrac{9}{20}, \\
x_3^* = \dfrac{1}{5}, \\
x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\
x_{32}^* = \dfrac{1}{5}.
\end{cases}
$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими (отметим, что с изменением информированности изменились и равновесные действия агентов):

$$x_1^* = x_2^* = 9/20,\ x_3^* = 1/5.\ \bullet$$

Пример 2.18. Пусть все трое агентов оптимисты, первый и второй взаимно информированы, второй и третий также взаимно информированы. По мнению первого агента, третий считает всех троих одинаково информированными пессимистами; также и первый агент, по мнению третьего, считает всех троих одинаково информированными пессимистами. Сложность данной структуры информированности равна шести, а глубина равна трем. Граф соответствующей рефлексивной игры изображен на Рис. 2.5.

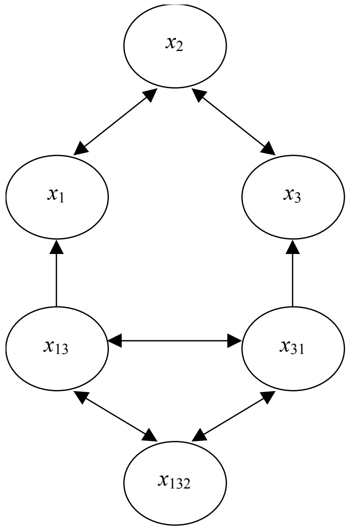


Рис. 2.5. *Граф рефлексивной игры в примере* 2.18

Подставив (2) в (1), получим, что для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{2 - x_{31}^* - x_2^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{132}^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{132}^*}{3}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{13}^*}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_2^* = \dfrac{12}{35}, \\ x_3^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_3^* = 17/35$, $x_2^* = 12/35$. •

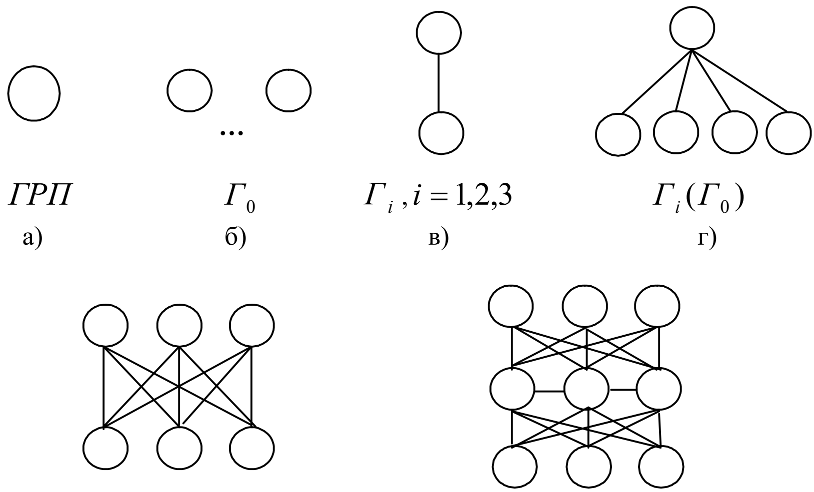
В заключение настоящего раздела подчеркнем, что наличие модели рефлексивной игры позволяет определить условия существования и свойства информационного равновесия, а также конструктивно и корректно сформулировать *задачу рефлексивного управления*, заключающуюся в поиске управляющим органом такой информационной структуры, что реализующееся в ней информационное равновесие наиболее выгодно с его точки зрения – см. подробности в [32].

2.4. *Игры и оргструктуры*

Выше мы рассмотрели основные понятия теории игр, перейдя от игр, в которых агенты выбирают свои действия одновременно (игра Γ_0 в нормальной форме или в форме характеристической функции) к иерархическим играм, в которых последовательность ходов фиксирована – первым делает ход центр, а затем – агент. Можно усложнять модель и дальше, переходя ко всё более сложным играм. Опишем общую картину (см. Рис. 2.6), которая позволяет увидеть логику перехода от более простых к более сложным задачам, чтобы сложная задача могла быть декомпозирована на простые.

Если имеется один субъект, принимающий решения (Рис. 2.6а), то он описывается с точки зрения гипотезы рационального поведения (см. раздел 2.1.1) как стремящийся максимизировать свою целевую функцию. Далее можно усложнить модель и рассмотреть несколько субъектов на одном уровне (Рис. 2.6б), описав их взаимодействие игрой Γ_0 в нормальной форме (см. раздел 2.3.1). Если ввести иерархию, то для двух субъектов (Рис. 2.6в) их взаимодействие описывается игрой Γ_i, где i = 1, 2 или 3 (см. раздел 2.3.2).

Представим себе, что имеется структура «один начальник – несколько подчиненных» (Рис. 2.6г). Взаимодействие агентов, находящихся на одном уровне, можно описывать игрой Γ_0. Взаимодействие «начальник-подчиненный» описывается игрой Γ_i. Тогда условно такую структуру можно представить игрой Γ_i, определенной на игре Γ_0, условно обозначив ее $\Gamma_i(\Gamma_0)$.



$ГРП$ а) Γ_0 б) $\Gamma_i, i = 1,2,3$ в) $\Gamma_i(\Gamma_0)$ г)

$\Gamma_0(\Gamma_i(\Gamma_0))$ д) $\Gamma_0(\Gamma_i(...\Gamma_i(\Gamma_0)...))$ е)

Рис. 2.6. *Игры и оргструктуры*

Далее, пусть есть несколько начальников (центров) и несколько подчиненных – агентов (Рис. 2.6д). На нижнем уровне агенты играют игру Γ_0. Над ними центры играют иерархическую игру Γ_i, но центры, в свою очередь, разыгрывают на своем уровне игру Γ_0. Итого, получили игру $\Gamma_0(\Gamma_i(\Gamma_0))$.

Можно взять более сложную структуру с более сложным взаимодействием (Рис. *2.6*е). Это будет иерархическая игра между уровнями, и «обычная» игра на каждом из уровней: $\Gamma_0(\Gamma_i(...\Gamma_i(\Gamma_0)...))$.

Основная идея заключается в том, чтобы декомпозировать сложную структуру (игру) на набор более простых и воспользоваться результатами исследования последних. Оказывается, что между играми и структурами существует глубокая связь – момент принятия субъектом решений определяет его «место» в организационной иерархии (см. подробности в [29]).

Далее мы поговорим о классификации задач управления организационными системами, а затем в последующих главах начнем рассматривать последовательно задачи управления для структур Рис. 2.6в-Рис. 2.6д, а затем и задачи синтеза самих организационных структур.

2.5. *Классификация задач управления организационными системами*

Описанные выше в настоящей главе модели принятия решений служат основой построения моделей функционирования организационных систем. Перед тем как рассматривать те или иные конкретные классы таких моделей (см. последующие главы настоящей работы), приведем систему классификаций задач управления организационными системами [31].

С точки зрения системного анализа любая система задается перечислением ее *состава*, *структуры и функций*. С учетом целенаправленности поведения участников организационных систем (ОС), их функции описываются в рамках *моделей принятия решений* – см. выше. Поэтому *модель организационной системы* определяется заданием [31] (см. Рис. 2.7, а также описание игр в разделах 2.3.1 и 2.3.3):

- *состава ОС* (участников, входящих в ОС, то есть ее элементов);
- *структуры ОС* (совокупности информационных, управляющих, технологических и других связей между участниками ОС);
- *множеств допустимых действий* (ограничений и норм деятельности) участников ОС, отражающих, в том числе, институциональные, технологические и другие ограничения и нормы их совместной деятельности;
- *предпочтений* участников ОС (см. раздел 2.1);
- *информированности* – той информации о существенных параметрах, которой обладают участники ОС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях;

- *порядка функционирования*: последовательности получения информации и выбора стратегий участниками ОС.

Состав определяет «кто» входит в систему, структура – «кто с кем взаимодействует» (с этой точки зрения порядок функционирования тесно связан со структурой системы, так как первый определяет причинно-следственные связи и порядок взаимодействия), допустимые множества – «кто что может», целевые функции – «кто что хочет», информированность – «кто что знает».

Управление ОС, понимаемое как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения, может затрагивать каждый из шести перечисленных параметров ее модели.

1. Следовательно, первым основанием системы классификаций задач и механизмов управления ОС (процедур принятия управленческих решений) является *предмет управления* – изменяемая в процессе и результате управления компонента ОС.

По этому основанию можно выделить:

- *управление составом*;
- *управление структурой*;
- *институциональное управление* (управление ограничениями и нормами деятельности);
- *мотивационное управление* (управление предпочтениями и интересами);
- *информационное управление* (управление информацией, которой обладают участники ОС на момент принятия решений);
- *управление порядком функционирования* (управление последовательностью получения информации и выбора стратегий участниками ОС).

С точки зрения иерархических игр (см. разделы 2.3.2 и 2.4, а также [29]) порядок функционирования тесно связан с организационной структурой (участники ОС, находящиеся на более высоких уровнях иерархии, принимают решения раньше), поэтому обычно объединяют задачи управления структурой и задачи управления порядком функционирования. То есть, получаем пять классов задач управления ОС, приведенных на Рис. 2.7.

Рис. 2.7. Классификация управлений ОС

Получить достаточно полное представление о современном состоянии исследований математических моделей механизмов управления организационными системами можно из монографии [31], а также обзоров и работ, представленных в электронной библиотеке на сайте www.mtas.ru.

Обсудим кратко специфику различных типов управлений (естественно, на практике иногда трудно выделить в явном виде управление того или иного типа, так как они используются одновременно).

Управление составом касается того, кто войдет в организацию, кого следует уволить, кого нанять. Обычно к управлению составом относят и задачи обучения и развития персонала.

Задача *управления структурой* обычно решается параллельно с задачей управления составом и позволяет дать ответ на вопрос – кто какие функции должен выполнять, кто кому должен подчиняться, кто кого контролировать и т.д.

Институциональное управление является наиболее жестким и заключается в том, что центр целенаправленно ограничивает множества возможных действий и результатов деятельности агентов. Такое ограничение может осуществляться явными или неявными воздействиями – правовыми актами, распоряжениями, приказами и т.д. или морально-этическими нормами, корпоративной культурой и т.д.

Мотивационное управление является более «мягким», чем институциональное, и заключается в целенаправленном изменении предпочтений (функции полезности) агентов. Такое изменение может осуществляться введением системы штрафов и/или поощрений за выбор тех или иных действий и/или достижение определенных результатов деятельности.

Наиболее «мягким» (косвенным), по сравнению с институциональным и мотивационным, является *информационное управление*.

Продолжим классификацию управлений организационными системами.

2. Простейшая (*базовая*) *модель* ОС включает одного управляемого субъекта – *агента* – и одного управляющего органа – *центра*, которые принимают решения однократно и в условиях полной информированности.

Расширениями базовой модели являются:

- *динамические ОС* (в которых участники принимают решения многократно – расширение по предмету управления «порядок функционирования»);
- *многоэлементные ОС* (в которых имеется несколько агентов, принимающих решения одновременно и независимо – расширение по предмету управления «состав»);
- *многоуровневые ОС* (имеющие трех- и более уровневую иерархическую структуру – расширение по предмету управления «структура»);
- *ОС с распределенным контролем* (в которых имеется несколько центров, осуществляющих управление одними и теми же агентами – расширение по предмету управления «структура»);
- *ОС с неопределенностью* (в которых участники не полностью информированы о существенных параметрах – расширение по предмету управления «информированность»);
- *ОС с ограничениями совместной деятельности* (в которых существуют глобальные ограничения на совместный выбор агентами своих действий – расширение по предмету управления «множества допустимых действий»);
- *ОС с сообщением информации* (в которых одним из действий агентов является сообщение информации друг другу и/или центру –

расширение по предмету управления «множества допустимых действий»).

Таким образом, вторым основанием системы классификаций может также служить основание расширения базовой модели – наличие или отсутствие:

- динамики;
- множества взаимосвязанных агентов;
- многоуровневости;
- распределенного контроля;
- неопределенности;
- ограничений совместной деятельности;
- сообщения информации.

Обзор соответствующих моделей можно найти в [31].

В последующих главах настоящей работы мы рассмотрим несколько классов задач управления организационными системами.

Темы для самостоятельного изучения

2.1. Теория полезности [24, 38, 44, 46, 48].
2.2. Теория выбора [2, 20, 22, 34, 36, 39, 40, 46, 48].
2.3. Отношения предпочтения [2, 20, 24, 45, 46].
2.4. Субъективность в принятии решений [11, 13, 17, 43].
2.5. Некооперативные игры [4, 8, 9, 24, 38, 47, 49].
2.6. Кооперативные игры [5, 22, 24, 38].
2.7. Повторяющиеся игры [9, 47, 49].
2.8. Иерархические игры [6, 14].
2.9. Рефлексивные игры [18, 32, 33].
2.10. Ограниченная рациональность [26, 41].
2.11. Нечеткие множества [7, 12, 36, 37].
2.12. Модели коллективного поведения [4, 19, 35, 42].

Литература к главе 2

1 Автономов В.С. Модель человека в экономической науке. – СПб.: Экономическая школа, 1998.

2 Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. – М.: Наука, 1990.

3 *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001.

4 Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. – М.: МАКС Пресс, 2005.

5 Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. – М.: Наука, 1990.

6 *Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

7 *Губко М.В. Лекции по принятию решений в условиях нечеткой информации. – М.: ИПУ РАН, 2004.

8 *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.

9 *Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: Российская экономическая школа, 2002.

10 Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.

11 Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. – М.: Прогресс, 1979.

12 Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982.

13 Крылов В.Ю. Методологические и теоретические проблемы математической психологии. – М.: Янус-К, 2000.

14 Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. – М.: МГУ, 1984.

15 Кун Т. Структура научных революций. – Москва, 2001.

16 Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. – М.: Наука, 1979.

17 Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения. – М.: Наука, 1987.

18 *Лефевр В.А. Конфликтующие структуры. – М.: Советское радио, 1973.

19 Малишевский А.В. Качественные модели в теории сложных систем. – М.: Наука, 1998.

20 Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974.

21 Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. – М.: Наука, 1987.

22 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.

23 Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. – М.: Мир, 1990.

24 Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.

25 Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. – М.: СИНТЕГ, 2007.

26 *Новиков Д.А. Институциональное управление организационными системами. – М.: ИПУ РАН, 2003.

27 *Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. – М.: Синтег, 1999.

28 *Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.

29 *Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003.

30 *Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998.

31 *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007.

32 *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Прикладные модели информационного управления. – М.: ИПУ РАН, 2004.

33 *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003.

34 Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физматлит, 2002.

35 Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. – М.: Наука, 1977.

36 *Орлов А.И. Теория принятия решений. Учебное пособие. – М.: Издательство «Экзамен», 2005.

37 *Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981.

38 Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971.

39 Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето – оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.

40 Рыков А.С. Модели и методы системного анализа: принятие решений и оптимизация. – М.: МИСИС, 2005.

41 Саймон Г., Марш Дж. Административное поведение. – М.: Мир, 1974.

42 Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: философия, психология, информатика. – М.: УРСС, 2002.

43 Трахтенгерц Э.А. Субъективность в компьютерной поддержке управленческих решений. – М.: Синтег, 2001.

44 Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978.

45 Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. – М.: Наука, 1971.

46 Aleskerov F., Monjardet B. Utility maximization, choice and preference. – Berlin: Springer, 2002.

47 Fudenberg D., Tirole J. Game theory. – Cambridge: MIT Press, 1995.

48 Kreps D. Theory of choice. – London: Vestview Press, 1988.

49 Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. – London: Harvard Univ. Press, 1991.

Глава 3. Модели стимулирования в организационных системах

Стимулированием называется побуждение (осуществляемое посредством воздействия управляющего органа – *центра* – на предпочтения управляемого субъекта – *агента*) к совершению определенных действий.

Исследование формальных моделей стимулирования в рамках *теории управления организационными системами* [43] началось практически одновременно и независимо как в бывшем СССР, так и за рубежом, примерно в конце 60-х годов прошлого века. Основными научными школами по этому направлению исследований являются *теория активных систем* [1, 6, 8, 37, 38, 39] (научный центр – Институт проблем управления РАН), *теория иерархических игр* [14, 27] (научный центр – Вычислительный центр РАН) и *теория контрактов*, развиваемая в основном зарубежными учеными [15, 19, 31, 52, 53]. Кроме того, проблемы стимулирования (спроса на труд, предложения труда и т.д.) традиционно находятся в центре внимания *экономики труда*. Прикладные задачи стимулирования рассматриваются и используются, в том числе, в управлении персоналом [13].

Настоящая глава посвящена описанию основных подходов и результатов теоретического исследования задач стимулирования. Последовательность изложения следующая (см. Рис. 3.1): сначала рассматривается задача стимулирования центром одного агента – раздел 3.1, затем описываются базовые механизмы стимулирования, учитывающие различные ограничения на системы стимулирования и отражающие наиболее распространенные на практике формы и системы оплаты труда (раздел 3.2).

Далее базовая модель обобщается на случай одного центра, управляющего коллективом взаимосвязанных агентов (разделы 3.3 и 3.4), после чего этот класс моделей, в свою очередь, обобщается для ситуации наличия ограничений на системы стимулирования (разделы 3.5 и 3.6).

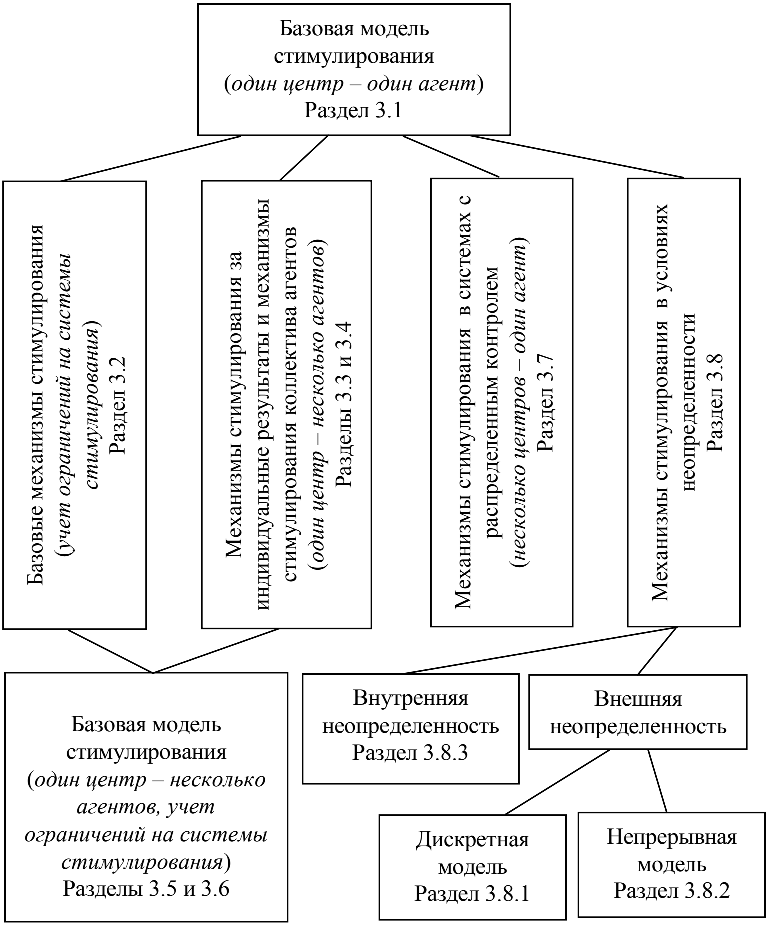


Рис. 3.1. Задачи стимулирования

Разделы 3.7 и 3.8 посвящены обобщению базовой модели, соответственно, на организационные системы с распределенным контролем (в которых один агент подчинен одновременно нескольким центрам) и на системы, функционирующие в условиях неопределенности.

3.1. Задача стимулирования

Основным аппаратом моделирования задач стимулирования в теории управления является теория игр (см. главу 2) – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах [18, 54]. Простейшей игровой моделью организации является взаимодействие двух игроков – центра (*principal*) и подчиненного ему агента (*agent*). Такая *организационная система* (ОС) имеет следующую структуру: на верхнем уровне иерархии находится центр, на нижнем – подчиненный ему агент. В качестве центра может выступать работодатель, непосредственный руководитель агента или организация, заключившая трудовой (или какой-либо иной – страховой, подрядный и т.д. – см. ниже) договор с агентом. В качестве агента может выступать наемный работник, подчиненный или организация, являющиеся второй стороной по соответствующему договору.

Стратегией агента является выбор *действия* $y \in A$, принадлежащего множеству допустимых (то есть, удовлетворяющих существующим ограничениям) действий A. Содержательно действием агента может быть количество отрабатываемых часов, объем произведенной продукции и т.д. Множество допустимых действий представляет собой набор альтернатив, из которых агент производит свой выбор, например, диапазон возможной продолжительности рабочего времени, неотрицательный и не превышающий технологические ограничения объем производства и т.д.

Введем ряд определений. *Механизмом стимулирования* называется правило принятия центром решений относительно стимулирования агента. Механизм стимулирования включает в себя систему стимулирования, которая в рамках моделей, рассматриваемых в настоящей работе, полностью определяется функцией стимулирования. Функция стимулирования задает зависимость размера вознаграждения агента, получаемого им от центра, от выбираемых действий. Поэтому в дальнейшем мы будем употреблять термины «механизм стимулирования», «система стимулирования» и «функция стимулирования» как синонимы.

Стратегией центра является выбор *функции стимулирования* $\sigma(\cdot) \in M$, принадлежащей допустимому множеству M и ставящей в соответствие действию агента неотрицательное вознаграждение, выплачиваемое ему центром, то есть $\sigma: A \to \Re_1^{+}$. Множество допустимых вознаграждений может ограничиваться как законодательно (например, минимальным размером оплаты труда), так и, например, соображениями экономической эффективности деятельности центра, тарифно-квалификационными требованиями к оплате труда данного агента и т. д.

Выбор действия $y \in A$ требует от агента *затрат* $c(y)$ и приносит центру *доход* $H(y)$[1]. *Функцию затрат агента* $c(y)$ и *функцию дохода центра* $H(y)$ будем считать известными (см. обсуждение проблем и результатов их идентификации в [26, 37]).

Интересы участников организационной системы (центра и агента) отражены их *целевыми функциями* (функциями выигрыша, полезности и так далее, в записи которых зависимость от стратегии центра будет опускаться), которые обозначим соответственно: $\Phi(y)$ и $f(y)$.

Целевые функции представляют собой: для агента – разность между стимулированием и затратами:

(1) $f(y) = \sigma(y) - c(y)$,

а для центра – разность между доходом и *затратами центра на стимулирование* – вознаграждением, выплачиваемым агенту:

(2) $\Phi(y) = H(y) - \sigma(y)$.

После того как введены целевые функции, отражающие предпочтения участников ОС (см. главу 2), целесообразно обсудить различия в описании морального и материального стимулирования.

Наличие скалярной целевой функции подразумевает существование единого эквивалента, в котором измеряются все компоненты целевых функций (затраты агента, доход центра и, естественно, само стимулирование).

В случае, когда речь идет о материальном вознаграждении агента, таким эквивалентом выступают деньги. Содержательные интерпретации дохода центра при этом очевидны (более того, прак-

---

[1] *Исходя из содержательных интерпретаций функцию $H(y)$ правильнее было бы называть «прибылью», а не «доходом». Тем не менее, мы будем следовать установившейся в теории управления терминологии.*

тически во всех работах, содержащих описание формальных моделей стимулирования, предполагается, что и стимулирование, и доход центра «измеряются» в денежных единицах). Сложнее дело обстоит с затратами агента, ведь не всегда можно адекватно выразить в денежных единицах, например, удовлетворенность агента работой и т.д. С экономической точки зрения затраты агента можно интерпретировать как денежный эквивалент тех усилий, которые агент должен произвести для достижения того или иного действия. В рамках такой интерпретации вполне естественной выглядит идея компенсации затрат – вознаграждение со стороны центра должно как минимум компенсировать затраты агента (см. более подробно формальное описание ниже).

Если затраты агента измеряются в некоторых единицах «полезности» (учитывающей, например, физическую усталость, моральное удовлетворение от результатов труда и т.д.), отличных от денежных единиц (и несводимых к ним линейным преобразованием), то для того, чтобы иметь возможность складывать или вычитать полезности при введении целевой функции типа (1), необходимо определить полезность вознаграждения. Например, если используется материальное стимулирование, то можно ввести функцию полезности $u(\sigma(y))$, которая отражала бы полезность денег для рассматриваемого агента. Целевая функция агента при этом примет вид:

$$f(y) = u(\sigma(y)) - c(y).$$

Введем следующие **предположения**, которых будем придерживаться, если не оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения материала настоящей главы.

Во-первых, будем считать, что множество A возможных действий агента составляет положительную полуось $\Re_1^+$. Отказу агента от участия в рассматриваемой ОС (бездействию) соответствует нулевое действие ($y = 0$).

Во-вторых, относительно функции затрат агента $c(y)$ предположим, что она не убывает, непрерывна, а затраты от выбора нулевого действия равны нулю (иногда дополнительно будем требовать, чтобы функция затрат была выпукла и непрерывно дифференцируема).

В третьих, допустим, что функция дохода центра $H(y)$ непрерывна, принимает неотрицательные значения и доход центра достигает максимума при ненулевых действиях агента.

В четвертых, предположим, что значение вознаграждения, выплачиваемого центром агенту, неотрицательно: $\sigma(y) \geq 0$.

Приведем содержательные интерпретации введенных предположений.

Первое предположение означает, что возможными действиями агента являются неотрицательные действительные числа, например, количество отработанных часов, объем произведенной продукции и т.д.

Из второго предположения следует, что выбор бóльших действий требует от агента не меньших затрат, например, затраты могут расти с ростом объема выпускаемой продукции. Кроме того, нулевое действие (отсутствие деятельности агента) не требует затрат, а предельные затраты[1] возрастают с ростом действия, то есть каждый последующий прирост действия на одну и ту же величину требует все больших затрат.

Третье предположение накладывает ограничения на функцию дохода центра, требуя, чтобы центру была выгодна деятельность агента (в противном случае – если максимум дохода центра достигается при бездействии агента – задачи стимулирования не возникает, так как в этом случае центр может ничего не платить агенту, а тот в силу второго предположения ничего не будет делать).

Четвертое предположение означает, что центр не может штрафовать агента (limited liability constraint).

Рациональное поведение участника ОС заключается в максимизации (выбором собственной стратегии) его целевой функции с учетом всей имеющейся у него информации.

Определим *информированность игроков* и *порядок функционирования*. Будем считать, что на момент принятия решения (выбора стратегии) участникам ОС известны все целевые функции и все допустимые множества. Специфика теоретико-игровой задачи стимулирования заключается в том, что в ней фиксирован порядок ходов (игра $Г_2$ с побочными платежами в терминологии теории иерархических игр – см. главу 2 и [14]). Центр – *метаигрок* – обладает правом первого хода, сообщая агенту выбранную им стратегию – функцию стимулирования, после чего при известной стратегии

---

[1] *В экономике предельными затратами принято называть производную функции затрат.*

центра агент выбирает свое действие, максимизирующее его целевую функцию.

Итак, мы описали все основные параметры модели любой ОС (состав, структура, допустимые множества, целевые функции, информированность и порядок функционирования), что дает возможность сформулировать собственно задачу управления – задачу синтеза оптимального механизма стимулирования.

Так как значение целевой функции агента зависит как от его собственной стратегии – действия, так и от функции стимулирования, то в рамках принятой гипотезы рационального поведения агент будет выбирать действия, которые при заданной системе стимулирования максимизируют его целевую функцию. Понятно, что множество таких действий, называемое множеством *реализуемых действий*, зависит от используемой центром системы стимулирования. Основная идея стимулирования заключается в том, что, варьируя систему стимулирования, центр может побуждать агента выбирать те или иные действия.

Так как целевая функция центра зависит от действия, выбираемого агентом, то *эффективностью системы стимулирования* называется значение целевой функции центра на множестве действий агента, реализуемых данной системой стимулирования (то есть тех действий, которые агент выбирает при данной системе стимулирования). Следовательно, задача стимулирования заключается в том, чтобы найти оптимальную систему стимулирования, то есть допустимую систему стимулирования, имеющую максимальную эффективность. Приведем формальные определения.

Множество действий агента, доставляющих максимум его целевой функции (и, естественно, зависящее от функции стимулирования), называется *множеством решений игры,* или *множеством действий, реализуемых данной системой стимулирования*:

(3) $P(\sigma) = \mathrm{Arg}\max_{y \in A} \{\sigma(y) - c(y)\}$.

Зная, что агент выбирает действия из множества (3), центр должен найти систему стимулирования, которая максимизировала бы его собственную целевую функцию. Так как множество $P(\sigma)$ может содержать более одной точки, необходимо доопределить (с точки зрения предположений центра о поведении агента) выбор агента. Если выполнена *гипотеза благожелательности*[1] (ГБ), которую будем считать имеющей место, если не оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения, то агент выбирает из множества (3) наиболее благоприятное для центра действие (альтернативой для центра является расчет на наихудший для него выбор агента из множества решений игры).

Следовательно, эффективность системы стимулирования $\sigma \in M$ равна:

(4) $K(\sigma) = \max\limits_{y \in P(\sigma)} \Phi(y)$,

где $\Phi(y)$ определяется (2).

Задача синтеза оптимальной системы стимулирования заключается в выборе допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность:

(5) $K(\sigma) \to \max\limits_{\sigma \in M}$.

Следует отметить, что введенные выше предположения согласованы в следующем смысле. Агент всегда может выбрать нулевое действие, не требующее от него затрат (второе предположение). В то же время, центр имеет возможность ничего не платить ему за выбор этого действия.

Во всех содержательных интерпретациях теоретико-игровых моделей стимулирования предполагается, что у агента имеется альтернатива – сохранить статус-кво, то есть не вступать во взаимоотношения с центром (не заключать трудового контракта). Отказываясь от участия в данной ОС, агент не получает вознаграждения от центра и всегда имеет возможность выбрать нулевое действие, обеспечив себе неотрицательное (точнее – нулевое) значение целевой функции.

Сделав небольшое отступление, обсудим более подробно модель процесса принятия решений агентом. Предположим, что агент предполагает устроиться на работу на некоторое предприятие. Ему

---

[1] *Напомним, что гипотеза благожелательности заключается в следующем: если агент безразличен между выбором нескольких действий (например, действий, на которых достигается глобальный максимум его целевой функции), то он выбирает из этих действий то, которое наиболее благоприятно для центра, то есть действие, доставляющее максимум целевой функции центра.*

предлагается контракт $\{\sigma(y), x^*\}$, в котором оговаривается зависимость $\sigma(\cdot)$ вознаграждения от результатов y его деятельности, а также то, какие конкретные результаты x^* от него ожидаются. При каких условиях агент подпишет контракт, если обе стороны – и агент, и предприятие (центр) принимают решение о подписании контракта самостоятельно и добровольно? Рассмотрим сначала принципы, которыми может руководствоваться агент.

Первое условие – *условие согласованности стимулирования* (*incentive compatibility constraint*), которое заключается в том, что при участии в контракте выбор именно действия y^* (а не какого-либо другого допустимого действия) доставляет максимум его целевой функции. Другими словами, это условие того, что система стимулирования согласована с интересами и предпочтениями агента.

Второе условие – *условие участия* в контракте (иногда его называют *условием индивидуальной рациональности – individual rationality constraint*), которое заключается в том, что, заключая данный контракт, агент ожидает получить полезность, бóльшую, чем он мог бы получить, заключив другой контракт с другой организацией (с другим центром). Представления агента о своих возможных доходах на рынке труда отражает такая величина, как *резервная заработная плата*, то есть частным случаем условия индивидуальной рациональности является ограничение резервной заработной платы. Далее для простоты, если не оговорено особо, считаем, что резервная полезность равна нулю.

Аналогичные приведенным выше для агента условия согласованности и индивидуальной рациональности можно сформулировать и для центра. Если имеется единственный агент – претендент на заключение контракта, то контракт будет выгоден для центра при выполнении двух условий.

Первое условие (аналогичное условию согласованности стимулирования) отражает согласованность системы стимулирования с интересами и предпочтениями центра, то есть применение именно фигурирующей в контракте системы стимулирования должно доставлять максимум целевой функции (функции полезности) центра (по сравнению с использованием любой другой допустимой системы стимулирования) (см. (4)).

Второе условие для центра аналогично условию участия для агента, а именно – заключение контракта с данным агентом выгодно для центра по сравнению с сохранением статус-кво, то есть отказом от заключения контракта вообще. Например, если считать, что прибыль предприятия (значение целевой функции центра) без заключения контракта равна нулю, то при заключении контракта прибыль должна быть неотрицательна.

Качественно обсудив условия заключения взаимовыгодного трудового контракта, вернемся к формальному анализу, то есть решению задачи стимулирования (5). Отметим, что решение данной задачи «в лоб» достаточно трудоемко. Но, к счастью, можно угадать оптимальную систему стимулирования исходя из содержательных соображений, а затем корректно обосновать ее оптимальность.

Предположим, что использовалась некоторая система стимулирования $\sigma(\cdot)$, при которой агент выбирал действие $x \in P(\sigma(\cdot))$. Утверждается, что если взять другую систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, которая будет равна нулю всюду, кроме точки x, и будет равна старой системе стимулирования в точке x:

$$\tilde{\sigma}(y) = \begin{cases} \sigma(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases},$$

то и при новой системе стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$ это же действие агента $y = x$ будет доставлять максимум его целевой функции.

Приведем формальное доказательство этого утверждения. Условие того, что выбор действия x доставляет максимум целевой функции агента при использовании системы стимулирования $\sigma(\cdot)$, можно записать в следующем виде: разность между стимулированием и затратами будет не меньше, чем при выборе любого другого действия:

$$\forall y \in A \quad \sigma(x) - c(x) \geq \sigma(y) - c(y).$$

Заменим систему стимулирования $\sigma(\cdot)$ на систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, тогда получим следующее: в точке x система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$ по-прежнему равна системе стимулирования $\sigma(\cdot)$. В правой части будет тогда записана система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$:

$$\forall y \in A \quad \sigma(x) - c(x) \geq \tilde{\sigma}(y) - c(y).$$

Если выполнялась первая система неравенств, то выполняется и новая система неравенств. Следовательно, $x \in P(\widetilde{\sigma}(\cdot))$.

На Рис. 3.2 изображены эскизы графиков функций: $H(y)$ и $c(y)$. С точки зрения центра стимулирование не может превышать доход, получаемый им от деятельности агента (так как, отказавшись от взаимодействия с агентом, центр всегда может получить нулевую полезность). Следовательно, допустимое решение лежит ниже функции $H(y)$. С точки зрения агента стимулирование не может быть меньше, чем сумма затрат и резервная полезность (которую агент всегда может получить, выбирая нулевое действие). Следовательно, допустимое решение лежит выше функции $c(y)$.

Множество действий агента и соответствующих значений целевых функций, удовлетворяющих одновременно всем перечисленным выше ограничениям (согласования и индивидуальной рациональности, как для центра, так и для агента), – «*область компромисса*» заштрихована на Рис. 3.2. Множество действий агента, при которых область компромисса не пуста, называется *множеством согласованных планов*:

$$S = \{x \in A \mid H(x) \geq c(x) \geq 0\}.$$

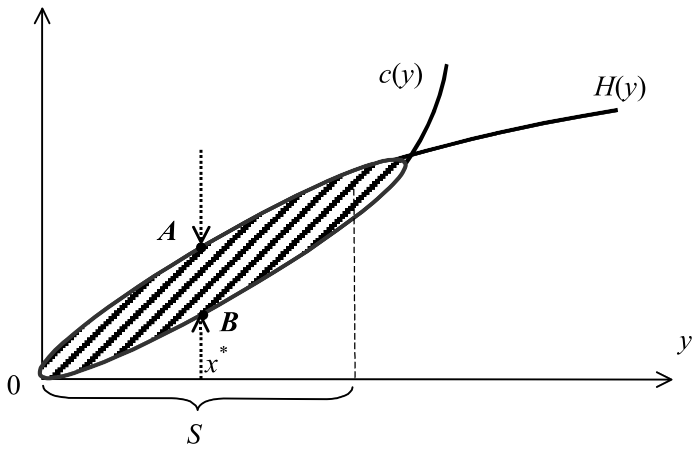


Рис. 3.2. Оптимальное решение задачи стимулирования

Так как центр стремится минимизировать выплаты агенту при условии, что последний выбирает требуемое действие, то оптимальная точка в рамках гипотезы благожелательности должна лежать на нижней границе области компромисса, то есть ***стимулирование в точности должно равняться затратам агента.*** Этот важный вывод получил название «*принцип компенсации затрат*». В соответствии с этим принципом, для того чтобы побудить агента выбрать определенное действие, центру достаточно компенсировать затраты агента.

Кроме компенсации затрат, центр может устанавливать также некоторую неотрицательную *мотивирующую надбавку*[1] $\delta \geq 0$. Следовательно, для того чтобы агент выбрал действие $x \in A$, стимулирование со стороны центра за выбор этого действия должно быть не меньше

(6) $\sigma(x) = c(x) + \delta$.

Легко видеть, что если в случае выбора агентом других действий (отличных от x) вознаграждение равно нулю, то выполнены как условия согласованности стимулирования, так и условие индивидуальной рациональности агента. При этом стимулирование (6) со стороны центра является минимально возможным. Следовательно, мы доказали, что параметрическим (с параметром $x \in S$) решением задачи (5) является следующая система стимулирования:

(7) $\sigma_K(x, y) = \begin{cases} c(x) + \delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$,

которая называется *компенсаторной* (K-*типа*).

Параметр $x \in A$, фигурирующий в компенсаторной системе стимулирования, в теории управления называется *планом* – желательным с точки зрения центра действием агента. План является *согласованным*, если его выполнение (выбор действия, совпадающего с планом) выгодно агенту, то есть принадлежит множеству реа-

---

[1] *Если гипотеза благожелательности (ГБ) не выполнена, и при определении эффективности стимулирования центр использует максимальный гарантированный результат (МГР) по множеству максимумов целевой функции агента, то с формальной точки зрения мотивирующая надбавка должна быть строго положительна (но может быть выбрана сколь угодно малой). Если гипотеза благожелательности выполнена, то с формальной точки зрения мотивирующая надбавка может быть выбрана равной нулю. С неформальной же точки зрения мотивирующая надбавка отражает аспект нематериального стимулирования.*

лизуемых действий (тех действий, на которых достигается максимум целевой функции агента). Принцип компенсации затрат является достаточным условием реализации требуемого действия.

Рассмотрим теперь, какое действие следует реализовывать центру, то есть каково оптимальное значение согласованного плана $x \in S$.

Так как в силу (6)–(7) стимулирование равно затратам агента, то оптимальным реализуемым действием x^* является действие, максимизирующее на множестве S разность между доходом центра и затратами агента. Следовательно, *оптимальный согласованный план* может быть найден из решения следующей стандартной оптимизационной задачи:

(8) $x^* = \arg \max\limits_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}$,

которая получила название *задачи оптимального согласованного планирования* [6]. Действительно, то действие, которое центр собирается побуждать выбирать агента, может интерпретироваться как *план* – желательное с точки зрения центра действие агента. В силу принципа компенсации затрат план является *согласованным* (напомним, что согласованным называется план, выполнение которого выгодно агенту), значит центру в силу (8) остается найти оптимальный согласованный план.

Значение целевой функции центра при использовании оптимальной компенсаторной системы стимулирования в рамках гипотезы благожелательности равно:

$$\Delta = \max_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}.$$

Условие оптимальности плана x^* в рассматриваемой модели (в предположении дифференцируемости функций дохода и затрат, а также вогнутости функции дохода центра и выпуклости функции затрат агента) имеет вид: $\frac{dH(x^*)}{dy} = \frac{dc(x^*)}{dy}$. Величина $\frac{dH(y)}{dy}$ в экономике называется предельной производительностью (*MRP* – *marginal rate of production*), а величина $\frac{dc(y)}{dy}$ – предельными затратами (*MC* – *marginal costs*). Условие оптимума (*MRP* = *MC*) определяет действие x^* и так называемую *эффективную заработную плату* $c(x^*)$.

Отметим еще одну важную содержательную интерпретацию условия (8). Оптимальный согласованный план x^* максимизирует разность между доходом центра и затратами агента, то есть доставляет максимум сумме целевых функций (1) и (2) участников ОС, и, следовательно, является эффективным по Парето[1].

Подчеркнем, что компенсаторная система стимулирования (7) не является единственной оптимальной системой стимулирования – легко показать, что в рамках гипотезы благожелательности решением задачи (5) является любая система стимулирования $\breve{\sigma}(\cdot)$, удовлетворяющая следующему условию: $\breve{\sigma}(x^*) = c(x^*)$, $\forall\, y \neq y^*$ $\breve{\sigma}(y) \leq c(y)$ (см. Рис. 3.3, на котором приведены эскизы двух оптимальных систем стимулирования – σ_1^* и σ_2^*).

Область компромисса является чрезвычайно важным с методологической точки зрения понятием. Ее непустота отражает наличие возможности согласования интересов центра и агента в существующих условиях. Поясним последнее утверждение.

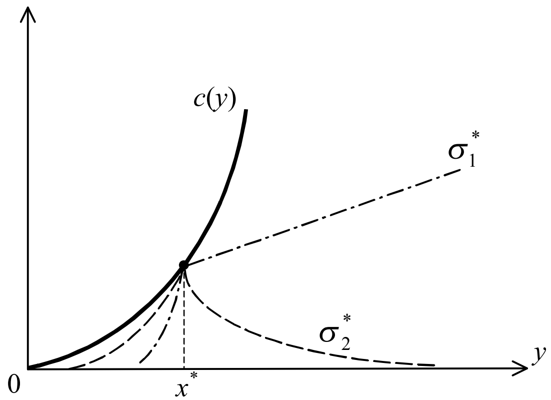


Рис. 3.3 Оптимальные системы стимулирования

[1] *То есть, таким, что не существует другого плана, при выполнении агентом которого, все участники ОС* (*и центр, и агент*) *получат не меньший выигрыш, а кто-то из них – строго больший* (*см. главу 2*).

В формальной модели стратегии участников ограничены соответствующими допустимыми множествами. Учет ограничений индивидуальной рациональности агента и центра (условно можно считать, что неотрицательность целевой функции центра отражает ограничения финансовой эффективности деятельности центра – затраты на стимулирование агента не должны превышать доход от результатов его деятельности), а также условий согласования приводит к тому, что множество «рациональных» стратегий – область компромисса – оказывается достаточно узкой.

Фактически компромисс между центром и агентом заключается в дележе полезности Δ, равной разности полезностей в точках A и B на Рис. 3.2. Делая первый ход (предлагая контракт), центр «забирает» эту разность себе, вынуждая агента согласиться с резервным значением полезности. Легко проверить, что в противоположной ситуации, когда первый ход делает агент, предлагая контракт центру, нулевую полезность получает центр, а агент «забирает» разность Δ между полезностями в точках A и B себе. Возможны и промежуточные варианты, когда принцип дележа прибыли Δ между центром и агентом оговаривается заранее в соответствии с некоторым *механизмом компромисса* [28].

Из проведенного выше анализа следует, что решение задачи стимулирования может быть разделено на два этапа. На *первом этапе* решается *задача согласования* – определяется множество реализуемых при заданных ограничениях действий – множество согласованных планов. На *втором этапе* решается *задача оптимального согласованного планирования* – ищется реализуемое действие, которое наиболее предпочтительно с точки зрения центра. Подобная идеология разбиения решения задачи управления ОС на два этапа широко используется в теории управления и при решении более сложных задач – см. [38, 43].

В рамках полученного выше оптимального решения задачи стимулирования (то есть при использовании центром компенсаторной системы стимулирования) значение целевой функции агента в случае выполнения плана равно нулю (или резервной полезности плюс мотивирующая надбавка). Поэтому особого внимания, в силу широкой распространенности на практике, заслуживает случай, когда в условиях трудового контракта (или договора между заказчиком-центром и исполнителем-агентом) производится фиксация норматива рентабельности $\rho \geq 0$ агента, то есть ситуация, когда размер вознаграждения агента зависит от его действия следующим образом:

$$\sigma_\rho(x, y) = \begin{cases} (1+\rho)\, c(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$$

Данная система стимулирования называется *системой стимулирования с нормативом рентабельности* [28].

Предполагая, что резервная полезность исполнителя равна нулю, получаем, что задача оптимального согласованного планирования при этом имеет вид (ср. с (8)):

$$x^*(\rho) = \arg \max_{y \in A} \{H(y) - (1 + \rho)\, c(y)\}.$$

Следовательно, максимальное значение целевой функции центра равно:

$$\Delta(\rho) = H(y^*(\rho)) - (1 + \rho)\, c(y^*(\rho)).$$

Легко видеть, что $\forall\ \rho \geq 0 \quad \Delta(\rho) \leq \Delta$. Отметим, что оптимальный план уже не будет оптимальным по Парето (не будет максимизировать сумму целевых функций участников системы).

Пример 3.1. Пусть $H(y) = y,\ c(y) = y^2/2\,r$, где r – *тип* агента (параметр, отражающий эффективность его деятельности). Тогда $x^*(\rho) = r/(1 + \rho)$, $\Delta(\rho) = r/[2\,(1 + \rho)]$. Из условий индивидуальной рациональности следует, что $\rho \geq 0$. В рассматриваемом примере прибыль агента $\rho\, c(x^*(\rho))$ достигает максимума при $\rho = 1$, то есть агенту выгодно вдвое завысить стоимость выполняемых работ. С точки зрения центра наиболее предпочтителен нулевой норматив рентабельности. •

Отметим, что, как следует из сказанного выше, в рамках введенных предположений компенсаторная система стимулирования является оптимальным решением задач стимулирования. Казалось бы, что можно еще «вытянуть» из этой модели? Все дело в том, что ранее считалось, что компенсаторная система является допустимой. Однако на практике это не всегда так – центр может быть жестко ограничен некоторым фиксированным классом систем стимулирования, причем эти ограничения могут быть как экзогенными – например, определяться правовыми нормами, регулирующими оплату труда, так и эндогенными – по тем или иным причинам центр может быть склонен к использованию, например, сдельной или повременной оплаты, а не к простой компенсации затрат [37] (см. следующий раздел и [44]).

3.2. Базовые механизмы стимулирования

Перечислим *базовые системы* (*механизмы*) *стимулирования* в одноэлементных детерминированных, то есть функционирующих в условиях полной информированности обо всех существенных внешних и внутренних параметрах, организационных системах (оптимальная базовая система стимулирования – компенсаторная (*К-типа*) – подробно описана в разделе 3.1).

Скачкообразные системы стимулирования (С-типа) характеризуются тем, что агент получает постоянное вознаграждение (как правило, равное максимально возможному или заранее установленному значению) при условии, что выбранное им действие не меньше заданного, и нулевое вознаграждение при выборе меньших действий (Рис. 3.4):

(1) $\sigma_C(x, y) = \begin{cases} C, y \geq x \\ 0, y < x \end{cases}$.

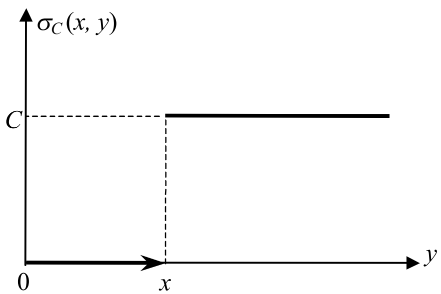


Рис. 3.4. Скачкообразная система стимулирования

Системы стимулирования С-типа содержательно могут интерпретироваться как *аккордные*, соответствующие фиксированному вознаграждению *С* при заданном результате (например, объеме работ не ниже оговоренного заранее, времени и т.д.). Другая содержательная интерпретация соответствует случаю, когда действием агента является количество отработанных часов, то есть вознаграждение соответствует, например, фиксированному тарифному окладу.

Пропорциональные (линейные) системы стимулирования (*L*-типа). На практике широко распространены системы оплаты труда, основанные на использовании постоянных ставок оплаты: повременная оплата подразумевает существование *ставки оплаты* единицы рабочего времени (как правило, часа или дня), сдельная оплата – существование ставки оплаты за единицу продукции и т.д. Объединяет эти системы оплаты то, что вознаграждение агента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объему выпущенной продукции и т. д.), а ставка оплаты $\lambda \geq 0$ является коэффициентом пропорциональности (Рис. 3.5):

(2) $\sigma_L(y) = \lambda\, y$.

При использовании пропорциональных (линейных) систем стимулирования и непрерывно дифференцируемой монотонной выпуклой функции затрат агента выбираемое им действие определяется следующим выражением: $y^* = c'^{-1}(\lambda)$, где $c'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции затрат агента. При этом затраты центра на стимулирование превышают минимально необходимые (равные компенсируемым затратам агента) на следующую величину: $y^* c'(y^*) - c(y^*)$. Например, если центр имеет функцию дохода $H(y) = b\,y,\ \ b > 0,$ а функция затрат агента выпукла и равна: $c(y) = a\,y^2,\ a > 0$, то при любом реализуемом действии агента центр при использовании пропорциональной системы стимулирования переплачивает ему ровно в два раза.

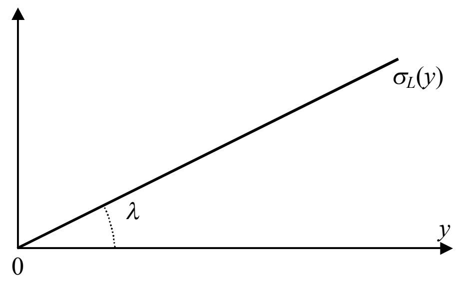


Рис. 3.5. Пропорциональная система стимулирования

Таким образом, при выпуклых функциях затрат агента эффективность пропорциональных систем стимулирования не выше, чем компенсаторных. График целевой функции агента при использовании центром пропорциональной системы стимулирования приведен на Рис. 3.6.

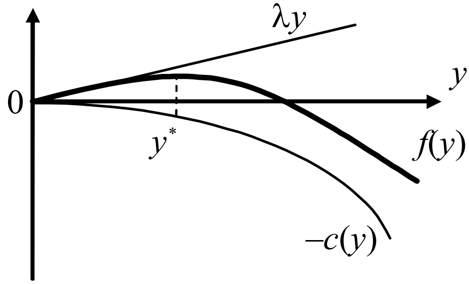


Рис. 3.6. Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования L-типа

Неэффективность пропорциональных систем стимулирования вида $\sigma_L(y) = \lambda\, y$ обусловлена требованием неотрицательности вознаграждений. Если допустить, что вознаграждение может быть отрицательным (при этом «отрицательный» участок функции стимулирования может не использоваться – см. Рис. 3.7): $\sigma_{LK}(y) = \sigma_0 + \lambda\, y$, где $\sigma_0 \leq 0$, то при выпуклых функциях затрат агента эффективность пропорциональной системы стимулирования $\sigma_{LK}(\cdot)$ может быть равна эффективности оптимальной (компенсаторной) системы стимулирования.

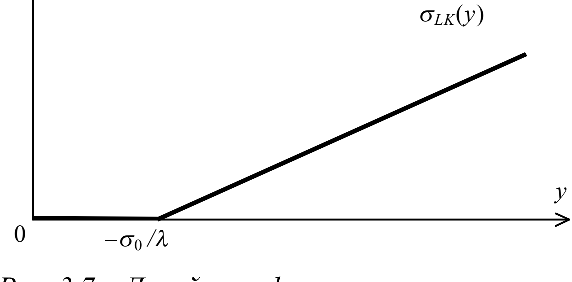


Рис. 3.7. «Линейная» функция стимулирования

Для обоснования этого утверждения достаточно воспользоваться следующими соотношениями (см. Рис. 3.8):

$$x^*(\lambda) = c'^{-1}(\lambda),\ \sigma_0(\lambda) = c\,(c'^{-1}(\lambda)) - \lambda\, c'^{-1}(\lambda).$$

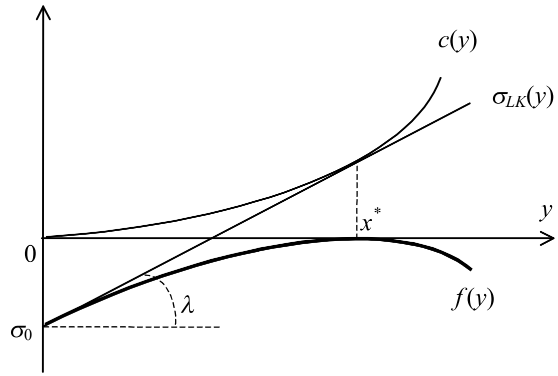


Рис. 3.8. Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования $\sigma_{LK}(\cdot)$

Оптимальное значение λ^* ставки оплаты при этом выбирается из условия максимума целевой функции центра:

$$\lambda^* = \arg \max_{\lambda \geq 0}\ [H(x^*(\lambda)) - \sigma_{LK}(x^*(\lambda))].$$

Системы стимулирования, основанные на перераспределении дохода (*D*-типа), используют следующую идею. Так как центр выражает интересы системы в целом, то можно условно идентифицировать его доход и доход от деятельности всей организационной системы. Поэтому возможно основывать стимулирование агента на величине дохода центра – положить вознаграждение агента равным определенной (например, постоянной) доле $\gamma \in [0; 1]$ дохода центра:

(3) $\sigma_D(y) = \gamma\, H(y)$.

Отметим, что системы стимулирования *C, L* и *D*-типа являются параметрическими: для определения скачкообразной системы стимулирования достаточно задать пару (x, C); для определения пропорциональной системы стимулирования достаточно задать ставку оплаты λ; для определения системы стимулирования, основанной на перераспределении дохода, достаточно задать норматив γ.

Перечисленные выше системы стимулирования являются простейшими, представляя собой элементы «конструктора», используя которые можно построить другие более сложные системы стимулирования – *производные* от базовых. Для возможности такого «конструирования» необходимо определить операции над базовыми системами стимулирования. Для одноэлементных детерминированных ОС достаточно ограничиться операциями следующих трех типов [26].

Первый тип операции – переход к соответствующей *«квази»-системе стимулирования* – вознаграждение считается равным нулю всюду, за исключением действия, совпадающего с планом. В детерминированных организационных системах «обнуление» стимулирования во всех точках, кроме плана, в рамках гипотезы благожелательности практически не изменяет свойств системы стимулирования, поэтому в ходе дальнейшего изложения мы не будем акцентировать внимание на различии некоторой системы стимулирования и системы стимулирования, получающейся из исходной применением операции первого типа.

Второй тип операции – разбиение множества возможных действий на несколько подмножеств и использование различных базовых систем стимулирования на различных подмножествах. Получающиеся в результате применения операции второго типа системы стимулирования называют *составными*. Примером составной системы стимулирования является система LL-типа, в которой при действиях агента, меньших некоторого норматива, используется одна ставка оплаты, а результаты, превосходящие норматив, оплачиваются по более высокой ставке.

Третий тип операции – алгебраическое суммирование двух систем стимулирования (что допустимо, так как стимулирование входит в целевые функции участников системы аддитивно). Результат применения операции третьего типа называют *суммарной системой стимулирования*.

Например, на Рис. 3.9 приведен эскиз системы стимулирования $C+L$-типа (сдельно-премиальная система оплаты труда [26]), получающейся суммированием скачкообразной и пропорциональной систем стимулирования.

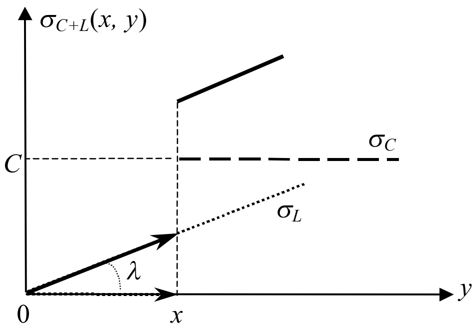


Рис. 3.9. Система стимулирования C+L-типа (*суммарная*)

Таким образом, ***базовыми системами стимулирования*** называют системы С-типа, K-типа, *L*-типа и *D*-типа, а также все производные от них (то есть получающиеся в результате применения операций перечисленных выше трех типов) системы стимулирования.

В [26], во-первых, показано, что введенные базовые системы стимулирования достаточно полно охватывают используемые на практике формы индивидуальной заработной платы. Во-вторых, в указанной работе приведены оценки сравнительной эффективности различных базовых систем стимулирования – см. Табл. 3.1, в которой сравнительная эффективность семи базовых систем стимулирования, описанных в настоящем разделе (в предположении выпуклости и монотонности функции затрат агента), отражена следующим образом: если в ячейке стоит символ «≥», то эффективность системы стимулирования, соответствующей строке, не ниже эффективности системы стимулирования, соответствующей столбцу (аналогичный смысл имеют и другие неравенства; символ «?» означает, что сравнительная эффективность систем стимулирования L-типа и D-типа зависит в каждом конкретном случае зависит от функции затрат агента и функции дохода центра).

Табл. 3.1

Сравнительная эффективность базовых систем стимулирования

	K	**C**	**L**	**LK**	**D**	**L+C**	**LL**
K	=	=	$\geq$	=	$\geq$	=	=
C	=	=	$\geq$	=	$\geq$	=	=
L	$\leq$	$\leq$	=	$\leq$	?	$\leq$	$\leq$
LK	=	=	$\geq$	=	$\geq$	=	=
D	$\leq$	$\leq$	?	$\leq$	=	$\leq$	$\leq$
L+C	=	=	$\geq$	=	$\geq$	=	=
LL	=	=	$\geq$	=	$\geq$	=	=

3.3. Механизмы стимулирования за индивидуальные результаты

В предыдущих разделах рассматривались системы индивидуального стимулирования. Настоящий и ряд последующих разделов данной главы посвящены описанию моделей *коллективного стимулирования*, то есть стимулирования коллектива агентов.

Простейшим обобщением базовой одноэлементной модели является *многоэлементная ОС* с независимыми (невзаимодействующими) агентами. В этом случае задача стимулирования распадается на набор одноэлементных задач.

Если ввести общие для всех или ряда агентов ограничения на механизм стимулирования, то получается задача стимулирования в ОС со слабо связанными агентами (см. ниже), представляющая собой набор параметрических одноэлементных задач, для которого проблема поиска оптимальных значений параметров решается стандартными методами условной оптимизации.

Если агенты взаимосвязаны (в настоящей работе не рассматривается ситуация, когда существуют общие ограничения на множества допустимых состояний, планов, действий агентов – этот случай подробно описан в [44]), то есть затраты или/и стимулирование агента зависят, помимо его собственных действий, от действий других агентов, то получается «полноценная» многоэлементная модель стимулирования, описываемая в настоящем разделе.

Последовательность решения многоэлементных и одноэлементных задач имеет много общего. Сначала необходимо построить компенсаторную систему стимулирования, реализующую некоторое (произвольное или допустимое при заданных ограничениях) действие (первый этап – этап анализа согласованности стимулирования). В одноэлементных ОС в рамках гипотезы благожелательности для этого достаточно проверить, что при этом максимум целевой функции агента будет достигаться, в том числе, и на реализуемом действии. В многоэлементных ОС достаточно показать, что выбор соответствующего действия является равновесной стратегией в игре агентов. Если равновесий несколько, то необходимо проверить выполнение для рассматриваемого действия дополнительной гипотезы о рациональном выборе агентов. В большинстве случаев достаточным оказывается введение аксиомы единогласия (агенты не будут выбирать равновесия, доминируемые по Парето другими равновесиями), иногда центру приходится вычислять гарантированный результат по множеству равновесных стратегий агентов и т. д. Далее следует приравнять стимулирование затратам и решить стандартную оптимизационную задачу – какое из реализуемых действий следует реализовывать центру (второй этап – этап согласованного планирования – см. также раздел 3.1). Конкретизируем этот общий подход.

Стимулирование в ОС со слабо связанными агентами. Описанные в разделе 3.1 результаты решения задачи стимулирования могут быть непосредственно обобщены на случай, когда имеются $n \geq 2$ агентов, функции затрат которых зависят только от их собственных действий (так называемые *сепарабельные затраты*), стимулирование каждого агента зависит только от его собственных действий, но существуют ограничения на суммарное стимулирование агентов. Такая модель называется *ОС со слабо связанными агентами* и является промежуточной между системами индивидуального и коллективного стимулирования.

Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество агентов, $y_i \in A_i$ – действие i-го агента, $c_i(y_i)$ – затраты i-го агента, $\sigma_i(y_i)$ – стимулирование его со стороны центра, $i \in N$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – вектор действий агентов,

$y \in A' = \prod_{i \in N} A_i$. Предположим, что центр получает доход $H(y)$ от деятельности агентов.

Пусть размеры индивидуальных вознаграждений агентов ограничены величинами $\{R_i\}_{i \in N}$, то есть $\forall\ y_i \in A_i\ \sigma_i(y_i) \le R_i,\ i \in N$. Если фонд заработной платы (ФЗП) ограничен величиной R, то есть $\sum_{i \in N} R_i \le R$, то получаем (см. раздел 3.1), что максимальное множество реализуемых действий для i-го агента зависит от соответствующего ограничения механизма стимулирования и в рамках предположений раздела 3.1 равно $P_i(R_i) = [0, y_i^+(R_i)]$, где

$$y_i^+(R_i) = \max \{y_i \in A_i \mid c_i(y_i) \le R_i\},\ i \in N.$$

Тогда оптимальное решение задачи стимулирования в ОС со слабо связанными агентами определяется следующим образом: максимизировать выбором индивидуальных ограничений $\{R_i\}_{i \in N}$, удовлетворяющих *бюджетному ограничению* $\sum_{i \in N} R_i \le R$, следующее выражение:

$$\Phi(R) = \max_{\{y_i \in P_i(R_i)\}_{i \in N}} H(y_1, ..., y_n),$$

что является стандартной задачей условной оптимизации.

Отметим, что когда ФЗП фиксирован, затраты центра на стимулирование не вычитаются из его дохода. Если ФЗП является переменной величиной, то его оптимальное значение R^* может быть найдено как решение следующей задачи:

$$R^* = \arg \max_{R \ge 0} [\Phi(R) - R].$$

Отметим, что во многих важных с практической точки зрения случаях величина ФЗП (или фонда материального поощрения, премиального фонда и т.п.) зависит от действий агентов, то есть достигнутых ими результатов – см. [10]. При этом можно либо в явном виде учитывать зависимость $R = R(y)$, что приведет к существенному усложнению соответствующих оптимизационных задач, либо применять подход, описанный выше – искать оптимальное решение в параметрическом виде (где ФЗП является параметром), а потом определять оптимальное значение ФЗП.

Пример 3.2. Пусть функции затрат агентов – $c_i(y_i) = y_i^2 / 2 r_i$, $i \in N$, а функция дохода центра – $H(y) = \sum_{i \in N} \alpha_i y_i$, где $\{\alpha_i\}_{i \in N}$ – положительные константы.

При заданных ограничениях $\{R_i\}_{i \in N}$ максимальное реализуемое действие каждого агента: $y_i^+(R_i) = \sqrt{2 r_i R_i}$, $i \in N$. Задача свелась к определению оптимального набора ограничений $\{R_i^*\}_{i \in N}$, удовлетворяющего бюджетному ограничению и максимизирующего целевую функцию центра:

$$\begin{cases} \sum_{i \in N} \alpha_i \sqrt{2 r_i R_i} \to \max\limits_{\{R_i \geq 0\}_{i \in N}} \\ \sum_{i \in N} R_i \leq R \end{cases}.$$

Решение этой задачи, полученное с помощью метода множителей Лагранжа, имеет вид:

$$R_i^* = \frac{r_i \alpha_i^2}{\sum_{j \in N} r_j \alpha_j^2} R, \; i \in N.$$

Оптимальный размер ФЗП равен: $R^* = \sum_{i \in N} r_i \alpha_i^2 / 2$. •

Стимулирование в ОС с сильно связанными агентами. Обозначим обстановку игры для i-го агента

$$y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j.$$

Интересы и предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра $\Phi(\sigma, y)$ представляет собой разность между его доходом $H(y)$ и суммарным вознаграждением $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y)$, выплачиваемым агентам, где $\sigma_i(y)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(y) = (\sigma_1(y), \sigma_2(y), \ldots, \sigma_n(y))$:

(1) $\Phi(\sigma, y) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y)$,

Целевая функция i-го агента $f_i(\sigma_i, y)$ представляет собой разность между стимулированием, получаемым от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

(2) $f_i(\sigma_i, y) = \sigma_i(y) - c_i(y), i \in N.$

Отметим, что и индивидуальное вознаграждение, и индивидуальные затраты i-го агента по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех агентов (*случай сильно связанных агентов* с *несепарабельными затратами*).

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования одновременно и независимо выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Относительно параметров ОС введем следующие предположения:

1) множество допустимых действий каждого агента совпадает с множеством неотрицательных действительных чисел;

2) функции затрат агентов непрерывны, неотрицательны и $\forall\, y_i \in A_i$, $\forall\, y_{-i} \in A_{-i}$ $c_i(y_i, y_{-i})$ не убывает по y_i и $c_i(0, y_{-i}) = 0$, $i \in N$;

3) функция дохода центра непрерывна и достигает максимума при ненулевых действиях агентов.

Второе предположение означает, что независимо от действий других агентов любой агент может минимизировать свои затраты выбором нулевого действия. Остальные предположения – такие же, как и в одноэлементной модели (см. раздел 3.1).

Так как и затраты, и стимулирование каждого агента в рассматриваемой модели зависят в общем случае от действий всех агентов, то при фиксированных функциях стимулирования агенты оказываются вовлеченными в игру, в которой выигрыш каждого зависит от действий всех. Обозначим $P(\sigma)$ – множество равновесных при системе стимулирования σ стратегий агентов – множество решений игры (тип равновесия пока не оговаривается; единственно предположим, что агенты выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью).

Как и в одноэлементной ОС, рассмотренной в разделе 3.1, в рамках гипотезы благожелательности эффективностью стимулирования является максимальное значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

(3) $K(\sigma) = \max\limits_{y \in P(\sigma)} \Phi(\sigma, y)$.

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске такой допустимой системы стимулирования σ^*, которая имеет максимальную эффективность:

(4) $\sigma^* = \arg \max\limits_{\sigma \in M} K(\sigma)$.

Из результатов раздела 3.1 следует, что в частном случае, когда агенты независимы (вознаграждение и затраты каждого из них зависят только от его собственных действий), оптимальной (точнее – δ-оптимальной, где $\delta = \sum\limits_{i \in N} \delta_i$) является компенсаторная система стимулирования:

(5) $\sigma_{iK}(x_i, y_i) = \begin{cases} c_i(x_i) + \delta_i, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases}, \; i \in N,$

где $\{\delta_i\}_{i \in N}$ – сколь угодно малые строго положительные константы (мотивирующие надбавки), а оптимальное действие x^*, реализуемое системой стимулирования (5) как равновесие в доминантных стратегиях[1] (РДС), является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = \arg \max_{y \in A'} \{H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i)\}.$$

Если стимулирование каждого агента зависит от действий всех агентов (рассматриваемый в настоящем разделе случай коллективного стимулирования) и *затраты несепарабельны* (то есть затраты каждого агента зависят в общем случае от действий всех агентов,

---

[1] *Напомним, что РДС называется такой вектор действий агентов, что каждому агенту выгодно выбирать соответствующую компоненту этого равновесия независимо от того, какие действия выбирают остальные агенты – см. главу 2.*

что отражает взаимосвязь и взаимозависимость агентов), то множество *равновесий Нэша*[1] $E_N(\sigma) \subseteq A'$ и РДС $y_d \in A'$ имеет вид:

(6) $E_N(\sigma) = \{y^N \in A' \mid \forall\, i \in N\ \forall\, y_i \in A_i$

$$\sigma_i(y^N) - c_i(y^N) \geq \sigma_i(y_i,\ y_{-i}^N) - c_i(y_i,\ y_{-i}^N)\};$$

В свою очередь, равновесия в доминантных стратегиях игры агентов описываются следующим условием. $y_{i_d} \in A_i$ – доминантная стратегия i-го агента, тогда и только тогда, когда

$$\forall\, y_i \in A_i,\ \forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ \sigma_i(y_{i_d}, y_{-i}) - c_i(y_{i_d}, y_{-i}) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i}).$$

Если при заданной системе стимулирования у всех агентов имеется доминантная стратегия, то говорят, что данная система стимулирования реализует соответствующий вектор действий как РДС.

Фиксируем произвольный вектор $x \in A'$ действий агентов и рассмотрим следующую систему стимулирования:

(7) $\sigma_i(x, y) = \begin{cases} c_i(x_i, y_{-i}) + \delta_i, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases}$, $\delta_i \geq 0,\ i \in N$.

В [44] доказано, что при использовании центром системы стимулирования (7) x – РДС. Более того, если $\delta_i > 0$, $i \in N$, то x – единственное РДС.

Содержательно при использовании системы стимулирования (7) центр использует следующий **принцип декомпозиции**. Он предлагает i-му агенту: «выбирай действие x_i, а я компенсирую тебе затраты независимо от того, какие действия выбрали остальные агенты, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр декомпозирует игру агентов.

Если стимулирование каждого агента должно зависеть только от его собственного действия, то, фиксировав для каждого агента обстановку игры, перейдем от (7) к системе индивидуального стимулирования следующим образом: фиксируем произвольный вектор действий агентов $x \in A'$ и определим систему стимулирования:

---

[1] *Напомним, что равновесием Нэша называется такой вектор действий агентов, что каждому агенту выгодно выбирать соответствующую компоненту этого равновесия при условии, что все остальные агенты выбирают равновесные действия – см. главу 2.*

$$(8)\ \sigma_i(x, y_i) = \begin{cases} c_i(x_i, x_{-i}) + \delta_i, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases}, \ \delta_i \geq 0,\ i \in N.$$

Содержательно при использовании системы стимулирования (8) центр предлагает i-му агенту: «выбирай действие x_i, а я компенсирую тебе затраты, считая, что остальные агенты также выбрали соответствующие компоненты – x_{-i}, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр также декомпозирует игру агентов, то есть реализует вектор x как равновесие Нэша игры агентов.

Отметим, что функция стимулирования (8) зависит только от действия i-го агента, а величина x_{-i} входит в нее как параметр. Кроме того, при использовании центром системы стимулирования (8), в отличие от (7), каждый из агентов имеет косвенную информацию обо всех компонентах того вектора действий, который хочет реализовать центр. Для того чтобы система стимулирования (8) реализовывала вектор x как РДС, необходимо введение дополнительных (по сравнению со случаем использования (7)) предположений относительно функций затрат агентов – (см. [44]).

Здесь же уместно качественно пояснить необходимость введения неотрицательных констант $\{\delta_i\}_{i \in N}$ в выражениях (5), (7) и (8). Если требуется реализовать некоторое действие как одно из равновесий Нэша, то эти константы могут быть выбраны равными нулю. Если требуется, чтобы равновесие было единственным (в частности, чтобы агенты не выбирали нулевые действия), то агентам следует доплатить сколь угодно малую, но строго положительную величину за выбор именно того действия, которое предлагается центром. Более того, величины $\{\delta_i\}_{i \in N}$ в выражениях (5), (7) и (8) играют важную роль и с точки зрения устойчивости компенсаторной системы стимулирования по параметрам модели. Например, если функция затрат i-го агента известна с точностью до $\delta_i / 2$, то компенсаторная система стимулирования (7) все равно реализует действие x (см. [9, 35]).

Вектор оптимальных реализуемых действий агентов x^*, фигурирующий в качестве параметра в выражении (7) или (8), определяется в результате решения следующей задачи оптимального согласованного планирования:

(9) $x^* = \arg \max\limits_{y \in A'} \{H(y) - \sum\limits_{i \in N} c_i(y)\}$,

а эффективность системы стимулирования (7), (9) равна следующей величине:

$$\Delta = H(x^*) - \sum_{i \in N} c_i(x^*) - \delta.$$

В [44] доказано, что система стимулирования (7), (9) является оптимальной, то есть обладает максимальной эффективностью, среди всех систем стимулирования в многоэлементных ОС.

Рассмотрим несколько примеров решения задач синтеза оптимальных систем коллективного стимулирования в многоэлементных ОС.

Пример 3.3. Решим задачу стимулирования в ОС с двумя агентами, имеющими функции затрат: $c_i(y) = \dfrac{(y_i + l\, y_{3-i})^2}{2r_i}$, $i = 1, 2$, где l – параметр, отражающий степень взаимозависимости агентов. Пусть функция дохода центра $H(y) = y_1 + y_2$, а фонд заработной платы ограничен величиной R. Если центр использует систему стимулирования (7), то задача стимулирования сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} H(y) \to \max\limits_{y \ge 0} \\ c_1(y) + c_2(y) \le R \end{cases}.$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что решение имеет вид:

$$y_1^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{l\, r_2 - r_1}{l^2 - 1},\ y_2^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{l\, r_1 - r_2}{l^2 - 1}.$$

Подставляя равновесные действия агентов в целевую функцию центра, получаем, что оптимальный размер ФЗП равен:

$$R^* = \arg \max_{R \ge 0} \left[\sqrt{2R(r_1 + r_2)}\,/(1 - l) - R\right] = \frac{r_1 + r_2}{2(l - 1)^2}. \bullet$$

Пример 3.4. Другим примером является *аккордная система оплаты труда*. Сначала рассмотрим ОС с двумя агентами, имеющими сепарабельные функции затрат $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, где r_i – тип i-го агента, $y_i \in A_i = \Re^+_1$, $i = 1, 2$. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между стимулированием $\sigma_i(y_1, y_2)$, получаемым от центра, и затратами, то есть:

$$f_i(y) = \sigma_i(y) - c_i(y_i),\ i = 1, 2.$$

Пусть центр использует систему стимулирования

$$(10)\quad \sigma_i(y_1, y_2) = \begin{cases} C_i, & y_1 + y_2 \geq w \\ 0, & y_1 + y_2 < w \end{cases},\ i = 1, 2.$$

Содержательно центр выплачивает каждому агенту фиксированное вознаграждение при условии, что сумма их действий оказывается не меньше, чем некоторое плановое значение $w > 0$. Обозначим: $y_i^+ = \sqrt{2r_iC_i}$, $i = 1, 2$, $Y = \{(y_1, y_2) \mid y_i \leq y_i^+,\ i = 1, 2,\ y_1 + y_2 \leq w\}$ – множество индивидуально-рациональных действий агентов. Рассмотрим четыре возможных комбинации переменных (см. Рис. 3.10–Рис. 3.13).

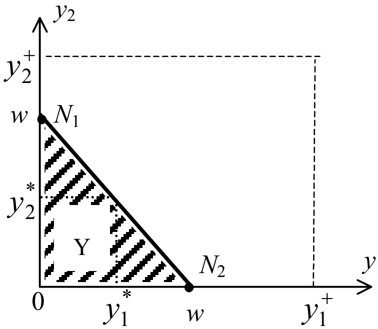


Рис. 3.10

В первом случае (Рис. 3.10) множество равновесий Нэша составляет отрезок: $E_N(\sigma) = [N_1; N_2]$. Фиксируем произвольное равновесие $y^* = (y_1^*, y_2^*) \in E_N(\sigma)$. Наличие «большого» множества равновесий Нэша (отрезка, содержащего континуум точек) имеет несколько минусов с точки зрения эффективности стимулирования. Поясним это утверждение.

Так как все точки отрезка $[N_1; N_2]$ эффективны по Парето с точки зрения агентов, то целесообразно доплачивать агентам за выбор конкретных действий из этого отрезка малую, но строго положительную величину.

Построим систему индивидуального стимулирования в соответствии с результатами, приведенными выше (см. (8) и (9)):

(11) $$\tilde{\sigma}_1^*(y_1) = \sigma_1(y_1,\ y_2^*) = \begin{cases} C_1, & y_1 \ge y_1^* \\ 0, & y_1 < y_1^* \end{cases},$$

$$\tilde{\sigma}_2^*(y_2) = \sigma_2(y_1^*,\ y_2) = \begin{cases} C_2, & y_2 \ge y_2^* \\ 0, & y_2 < y_2^* \end{cases}.$$

При использовании этой системы стимулирования точка $y^* = (y_1^*,\ y_2^*)$ оказывается единственным равновесием Нэша, то есть, переходя от системы стимулирования (10) каждого агента, зависящей от действий всех агентов, к системе стимулирования (11), зависящей только от действий данного агента, центр декомпозирует игру агентов, реализуя при этом единственное действие. При этом эффективность стимулирования, очевидно, не только не понижается, а может оказаться более высокой, чем при использовании исходной системы стимулирования.

Во втором и третьем случаях равновесием Нэша являются отрезки $[N_1; N_2]$, изображенные на Рис. 3.11 и Рис. 3.12 соответственно.

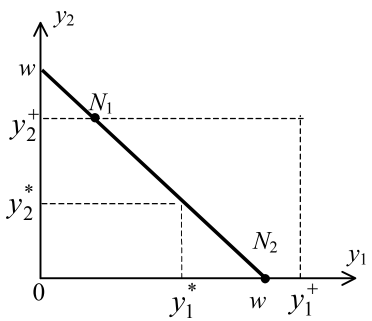


Рис. 3.11

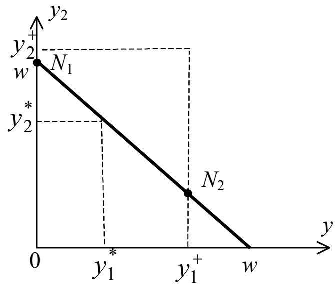


Рис. 3.12

И наконец, в четвертом случае (Рис. 3.13) множество равновесий Нэша состоит из точки (0; 0) и отрезка $[N_1; N_2]$, то есть $E_N(\sigma) = (0; 0) \cup [N_1; N_2]$, причем точки интервала $(N_1; N_2)$ недоминируемы по Парето другими равновесиями.

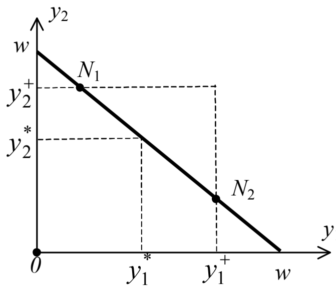


Рис. 3.13

Пусть в условиях рассматриваемого примера функции затрат агентов несепарабельны и имеют вид:

$$c_i(y) = \frac{(y_i + l\, y_{3-i})^2}{2r_i}.$$

Определим множество Y индивидуально-рациональных действий агентов: $Y = \{(y_1, y_2) \mid c_i(y) \le C_i,\ i = 1, 2\}$. Для того чтобы не рассматривать все возможные комбинации значений параметров $\{r_1, r_2, C_1, C_2, w\}$, возьмем случай, представленный на Рис. 3.14.

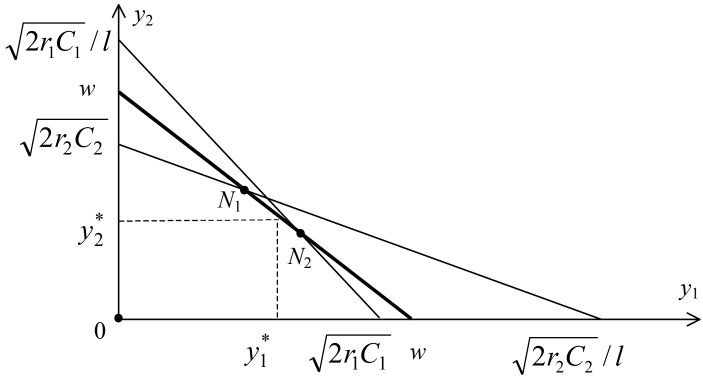


Рис. 3.14. Множество равновесий Нэша [N_1; N_2] в случае несепарабельных затрат

В рассматриваемом случае множество равновесий Нэша включает отрезок [N_1; N_2]. Система стимулирования

$$\tilde{\sigma}_1^*(y) = \begin{cases} c_1(y_1^*, y_2), & y_1 = y_1^* \\ 0, & y_1 \neq y_1^* \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}_2^*(y) = \begin{cases} c_2(y_1, y_2^*), & y_2 = y_2^* \\ 0, & y_2 \neq y_2^* \end{cases}$$

реализует действие $y^* \in [N_1; N_2]$ как равновесие в доминантных стратегиях. •

Завершив рассмотрение механизмов стимулирования за индивидуальные результаты деятельности агентов, перейдем к описанию механизмов стимулирования за результаты совместной деятельности.

3.4. Механизмы стимулирования коллектива агентов

В большинстве известных моделей стимулирования рассматриваются либо ОС, в которых управляющий орган – центр – наблюдает результат деятельности каждого из управляемых субъектов – агентов, находящийся в известном взаимно однозначном соответствии с выбранной последним стратегией (действием), либо ОС с неопределенностью, в которых наблюдаемый результат деятельности агентов зависит не только от его собственных действий, но и от неопределенных и/или случайных факторов [38].

Настоящий раздел содержит формулировку и решение задачи коллективного стимулирования в многоэлементной детерминированной ОС, в которой центр имеет агрегированную информацию о результатах деятельности агентов.

Пусть в рамках модели, рассмотренной в предыдущем разделе, *результат деятельности* $z \in A_0 = Q(A')$ ОС, состоящей из n агентов, является функцией (называемой *функцией агрегирования*) их действий: $z = Q(y)$, где $Q(\cdot)$ – *оператор агрегирования*, отображающий вектор $y \in A'$ действий агентов в результат их деятельности $z \in A_0$. Интересы и предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра представляет собой разность между его доходом $H(z)$ и суммарным вознаграждением $\sum_{i \in N} \sigma_i(z)$, выплачиваемым агентам, где $\sigma_i(z)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z), \ldots, \sigma_n(z))$, то есть

(1) $\Phi(\sigma(\cdot), z) = H(z) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z)$.

Целевая функция i-го агента представляет собой разность между стимулированием, получаемым им от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

(2) $f_i(\sigma_i(\cdot), y) = \sigma_i(z) - c_i(y),\ i \in N$.

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решений о выбираемых стратегиях (соответственно – функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС, а также функция агрегирования. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

В случае, когда индивидуальные действия агентов наблюдаемы для центра (или когда центр может однозначно восстановить их по наблюдаемому результату деятельности), последний может использовать систему стимулирования, зависящую непосредственно от действий агентов: $\forall\ i \in N\ \widetilde{\sigma}_i(y) = \sigma_i(Q(y))$. Методы решения задачи стимулирования для этого случая описаны в предыдущем разделе. Поэтому рассмотрим случай, когда центр наблюдает только результат деятельности ОС, от которого зависит его доход, но не знает и не может восстановить индивидуальных действий агентов, то есть имеет место *агрегирование информации* – центр имеет не всю информацию о векторе $y \in A'$ действий агентов, а ему известен лишь некоторый их агрегат $z \in A_0$ – параметр, характеризующий результаты совместных действий агентов.

Будем считать, что относительно параметров ОС выполнены предположения, введенные в предыдущем разделе и, кроме того, предположим, что функция агрегирования непрерывна.

Как и выше, эффективностью стимулирования является максимальное (в рамках гипотезы благожелательности) значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

(3) $K(\sigma(\cdot)) = \max\limits_{y \in P(\sigma(\cdot))} \Phi(\sigma(\cdot), Q(y))$.

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске такой допустимой системы стимулирования σ^*, которая имеет максимальную эффективность:

(4) $\sigma^* = \arg\max\limits_{\sigma(\cdot)} K(\sigma(\cdot))$.

Отметим, что в рассмотренных в разделе 3.3 задачах стимулирования декомпозиция игры агентов основывалась на возможности центра поощрять агентов за выбор определенного (и наблюдаемого центром) действия. Если действия агентов не наблюдаемы, то непосредственное применение идеи декомпозиции невозможно, поэтому при решении задач стимулирования, в которых вознаграждение агентов зависит от агрегированного результата деятельности ОС, следует использовать следующий подход: найти множество действий, приводящих к заданному результату деятельности, выделить среди них подмножество, характеризуемое минимальными суммарными затратами агентов (и, следовательно, минимальными затратами центра на стимулирование при использовании компенсаторных функций стимулирования, которые оптимальны – см. разделы 3.1 и 3.3), построить систему стимулирования, реализующую это подмножество действий, а затем определить, реализация какого из результатов деятельности наиболее выгодна для центра.

Перейдем к формальному описанию решения задачи стимулирования в ОС с агрегированием информации.

Определим множество векторов действий агентов, приводящих к заданному результату деятельности ОС:

$$Y(z) = \{y \in A' \mid Q(y) = z\} \subseteq A',\ z \in A_0.$$

Выше показано, что в случае наблюдаемых действий агентов минимальные затраты центра на стимулирование по реализации вектора действий $y \in A'$ равны суммарным затратам агентов $\sum_{i \in N} c_i(y)$. По аналогии вычислим минимальные суммарные затраты агентов по достижению результата деятельности $z \in A_0$ $\tilde{\vartheta}(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y)$, а также множество действий $Y^*(z) = \mathrm{Arg} \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y)$, на котором этот минимум достигается.

Фиксируем произвольный результат деятельности $x \in A_0$ и произвольный вектор $y^*(x) \in Y^*(x) \subseteq Y(x)$.

В [44] (при следующем дополнительном предположении «технического» характера: $\forall\ x \in A_0$, $\forall\ y' \in Y(x)$, $\forall\ i \in N$, $\forall\ y_i \in Proj_i\ Y(x)$ $c_j\,(y_i, y'_{-i})$ не убывает по y_i, $j \in N$) доказано, что:

1) при использовании центром системы стимулирования

$$(5)\quad \sigma^*_{ix}(z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)) + \delta_i, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases},\ i \in N,$$

вектор действий агентов $y^*(x)$ реализуется как единственное равновесие Нэша с минимальными затратами центра на стимулирование, равными: $\tilde{\vartheta}(x) + \delta$, где $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$;

2) система стимулирования (5) является δ-оптимальной.

Итак, первый шаг решения задачи стимулирования (4) заключается в поиске минимальной системы стимулирования (5), характеризуемой затратами центра на стимулирование $\tilde{\vartheta}(x)$ и реализующей вектор действий агентов, приводящий к заданному результату деятельности $x \in A_0$. Поэтому на втором шаге решения задачи стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности ОС $x^* \in A_0$ как решение задачи оптимального согласованного планирования:

(6) $x^* = \arg \max\limits_{x \in A_0} [H(x) - \widetilde{\vartheta}(x)]$.

Таким образом, выражения (5)–(6) дают решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования результатов совместной деятельности.

Исследуем, как незнание (невозможность наблюдения) центром индивидуальных действий агентов влияет на эффективность стимулирования. Пусть, как и выше, функция дохода центра зависит от результата деятельности ОС. Рассмотрим два случая. Первый – когда действия агентов наблюдаемы, и центр может основывать стимулирование как на действиях агентов, так и на результате деятельности ОС. Второй случай, когда действия агентов не наблюдаемы, и стимулирование может зависеть только от наблюдаемого результата деятельности ОС. Сравним эффективности стимулирования для этих двух случаев.

При наблюдаемых действиях агентов затраты центра на стимулирование $\vartheta_1(y)$ по реализации вектора $y \in A'$ действий агентов равны $\vartheta_1(y) = \sum\limits_{i \in N} c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_1 равна: $K_1 = \max\limits_{y \in A'} \{H(Q(y)) - \vartheta_1(y)\}$ (см. также предыдущий раздел).

При ненаблюдаемых действиях агентов минимальные затраты центра на стимулирование $\vartheta_2(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ определяются следующим образом (см. (5) и (6)): $\vartheta_2(z) = \min\limits_{y \in Y(z)} \sum\limits_{i \in N} c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_2 равна: $K_2 = \max\limits_{z \in A_0} \{H(z) - \vartheta_2(z)\}$.

В [44] доказано, что эффективности K_1 и K_2 равны. Данный факт, который условно можно назвать «теоремой об идеальном агрегировании в моделях стимулирования», помимо оценок сравнительной эффективности имеет важное методологическое значение. Оказывается, что в случае, когда функция дохода центра зависит только от результата совместной деятельности агентов, эффективности стимулирования одинаковы как при использовании стимулирования агентов за наблюдаемые действия, так и при стимулировании за агрегированный результат деятельности, несущий меньшую информацию, чем вектор действий агентов.

Другими словами, **наличие агрегирования информации не снижает эффективности функционирования системы**. Это достаточно парадоксально, так как известно, что наличие неопределенности и агрегирования в задачах стимулирования не повышает эффективности. В рассматриваемой модели присутствует *идеальное агрегирование*, возможность осуществления которого содержательно обусловлена тем, что центру не важно, какие действия выбирают агенты, лишь бы эти действия приводили с минимальными суммарными затратами к заданному результату деятельности. При этом уменьшается информационная нагрузка на центр, а эффективность стимулирования остается такой же.

Итак, качественный вывод из проведенного анализа следующий: если доход центра зависит от агрегированных показателей деятельности агентов, то целесообразно основывать стимулирование агентов на этих агрегированных показателях. Даже если индивидуальные действия агентов наблюдаются центром, то использование системы стимулирования, основывающейся на действиях агентов, не приведет к увеличению эффективности управления, а лишь увеличит информационную нагрузку на центр.

В то же время, стоит отметить, что в случае ненаблюдаемых центром действий агентов заданный результат деятельности может быть реализован лишь как равновесие Нэша игры агентов, но не как РДС.

Напомним, что в разделе 3.1 был сформулирован принцип компенсации затрат. На модели с агрегированием информации этот принцип обобщается следующим образом: минимальные затраты центра на стимулирование по реализации заданного результата деятельности ОС определяются как минимум компенсируемых центром суммарных затрат агентов, при условии, что последние выбирают вектор действий, приводящий к заданному результату деятельности. Рассмотрим иллюстративный пример.

<u>Пример 3.5.</u> Пусть (см. также примеры в разделе 3.3)

$$z = \sum_{i \in N} y_i \, , H(z) = z, c_i(y_i) = y_i^2 / 2\, r_i, i \in N.$$

Вычисляем $Y(z) = \{y \in A' \mid \sum_{i \in N} y_i = z\}$. Решение задачи

$$\sum_{i \in N} c_i(y_i) \to \min_{y \in A'} \text{ при условии } \sum_{i \in N} y_i = x$$

имеет вид: $y_i^*(x) = \frac{r_i}{W}\, x$, где $W = \sum_{i \in N} r_i$, $i \in N$.

Минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $x \in A_0$ равны: $\vartheta(x) = x^2 / 2\,W$. Вычисляя максимум целевой функции центра $\max_{x \ge 0}\ [H(x) - \vartheta(x)]$, находим оптимальный план: $x^* = W$ и оптимальную систему стимулирования:

$$\sigma_i^*(W, z) = \begin{cases} r_i \dfrac{x^2}{2W^2}, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, \ i \in N.$$

При этом эффективность стимулирования (значение целевой функции центра) равна: $K = W/2$. •

Выше рассмотрены системы коллективного стимулирования, в которых зависимость вознаграждения от действий или результатов у каждого агента была индивидуальной. На практике во многих ситуациях центр вынужден использовать одинаковую для всех агентов зависимость вознаграждения от действия или результата совместной деятельности. Рассмотрим соответствующие модели.

3.5. Механизмы унифицированного стимулирования

До сих пор рассматривались *персонифицированные* системы индивидуального и коллективного стимулирования, в которых центр устанавливал для каждого агента свою зависимость вознаграждения от его действий (раздел 3.1), или действий других агентов (раздел 3.3), или результатов их совместной деятельности (раздел 3.4). Кроме персонифицированных, существуют *унифицированные* системы стимулирования, в которых зависимость вознаграждения от тех или иных параметров одинакова для всех агентов. Необходимость использования унифицированного стимулирования может быть следствием институциональных ограничений, а может возникать в результате стремления центра к «демократическому» управлению, созданию для агентов равных возможностей и т. д.

Так как унифицированное управление является частным случаем персонифицированного, то эффективность первого не превышает эффективности второго. Следовательно, возникает вопрос, к каким потерям в эффективности приводит использование унифицированного стимулирования, и в каких случаях потери отсутствуют?

Рассмотрим две модели коллективного унифицированного стимулирования (используемая техника анализа может быть применена к любой системе стимулирования) – унифицированные пропорциональные системы стимулирования и унифицированные системы коллективного стимулирования за результаты совместной деятельности. В первой модели унификация не приводит к потерям эффективности (оказывается, что именно унифицированные системы стимулирования оказываются оптимальными в классе пропорциональных), а во второй снижение эффективности значительно.

Унифицированные пропорциональные системы стимулирования. Введем следующее предположение относительно функций затрат агентов:

(1) $c_i(y_i, r_i) = r_i\,\varphi(y_i/r_i),\ i \in N$,

где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, $\varphi(0) = 0$, (например, для функций типа Кобба-Дугласа $\varphi(t) = t^{\alpha} / \alpha$, $\alpha \geq 1$), $r_i > 0$ – параметр эффективности агента.

Если центр использует пропорциональные (L-типа) индивидуальные системы стимулирования: $\sigma_i(y_i) = \lambda_i y_i$, то целевая функция агента имеет вид: $f_i(y_i) = \lambda_i y_i - c_i(y_i)$. Дифференцируя целевую функцию, вычислим действие, выбираемое агентом при использовании центром некоторой фиксированной системы стимулирования:

(2) $y_i^*(\gamma_i) = r_i\,\varphi'^{-1}(\lambda_i),\ i \in N$,

где $\varphi'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции $\varphi(\cdot)$.

Минимальные суммарные затраты центра на стимулирование равны:

(3) $\vartheta_L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, r_i\, \varphi'^{-1}(\lambda_i)$,

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Суммарные затраты агентов равны:

(4) $c(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \varphi(\varphi'^{-1}(\lambda_i))$.

В рамках приведенной выше общей формулировки модели пропорционального стимулирования возможны различные постановки частных задач. Рассмотрим некоторые из них, интерпретируя действия агентов как объемы выпускаемой ими продукции.

Задача 1. Пусть центр заинтересован в выполнении агентами плана w по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами агентов (еще раз подчеркнем необходимость различения суммарных затрат агентов и суммарных затрат центра на стимулирование). Тогда его цель заключается в выборе ставок оплаты $\{\lambda_i\}_{i \in N}$ в результате решения следующей задачи:

$$(5)\quad \begin{cases} c(\lambda) \to \min\limits_{\lambda} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) = w \end{cases},$$

решение которой имеет вид:

$$(6)\quad \lambda_i^* = \varphi'(w / W);\ y_i^* = r_i\,(w / W);\ i \in N,$$

$$c^* = W\,\varphi\,(w / W);\ \vartheta_L^* = R\,\varphi'(w / W).$$

где $W = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$.

Так как оптимальные ставки оплаты одинаковы для всех агентов, то оптимальна именно унифицированная система стимулирования.

Задача 2. Содержательно двойственной к задаче 1 является задача максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты агентов:

$$(7)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) \to \max\limits_{\lambda} \\ c(\lambda) \le v \end{cases}.$$

Решение задачи (7) имеет вид:

$$(8)\quad \lambda_i^* = \varphi'(\varphi^{-1}(v / W));\ y_i^* = r_i\,\varphi^{-1}(v / W);\ i \in N,$$

$$c^* = R;\ \vartheta_L^* = \varphi^{-1}(v / W)\ W\,\varphi'\,(\varphi^{-1}(v / W)),$$

то есть в «двойственной» задаче (естественно) оптимальным решением также является использование унифицированных пропорциональных систем стимулирования.

Замена в задачах 1 и 2 суммарных затрат агентов на суммарные затраты на стимулирование порождает еще одну пару содержательно двойственных задач.

Задача 3. Если центр заинтересован в выполнении агентами плана w по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами на стимулирование, то ставки оплаты определяются в результате решения следующей задачи:

$$(9)\quad \begin{cases} \vartheta_L(\lambda) \to \min\limits_{\lambda} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) = w \end{cases},$$

решение которой совпадает с (6), что представляется достаточно интересным фактом, так как суммарные затраты агентов отражают интересы управляемых субъектов, а суммарные затраты на стимулирование – интересы управляющего органа. Естественно, отмеченное совпадение является следствием сделанных предположений.

Задача 4 заключается в максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты на стимулирование:

$$(10)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) \to \max\limits_{\lambda} \\ \vartheta_L(\lambda) \le v \end{cases}.$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем условие оптимальности (λ_0 – множитель Лагранжа):

$$\lambda_0\, \varphi'^{-1}(\lambda_i)\, \varphi''(\lambda_i) + \lambda_i = 1,\ i \in N,$$

из которого следует, что все ставки оплаты должны быть одинаковы и удовлетворять уравнению

(11) $\lambda\, \varphi'^{-1}(\lambda) = v / W.$

Таким образом, мы доказали следующий результат: в организационных системах со слабо связанными агентами, функции затрат которых имеют вид (1), унифицированные системы стимулирования оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования.

Отметим, что выше установлено, что унифицированные пропорциональные системы стимулирования (*системы стимулирования UL-типа*) оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования в ОС со слабо связанными агентами, имеющими функции затрат вида (1). Поэтому исследуем их сравнительную эффективность на множестве всевозможных (не только пропорциональных) систем стимулирования. Как было показано выше (в разделах 3.1 и 3.3), для этого достаточно сравнить минимальные затраты на стимулирование, например, в задаче 2, с затратами на стимулирование в случае использования центром оптимальных компенсаторных систем стимулирования (которые равны $\vartheta_K(y^*) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \varphi(y_i / r_i)$).

Решая задачу выбора вектора $y^* \in A'$, минимизирующего $\vartheta_K(y^*)$ при условии $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = w$, получаем, что $\vartheta_K^* = W\, \varphi\,(w / W)$. Подставляя из выражения (6) $\vartheta_{UL}^* = R\, \varphi'(w / W)$, вычислим отношение минимальных затрат на стимулирование:

(12) $\vartheta_{UL}^* / \vartheta_K^* = w / W\ \ \varphi'(w / W) / \varphi\,(w / W)$.

Из выпуклости функции $\varphi(\cdot)$ следует, что $\vartheta_{UL}^* / \vartheta_K^* \geq 1$. Так как суммарные затраты на стимулирование при использовании унифицированных пропорциональных систем стимулирования выше, чем при использовании «абсолютно оптимальных» компенсаторных систем стимулирования, следовательно, первые не оптимальны в классе всевозможных систем стимулирования. Полученный для многоэлементных организационных систем результат вполне согласован со сделанным в разделе 3.2 выводом, что в одноэлементных системах эффективность пропорционального стимулирования не выше, чем компенсаторного.

Унифицированные системы стимулирования результатов коллектива агентов. В разделе 3.3 исследовались персонифицированные системы стимулирования агентов за результаты их совместной деятельности. Рассмотрим, что произойдет, если в этой модели потребовать, чтобы система стимулирования была унифицированной.

Рассмотрим класс унифицированных систем стимулирования за результаты совместной деятельности (см. также раздел 3.3), то есть систем стимулирования, в которых центр использует для всех агентов одну и ту же зависимость индивидуального вознаграждения от результата деятельности $z \in A_0$. Введем следующую функцию:

(13) $c(y) = \max\limits_{i \in N} \{c_i(y)\}$.

На первом шаге вычислим минимальные затраты центра на стимулирование $\vartheta_U(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ унифицированной системой стимулирования:

$$\vartheta_U(z) = \min_{y \in Y(z)} c(y).$$

Множество векторов действий, минимизирующих затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $z \in A_0$, имеет вид: $Y^*(z) = \operatorname{Arg} \min\limits_{y \in Y(z)} c(y)$.

По аналогии с тем, как это делалось в разделе 3.3, можно показать, что унифицированная система стимулирования:

(14) $\sigma_{ix}(z) = \begin{cases} c(y^*(x)) + \delta / n, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, i \in N,$

где $y^*(x)$ – произвольный элемент множества $Y^*(x)$, реализует результат деятельности $x \in A_0$ с минимальными в классе унифицированных систем стимулирования затратами на стимулирование.

На втором шаге решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности ОС x_U^* как решение задачи оптимального согласованного планирования:

(15) $x_U^* = \arg \max\limits_{z \in A_0} [H(z) - n\, \vartheta_U(z)]$.

Выражения (14)-(15) дают решение задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования агентов за результаты их совместной деятельности. Легко видеть, что эффективность унифицированного стимулирования (14)-(15) не выше, чем эффективность персонифицированного стимулирования (5)-(6).

<u>Пример 3.6.</u> Рассмотрим Пример 3.5. Пусть в его условиях центр должен использовать унифицированную систему стимулирования. Определим $c(y) = y_j^2 / 2r_j$, где $j = \arg \min\limits_{i \in N} \{r_i\}$. Тогда минимальные затраты на стимулирование равны: $\vartheta_U(z) = z^2/2\, n\, r_j$. Оптимальный план $x_U^* = n\, r_j$ дает значение эффективности $n\, r_j/2$, которая

меньше эффективности $\sum_{i \in N} r_i / 2$ персонифицированного стимулирования, а равенство имеет место лишь в случае одинаковых агентов.

3.6. Механизмы экономической мотивации

Механизмы стимулирования (мотивации) побуждают управляемых агентов предпринимать определенные действия в интересах управляющего органа – центра. Если в механизмах, рассматриваемых выше, стимулирование заключалось в непосредственном вознаграждении агентов со стороны центра, то в настоящем разделе описаны *механизмы экономической мотивации*, в которых центр управляет агентами путем установления тех или иных нормативов – ставок налога с дохода, прибыли и т. д. Примерами являются: нормативы внутрифирменного налогообложения, определяющие распределение дохода или прибыли между подразделениями и организацией в целом (корпоративным центром или образовательным холдингом [32]); тарифы, определяющие выплаты предприятий в региональные или муниципальные фонды, и т. д.

Рассмотрим следующую модель. Пусть в организационной системе (корпорации, фирме) помимо одного центра имеются n агентов, и известны затраты $c_i(y_i)$ i-го агента, зависящие от его действия $y_i \in \Re^1_+$ (например, от объема выпускаемой агентом продукции), $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множеству агентов. Будем считать функцию затрат непрерывной, возрастающей, выпуклой и равной нулю при выборе агентом нулевого действия. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между его доходом $H_i(y_i)$ и затратами $c_i(y_i)$:

$$f_i(y_i) = H_i(y_i) - c_i(y_i),\ i \in N.$$

Пусть функции затрат агентов имеют вид:

$$c_i(y_i) = r_i\,\varphi(y_i / r_i),\ i \in N,$$

где $\varphi(\cdot)$ – возрастающая гладкая выпуклая функция, такая, что $\varphi(0) = 0$.

Обозначим $\xi(\cdot) = \varphi'^{-1}(\cdot)$ – функцию, обратную производной функции $\varphi(\cdot)$.

Рассмотрим пять механизмов экономической мотивации агентов, а именно:

1) механизм отчислений (налога с дохода);

2) централизованный механизм;

3) механизм с нормативом рентабельности;

4) механизм налога на прибыль;

5) механизм участия в прибыли.

Механизм отчислений. Пусть задана внутрифирменная (трансфертная) цена λ единицы продукции, производимой агентами, и центр использует *норматив*[1] $\gamma \in [0; 1]$ *отчислений* от дохода агентов. Тогда доход агента $H_i(y_i) = \lambda\, y_i$ и целевая функция i-го агента с учетом отчислений центру имеет вид:

(1) $f_i(y_i) = (1 - \gamma)\, \lambda\, y_i - c_i(y_i),\ i \in N.$

Величина γ – норматив отчислений – может интерпретироваться как ставка налога на доход (выручку). Каждый агент выберет действие, максимизирующее его целевую функцию:

(2) $y_i(\gamma) = r_i\, \xi((1 - \gamma)\, \lambda),\ i \in N.$

Целевая функция центра, равная сумме отчислений агентов, будет иметь вид:

(3) $\Phi(\gamma) = \gamma\, \lambda\, W\, \xi((1 - \gamma)\, \lambda),$

где $W = \sum_{i \in N} r_i$.

Задача центра, стремящегося максимизировать свою целевую функцию, заключается в выборе норматива отчислений:

(4) $\Phi(\gamma) \to \max_{\gamma \in [0;1]}$.

Если функции затрат агентов являются функциями типа Кобба-Дугласа, то есть $c_i(y_i) = \dfrac{1}{\alpha}\ (y_i)^{\alpha}\ (r_i)^{1-\alpha},\ \ \alpha \geq 1,\ \ i \in N,$ то решение задачи (4) имеет вид:

(5) $\gamma^*(\alpha) = 1 - 1 / \alpha,$

то есть оптимальное значение норматива отчислений $\gamma^*(\alpha)$ возрастает с ростом показателя степени α. Оптимальное значение целевой функции центра при этом равно:

---

[1] *Легко проверить, что в рамках введенных предположений оптимально использование единого норматива для всех агентов – см. раздел 3.5.*

$$\Phi_\gamma = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\ \lambda\ W\ \xi\ (\lambda / \alpha),$$

то есть $\Phi_\gamma = (\alpha - 1)\ W\ (\frac{\lambda}{\alpha})^{\alpha / (\alpha - 1)}$, а сумма действий агентов равна

$$Y_\gamma = W\ \xi\ (\lambda / \alpha) = W\ (\lambda / \alpha)^{1 / (\alpha - 1)}.$$

Выигрыш i-го агента:

$$f_{i\gamma} = r_i\ (1 - 1 / \alpha)\ (\lambda / \alpha\ )^{\alpha / (\alpha - 1)},\ i \in N,$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна: $\Sigma_\gamma = (\alpha^2 - 1)\ W\ (\lambda / \alpha\ )^{\alpha / (\alpha - 1)} / \alpha$.

Централизованный механизм. Сравним найденные показатели со значениями, соответствующими другой схеме экономической мотивации агентов, а именно предположим, что центр использует *централизованную схему* – «забирает» себе весь доход от деятельности агентов, а затем компенсирует им затраты от выбираемых ими действий y_i в случае выполнения плановых заданий x_i (компенсаторная система стимулирования).

В этом случае целевая функция центра равна:

(6) $\Phi(x) = \lambda \sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in N} c_i(x_i)$.

Решая задачу $\Phi(x) \to \max_{\{x_i \geq 0\}}$, центр находит оптимальные значения планов:

(7) $x_i = r_i\ \xi\ (\lambda),\ i \in N$.

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$\Phi_x = \lambda^{\alpha / (\alpha - 1)}\ W\ (1 - 1 / \alpha),$$

а сумма действий агентов равна $Y_x = W\ \xi\ (\lambda) = W\ \lambda^{1 / (\alpha - 1)}$.

Выигрыш i-го агента тождественно равен нулю, так как центр в точности компенсирует его затраты, а сумма целевых функций всех участников системы Σ_x (центра и всех агентов) равна Φ_x.

Сравним полученные значения:

- $\Phi_x / \Phi_\gamma = \alpha^{\frac{1}{\alpha - 1}} \geq 1$ и убывает с ростом α;
- $Y_x / Y_\gamma = \alpha^{\frac{1}{\alpha - 1}} \geq 1$ и убывает с ростом α;
- $\Sigma_x / \Sigma_\gamma = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} / (\alpha + 1) \geq 1$ и убывает с ростом α.

Таким образом, если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то централизованный механизм экономической мотивации (с точки зрения организационной системы в целом) выгоднее, чем механизм отчислений, так как обеспечивает больший суммарный выпуск продукции и большее значение суммарной полезности всех элементов системы.

Фраза «с точки зрения организационной системы в целом» существенна, так как при использовании централизованного механизма прибыль (значение целевой функции) агентов равна нулю – весь ресурс изымает «метасистема». Такая схема взаимодействия центра с агентами может не устраивать агентов, поэтому исследуем обобщение централизованной схемы, а именно *механизм с нормативом рентабельности*, при котором вознаграждение агента центром не только компенсирует его затраты в случае выполнения плана, но и оставляет в его распоряжении полезность, пропорциональную затратам. Коэффициент этой пропорциональности называется *нормативом рентабельности*. Рассмотренной выше централизованной схеме соответствует нулевое значение норматива рентабельности.

Механизм с нормативом рентабельности. В случае использования норматива рентабельности $\rho \geq 0$ целевая функция центра равна (см. также раздел 3.1):

(8) $\Phi_\rho(x) = \lambda \sum_{i \in N} x_i - (1 + \rho) \sum_{i \in N} c_i(x_i)$.

Решая задачу $\Phi_\rho(x) \to \max_{\{x_i \geq 0\}}$, центр находит оптимальные значения планов[1]:

(9) $x_{i\rho} = r_i\, \xi(\lambda / (1 + \rho)),\ i \in N$.

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$\Phi_\rho = \lambda\, (\lambda / (1 + \rho))^{1 / (\alpha - 1)}\, W (1 - 1 / \alpha),$$

а сумма действий агентов равна:

$$Y_\rho = W\, \xi(\lambda / (1 + \rho)) = W (\lambda / (1 + \rho))^{1 / (\alpha - 1)}.$$

Выигрыш i-го агента равен: $f_{i\rho} = \rho\, r_i (\lambda / (1 + \rho))^{\alpha / (\alpha - 1)} / \alpha$, а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна: $\Sigma_\rho = \lambda\, W (\lambda / (1 + \rho))^{1/(\alpha - 1)} (\alpha - 1 / (1 + \rho)) / \alpha$.

[1] *Оптимальное с точки зрения центра значение норматива рентабельности, очевидно, равно нулю.*

Сравним полученные значения (отметим, что при $\rho = 0$ все выражения для механизма с нормативом рентабельности переходят в соответствующие выражения для централизованного механизма):

- $\Phi_x / \Phi_\rho = (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$ и возрастает с ростом ρ;
- $Y_x / Y_\rho = (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$ и возрастает с ростом ρ;
- $\Sigma_x / \Sigma_\rho = \dfrac{(1-\frac{1}{\alpha})(1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{1-\frac{1}{(1+\rho)\alpha}} \geq 1$ и возрастает с ростом ρ.

Интересно, что максимум Σ – суммы целевых функций участников организационной системы (центра и агентов) – достигается при нулевом нормативе рентабельности, то есть в условиях полной централизации!

Сравним теперь механизм с нормативом рентабельности с механизмом отчислений:

- $\Phi_\gamma / \Phi_\rho = (\dfrac{1+\rho}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и возрастает с ростом ρ;
- $Y_\gamma / Y_\rho = (\dfrac{1+\rho}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и возрастает с ростом ρ;
- $\Sigma_\gamma / \Sigma_\rho = \dfrac{(\alpha^2-1)}{\alpha^2 - \frac{\alpha}{(1+\rho)}} (\dfrac{1+\rho}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и возрастает с ростом ρ.

Итак, приходим к выводу, что если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то механизм с нормативом рентабельности $\rho = \alpha - 1$ эквивалентен механизму отчислений.

Справедливость данного утверждения следует из того, что при $\rho = \alpha - 1$ все (!) показатели механизма с нормативом рентабельности совпадают с соответствующими показателями механизма отчислений, то есть выполняется $y_i(\gamma) = x_{i\rho}$, $i \in N$, $\Phi_\gamma = \Phi_\rho$, $Y_\gamma = Y_\rho$, $f_{i\gamma} = f_{i\rho}$, $i \in N$, $\Sigma_\gamma = \Sigma_\rho$.

Теперь рассмотрим четвертый механизм экономической мотивации – механизм налога на прибыль.

Механизм налога на прибыль. Если в качестве прибыли агента интерпретировать его целевую функцию – разность между доходом и затратами, то при ставке налога $\beta \in [0; 1]$ на эту прибыль целевая функция i-го агента примет вид:

(10) $f_{i\beta}(y_i) = (1 - \beta)\,[\lambda\, y_i - c_i(y_i)],\ i \in N,$

а целевая функция центра:

(11) $\Phi_\beta(y) = \beta\,[\lambda \sum_{i \in N} y_i - \sum_{i \in N} c_i(y_i)].$

Действия, выбираемые агентами при использовании налога на прибыль, совпадают с действиями, выбираемыми ими при централизованной схеме, следовательно:

(12) $y_{i\beta} = r_i\,\xi(\lambda),\ i \in N.$

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно[1]:

$$\Phi_\beta = \beta\,\lambda^{\alpha/(\alpha-1)}\,W(1 - 1/\alpha),$$

а сумма действий агентов:

$$Y_\beta = W\,\xi(\lambda) = W\,\lambda^{1/(\alpha-1)}.$$

Выигрыш i-го агента равен:

$$f_{i\beta} = (1 - \beta)\,\lambda^{\alpha/(\alpha-1)}\,r_i\,(1 - 1/\alpha),$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов):

$$\Sigma_\beta = \lambda^{\alpha/(\alpha-1)}\,W(1 - 1/\alpha).$$

Сравним полученные значения:

- $\Phi_x / \Phi_\beta = 1 / \beta \geq 1$ и возрастает с ростом β;
- $Y_x / Y_\beta = 1$;
- $\Sigma_x / \Sigma_\beta = 1$.

Таким образом, механизм налога на прибыль приводит к той же сумме полезностей и к тому же значению суммы равновесных действий агентов, что и централизованный механизм, но в первом случае полезность центра в β раз ниже, чем во втором. Поэтому механизм налога на прибыль может интерпретироваться как механизм компромисса [28], в котором *точка компромисса* внутри *области компромисса* определяется ставкой налога на при-

[1] *Очевидно, что оптимальное с точки зрения центра значение ставки налога на прибыль β равно единице. При этом механизм налога на прибыль превращается в централизованный механизм.*

быль, задающей пропорцию, в которой делится прибыль системы в целом между центром и агентами.

Сравним теперь механизм налога на прибыль с механизмом с нормативом рентабельности:

- $\Phi_\beta / \Phi_\rho = \beta\ (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}$;
- $Y_\beta / Y_\rho = (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$;
- $\Sigma_\beta / \Sigma_\rho = \dfrac{(1-\frac{1}{\alpha})(1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{1-\frac{1}{(1+\rho)\alpha}} \geq 1$.

И наконец, сравним механизм налога на прибыль с механизмом отчислений (механизмом налога с дохода):

- $\Phi_\beta / \Phi_\gamma = \beta\ \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$;
- $Y_\beta / Y_\gamma = \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$;
- $W_\beta / W_\gamma = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} / (\alpha + 1)$.

Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то механизм налога на прибыль:

- при $\beta = 1 / \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$ с точки зрения центра эквивалентен оптимальному механизму отчислений;

- при $\beta = 1 - 1 / \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ с точки зрения агентов эквивалентен оптимальному механизму отчислений;

- при $\beta = 1 / (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ с точки зрения центра эквивалентен механизму с нормативом рентабельности;

- при $\beta = 1 - \rho / (\alpha - 1)\ (1+\rho)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ с точки зрения агентов эквивалентен механизму с нормативом рентабельности.

Механизм участия в прибыли. Рассмотрим механизм участия в прибыли, в рамках которого центр получает прибыль $H(y)$ от деятельности агентов, а затем выплачивает каждому агенту фиксированную (и одинаковую для всех агентов, то есть механизм является унифицированным) долю $\Psi \in [0; 1]$ этой прибыли. Целевая функция i-го агента примет вид:

(13) $f_{i\Psi}(y) = \Psi\, H(y) - c_i(y_i),\ i \in N,$

а целевая функция центра:

(14) $\Phi_\Psi(y) = (1 - n\,\Psi)\, H(y).$

Действия, выбираемые агентами при механизме участия в прибыли, равны:

(15) $y_{i\Psi} = r_i\, \xi(\lambda\, \Psi),\ i \in N.$

Пусть прибыль центра линейна по действиям агентов: $H(y) = \lambda \sum_{i \in N} y_i$. Тогда значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$\Phi_\Psi = (1 - n\,\Psi)\, W \lambda\, \xi(\lambda\, \Psi),$$

а сумма действий агентов равна: $Y_\Psi = W\, \xi(\lambda\, \Psi)$.

Выигрыш i-го агента равен:

$$f_{i\Psi} = W\, [n\, \Psi\, \lambda\, \xi(\lambda\, \Psi) - \varphi(\lambda\, \Psi)],\ i \in N,$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна:

$$\Sigma_\Psi = W\, [\lambda\, \xi(\lambda\, \Psi) - \varphi(\lambda\, \Psi)].$$

При квадратичных функциях затрат агентов оптимальная с точки зрения центра ставка равна: $\Psi^* = 1 / 2\, n$.

Сравнительный анализ. Таким образом, рассмотрены пять механизмов экономической мотивации. С точки зрения суммы полезностей всех участников системы и суммы действий агентов максимальной эффективностью обладают централизованный механизм и механизм налога на прибыль (с любой ставкой). Использование механизма отчислений или механизма с нормативом рентабельности приводит к меньшей эффективности.

При использовании механизма отчислений, механизма с нормативом рентабельности или механизма налога на прибыль в зависимости от параметров (соответственно – норматива отчислений, норматива рентабельности и ставки налога на прибыль) полезности центра и агентов перераспределяются по-разному по сравнению с централизованным механизмом (см. приведенные выше оценки).

Использование полученных результатов позволяет в каждом конкретном случае получать оценки параметров, при которых различные механизмы эквивалентны. Так, например, при квадратичных функциях затрат (α = 2) оптимально следующее значение норматива отчислений (ставки налога с дохода): γ^* = 0,5. При ρ^* = 1 механизм с нормативом рентабельности полностью эквивалентен механизму отчислений, а при β^* = 0,5 механизм налога на прибыль эквивалентен им обоим с точки зрения центра, а при β^* = 0,75 – с точки зрения агентов (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Параметры механизмов экономической мотивации при квадратичных затратах агентов

Механизм	Параметры			
	Φ / W	Y / W	Σ / W	$\sum_{i \in N} f_i / W$
Налог с дохода	$\lambda^2 / 4$	$\lambda / 2$	$3\lambda^2 / 8$	$\lambda^2 / 8$
Централизованный	$\lambda^2 / 2$	λ	$\lambda^2 / 2$	0
Норматив рентабельности	$\lambda^2 / (2(1+\rho))$	$\lambda / (1+\rho)$	$\lambda^2(1+2\rho) / (2\,(1+\rho)^2)$	$\lambda^2\rho / (2\,(1+\rho)^2)$
Налог на прибыль	$\beta\lambda^2 / 2$	λ	$\lambda^2 / 2$	$(1-\beta)\lambda^2 / 2$
Участие в прибыли	$\lambda^2 / (4\,n)$	$\lambda / (2\,n)$	$\lambda^2(2\,n-1) / (4\,n^2)$	$\lambda^2(n-1) / (4\,n^2)$

3.7. Механизмы стимулирования в системах с распределенным контролем

Во многих реальных системах один и тот же агент оказывается подчинен одновременно нескольким центрам, находящимся либо на одном, либо на различных уровнях иерархии. Первый случай называется *распределенным контролем*, второй – *межуровневым взаимодействием*.

Межуровневое взаимодействие. Анализ моделей межуровневого взаимодействия [34] свидетельствует, что двойное подчинение агента управляющим органам, находящимся на различных уровнях иерархии, оказывается неэффективным. Косвенным подтверждение этой неэффективности является известный управленческий принцип «вассал моего вассала – не мой вассал». Поэтому с нормативной точки зрения каждый агент должен быть подчинен только своему непосредственному «начальнику» – управляющему органу, находящемуся на следующем (и только на следующем) более высоком уровне иерархии.

Возникает закономерный вопрос: почему в реальных организационных системах наблюдаются эффекты межуровневого взаимодействия? Дескриптивное (без учета нормативной структуры взаимодействия участников и институциональных ограничений) объяснение таково. Обычно предполагается, что потери эффективности могут возникать только из-за факторов агрегирования, декомпозиции задач управления и недостаточной информированности центра об агентах [34]. Если же присутствуют, в частности, информационные ограничения на промежуточном уровне – например, количество информации, которое должен переработать управляющий орган некоторой подсистемы, превосходит его возможности – то часть функций управления (быть может, в агрегированном виде) вынужденно передается на более высокий уровень. Проще говоря, основной причиной наблюдаемого на практике межуровневого взаимодействия, как правило, является некомпетентность (в объективном смысле этого слова) промежуточного центра. Поэтому, с одной стороны, при решении задач синтеза организационной, функциональной, информационной и других структур ОС априори следует допускать возможность межуровневого взаимодействия, стремясь, тем не менее, избежать его, насколько это возможно. С другой стороны, наличие межуровневого взаимодействия в реальной ОС косвенно свидетельствует о неоптимальности ее функционирования и должно послужить руководителю сигналом о необходимости пересмотра структуры, а иногда и состава, системы.

В то же время, двойное подчинение агентов центрам одного и того же уровня зачастую неизбежно. Примером являются матричные структуры управления [11, 16, 34, 40], для которых распределенный контроль является характерной чертой.

Распределенный контроль. Специфической чертой *матричных структур управления* (МСУ), характерных для проектно-ориентированных организаций, является подчиненность одного и того же агента одновременно нескольким центрам одного уровня иерархии, функции которых могут быть различными (координирующая, обеспечивающая, контролирующая и т.д.). Например, на иерархическую организационную структуру накладывается «горизонтальная» структура проектов (см. Рис. 3.15).

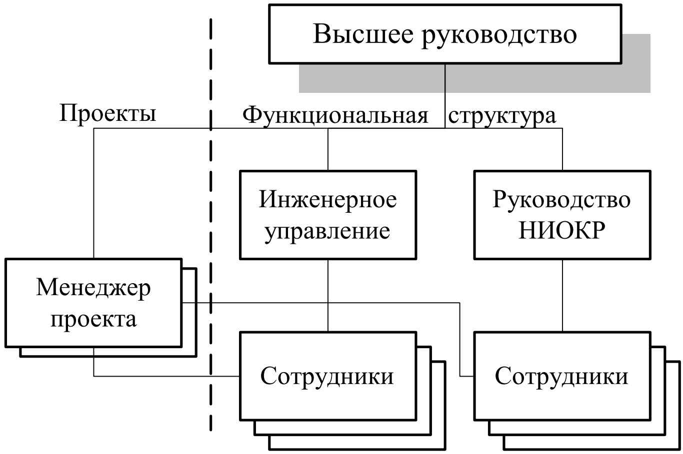


Рис. 3.15. Пример матричной структуры управления

В МСУ центры, осуществляющие управление агентом, оказываются вовлеченными в «игру», равновесие в которой имеет достаточно сложную структуру. В частности можно выделить два устойчивых режима взаимодействия центров – режим сотрудничества и режим конкуренции.

В *режиме сотрудничества* центры действуют совместно, что позволяет добиваться требуемых результатов деятельности управляемого агента с использованием минимального количества ресурсов.

В *режиме конкуренции*, который возникает, если цели центров различаются достаточно сильно, ресурсы расходуются неэффективно.

Приведем простейшую модель матричной структуры управления (достаточно полное представление о современном состоянии исследований этого класса задач управления можно получить из [16, 23, 34, 45]).

Пусть ОС состоит из одного агента и k центров. Стратегией агента является выбор действия $y \in A$, что требует от него затрат $c(y)$. Каждый центр получает от деятельности агента доход, описываемый функцией $H_i(y)$, и выплачивает агенту стимулирование $\sigma_i(y)$, $i \in K = \{1, 2, ..., k\}$ – множеству центров. Таким образом, целевая функция i-го центра имеет вид

(1) $\Phi_i(\sigma_i(\cdot), y) = H_i(y) - \sigma_i(y), i \in K$,

а целевая функция агента:

(2) $f(\{\sigma_i(\cdot)\}, y) = \sum_{i \in K} \sigma_i(y) - c(y)$.

Порядок функционирования следующий: центры одновременно и независимо (кооперативные модели взаимодействия центров в системах с распределенным контролем рассматриваются в [16]) выбирают функции стимулирования и сообщают их агенту, который затем выбирает свое действие. Ограничимся рассмотрением множества Парето-эффективных равновесий Нэша игры центров, в которых, как показано в [45], их стратегии имеют вид

(3) $\sigma_i(x, y) = \begin{cases} \lambda_i, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}, i \in K$.

Содержательно, центры договариваются о том, что будут побуждать агента выбирать действие $x \in A$ – *план* – и осуществлять совместное стимулирование. Такой режим взаимодействия центров называется режимом сотрудничества.

Из условий оптимальности по Парето следует, что сумма вознаграждений, получаемых агентом от центров в случае выполнения плана, равна его затратам (обобщение принципа компенсации затрат на системы с распределенным контролем), то есть:

(4) $\sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)$.

Условие выгодности сотрудничества для каждого из центров можно сформулировать следующим образом: в режиме сотрудничества каждый центр должен получить полезность не меньшую, чем он мог бы получить, осуществляя стимулирование агента в одиночку (компенсируя последнему затраты по выбору наиболее выгодного для данного центра действия). Полезность i-го центра от «самостоятельного» взаимодействия с агентом в силу результатов раздела 3.1 равна

(5) $W_i = \max_{y \in A} [H_i(y) - c(y)], i \in K$.

Обозначим $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$,

(6) $S = \{x \in A \mid \exists\, \lambda \in \Re_+^k : H_i(x) - \lambda_i \geq W_i,\ i \in K,\ \sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)\}$

– множество таких действий агента, для реализации которых сотрудничество выгодно для центров.

Множество пар $x \in S$ и соответствующих векторов λ называется *областью компромисса*:

(7) $\Lambda = \{x \in A,\ \lambda \in \Re_+^k \mid H_i(x) - \lambda_i \geq W_i,\ i \in K,\ \sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)\}$.

Режим сотрудничества по определению имеет место, если область компромисса не пуста: $\Lambda \neq \varnothing$. В режиме сотрудничества агент получает нулевую полезность.

Обозначим

(8) $W_0 = \max_{y \in A} [\sum_{i \in K} H_i(y) - c(y)]$.

Легко показать, что область компромисса не пуста тогда и только тогда, когда [79]:

(9) $W_0 \geq \sum_{i \in K} W_i$.

Таким образом, критерием реализуемости режима сотрудничества является условие (9). Содержательно оно означает, что, действуя совместно, центры могут получить б*о*льшую суммарную полезность, чем действуя в одиночку. Разность $W_0 - \sum_{i \in K} W_i$ может интерпретироваться как мера согласованности интересов центров и характеристика эмерджентности ОС.

Если условие (9) не выполнено и $\Lambda = \varnothing$, то имеет место режим конкуренции центров, характеризуемый так называемым аукционным решением. Упорядочим (перенумеруем) центров в порядке убывания величин $\{W_i\}$: $W_1 \geq W_2 \geq \ldots \geq W_k$. Победителем будет первый центр, который предложит агенту, помимо компенсации затрат, полезность, на сколь угодно малую величину превышающую W_2.

Обсудим качественно полученные результаты. Одним из недостатков МСУ является то, что при недостаточном разделении полномочий между менеджерами проектов и руководителями функциональных подразделений возможен конфликт между ними, когда и менеджеры проектов, и функциональные руководители (иначе говоря, центры промежуточного уровня иерархии) стремятся «перетянуть» на себя находящихся под их общим контролем агентов. При этом, очевидно, ОС теряет в эффективности функционирования, так как на такое перетягивание, «перекупку» агентов могут уходить весьма существенные средства.

Сотрудничество центров промежуточного уровня – совместное назначение планов и использование согласованной системы стимулирования агентов (3) – позволяют избежать подобного конфликта и неэффективности. Переход от режима конкуренции к режиму сотрудничества требует согласования интересов центров, что может осуществляться управляющими органами более высоких уровней иерархии методами стимулирования. Приведем одну из возможных моделей [16, 37].

Выше были исследованы случаи, когда в матричной структуре управления центрам промежуточного уровня иерархии (например, менеджерам проектов) выгодно сотрудничать: объединяться в одну коалицию и совместно выбирать план агента. В такой ситуации всех центров можно рассматривать как одного игрока, максимизирующего целевую функцию

(10) $\Phi_K(\cdot) = \sum_{i \in K} H_i(y) - c(y)$.

Хорошо это или плохо с точки зрения *высшего руководства* (ВР – см. Рис. 3.15), представляющего интересы организации в целом? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо определить интересы ВР и методы его воздействия на функционирование системы.

С точки зрения ВР управляемым объектом является совокупность центров промежуточного уровня и агента. Центры характеризуются функциями доходов $H_i(y)$, $i \in K$, а агент – функцией своих затрат $c(y)$.

Предположим, что интересы центра зависят только от результата деятельности системы, то есть от реализовавшихся в результате выбранного агентом действия, значений доходов и затрат. Тогда целевую функцию ВР можно записать в виде $F(\cdot) = F(H_1(\cdot),..., H_k(\cdot), c(\cdot))$.

Логично также предположить, что цели ВР заключаются в увеличении, насколько это возможно, дохода каждого из проектов (представляемых агентами) и в уменьшении затрат по реализации этих проектов. Таким образом, целевая функция ВР возрастает по переменным $H_1, H_2, \ldots, H_k$ и убывает по затратам c агента.

В простейшем случае целевая функция ВР представляет собой линейную свертку с неотрицательными весами α_i всех подцелей в единый критерий:

(11) $F(y) = \sum_{i \in K} \alpha_i H_i(y) - \alpha_0 c(y)$.

Сравнивая данное выражение с формулой (10) для целевой функции коалиции центров, видим, что, если коэффициенты $\{\alpha_i\}$ различны, то в системе наблюдается рассогласование интересов ВР и центров промежуточного уровня (менеджеров проектов). Те, стремясь максимизировать свою целевую функцию, реализуют «не то» действие агента, которое необходимо ВР. Следовательно, ВР должно воздействовать каким-то образом на центры промежуточного уровня с тем, чтобы приблизить реализуемое действие y к требуемому – доставляющему максимум критерию эффективности (11).

Одним из методов воздействия ВР на функционирование системы является внутрифирменное «налогообложение», когда устанавливаются ставки $\{\beta_i\}$ отчислений в пользу ВР с доходов центров промежуточного уровня $\{H_i(\cdot)\}$ и/или ставки γ_i отчислений с прибылей $\{H_i(\cdot) - \sigma_i(\cdot)\}$. Как будет показано ниже, для полного согласования интересов ВР и центров промежуточного уровня достаточно единой ставки $\gamma \in [0; \gamma_{\max}]$ налога с прибыли.

С учетом единой ставки налога с прибыли и дифференцированной ставки «подоходного налога», целевые функции ВР и коалиции из всех центров среднего звена можно записать соответственно как[1]

(12) $F(y) = \gamma[\sum_{i \in K} \alpha_i \beta_i H_i(y) - \alpha_0 c(y)]$,

(13) $\Phi(y) = (1-\gamma)[\sum_{i \in K} (1-\beta_i) H_i(y) - c(y)]$.

Для согласования интересов ВР и центров промежуточного уровня достаточно, чтобы их целевые функции ВР достигали максимума в одной точке. Из (12), (13) следует, что это условие выполнено при $\alpha_i \beta_i / \alpha_0 = 1 - \beta_i$, то есть при ставках подоходного налога

[1] *Отметим, что интересы ВР в моделях* (11) *и* (12) *различаются.*

$\beta_i = \dfrac{1}{1 + \alpha_i / \alpha_0}$. ВР заинтересовано в увеличении своей доли прибыли, поэтому $\gamma = \gamma_{\max}$. При такой системе налогообложения достигается полное согласование интересов ВР и менеджеров проектов (центров промежуточного уровня). Так, например, если $\alpha_i = 1$, $i \in K$, и $\alpha_0 = 0$, то ставка подоходного налога должна быть равна 50%.

Итак, в многоуровневых системах для обеспечения эффективного функционирования системы в целом каждый более высокий уровень иерархии должен осуществлять согласование своих интересов и интересов всех нижележащих агентов, в том числе – путем выбора соответствующей системы стимулирования. Таким образом, для нормальной работы МСУ от высшего руководства требуется использование управляющих воздействий, позволяющих центрам промежуточного уровня вырабатывать совместную политику и назначать согласованные планы агентам.

3.8. Механизмы стимулирования в условиях неопределенности

В настоящем разделе рассматривается ряд моделей механизмов стимулирования в условиях неопределенности. Существует несколько оснований классификации неопределенности.

В разделе 2.2 в зависимости от информации, которой обладает ЛПР на момент принятия решений, были выделены три типа неопределенности: интервальная, вероятностная и нечеткая.

Кроме того, в зависимости от «источника» (внешняя среда или деятельность других субъектов) выделяют природную или игровую неопределенность (см. раздел 2.3).

Наконец, в зависимости от того, относительно каких параметров – описывающих рассматриваемую систему или окружающую среду – имеется неполная информированность, выделяют соответственно *внутреннюю неопределенность* и *внешнюю неопределенность*.

В разделах 3.8.1 и 3.8.3 рассматриваются соответственно дискретные и непрерывные модели стимулирования в ОС, функционирующих в условиях вероятностной неопределенности. Раздел 3.8.3 содержит описание модели стимулирования в ОС с внутренней неопределенностью.

3.8.1. Механизмы стимулирования в условиях внешней неопределенности (дискретная модель)

Теория контрактов – раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий теоретико-игровые модели взаимодействия управляющего органа – центра (principal) – и управляемого субъекта – агента (agent), функционирующих в условиях внешней вероятностной неопределенности [19, 38, 52, 53].

Учет неопределенности в моделях теории контрактов производится следующим образом: *результат деятельности* агента $z \in A_0$ является случайной величиной, реализация которой зависит как от действий агента $y \in A$, так и от внешнего неопределенного параметра – *состояния природы* $\theta \in \Omega$. Состояние природы отражает внешние условия деятельности агента, в силу которых результат деятельности может отличаться от действия.

Информированность участников следующая: на момент принятия решений участники знают распределение вероятностей состояния природы $p(\theta)$, или условное распределение результата деятельности $p(z, y)$. Действия агента не наблюдаются центром, которому становится известным лишь результат деятельности. Агент может либо знать состояние природы на момент выбора своего действия (случай асимметричной информированности), либо знать только его распределение (случай симметричной информированности, более соответствующий моделям стимулирования и поэтому в основном рассматриваемый ниже).

Стратегией центра является выбор функции $\sigma(\cdot)$ от результата деятельности агента, которая в зависимости от содержательных трактовок модели может интерпретироваться как функция стимулирования (трудовые контракты), величина страхового возмещения (страховые контракты), величина задолженности или выплат (долговые контракты) и т.д. Стратегией агента является выбор действия при известной стратегии центра. Под *контрактом* понимается совокупность стратегий центра и агента (различают как явные, то есть зафиксированные с юридической точки зрения (большинство страховых и долговых контрактов являются явными), так и неявные, то есть не заключаемые формально или подразумеваемые контракты (в ряде случаев таковыми являются трудовые контракты), контракты.

Так как результат деятельности агента, значение которого определяет полезности участников ОС, зависит от неопределенных параметров, то будем считать, что при принятии решений они усредняют свои полезности по известному распределению вероятностей и выбирают стратегии, максимизирующие соответствующую ожидаемую полезность.

Оптимальным является контракт, который наиболее выгоден для центра (максимизирует его целевую функцию), при условии, что агенту взаимодействие с центром также выгодно. Последнее означает, что с точки зрения агента, как и в рассмотренной в разделе 3.1 модели, одновременно должны выполняться два условия – условие участия и условие индивидуальной рациональности.

Исторически первые работы по теории контрактов появились в начале 70-х годов прошлого века как попытка объяснения в результате анализа теоретико-игровых моделей наблюдаемого противоречия между результатами макроэкономических теорий и фактическими данными по безработице и инфляции в развитых странах.

Одно из «противоречий» заключалось в следующем. Существуют три «типа» заработной платы: рыночная заработная плата (резервная полезность, на которую может рассчитывать данный работник), эффективная заработная плата (та заработная плата, которая максимизирует эффективность деятельности работника с точки зрения предприятия; в большинстве случаев эффективная заработная плата определяется из условия равенства предельного продукта, производимого работником, и предельных затрат этого работника) и фактическая заработная плата (та зарплата, которую получает работник). Статистические данные свидетельствовали, что фактическая зарплата не равна эффективной заработной плате.

В первых моделях теории контрактов рассматривались задачи определения оптимального числа нанимаемых работников при учете только ограничения участия и фиксированных стратегиях центра, затем появились работы, посвященные методам решения задач управления (задач синтеза оптимальных контрактов), сформулированных с учетом и ограничения участия, и условия согласованности, затем акцент сместился на изучение более сложных моделей, описывающих многоэлементные и динамические модели, возможность перезаключения контрактов и т.д. (см. обзор в [38]).

С точки зрения эффектов страхования [7, 38] (перераспределения риска) интересен следующий сделанный в теории контрактов вывод: различие между эффективной и фактической зарплатой качественно может быть объяснено тем, что нейтральный к риску центр страхует несклонных к риску работников от изменений величины заработной платы в зависимости от состояния природы: стабильность заработной платы обеспечивается за счет того, что в благоприятных[1] ситуациях величина вознаграждения меньше эффективной заработной платы, зато в неблагоприятных ситуациях она выше той, которая могла бы быть без учета перераспределения риска[2]. Приведем пример, иллюстрирующий это утверждение.

Пусть у агента имеются два допустимых действия: $A = \{y_1; y_2\}$, и возможны два результата: $A_0 = \{z_1; z_2\}$, $P = \begin{Vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{Vmatrix}$, $½ < p \leq 1$. Содержательно, результат деятельности агента в большинстве случаев (так как $p > ½$) «совпадает» с соответствующим действием.

Обозначим затраты агента по выбору первого и второго действия c_1 и c_2 соответственно, $c_2 \geq c_1$; ожидаемый доход центра от выбора первого и второго действия – H_1 и H_2 соответственно; стимулирование агента за первый и второй результат деятельности – σ_1 и σ_2 соответственно; целевую функцию центра, представляющую

---

[1] *На деятельность предприятий и, следовательно, на величину заработной платы, оказывают влияние как внешние макропараметры* (*сезонные колебания, периоды экономического спада и подъема, мировые цены и т.д.*)*, так и микропараметры* (*состояние здоровья работника и т.д.*).

[2] *Быть может, именно важностью этого вывода обусловлено то, что в работах по теории контрактов рассматриваются практически только модели с внешней вероятностной неопределенностью* (*в детерминированном случае, или в случае неопределенности при нейтральном к риску агенте, эффекты страхования, естественно, пропадают, и фактическая заработная плата равна эффективной*).

собой разность между доходом и стимулированием – Φ, целевую функцию агента, представляющую собой разность между стимулированием и затратами – f.

Задача центра заключается в назначении системы стимулирования, которая максимизировала бы ожидаемое значение его целевой функции[1] $E\Phi$ при условии, что выбираемое агентом действие максимизирует ожидаемое значение Ef его собственной целевой функции.

Допустим, что агент *нейтрален к риску* (то есть его *функция полезности*, отражающая отношение к риску, линейна), и рассмотрим какую систему стимулирования центр должен использовать, чтобы побудить агента выбрать действие y_1. В предположении равенства нулю резервной полезности задача поиска минимальной системы стимулирования, реализующей действие y_1, имеет вид (первое ограничение является ограничением согласованности стимулирования, второе – ограничением индивидуальной рациональности агента):

(1) $p\ \sigma_1 + (1 - p)\ \sigma_2 \to \min\limits_{\sigma_1 \geq 0,\, \sigma_2 \geq 0}$

(2) $p\ \sigma_1 + (1 - p)\ \sigma_2 - c_1 \geq p\ \sigma_2 + (1 - p)\ \sigma_1 - c_2$

(3) $p\ \sigma_1 + (1 - p)\ \sigma_2 - c_1 \geq 0$.

Задача (1)-(3) является задачей линейного программирования.

Множество значений стимулирования, удовлетворяющих условиям (2) и (3), заштриховано на Рис. 3.16, его подмножество, на котором достигается минимум выражения (1), выделено жирной линией (линия уровня функции (1), отмеченная на Рис. 3.16 пунктирной линией, имеет тот же наклон, что и отрезок[2] A_1B_1, направление возрастания отмечено стрелкой).

---

[1] *Символ «E» обозначает оператор математического ожидания.*

[2] *Отметим, что наличие множества решений при нейтральных к риску центре и агенте является характерной чертой задач теории контрактов. В то же время, введение строго вогнутой функции полезности агента (отражающей его несклонность к риску) приводит к единственности решения – см. ниже.*

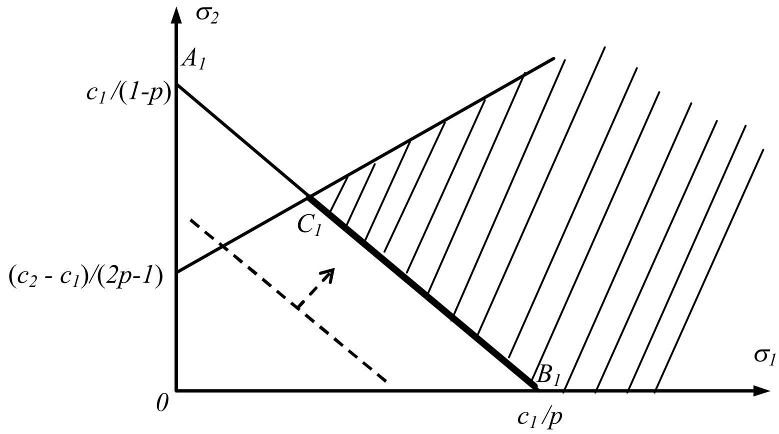


Рис. 3.16. Реализация центром действия y_1 при нейтральном к риску агенте

Для определенности в качестве решения (в рамках гипотезы благожелательности) выберем из отрезка C_1B_1 точку C_1, характеризуемую следующими значениями:

(4) $\sigma_1 = [p\ c_1 - (1 - p)\ c_2] / (2\ p - 1)$,

(5) $\sigma_2 = [p\ c_2 - (1 - p)\ c_1] / (2\ p - 1)$.

Легко проверить, что ожидаемые затраты центра на стимулирование $E\sigma(y_1)$ по реализации действия y_1 равны c_1, то есть

(6) $E\sigma(y_1) = c_1$.

Предположим теперь, что центр хочет реализовать действие y_2. Решая задачу, аналогичную (1)-(3), получаем (см. точку C_2 на Рис. 3.17):

(7) $\sigma_1 = [p\ c_1 - (1 - p)\ c_2] / (2\ p - 1)$,

(8) $\sigma_2 = [p\ c_2 - (1 - p)\ c_1] / (2\ p - 1)$,

(9) $E\sigma(y_2) = c_2$.

На втором шаге центр выбирает, какое из допустимых действий ему выгоднее реализовать, то есть какое действие максимизирует разность между доходом и ожидаемыми затратами центра на стимулирование по его реализации. Таким образом, ожидаемое значение целевой функции центра при заключении оптимального контракта равно $\Phi^* = \max\ \{H_1 - c_1,\ H_2 - c_2\}$.

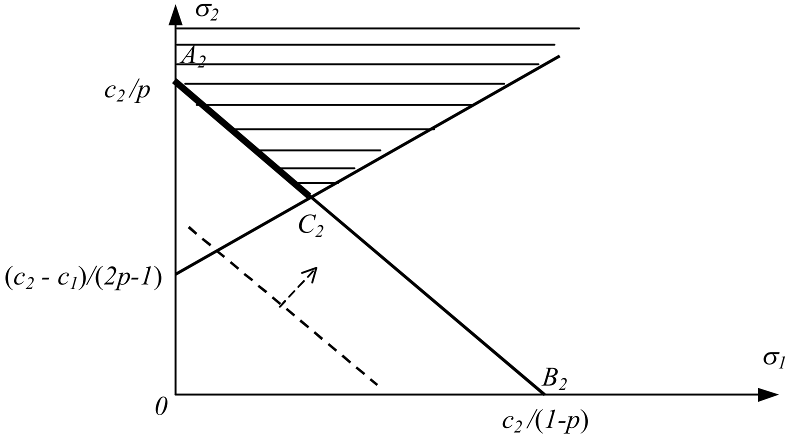


Рис. 3.17. Реализация центром действия y_2 при нейтральном к риску агенте

Исследуем теперь эффекты страхования в рассматриваемой модели. Пусть агент не склонен к риску, то есть оценивает неопределенные величины своего дохода в соответствии со строго возрастающей строго вогнутой функцией полезности $u(\cdot)$. Так как от случайной величины – результата деятельности агента – зависит его вознаграждение (значение функции стимулирования), то предположим, что целевая функция агента имеет вид:

(10) $f(\sigma(\cdot), z, y) = u(\sigma(z)) - c(y)$.

Обозначим[1] $v_1 = u(\sigma_1)$, $v_2 = u(\sigma_2)$, $u^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная к функции полезности $u(\cdot)$ агента, и предположим, что функция полезности неотрицательна и в нуле равна нулю.

Пусть центр заинтересован в побуждении агента к выбору действия y_1. Задача стимулирования в рассматриваемой модели примет вид (первое ограничение является ограничением согласованности стимулирования, второе – ограничением индивидуальной рациональности агента):

(11) $p\, u^{-1}(v_1) + (1 - p)\, u^{-1}(v_2) \to \min\limits_{v_1 \geq 0,\, v_2 \geq 0}$

---

[1] *Подобная замена переменных, позволяющая линеаризовать систему ограничений, используется в так называемом двушаговом методе решения задачи теории контрактов.*

(12) $p\ v_1 + (1 - p)\ v_2 - c_1 \geq p\ v_2 + (1 - p)\ v_1 - c_2$
(13) $p\ v_1 + (1 - p)\ v_2 - c_1 \geq 0$.

Заметим, что линейные неравенства (12)-(13) совпадают с неравенствами (2)-(3) с точностью до переобозначения переменных. На Рис. 3.18 заштрихована область допустимых значений переменных v_1 и v_2. Линия уровня функции (11) (которая является выпуклой в силу вогнутости функции полезности агента) обозначена пунктиром.

В случае строго вогнутой функции полезности агента (при этом, очевидно, целевая функция (11) строго выпукла) внутреннее решение задачи условной оптимизации (11)-(13) единственно и имеет следующий вид (в качестве примера возьмем функцию полезности $u(t) = \beta \ln(1 + \gamma\ t)$, где β и γ – положительные константы):
(14) $v_1 = c_1 + (c_1 - c_2)\ (1 - p) / (2\ p - 1)$,
(15) $v_2 = c_1 + (c_2 - c_1)\ p / (2\ p - 1)$.

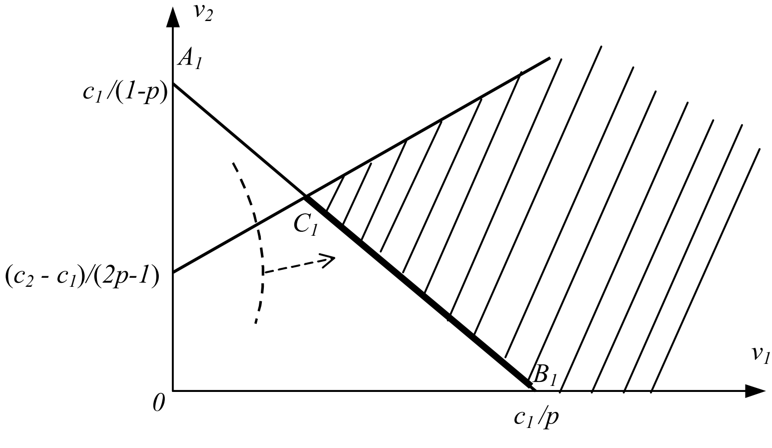


Рис. 3.18. Реализация центром действия y_1 при несклонном к риску агенте

Легко проверить, что в рассматриваемом случае при использовании системы стимулирования (14)-(15) ожидаемая полезность агента от выплат со стороны центра равна затратам агента по выбору первого действия, то есть
(16) $Ev = c_1$.

Аналогично можно показать, что, если центр побуждает агента выбирать второе действие, то ожидаемая полезность агента от выплат со стороны центра в точности равна затратам агента по выбору второго действия.

Из (14)-(15) видно, что в случае несклонного к риску агента, побуждая его выбрать первое действие, центр «недоплачивает» в случае реализации первого результата деятельности ($v_1 \leq c_1$) и «переплачивает» в случае реализации второго результата деятельности ($v_2 \geq c_1$), причем при предельном переходе к детерминированному случаю[1] (чему соответствует $p \to 1$) имеет место: $v_1 \to c_1$.

Графически эффект страхования в рассматриваемой модели для случая реализации первого действия отражен на Рис. 3.19, на котором изображены линейная (определенная с точностью до аддитивной константы) функция полезности агента $u_n(\cdot)$ и его строго вогнутая функция полезности $u_a(\cdot)$.

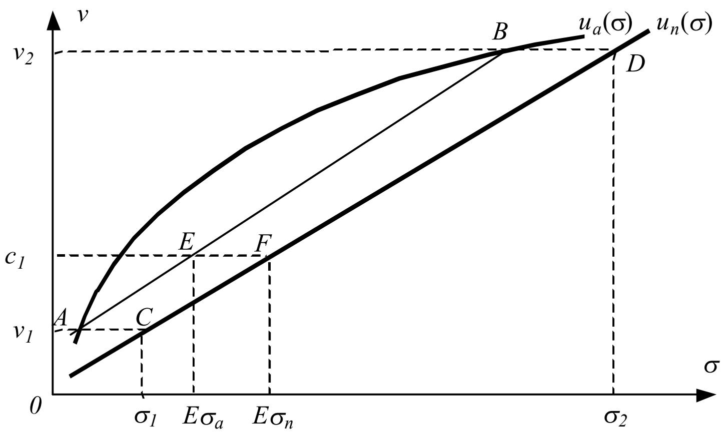


Рис. 3.19. Эффект страхования при реализация центром действия y_1

---

[1] *Отметим, что все модели с неопределенностью должны удовлетворять принципу соответствия: при «стремлении» неопределенности к «нулю» (то есть при предельном переходе к соответствующей детерминированной системе) все результаты и оценки должны стремиться к соответствующим результатам и оценкам, полученным для детерминированного случая. Например, выражения (14)-(15) при $p = 1$ переходят в решения, оптимальные в детерминированном случае.*

Так как отрезок AB лежит выше и/или левее отрезка CD, а ожидаемая полезность агента в обоих случаях равна c_1, то при несклонности агента к риску ожидаемые выплаты $E\sigma_a$ меньше, чем ожидаемые выплаты $E\sigma_n$, соответствующие нейтральному к риску агенту (см. точки E и F на Рис. 3.19).

3.8.2. Механизмы стимулирования в условиях внешней неопределенности (непрерывная модель)

В предыдущем разделе была рассмотрена дискретная модель стимулирования в условиях внешней вероятностной неопределенности (термин «дискретная» означает, что множество возможных значений неопределенного параметра, а также возможных значений действий и результатов деятельности агента конечно). Ниже рассматривается непрерывная модель, в которой множества допустимых действий и результатов деятельности агента составляют положительную полуось.

Закон Парето и распределение Парето. Известен так называемый закон Парето (иногда его называют «закон 80 / 20», на жаргоне – «пивной закон», в соответствии с которым 20 % людей выпивают 80 % пива), отражающий неравномерность распределения характеристик экономических и социальных явлений и процессов [25]:

- 20 % населения владеют 80 % капиталов (первоначальная формулировка самого В. Парето [55]);
- 80 % стоимости запасов на складе составляет 20 % номенклатуры этих запасов;
- 80 % прибыли от продаж приносят 20 % покупателей;
- 20 % усилий приносят 80 % результата;
- 80 % проблем обусловлены 20 % причин;
- за 20 % рабочего времени работники выполняют 80 % работы;
- 80 % работы выполняют 20 % работников и т.д.

«Формализацией» закона Парето является распределение Парето случайной величины $z \geq y > 0$, характеризуемое двумя параметрами – минимально возможным значением y и показателем степени $\alpha > 0$:

(1) $p(\alpha, y, z) = \dfrac{\alpha}{y}\left(\dfrac{y}{z}\right)^{1+\alpha}$.

Плотности распределения (1) соответствует интегральная функция распределения

(2) $F(\alpha, y, z) = 1 - \left(\dfrac{y}{z}\right)^{\alpha}$.

Распределение Парето обладает свойством самоподобия: распределение значений, превышающих величину $z^0 \geq y$, также является распределением Парето:

(3) $\forall\, z^0 \geq y\;\; p(\alpha, z^0, z) = p(\alpha, y, z) \,/\, (1 - F(\alpha, y, z^0)) = \dfrac{\alpha}{z^0}\left(\dfrac{z^0}{z}\right)^{1+\alpha}$.

Для распределения Парето существуют только моменты, порядка, меньшего, чем степень α. Например, математическое ожидание случайной величины z с распределением (1) существует при $\alpha > 1$ и равно

(4) $E\,z = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\, y$,

где «E» – символ математического ожидания. Отметим, что с ростом α распределение «вырождается» и математическое ожидание (4) стремится к y. Это свойство распределения Парето используется в следующих разделах для иллюстрации принципа соответствия – при предельном переходе от случая вероятностной неопределенности к детерминированному случаю.

Кроме того, в рамках предположения о том, что случайная величина распределена по Парето, зная математическое ожидание $E\,z$ и минимальное значение y, можно легко вычислить параметр распределения α (см. (4)):

(5) $\alpha = \dfrac{Ez}{Ez - y}$.

Приведем формальную интерпретацию «закона 80 / 20». Предположим, что z – характеристика эффективности агента, а рассматриваемое распределение определяет количество агентов с разной эффективностью. Определим $\tilde{z}$ такое, что Prob $\{z \leq \tilde{z}\} = 0.8$:

$\tilde{z} = (0.2)^{\frac{1}{\alpha}} z_0$. Далее определим суммарную эффективность «элиты»:

$$\int_{\tilde{z}}^{+\infty} z p(z_0, \alpha) \mathrm{d}z = (0.2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha - 1} z_0 ,$$

которая должна составлять 80 % от эффективности всего коллектива $E\, z$:

$$(0.2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha - 1} z_0 = 0.8 \frac{\alpha}{\alpha - 1} z_0.$$

Получаем, что показатель степени α, при котором распределение Парето описывает закон Парето, должен быть равен 1.161. Аналогичным образом можно определить, что при $\alpha = 2$ 20 % коллектива будут обладать 45 % общей эффективности и т.д.

Описав свойства распределения Парето, перейдем к постановке и решению задачи стимулирования в условиях внутренней неопределенности о типах агентов, описываемых распределением Парето.

Постановка задачи стимулирования. Рассмотрим задачу стимулирования, в которой присутствует внешняя вероятностная неопределенность – результат деятельности агента z является случайной величиной, распределение которой зависит от его действия y.

Будем считать, что агент выбирает действие $y \geq 0$, которое под влиянием внешней среды приводит к реализации результата деятельности $z \geq 0$. Пусть задана плотность распределения вероятности $p(z, y)$ – вероятность реализации результата деятельности z при выборе агентом действия y.

Предположим, что на момент принятия решений участники (центр и агент) не знают результата деятельности, а имеют лишь информацию о распределении $p(z, y)$ и используют ожидаемую полезность для устранения неопределенности, т.е. целевыми функциями участников являются математические ожидания соответствующих функций полезности: функции полезности центра $\tilde{\Phi}(z, y) = H(y) - \tilde{\sigma}(z)$ и функции полезности агента $\tilde{f}(z, y) = u(\tilde{\sigma}(z)) - c(y)$, где $u(\cdot)$ – функция полезности, $\tilde{\sigma}(z)$ – функция стимулирования, $H(y)$ – функция дохода центра, $c(y)$ – функция затрат агента, относительно которой предположим, что она является гладкой, выпуклой, неубывающей функцией с нулевой производной при нулевом действии агента. Функция полезности отражает, в том числе, отношение агента к риску – для нейтрального к риску агента она линейная, для несклонного к риску – вогнутая [7, 53].

Порядок функционирования и информированность участников ОС следующие: центр сообщает агенту систему стимулирования $\tilde{\sigma}(z)$, т.е. зависимость вознаграждения агента от результата его деятельности, после чего агент выбирает свое действие, ненаблюдаемое для центра. Принципиально важно, что в рассматриваемой модели ни центр, ни агент на момент выбора своих стратегий не знают будущего значения результата деятельности.

Агент выберет действие из множества $P(\tilde{\sigma}(\cdot))$ действий, доставляющих максимум математическому ожиданию его функции полезности, т.е.:

(6) $P(\tilde{\sigma}(\cdot)) = \mathrm{Arg}\max\limits_{y \geq 0} \left[\int u(\tilde{\sigma}(z))\, p(z, y)\, dz - c(y)\right].$

Пусть выполнена гипотеза благожелательности (при прочих равных агент выбирает наиболее выгодные для центра действия). Тогда задача стимулирования заключается в выборе системы стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, максимизирующей эффективность стимулирования – математическое ожидание функции полезности центра на множестве (6):

(7) $\max\limits_{y \in P(\tilde{\sigma}(\cdot))} \left[H(y) - \int \tilde{\sigma}(z)\, p(z, y)\, dz\right] \to \max\limits_{\tilde{\sigma}(\cdot)}.$

Общего аналитического решения задачи (7) на сегодняшний день не известно (см. достаточные условия оптимальности различных систем стимулирования в [38]), за исключением нескольких частных случаев, в числе которых – рассматриваемые ниже модель простого активного элемента и модель Парето-агента.

Простой активный элемент. Хрестоматийной моделью вероятностной ОС, в которой удается получить простое аналитическое решение задачи стимулирования, является модель простого активного элемента [1]. Пусть агент нейтрален к риску (линейную функцию полезности при записи всех выражений будем пропускать) интегральная функция $F(z, y)$ распределения $p(z, y)$ может быть представлена в виде:

(8) $F(z, y) = \begin{cases} F(z), z < y \\ 1, z \geq y \end{cases}$,

где $F(z)$ – некоторая интегральная функция распределения, зависящая только от результата деятельности. Очевидно, что вероятность того, что результат деятельности окажется строго больше действия, равна нулю. Т.е. наличие неопределенности приводит к тому, что результат деятельности агента оказывается не больше его действия. Организационная система, в которой интегральная функция распределения представима в таком виде, называется системой с простым активным элементом.

В [38] доказано, что в системе с простым активным элементом в рамках гипотезы благожелательности оптимальна компенсаторная система стимулирования (равная затратам агента).

Нейтральный к риску Парето-агент. Будем называть Парето-агентом такого агента, у которого $p(z, y) = p(\alpha, y, z)$, т.е. распределение результатов которого описывается распределением Парето с минимальным значением, равным действию агента (см. выражение (1)). Содержательно, агент выбирает свой уровень усилий (гарантированное значение результата деятельности), и результат будет заведомо не меньше действия, а может оказаться и больше, причем вероятность больших значений результата достаточно высока (распределение Парето принадлежит классу «распределений с тяжелыми хвостами»). Решим задачу (7) для нейтрального к риску (имеющего линейную функцию полезности) Парето-агента с $\alpha > 1$.

Общим принципом, используемым ниже, является выбор такой системы стимулирования, зависящей от результата деятельности агента, что математическое ожидание ее полезности равно затратам агента в точке плана (или равно значению оптимальной детерминированной системы стимулирования), а точка плана при этом является точкой максимума ожидаемой полезности центра. Из детерминированной теории стимулирования [37] известно, во-первых, что минимальные затраты на реализацию (т.е. побуждению к выбору) любого действия нейтрального к риску агента (при нулевой резервной полезности) равны затратам агента по выбору этого действия. Во-вторых, известно [38], что ожидаемые затраты центра на стимулирование в случае наличия неопределенности не ниже, чем в детерминированном случае. Следовательно, если в условиях вероятностной неопределенности удается реализовать некоторое действие так, что математическое ожидание затрат центра на стимулирование равно затратам агента по выбору этого действия, то такая система стимулирования оптимальна.

Математическое ожидание функции полезности агента равно:

(9) $E\tilde{f}(z, y) = E\tilde{\sigma}(z) - c(y)$.

Линейная система стимулирования. Фиксируем план $x \geq 0$. Из результатов решения детерминированных задач стимулирования известно (см. раздел 3.2), что оптимальной линейной системой стимулирования, реализующей план x, является следующая:

(10) $\sigma_L(x, y) = c'(x)(y - x) + c(x)$.

Найдем линейную систему стимулирования $\tilde{\sigma}_L(x, z) = a z + b$, где a и b – константы, такую, что $E\tilde{\sigma}_L(x, z) = \sigma_L(x, y)$. Легко вычислить, что константы a и b должны быть следующими: $a = \frac{\alpha - 1}{\alpha} c'(x)$, $b = c(x) - c'(x)\, x$. Итак, получаем, что линейная система стимулирования

(11) $\tilde{\sigma}_L(x, z) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} c'(x)\, z + c(x) - c'(x)\, x$

реализует план x (побуждает агента выбрать действие, совпадающее с планом), и ее математическое ожидание в точности равно (для любого $y > 0$) оптимальной детерминированной системе стимулирования (10).

Зная, что агент выберет действие, совпадающее с планом, оптимальный план можно найти из решения следующей задачи:

(12) $x^* = \arg \max_{x \geq 0} [H(x) - c(x)]$.

Отметим, что оптимальный план в рассматриваемой вероятностной модели такой же, что и в соответствующем детерминированном случае. Кроме того, с уменьшением неопределенности (росте α) правая часть выражения (11) стремится к правой части выражения (10).

Таким образом, в модели нейтрального к риску Парето-агента оптимальна линейная система стимулирования (11), (12).

Компенсаторная система стимулирования. Задача синтеза оптимальной компенсаторной системы стимулирования (см. раздел 3.2) в организационной системе с Парето-агентом заключается в нахождении такой системы стимулирования $\tilde{\sigma}_K(z)$, математическое ожидание которой равно затратам агента:

(13) $E\tilde{\sigma}_K(z) = c(y),\ y \ge 0.$

Распишем условие (13) более подробно:

(14) $\alpha\, y^{\alpha} \int\limits_{y}^{+\infty} \frac{\tilde{\sigma}_K(z)}{z^{\alpha+1}} dz = c(y),\ y \ge 0.$

Решать уравнение (14) относительно $\tilde{\sigma}_K(z)$ в общем виде – достаточно сложная задача. Поэтому исследуем ее для случая, когда агент имеет функцию затрат типа Кобба-Дугласа: $c(y) = \frac{1}{\gamma}\ (y)^{\gamma}(r)^{1-\gamma}$, $\gamma \ge 1$, и будем искать решение в классе степенных функций:

(15) $\tilde{\sigma}_K(z) = \frac{1}{\beta_0}\ z^{\beta_1}\ r^{1-\beta_2}$.

Подставляя (15) в (14), получаем, что решение $\beta_0 = \frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}$, $\beta_1 = \gamma$, $\beta_2 = \gamma$, существует при условии

(16) $1 \le \gamma < \alpha$.

Таким образом, если выполнено условие (16), то в модели Парето-агента с функцией затрат типа Кобба-Дугласа оптимальна «компенсаторная» система стимулирования

(17) $\tilde{\sigma}_K(z) = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha\gamma}\ z^{\gamma}\, r^{1-\gamma}$,

в которой план определяется выражением (12).

Отметим, с уменьшением неопределенности (росте α) «компенсаторная» система стимулирования (17) стремится к функции затрат агента, т.е. к компенсаторной системе стимулирования, оптимальной в детерминированном случае.

Тарифная (скачкообразная система) стимулирования. Известно (см. [37] и раздел 3.2), что в детерминированном случае оптимальна скачкообразная система стимулирования

(18) $\sigma_C(x, y) = \begin{cases} c(x), & y \ge x \\ 0, & y < x \end{cases}$,

в которой оптимальное значение плана определяется выражением (12).

Рассмотрим следующую скачкообразную систему стимулирования в модели Парето-агента:

$$(19)\ \tilde{\sigma}_C(x, z) = \begin{cases} c(x), z \geq x \\ 0, \quad y < x \end{cases}.$$

Вычислим математическое ожидание выражения (19):

$$(20)\ E\tilde{\sigma}_C(x, z) = c(x) \begin{cases} 1, \quad y \geq x \\ \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\alpha}, y \leq x \end{cases}.$$

Условие выгодности для агента выбора действия $x \geq 0$ имеет вид:

$$(21)\ \forall y \in [0; x]\ \ \frac{c(y)}{y^{\alpha}} \geq \frac{c(x)}{x^{\alpha}}.$$

Таким образом, если выполнено

$$(22)\ \forall y \in [0; x^*]\ \ \frac{c(y)}{y^{\alpha}} \geq \frac{c(x^*)}{(x^*)^{\alpha}},$$

то в модели Парето-агента оптимальна скачкообразная система стимулирования (19), в которой план определяется выражением (12). Если, дополнительно, агент имеет функцию затрат типа Кобба-Дугласа, то условие (22) переходит в условие (16).

Отметим, с уменьшением неопределенности (росте α) скачкообразная система стимулирования (19) стремится к скачкообразной системе стимулирования (18), которая оптимальна в детерминированном случае.

Итак, результаты настоящего раздела дают для модели Парето-агента решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования. Показано, что оптимальна линейная система стимулирования, и получен ее явный вид. Приведены достаточные условия оптимальности «компенсаторной» и скачкообразной систем стимулирования.

Отдельного обсуждения заслуживает влияние неопределенности на эффективность стимулирования. Во-первых, все приведенные выше результаты решения задачи стимулирования в условиях неопределенности удовлетворяют *принципу соответствия*: при предельном переходе («стремлении» неопределенности к «нулю») вероятностная модель переходит в детерминированную, а оптимальные решения задач стимулирования в условиях неопределенности – в оптимальные решения соответствующих детерминированных задач стимулирования. Во-вторых, эффективность стимулирования Парето-агента (функционирующего в условиях неопределенности) тождественно равна эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной организационной системе. Данный факт представляется довольно нетривиальным, так как в [38] доказано, что эффективность стимулирования в условиях вероятностной неопределенности не выше, чем в условиях полной информированности.

3.8.3. Механизмы стимулирования в условиях внутренней неопределенности[1]

Рассмотрим модель ОС, в которой целевая функция центра имеет вид:

(1) $\Phi(\sigma(\cdot), y) = H(y) - \sigma(y)$,

где $y \geq 0$, а целевая функция агента:

(2) $f(\sigma(\cdot), y) = \sigma(y) - c(y, r)$,

где $r \in \Omega = [r^-, r^+]$ – *тип* агента (параметр, характеризующий эффективность его деятельности).

Предположим, что функция затрат агента – гладкая, возрастает и выпукла по действию агента, равна нулю при нулевом действии, убывает по его типу и имеет отрицательную смешанную производную.

Если значения типа агента известны и агенту, и центру (имеет место полная информированность, то есть неопределенность отсутствует), то из результатов раздела 3.1 следует, что оптимальна компенсаторная система стимулирования

(3) $\sigma^*(x, y, r) = \begin{cases} c(x, r), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$,

с оптимальным планом

(4) $x^*(r) = \arg\max_{y \geq 0} [H(y) - c(y, r)]$.

[1] *Настоящий раздел написан совместно с к.т.н. Н.А. Коргиным.*

Выигрыш центра при этом равен

(5) $\Phi^*(r) = H(x^*(r)) - c(x^*(r), r)$.

Пример 3.7. Пусть $H(y) = y$, $c(y, r) = y^2 / 2\,r$, $\Omega = [1; 3]$. Тогда $x^*(r) = r$, $\Phi^*(r) = r / 2$. •

Пусть имеет место внутренняя неопределенность (*асимметричная информированность* участников ОС) – центру не известен тип агента, в то время как самому агенту его тип известен. Рассмотрим различные возможные варианты.

Интервальная неопределенность. Если центру известно только множество Ω возможных значений типов агента, то в силу принципа максимального гарантированного результата он вынужден рассчитывать на наихудшее значение типа r^- (то есть то значение, при котором затраты агента максимальны). Получаем детерминированную задачу стимулирования (см. раздел 3.1), в которой оптимальна будет компенсаторная система стимулирования

(6) $\sigma_{\text{МГР}}(x, y) = \begin{cases} c(x, r^-), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$,

с оптимальным планом

(7) $x_{\text{МГР}} = \arg\max\limits_{y \geq 0} \; [H(y) - c(y, r^-)]$.

Максимальный гарантированный выигрыш центра при этом равен

(8) $\Phi_{\text{МГР}} = H(x_{\text{МГР}}) - c(x_{\text{МГР}}, r^-)$.

Пример 3.8. Рассмотрим Пример 3.7. Тогда

$$x_{\text{МГР}} = 1, \;\; \Phi_{\text{МГР}} = 1 / 2.$$

Потери центра из-за отсутствия информации можно оценить величиной $\Phi^*(r) - \Phi_{\text{МГР}} = (r - 1) / 2 \geq 0 \quad \forall\, r \in \Omega$. То есть, эффективность стимулирования в условиях неопределенности в рассматриваемом случае не выше, чем в условиях полной информированности. •

Предположим, что центр использует *механизм с сообщением информации*: предлагает агенту – «сообщи мне оценку $s \in \Omega$ своего типа, а я ее буду использовать при выборе системы стимулирования».

Если при этом центр принимает сообщенную агентом оценку за истинную, то есть использует систему стимулирования:

(9) $\sigma(s, x, y) = \begin{cases} c(x, s), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$,

с оптимальным планом

(10) $x(s) = \arg \max\limits_{y \geq 0} [H(y) - c(y, s)]$,

то агенту выгодно сообщать оценку

(11) $s^*(r) = \arg \max\limits_{s \in \Omega} [c(x(s), s) - c(x(s), r)]$.

Максимальный гарантированный выигрыш центра при этом равен

(12) $\Phi(r) = H(x(s^*(r))) - c(x(s^*(r)), s^*(r))$.

Очевидно, $\forall\, r \in \Omega\ \ \Phi(r) \geq \Phi_{\text{МГР}}$.

Пример 3.9. Рассмотрим Пример 3.7. Тогда $x(s) = s$, и агенту выгодно занижать свой тип в два раза: $s^*(r) = \max \{r / 2; r^-\}$. При этом $\Phi(r) = \max \{r / 4; 1/2\}$. В данном случае при $r \geq 2$ потери центра из-за отсутствия информации можно оценить величиной

$$\Phi^*(r) - \Phi(r) = r / 4 \geq 0\ \ \forall\, r \in \Omega.$$

Кроме того, при $r \geq 2$ имеет место:

$$\Phi(r) - \Phi_{\text{МГР}} = r / 4 - 1 / 2 \geq 0\ \ \forall\, r \in \Omega.$$

Опять же, эффективность стимулирования в условиях неопределенности не выше, чем в условиях полной информированности. •

Выше мы рассмотрели частный случай, в котором центр принимает сообщенную агентом оценку его типа за истинную. В общем случае центр предлагает агенту так называемое *меню контрактов* [19, 24, 52, 53], в котором каждый контракт (или план), состоящий из действия, назначаемого агенту, и стимулирования за выполнения данного действия, зависят от сообщенной оценки, то есть $\pi(s) =(y(s), \sigma(s))$. Причем, если при построение механизма стимулирования с сообщением информации выполнены *условие совершенного согласования* (УСС) [39]:

$$f(\pi(s), s) = \max_{z \in X} f(z, s),$$

где z – произвольная пара (y, σ), а X – множество значений z, допустимых для агента, то доминантной стратегией агента будет сообщение истинного значения своего типа. Такой механизм называется *механизмом открытого управления.* Кроме того, в [39] доказано, что для ОС, состоящих из центра и одного агента, эффективный механизм управления (механизм стимулирования с сообщением информации) можно без потери эффективности искать в классе механизмов открытого управления.

Вероятностная неопределенность. Предположим, что центру известно распределение вероятностей $p(r)$ типов агента на множестве Ω. Тогда центр может использовать в качестве критерия эффективности механизма стимулирования математическое ожидание $E\Phi$ своей целевой функции. Построим оптимальный механизм стимулирования с сообщением информации, т.е.

$$E\Phi(\pi(s)) \to \max_{\pi(s)},$$

при условии, что центру не известно значение типа агента, а известно лишь, что тип агента равномерно распределен на множестве $\Omega = [r_{\min}, r_{\max}]$. По аналогии с рассмотренным выше случаем интервальной неопределенности, оптимальный механизм стимулирования с сообщением информации будет являться механизмом открытого управления, т.е. удовлетворять УСС.

Пример 3.10. Рассмотрим Пример 3.7. при условии, что центру известно, что тип агента на множестве его возможных значений распределен равномерно:

$$F(r) = \frac{r - r_{\min}}{r_{\max} - r_{\min}}$$

В [24] показано, для выполнения УСС механизм стимулирования должен удовлетворять следующим требования (см. также примеры в [53]):

(13) $\frac{d\sigma}{ds}(r) - \frac{y(r)}{r}\frac{dy}{ds}(r) = 0$, $\forall r \in \Omega$,

(14) $-\frac{y(r)}{r^2}\frac{dy}{ds}(r) \le 0$, $\forall r \in \Omega$,

(15) $\frac{d\sigma}{ds}(s) \ge 0,\ \frac{dy}{ds}(s) \ge 0,\ \forall s \in \Omega$.

Условия (13) и (14) являются условиями максимума функции полезности агента при использовании механизма открытого управления и сообщении агентом достоверной информации о своем типе. Условие (15) определяет принципиальное свойство неманипулируемого механизма стимулирования с сообщением информации – действие, выбираемое агентом, и оплата за этот выбор растут с ростом сообщаемой агентом оценки собственного типа. Содержательно, чем лучше охарактеризовал себя работник, тем больший предлагается ему выполнить объем работ за большую оплату.

Если механизм удовлетворяет условиям (13)-(14), то прибыль агента от взаимодействия с центром (его функция полезности $\nu(r) = \varphi(\delta(r), y(r), r)$) может быть записана в следующем виде:

(16) $\nu\ (r) = \int\limits_{r_{\min}}^{r} \frac{y(\tau)^2}{2\tau^2} d\tau$.

Проанализировав выражение (16), получаем, что для построения механизма стимулирования, максимизирующего ожидаемую прибыль центра, необходимо максимизировать следующий функционал:

$$\mathrm{E}\Phi(\Omega) = \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} [y(r) - \frac{y(r)^2}{2r} - \int\limits_{r_{\min}}^{r} \frac{y(\tau)^2}{2\tau^2} d\tau] \rho(r) dr \underset{y}{\to} \max$$

$$0 \le y(r),\ 0 \le \sigma\ (r).$$

Не останавливаясь подробно на процессе решения, рассмотренном в [24], приведем вид оптимального механизма стимулирования:

$$y(r) = \frac{r^2}{r_{\max}},\ \forall r \in \Omega;$$

$$\sigma(r) = \frac{4r^3 - r_{\min}^3}{6r_{\max}^2},\ \forall r \in \Omega.$$

Ожидаемая полезность центра при использовании данного механизма стимулирования составит

$$\mathrm{E}\Phi(\Omega) = \frac{1}{6r_{\max}} (r_{\max}^2 + r_{\max} r_{\min} + r_{\min}^2)$$

Нетрудно показать, что $\forall \Omega\ \ \mathrm{E}\Phi(\Omega) \ge \Phi_{МГР}$.

Интересной особенностью данного механизма является слабая его зависимость от ограничений на стимулирование или выбираемые агентом действия. Пусть R – бюджетное ограничение центра, y^+ – максимальный объем работ, который может выполнить агент (или максимальный объем работ, который требуется центру). Тогда рассматриваемая задача может быть представлена в виде задачи динамического программирования:

$$\mathrm{E}\Phi(\Omega) = \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} [y(r) - \frac{y(r)^2}{2r} - \int\limits_{r_{\min}}^{r} \frac{y(\tau)^2}{2\tau^2} d\tau]\ \rho(r) dr \underset{y}{\to} \max$$

$$0 \le y(r) \le y^+,\ 0 \le \sigma\ (r) \le R.$$

Тогда оптимальный механизм стимулирования с сообщением информации будет иметь тот же вид, что и в отсутствии ограничений, но множество возможных значений типов агентов изменится:

$$r \in \Omega' = [r_{\min}, \tilde{r}],$$

$$\tilde{r} = \min\{r_{\max}, (r_{\max} y^+)^{1/2}, (\frac{3}{2} r_{\max}^2 R + \frac{1}{4} r_{\min}^3)^{1/3}\}.$$

Т.е. агенту с типом лучше $\tilde{r}$ будет назначаться план как для агента с типом $\tilde{r}$.

На Рис. 3.20 приводится графическое изображение полученного механизма стимулирования. Видно, что, с улучшением типа, сообщаемого агентом, уменьшается удельная стоимость выполняемой им работы (отношение выплачиваемого центром вознаграждения к объему выполняемой работы). При этом проиллюстрировано, каким образом тип $\tilde{r}$ определяется из ограничений на ресурсы (в данном случае из бюджетного ограничения центра R).

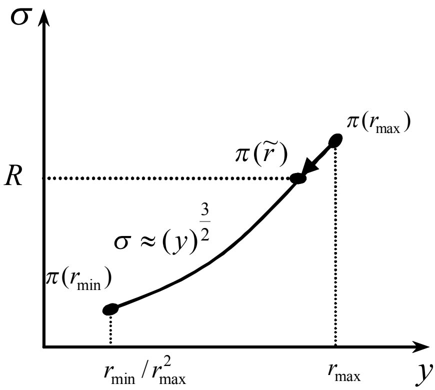


Рис. 3.20.351Неманипулируемый механизм стимулирования •

Однако, даже в условиях неопределенности возможно построение механизма стимулирования без сообщения информации. Простейший случай (МГР), был рассмотрен выше. Но возможен другой подход – центр решает детерминированную задачу стимулирования для типа агента $\bar{r} \in \Omega$ и получает

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} c(x, \bar{r}), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases},$$

с оптимальным планом

$$x(\bar{r}) = \arg\max_{y \geq 0} \; [H(y) - c(y, \bar{r})].$$

Легко показать, что для агента с типом ниже $\bar{r}$ предлагаемый механизм будет невыгоден, и подобный агент откажется от взаимодействия, а агент с типом выше $\bar{r}$ – согласится. Для определения оптимального с точки зрения центра $\bar{r}$, надо будет решить следующую задачу

$$\mathrm{E}\Phi(\bar{r}) = \int_{\bar{r}}^{r_{\max}} [x - c(x, \bar{r})] \rho(r) dr = [x - c(x, \bar{r})][F(r_{\max}) - F(\bar{r})] \underset{r}{\rightarrow} \max$$

Однако данное решение можно представить, как механизм с сообщением информации, где при сообщении агентом своего типа ниже чем $\bar{r}$, ему назначается «нулевой контракт». То есть, эффективность построенного таким методом механизма стимулирования не может быть выше, чем эффективность механизма открытого управления.

Завершая краткое рассмотрение задач стимулирования в ОС, функционирующих в условиях неопределенности, отметим, что в настоящем разделе под асимметричной информированностью подразумевался случай, когда агент информирован лучше, чем центр. Возможны и обратные ситуации – когда, например, центр знает типы агентов, каждый агент знает свой тип, но не знает типов остальных агентов. Тогда, сообщая каждому агенту информацию о типах других агентов, центр осуществляет информационное управление. Описание соответствующих моделей можно найти в [47, 48].

Таким образом, в настоящей главе приведена базовая модель стимулирования в ОС и ряд ее модификаций (см. Рис. 3.1). Описание областей и результатов практического использования математических моделей стимулирования можно найти в [10, 26, 43].

Темы для самостоятельного изучения

3.1. Модели согласования интересов [6, 10, 34, 37].

3.2. Базовые системы стимулирования [26, 37].

3.3. Управление составом ОС [23, 34].

3.4. Управление структурой ОС (многоуровневые ОС) [11, 17, 29, 34, 40].

3.5. Институциональное управление ОС [20, 33].

3.6. Информационное управление ОС [4748].

3.7. Управление динамическими ОС [41].

3.8. Управление многоэлементными ОС [6, 34, 43, 44, 45].

3.9. Управление ОС с распределенным контролем [16, 23, 45].

3.10. Управление ОС с неопределенностью [38, 44].

3.11. Управление ОС с ограничениями совместной деятельности [6, 33, 44].

3.12. Управление ОС с коалиционным поведением участников [16].

3.14. Модели управления ОС с недобросовестным поведением участников [12].

3.15. Механизмы финансирования [4, 7, 21, 22].

3.16. Модели и методы внутрифирменного управления [1, 21, 51].

3.17. Устойчивость решений задач управления организационными системами [14, 30, 35, 38].

3.18. Модели и методы управления образовательными системами [32, 42].

3.19. ОС с сообщением информации (механизмы планирования) [6, 7, 24, 43, 39, 49, 53].

3.20. Задачи стимулирования и модели предложения труда [1, 26, 37, 52, 53].

3.21. Организационные механизмы управления проектами [7, 36, 50].

Литература к главе 3

1 *Баркалов С.А., Новиков Д.А., Попов С.С. Индивидуальные стратегии предложения труда: теория и практика. – М.: ИПУ РАН, 2002.

2 *Бородулин А.Н., Заложнев А.Ю., Шуремов Е.Л. Внутрифирменное управление, учет и информационные технологии. – М.: ПМСОФТ, 2006.

3 *Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977.

4 *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Леонтьев С.В., Новиков Д.А., Чернышев Р.А. Механизмы финансирования программ регионального развития. – М.: ИПУ РАН, 2002.

5 *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001.

6 *Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981.

7 *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997.

8 *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: СИНТЕГ, 1999.

9 *Васильев Д.К., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А., Цветков А.В. Типовые решения в управлении проектами. – М.: ИПУ РАН, 2003.

10 *Васильева О.Н., Засканов В.В., Иванов Д.Ю., Новиков Д.А. Модели и методы материального стимулирования (теория и практика). – М.: ЛЕНАНД, 2007.

11 *Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ РАН, 2003.

12 *Выборнов Р.А. Модели и методы управления организационными системами с коррупционным поведением участников. – М.: ИПУ РАН, 2006.

13 *Галинская Е.В., Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели и механизмы управления развитием персонала. – М.: ИПУ РАН, 2005.

14 *Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.

15 *Головань С., Гуриев С., Макрушин А. Теория контрактов. Сборник задач с решениями. – М.: РЭШ, 2003.

16 *Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. – М.: ИПУ РАН, 2003.

17 *Губко М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур. – М.: ЛЕНАНД, 2006.

18 *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.

19 *Гуриев С.М. Конспекты лекций по теории контрактов. – М.: РЭШ, 2006.

20 *Ермаков Н.С., Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели репутации и норм деятельности. – М.: ИПУ РАН, 2005.

21 *Заложнев А.Ю. Модели и методы внутрифирменного управления. – М.: Сторм-Медиа, 2004.

22 *Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы. – М.: ЛЕНАНД, 2006.

23 *Караваев А.П. Модели и методы управления составом активных систем. – М.: ИПУ РАН, 2003.

24 *Коргин Н.А. Механизмы обмена в активных системах. – М.: ИПУ РАН, 2003.

25 Кох Р. Принцип 80/20. – Минск: Попурри, 2004.

26 *Кочиева Т.Б., Новиков Д.А. Базовые системы стимулирования. – М.: Апостроф, 2000.

27 Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. – М.: МГУ, 1984.

28 *Лысаков А.В., Новиков Д.А. Договорные отношения в управлении проектами. – М.: ИПУ РАН, 2004.

29 *Мишин С.П. Оптимальные иерархии управления в социально-экономических системах. – М.: ПМСОФТ, 2004.

30 Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. – М.: Наука, 1989.

31 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.

32 *Новиков Д.А., Глотова Н.П. Модели и механизмы управления образовательными сетями и комплексами. – М.: ИУО РАО, 2004.

33 *Новиков Д.А. Институциональное управление организационными системами. – М.: ИПУ РАН, 2003.

34 *Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.

35 Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. – М.: ИПУ РАН, 1998.

36 *Новиков Д.А. Управление проектами: организационные механизмы (вводный курс). – М.: ПМСОФТ, 2007.

37 *Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003.

38 *Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998.

39 *Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. – М.: Синтег, 1999.

40 *Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003.

41 *Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. – М.: ИПУ РАН, 2002.

42 *Новиков Д.А., Суханов А.Л. Модели и механизмы управления научными проектами в ВУЗах. – М.: ИУО РАО, 2005.

43 *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007.

44 *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. – М.: Апостроф, 2000.

45 *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. – М.: ИПУ РАН, 2001.

46 *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз. – М.: ИПУ РАН, 2002.

47 *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Прикладные модели информационного управления. – М.: ИПУ РАН, 2004.

48 *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003.

49 *Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. – М.: ИПУ РАН, 2001.

50 *Цветков А.В. Стимулирование в управлении проектами. – М.: Апостроф, 2001.

51 *Щепкин А.В. Механизмы внутрифирменного управления. – М.: ИПУ РАН, 2001.

52 Юдкевич М.М., Подколзина Е.А., Рябинина А.Ю. Основы теории контрактов: модели и задачи. – М.: ГУ ВШЭ, 2002.

53 Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.

54 Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. – London: Harvard Univ. Press, 1991.

55 Pareto V. Manuele d'Economia Politica. 1906.

Глава 4. Модели анализа и синтеза организационных структур

Любая экономическая система состоит из множества организованных[1] некоторым образом *агентов* (сотрудников)[2]. Благодаря организации сотрудники действуют на основе определенных процедур и правил (*механизмов*), что позволяет достичь цели системы.

Специализация сотрудников *организации* повышает их эффективность по сравнению с множеством одиночных (неорганизованных) агентов. Однако взаимодействие сотрудников с различной специализацией должно быть скоординировано для достижения общей цели. Это фундаментальная проблема любой организации, поскольку координация требует усилий, направленных на планирование совместной работы, контроль ее результатов, согласование целей отдельных сотрудников и т.д. Для реализации управленческих функций в организации создается *иерархия*[3].

С одной стороны, иерархия повышает эффективность взаимодействия сотрудников, например, с помощью планирования и контроля материальных, информационных и других потоков. С другой стороны, реализация управленческих функций требует затрат. В современных экономических системах доля менеджеров, выполняющих только управленческие функции, достигает 40 % (см., например, [41]). Поэтому одним из ключевых факторов эффективности экономической системы является оптимальность иерархии управления.

В реальных организациях возможности эксперимента со структурой управления очень ограничены, поэтому важное значение приобретают модели (см. первую главу), которые позволяют выбрать эффективную организационную иерархию, а также обосновать необходимость и направление ее реформирования при изменении условий функционирования организации.

---

[1] *См. определение организации во введении.*

[2] *Ниже термины «организация» и «экономическая система» используются как синонимы.*

[3] *Сотрудники на более высоких уровнях иерархии обладают бо́льшими правами, чем сотрудники нижних уровней, что позволяет системе достичь цели даже в случае конфликтов.*

В основу описываемого ниже подхода положено разделение задачи *организационного дизайна* на три этапа:

- разработка технологии функционирования организации,
- выбор организационной структуры,
- построение механизмов управления.

Такое разделение позволяет сконцентрировать внимание на втором этапе и сформулировать задачу формирования организационной структуры как задачу дискретной оптимизации – выбора из множества допустимых иерархий управления наилучшей. Описанию методов решения этой задачи и посвящена настоящая глава.

В первом разделе приведен *обзор* имеющихся на данный момент научных школ, в рамках которых построены модели анализа и синтеза (оптимизации) иерархических структур. Проведен краткий сопоставительный анализ различных направлений исследований, в частности, отличие предлагаемого в настоящей главе подхода от известных моделей.

Во втором разделе описана *базовая модель*, в которой рассматривается задача надстройки оптимальной иерархии, управляющей известной сетью технологических взаимодействий исполнителей. Введена общая терминология, используемая далее на протяжении всей главы.

В третьем разделе описана *общая модель* построения оптимальной иерархии для так называемых *секционных функций затрат* менеджеров. Подобные функции обобщают множество известных частных моделей, в частности рассмотренную в базовой модели оптимизацию управления материальными и информационными потоками. Общность подхода приводит к некоторой абстрактности изложения, однако позволяет разработать единый аппарат для решения широкого круга задач оптимизации организационных иерархий. Приведены алгоритмы оптимизации иерархий. Для ряда случаев описаны аналитические методы решения.

Четвертый раздел посвящен важному подклассу секционных функций – *однородным функциям затрат* менеджеров. Для них на сегодняшний день получены глубокие аналитические результаты [4], которые исчерпывающим образом решают теоретическую задачу об оптимальной иерархии, и могут быть использованы для исследования целого класса практических задач.

4.1. *Обзор моделей иерархических структур*

4.1.1. Классификация моделей иерархических структур

Подходы к формулировке и решению задач формирования организационных иерархий весьма разнообразны. Не в последнюю очередь это связано со сложностью описываемого объекта. Разобраться во всем многообразии моделей помогает их классификация. В литературе встречаются несколько принципов систематизации моделей формирования организационных структур. Так, ряд классификаций основывается на формальных характеристиках моделей: используемом математическом аппарате, типах рассматриваемых структур и т.п.

Например, в [16] выделяются четыре основных подхода к построению моделей формирования оргструктур[1]. Первый подход основан на построении графа декомпозиции целей и задач организации[2]. Во втором подходе считается, что задача организации состоит в максимизации некоторого критерия эффективности – ее «целевой функции» (см. вторую главу). В силу сложности этой функции, задачу максимизации приходится декомпозировать и поручать решение частных задач отдельным подразделениям организации. Формирование организационной структуры сводится к поиску допустимой декомпозиции, минимизирующей потери эффективности. В третьем подходе строится функция, напрямую определяющая зависимость эффективности функционирования организации от структурных характеристик организационной иерархии и ищется иерархия, максимизирующая/минимизирующая эту функцию. Четвертый подход связан с количественной оценкой взаимосвязей между элементами системы и иерархической группировкой наиболее сильно связанных элементов в подразделения.

---

[1] *Ссылки на исследования, выполненные в рамках каждого из этих четырех подходов, можно найти в* [*16*].

[2] *В общей теории систем считается, что структура организации во многом обусловлена структурой этого графа. Задача формирования организационной структуры при этом сводится к решению задачи назначения – распределения подцелей по подразделениям и сотрудникам организации.*

Еще одна система классификации, основанная на таких формальных характеристиках моделей, как цель исследования, целенаправленность системы и отдельных ее элементов, однородность элементов, количество уровней организационной структуры, и т.п., рассмотрена в [5]. Эта довольно подробная система классификаций позволяет разбить все множество моделей на большое количество классов и анализировать, например, степень похожести моделей по различным признакам классификации (в [5] приведена классификация по этой системе примерно сотни работ различных авторов).

Другие известные системы классификации базируются не на формальных, а на содержательных характеристиках моделей. Наиболее типичным признаком классификации являются задачи, решаемые *менеджерами* – элементами иерархии управления[1]. Среди этих задач Р. Раднер [41] выделяет следующие:

- наблюдение за внешней средой и результатами предыдущих действий,
- обработка и передача информации,
- принятие решений,
- контроль,
- решение кадровых вопросов,
- обучение и разъяснение,
- планирование,
- решение проблем,
- убеждение, принуждение и целеполагание.

Похожая классификация предлагается и в [27].

В настоящем обзоре подходы разбиваются на т.н. «*линии исследований*» – группы взаимосвязанных публикаций, авторы которых либо развивают общую модель, либо, наоборот, дискутируют друг с другом. Преимущество такого разбиения состоит в его большей историчности – оно позволяет проследить развитие во времени подходов к исследованию задач формирования организационных иерархий (недостатком же является некоторая эклектичность). На

[1] *Задачи, решаемые менеджерами, могут быть положены в основу классификации моделей формирования иерархий потому, что в рамках одной модели обычно рассматривается только один из видов управленческой работы – тот, который авторы модели принимают за наиболее важный.*

основе анализа литературы были выделены следующие **линии исследований**:

- многоуровневые симметричные иерархии,
- иерархии знаний,
- многоуровневые иерархии обработки информации,
- иерархии и теория команд,
- иерархии принятия решений,
- иерархии и теория контрактов,
- общая модель поиска оптимальных иерархий.

Специфика каждого из этих направлений подробно описывается ниже.

4.1.2. Многоуровневые симметричные иерархии

В основу рассматриваемого ниже направления легла модель организационной структуры как последовательности иерархически упорядоченных *уровней управления*. Ее особенностью является то, что длина «цепочки подчинения» между любым *конечным исполнителем* (находящимся на нижнем уровне иерархии) и *топ-менеджером* (находящимся на самом верхнем уровне иерархии) одинакова, что позволяет называть такие иерархии «симметричными».

Проблемы, рассматриваемые в работах данного подхода, родились из дискуссии, имевшей место в экономической литературе в первой половине XX века [24, 32, 34] и посвященной факторам, ограничивающим рост фирмы. Ее результатом стало представление о том, что основным подобным фактором является ограниченность индивидуальных возможностей владельца фирмы по координации и контролю деятельности исполнителей и связанная с этим необходимость делегирования соответствующих полномочий *менеджерам среднего звена*. Именно потери, связанные с функционированием иерархии менеджеров (не только чисто финансовые расходы на их содержание, но и снижение производительности из-за т.н. *потери контроля*), и являются тем фактором, который в результате может перевесить выгоды большого размера фирмы – концентрацию технологий и капитала, нивелирование рисков и т.п. Однако будут ли эти потери достаточно существенными, чтобы привести к невыгодности неограниченного роста фирмы? Ответ на этот вопрос потребовал разработки формальных моделей организационных иерархий.

Так, в модели М. Бекманна [19] структура управления фирмы моделируется последовательностью иерархических уровней, пронумерованных сверху вниз начиная с нулевого. На i-м уровне находятся L_i менеджеров, каждый из которых получает вознаграждение за свою работу в размере w_i. Отношение L_{i+1}/L_i, то есть числа менеджеров на двух соседних уровнях, определяет так называемую *норму управляемости* – по сути, среднее количество *непосредственных подчиненных* у каждого менеджера уровня i.

Бекманн предполагает, что норма управляемости на любом уровне иерархии не может быть меньше константы $a > 1$, а вознаграждение менеджера не может превышать вознаграждения его непосредственного подчиненного более чем в b раз (то есть $b > w_i / w_{i+1}$), причем $a > b$. Также считается, что при росте фирмы добавление менеджера на уровень $i + 1$ сопровождается добавлением не менее a менеджеров на следующий уровень. В рамках этих предположений добавочные затраты на содержание иерархии при введении в фирму нового *исполнителя* (производственного рабочего) ограничены сверху, то есть с ростом фирмы затраты иерархии растут не быстрее чем линейно и не могут быть фактором, ограничивающим рост размера фирмы.

В отличие от него О. Вильямсон в известной статье [47] отстаивает противоположную точку зрения. Ссылаясь на экспериментальные исследования о том, как искажается смысл сообщений при передаче их по длинной цепочке людей, он делает вывод о том, что уменьшение эффективности управления с ростом фирмы неизбежно. Ведь при расширении фирмы топ-менеджер вынужден получать меньше информации о «старой» ее части, чтобы иметь время ознакомиться с данными о «новой» части, и его приказы становятся все менее детальными. Ключевым в модели Вильямсона является предположение о том, что лишь некоторая доля $\alpha < 1$ замыслов (приказов) руководства успешно воплощается непосредственными подчиненными, и нет возможности помешать этой потере контроля.

Решая задачу максимизации прибыли фирмы – разности между выручкой и затратами – Вильямсон получает приближенную формулу для оптимального количества уровней иерархии, а, значит, и оптимального размера фирмы, превышение которого не выгодно.

Г. Кальво и С. Веллиц в [23] предложили обобщение модели

Вильямсона, в котором пропорция исполняемых приказов α является внутренним параметром модели. Они считают, что функцией менеджеров иерархии является *мониторинг* интенсивности работы своих непосредственных подчиненных, и потеря контроля, приводящая к ограниченности размера фирмы, может иметь или не иметь места в зависимости от специфики используемой процедуры мониторинга. В этой модели менеджеры по результатам наблюдения за действиями своих непосредственных подчиненных могут назначать им линейные штрафы за «недоработку». При этом интенсивность мониторинга определяется уровнем усилий самого менеджера и его нормой управляемости (количеством непосредственных подчиненных). В рамках этой модели удается показать, что прибыль монотонно возрастает с ростом размера фирмы, то есть пределов роста нет, даже несмотря на необходимость мониторинга работы сотрудников.

Ситуация в корне меняется, если сотрудники организации знают, что часть времени начальник их не контролирует. В этом случае при довольно слабых технических допущениях авторы доказывают существование предела роста размера фирмы. Правда, этот вывод существенно основывается на предположении, что когда менеджер, скажем, верхнего уровня отлучается с рабочего места, то все его подчиненные вплоть до рядовых исполнителей моментально перестают работать до момента его возвращения.

В модели Кальво и Веллица роль менеджеров ограничивалась мониторингом работы своих непосредственных подчиненных. В то же время, классическая теория фирмы [24, 48] доказывает, что основные задачи менеджеров – это планирование деятельности подчиненных подразделений и принятие управленческих решений. При этом важную роль играет время принятия решений – решения должны быть своевременными.

В статье М. Керена и Д. Левхари [33] рассматривается модель иерархической фирмы, в которой время планирования (и, соответственно, принятия решений) определяется суммарным временем принятия решений уровнями иерархии и напрямую влияет на объем производства. При довольно реалистичных предположениях о параметрах модели показывается, что средние *затраты на единицу продукции* возрастают с ростом размера фирмы, то есть предел ее роста существует.

В своей статье Керен и Левхари для поиска оптимальной иерархии довольно изящно использовали аппарат теории оптимального управления. Его применение удобнее проиллюстрировать на примере более поздней работы Ч. Киана [40]. Модель Киана объединяет в себе отдельные черты всех рассмотренных выше работ. Аналогично Кальво и Веллицу, основной функцией менеджеров является мониторинг действий непосредственных подчиненных (на самом деле, рассматриваемая система мониторинга является упрощенной версией мониторинга Кальво и Веллица). При этом неизбежное уменьшение интенсивности мониторинга с ростом нормы управляемости менеджера требует увеличения вознаграждения его непосредственных подчиненных для обеспечения заданной продуктивности их работы.

Кроме мониторинга, в задачи менеджеров входит принятие управленческих решений. Как и в модели Вильямсона, считается, что менеджеры каждого уровня производят некоторый промежуточный продукт – «управление». Менеджер преобразует управление своего начальника в свое управление, и этот продукт используется далее в качестве входа его непосредственными подчиненными. Исполнители на самом нижнем уровне аналогичным образом преобразуют управление своего начальника в конечный продукт, который реализуется на внешнем рынке. Технология устроена таким образом, что доход фирмы возрастает с ростом усилий, прикладываемых сотрудниками каждого уровня иерархии.

При заданном количестве производственных рабочих задача поиска оптимальной иерархии состоит в выборе количества уровней иерархии, норм управляемости и необходимых уровней усилий менеджеров на каждом уровне, максимизирующих прибыль фирмы – разность между доходом и затратами на оплату сотрудников.

Вообще говоря, поставленная задача является довольно сложной задачей дискретной оптимизации. Чтобы упростить решение Киан преобразует дискретную задачу к непрерывной, используя подход, развитый Кереном и Левхари [33]. Для этого он предполагает, что норма управляемости и количество менеджеров на каждом уровне иерархии могут принимать любые (не только целые) значения. Кроме того, считается, что и сам номер уровня изменяется непрерывно, так что, скажем, зависимость нормы управляемости от уровня иерархии описывается функцией действительной переменной – номера уровня. Это позволяет свести задачу к динамической задаче оптимального управления, в которой номер уровня играет роль «времени». Для ее решения используется принцип максимума Понтрягина. В частности, показывается, что в оптимальной иерархии ставка оплаты сотрудников и уровень их усилий уменьшаются вниз по иерархии, а прибыль фирмы вогнуто возрастает по ее размеру. Таким образом Киан, как и Бекманн [19], приходит к выводу, что потенциальная потеря контроля в иерархии управления не приводит к ограничению рационального размера фирмы.

Несколько особняком в череде публикаций, посвященных моделям симметричных многоуровневых иерархий, стоит статья Ш. Розена [42], в которой изучается не отдельная фирма, а целый *рынок*, включающий и фирмы, и менеджеров. Целью исследования Розена является описание равновесного распределения фирм по размеру, а также рыночных процессов формирования вознаграждения менеджеров в зависимости от их способностей. Основу модели составляет предположение о том, что каждый иерархический уровень преобразует результаты работы более низкого уровня в новый продукт, который может быть как реализован на внешнем рынке, так и использован в качестве входа следующим уровнем иерархии.

Подробно анализируя случай *двухуровневых фирм* в условиях технологии с постоянной отдачей на масштаб, Розен рассматривает рынки производственных и управленческих навыков. Он находит равновесные рыночные цены, определяющие вознаграждение исполнителей и менеджеров в зависимости от их навыков. Показывает, что более талантливые менеджеры в равновесии управляют более крупными фирмами, что позволяет получить распределение фирм по размеру в зависимости от распределения управленческих навыков потенциальных работников. Найденная зависимость вознаграждения менеджера от размера управляемой им фирмы хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Среди российских ученых, в настоящее время развивающих модели симметричных многоуровневых иерархий, отметим А.П. Михайлова [9], однако предметом его работ является не поиск оптимальных иерархий, а закономерности динамических процессов перераспределения власти между уровнями фиксированной административной (властной) иерархии.

Подытожим выводы этой линии исследований относительно основных характеристик оптимальных иерархий:

- каковы бы ни были функции, выполняемые менеджерами, вид

оптимальной иерархии, ее затраты, а также эффективность функционирования организации существенно зависят от используемых механизмов управления (планирования, стимулирования, контроля и т.д.);
- при рационально организованной иерархии управления возможен неограниченный рост фирмы (точнее, ее размер ограничивается другими факторами, не связанными с затратами на управление, например ограниченным объемом рынков);
- более способные менеджеры обычно занимают в иерархии более высокие позиции и получают за свою работу большее вознаграждение.

4.1.3. Иерархии знаний

В рамках данной линии исследований считается, что основной задачей менеджеров является решение проблем, возникающих в процессе функционирования организации. Решать проблемы менеджерам помогают их знания и опыт. Общеизвестна эффективность *специализации*, концентрации отдельного сотрудника на решении лишь определенного класса проблем. В то же время, специализация порождает проблемы *координации*, поиска специалиста, который может решить конкретную проблему. Как оказывается, организация сотрудников в форме иерархии представляет собой весьма эффективный способ такой координации. Главной проблемой при построении иерархии является поиск компромисса между эффективностью использования знаний и затратами на координацию.

В модели [26], предложенной Л. Гарикано, для успешной реализации технологического процесса, помимо привычных факторов производства (таких, как материалы, оборудование, капитал), требуются еще и знания сотрудников, проявляющиеся в их умении решать проблемы. Множество всех проблем моделируется точками отрезка $[0, Z]$ действительной оси[1], и квалификация сотрудника организации определяется подмножеством проблем, которые он

---

[1] *При этом считается, что вероятность появления проблемы $z \in [0, Z]$ убывает с ростом z. Также рассматривается интерпретация, в которой переменная z описывает сложность проблемы – бóльшим числам соответствуют более сложные проблемы.*

умеет решать. Предполагается, что в процессе работы сотрудник сталкивается со случайным потоком проблем из отрезка $[0, Z]$, и его производительность труда определяется долей проблем, которые он успешно решает. В простейшем случае рациональная квалификация сотрудников определяется балансом между производительностью их труда и затратами на обучение (приобретение заданного уровня квалификации).

В большой организации может оказаться выгодным наличие «специальных» сотрудников, умеющих решать только редкие проблемы. Тогда остальные сотрудники смогут обращаться к ним за помощью в исключительных случаях вместо того, чтобы учиться самим решать эти (относительно редкие) проблемы.

Организационная структура, по Гарикано, описывается разбиением всего множества сотрудников организации на классы. Класс i характеризуется:

- *множеством компетенции* $A_i \subseteq [0, Z]$ (возможно, пересекающимся с множествами компетенции других классов);

- списком классов, у которых сотрудники i-го класса могут просить помощи;

- распределением времени сотрудников i-го класса между производственной деятельностью и помощью другим классам.

Общее время, которое i-й класс тратит на помощь другим сотрудникам организации, сложным образом определяется множествами компетенции классов, которые предшествуют i-му в списках тех, кто обращается к i-му классу за помощью, а также тем, сколько времени обращающиеся за помощью сотрудники тратят на производственную деятельность. Прибыль, приносимая организации сотрудником i-го класса, равна произведению его рабочего времени на вероятность решения организацией его проблем за минусом затрат на обучение сотрудника.

Задача построения оптимальной организации сводится к нахождению количества классов, распределения сотрудников организации по классам, областей компетенции A_i, списков обращений за помощью и распределений времени каждого класса, максимизирующих совокупную прибыль организации.

Произвольная организация может не иметь ничего общего с иерархией, поскольку в ней, вообще говоря, отсутствуют понятия подчинения и разделения труда на производство и управление.

Однако Гарикано показывает, что в оптимальной организации сотрудники специализируются либо на производственной деятельности, либо на «решении проблем». Только один класс выполняет производственные задачи (сотрудников этого класса логично называть исполнителями, а остальных – менеджерами). Области компетенции различных классов не перекрываются. Компетенция исполнителей покрывает наиболее часто встречающиеся проблемы, а менеджеры компетентны в обработке исключений: чем дальше в списке обращений за помощью находится класс, тем более редкие проблемы решают его сотрудники.

Эти свойства позволяют рассматривать оптимальную организацию как иерархию, в которой вверх движется информация о проблемах, а вниз – информация об их решениях. В случае, когда частота проблем описывается экспоненциальным распределением[1], характеристики оптимальной иерархии находятся аналитически. Кроме того, показывается, что:

- уменьшение затрат на оказание помощи приводит к уменьшению уровня компетенции исполнителей (сужению подмножества решаемых ими проблем), увеличению компетенции менеджеров и росту их нормы управляемости;
- уменьшение затрат на обучение приводит к увеличению уровня компетенции всех сотрудников и росту нормы управляемости;
- рост непредсказуемости проблем приводит к увеличению доли проблем, которые приходится решать менеджерам, а также к уменьшению нормы управляемости[2].

В рассматриваемой модели менеджеры верхних уровней могут концентрироваться на решении только редких проблем – область их компетенции не обязана начинаться «с нуля». Это не совсем логично, так как, если более редкие проблемы имеют бóльшую сложность, то умение решать сложные проблемы в большинстве случаев предполагает умение решать и более простые. Гарикано рассматри-

---

[1] *Параметр λ этого распределения (плотность вероятности которого равна $\lambda\, exp(-\lambda\, z)$) интерпретируется как степень предсказуемости возникающих проблем.*

[2] *С ростом нормы управляемости иерархия становится более «плоской». Уменьшение же нормы управляемости приводит к более «высокой» иерархии.*

вает и этот случай, показывая, что качественные свойства оптимальных иерархий при этом остаются неизменными.

Похожие иерархии менеджеров, решающих проблемы, рассматривались А. Беггсом в [20]. В его модели тоже менеджеры, решающие сложные проблемы, должны уметь решать и более простые. Вознаграждение менеджеров растет с ростом их квалификации. Отличие от подхода Гарикано состоит в том, что Беггс большее внимание уделяет моделированию процесса передачи проблем вверх по иерархии, используя для этого аппарат *теории массового обслуживания*. В числе прочего, доказывается, что норма управляемости менеджеров должна расти с ростом их положения в иерархии, то есть менеджер более высокого уровня должен иметь больше непосредственных подчиненных, чем менеджер нижнего звена.

Итак, общие выводы рассмотренной линии исследований состоят в следующем:

- главная задача менеджеров состоит в решении проблем, возникающих в процессе функционирования организации;
- иерархическая структура управления является эффективным способом организации процесса решения проблем;
- управленческая деятельность требует специфических навыков, и выгодность разделения сотрудников организации на менеджеров и исполнителей обусловлена получаемым при этом выигрышем от специализации;
- роль нижних уровней иерархии состоит в том, чтобы освободить менеджеров более высоких уровней от «текучки» и позволить им сконцентрироваться на решении сложных проблем.

4.1.4. Многоуровневые иерархии обработки информации

Существенным ограничением рассмотренных выше моделей является представление об иерархии как о последовательности взаимоподчиненных уровней. Подход к моделированию организационных иерархий, лишенный этого недостатка, развивается в работах Р. Раднера, Т. Ван Зандта и других ученых и основан на аналогии между работой организационных иерархий и вычислительных сетей. В рамках этого подхода предполагается, что основной функцией менеджеров в организациях является *обработка информации*. Моделью этого процесса является распределенное вычисление некоторой ассоциативной функции принятия решения[1], аргументами которой являются наблюдаемые параметры внешней среды (ниже процесс вычисления этой функции называется «*суммированием*»). В роли «*процессоров*» выступают менеджеры, а иерархия выполняет роль распределенной *вычислительной сети*, задающей порядок и правила взаимодействия процессоров[2].

Так, в [41] считается, что основные характеристики процесса обработки информации, приводящие к затратам, а потому нуждающиеся в экономии – это общее время вычисления функции и количество процессоров. Задача состоит в том, чтобы при заданном количестве суммируемых элементов n и фиксированном количестве процессоров P построить *эффективную* вычислительную сеть (организационную иерархию), то есть сеть, минимизирующую время суммирования.

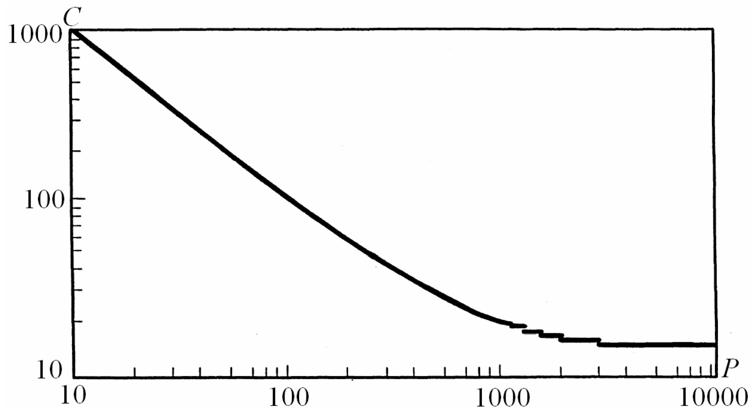


Рис. 4.1. Зависимость времени вычисления от количества процессоров при n = 10000 (*логарифмическая шкала*)

Для поиска эффективной вычислительной сети используется аппарат дискретной оптимизации. В результате находится алгоритм построения эффективной сети. Менеджеры в ней выстроены в це-

---

[1] *Примерами подобных функций являются линейные правила принятия решений и задачи распознавания ситуаций* (*sampling*) [*41*].

[2] *В* [*37*] *рассматривается вопрос, о том, когда «вычислительная сеть» менеджеров действительно имеет иерархический вид, то есть когда в ней отсутствуют петли.*

почку: получив промежуточный результат от предыдущего сотрудника, менеджер прибавляет к нему несколько параметров внешней среды и передает следующему сотруднику цепи. На Рис. 4.1 изображен пример графика зависимости минимального времени вычисления C от количества процессоров P.

Однако обычно в организациях данные необходимо обрабатывать в т.н. *систолическом режиме*, когда отдельные *когорты* (cohorts) данных прибывают периодически. Ван Зандт в [46] показал, что в этом случае эффективная иерархия состоит из набора оптимальных деревьев для обработки одной когорты и механизма, передающего очередные когорты данных на обработку этим деревьям по мере их освобождения. Он также нашел приближенные формулы для эффективных пар P и C (количества процессов и времен вычисления). Из них следует, что необходимое число процессоров растет, как минимум, пропорционально количеству n суммируемых объектов. Также с ростом n растет и время вычисления (даже при неограниченном количестве процессоров).

Статья П. Болтона и М. Деватрипонта [21] является дальнейшим развитием подхода Раднера и Ван Зандта. В этой модели организация функционирует в непрерывном времени, новая когорта данных доступна в любой момент, и задача состоит лишь в том, чтобы суммировать все элементы данных, с определенной частотой собирая их «в руках» топ-менеджера. Для этого формируется вычислительная сеть из менеджеров, причем доказывается, что она имеет вид дерева, в самом низу которого находятся элементы данных, а в вершине – топ-менеджер. Необходимость создания сложной многоуровневой сети обусловлена положительным эффектом от специализации – эффективность работы менеджера возрастает с увеличением частоты обработки им своей части данных – так что невыгодно разделять когорты данных между менеджерами, поручая каждому менеджеру обработку отдельной когорты.

Задача поиска оптимальной иерархии разбивается на два этапа. Сначала ищется иерархия, минимизирующая суммарные трудозатраты менеджеров для обеспечения фиксированной частоты обработки. Затем ищется частота, максимизирующая среднюю прибыль – разность между доходом и затратами самой дешевой (при заданной частоте) иерархии.

Авторы доказывают, что решением задачи первого этапа является древовидная иерархия, в которой трудозатраты всех менеджеров почти одинаковы. Кроме того, оптимальная иерархия стремится быть симметричной – межуровневое взаимодействие в ней минимально.

Подытожим выводы этой линии исследований:

- при условии, что основная задача менеджеров – обработка информации, иерархичность структуры управления является следствием невыгодности дублирования их работы;
- число менеджеров и количество уровней управления неизбежно растут с ростом организации, так же как и время ее реакции на изменение внешних условий;
- эффективное распределение работы между менеджерами предполагает выравнивание их информационной нагрузки;
- имеется определенная тенденция к разделению уровней иерархии – ограничению взаимодействия между менеджерами различных уровней.

4.1.5. Иерархии и теория команд

Выше много говорилось о важности координации отдельных подразделений, как о главной цели организационных иерархий. Однако ни в одной из описанных выше работ процесс координации как таковой не моделировался в явном виде. В то же время, довольно давно существует специальное научное направление – *теория команд* (theory of teams) – основным предметом исследований которого являются задачи координации действий групп индивидуумов, преследующих общие цели (см. обзор в [12]).

Базовая модель теории команд представляет собой нечто среднее между классической задачей оптимизации и задачами, рассматриваемыми в рамках теории игр. Имеется *команда* агентов, каждый из которых выбором своего действия стремится максимизировать общий критерий эффективности. Проблема состоит в том, что значение критерия, помимо действий агентов, зависит от состояния природы, представления о котором у агентов могут различаться. Задача заключается в координации решений, принимаемых агентами, то есть в предложении рациональных правил выбора действий с учетом их представлений.

Одна из первых попыток применения результатов этой теории к задачам оптимальных иерархий была предпринята Ж. Кремером в [25]. Он рассматривает фирму, состоящую из n производственных единиц (т.н., *заводов*), производящих несколько видов продукции (товаров). Продукция одних заводов может использоваться другими заводами в качестве исходного сырья, то есть реализация технологического процесса фирмы предполагает *трансферты* товаров между заводами. В простейшем случае, когда спрос на продукцию и функции затрат заводов[1] известны точно, задача координации состоит в определении объемов производства и трансфертов, минимизирующих суммарные производственные затраты при условии удовлетворения спроса.

Однако в реальности точная подстройка трансфертов под конкретную реализацию случайных факторов может быть невозможной в масштабе всей фирмы. Тогда приходится разбивать фирму на более мелкие *объединения*, состоящие из одного или нескольких заводов. При фиксированном разбиении множества заводов на объединения задача координации оперативно решается в рамках каждого объединения после того, как реализуются значения случайных *природных факторов*, и становится известным спрос на продукцию объединения. Объемы же трансфертов между объединениями должны быть зафиксированы заранее, до момента реализации случайных факторов. Задача поиска оптимальной организации, таким образом, сводится к выбору наилучшего допустимого[2] разбиения заводов на объединения.

Основная идея статьи [25] состоит в том, что в первую очередь между собой должны объединяться технологически наиболее сильно связанные заводы, трансферты между которыми подвержены наиболее сильным колебаниям при изменении случайных факторов. Недостатком модели является то, что она рассматривает лишь организации с единственным промежуточным уровнем управления – уровнем объединений. Введение новых промежуточных уровней в модели Кремера бессмысленно.

В этом смысле интересно сравнить ее с более ранним подходом, разработанным Б.Л. Овсиевичем и его сотрудниками [16]. Они моделировали функционирование сложной системы вероятностной мерой $\mu(s)$ на множестве ее состояний s. Основной числовой харак-

---

[1] *Кремер рассматривает относительно простые квадратичные функции затрат.*

[2] *Допустимые разбиения могут, например, ограничивать сверху количество заводов, входящих в одно объединение.*

теристикой системы является ее *информационная энтропия* $\Sigma_s \mu(s) \ln \mu(s)$. Элементы системы взаимосвязаны, поэтому разность суммарной энтропии отдельных элементов системы и энтропии системы в целом больше нуля. Считается, что эта разность как раз и определяет объем работы по координации элементов системы, которую должна осуществить система управления. Объем работы, которую может осуществлять один управляющий элемент (менеджер), ограничен сверху. В связи с этим ставится задача разбиения множества элементов системы на подсистемы, каждая из которых управляется отдельным менеджером. Это разбиение должно минимизировать разность между суммарной энтропией подсистем и системы в целом при выполнении ограничения на объем работы по координации каждой подсистемы. Полученное разбиение определяет нижний уровень иерархии управления. Теперь можно строить следующий уровень иерархии, решая аналогичную задачу разбиения подсистем на группы, управляемые менеджерами второго уровня, и так далее, пока на самом верху иерархии не останется единственный менеджер.

Помимо ограниченности количества уровней иерархии модель Кремера обладает еще одним существенным недостатком. Из нее следует, что с ростом размеров объединений эффективность организационной структуры растет. При этом упускаются из виду временн*ы*е и финансовые затраты, связанные с получением достоверной информации о параметрах заводов в большом объединении. В подходе, предложенном Дж. Геанакоплосом и П. Милгромом [28], эти затраты фигурируют в явном виде, что позволяет сделать норму управляемости внутренним параметром модели.

В их модели, так же как и в модели [25] Кремера, иерархия менеджеров надстраивается над множеством заводов, производственные затраты которых описываются квадратичными функциями. Для каждого менеджера иерархии можно определить множество его непосредственных подчиненных (заводов или других менеджеров), а также *подчиненную группу* заводов, которой он управляет непосредственно или через подчиненных ему менеджеров. Менеджер получает от своего начальника совокупный план производства для подчиненной группы заводов и распределяет его между своими непосредственными подчиненными. Общий план производства всей фирмы считается заданным.

Чтобы эффективно планировать производство, менеджеру необходимо знать значения случайных факторов, влияющих на затраты подчиненных ему заводов. Однако он может наблюдать только зашумленные сигналы, достоверность которых растет с ростом времени, которое менеджер тратит на наблюдение за ними. Таким образом, менеджер должен:

- распределить имеющееся у него фиксированное время между подчиненными заводами,
- получить информацию (вектор сигналов) о случайных факторах,
- на основе полученной информации разбить полученный от своего начальника план производства на подпланы для своих непосредственных подчиненных с тем, чтобы минимизировать средние затраты подчиненных заводов.

Чем дольше менеджер наблюдает за деятельностью заводов, тем меньшими будут эти средние затраты, чем и определяется выигрыш, приносимый организации данным менеджером. Замечательным свойством принятого Геанакоплосом и Милгромом квадратичного вида функций затрат заводов является то, что выигрыш, приносимый каждым менеджером, зависит только от полученной им информации, но не от информации, полученной другими менеджерами. Это позволяет искать оптимальное распределение времени каждого менеджера по отдельности, независимо (в частном случае, когда фирма производит единственный продукт, авторы находят аналитическое решение этой задачи). Финальная часть их статьи посвящена анализу оптимальной нормы управляемости двухуровневой иерархии, в которой менеджеры непосредственно управляют заводами, а координация между ними производится на основе априорной информации.

Итак, основные выводы по рассматриваемой линии исследований:

- иерархическая структура управления представляет собой компромисс между сложностью координации большого количества подразделений и затратами на содержание промежуточных звеньев управления,
- сложность координации может быть обусловлена неполной информированностью о значимых параметрах управляемых подразделений,
- в более крупные объединения в первую очередь объединяются

наиболее сильно связанные между собой подразделения.

4.1.6. Иерархии принятия решений

Управление организацией – это, прежде всего, принятие разнообразных решений, и именно *принятие решений*, по мнению многих авторов, является основной задачей менеджеров. Качество выработанных ими решений, в конечном счете, определяет эффективность функционирования организации вообще и организационной структуры в частности. В то же время, вышеописанные модели организационных иерархий не акцентируют внимание на этом аспекте деятельности менеджеров и не учитывают в явном виде процессы выработки управленческих решений.

Ниже описывается другой подход, развитый в ряде работ Р.К. Саха и Дж. Стиглица [43, 44]. Его основу составляет детальное описание механизмов принятия решений менеджерами. «Отдельному человеку свойственно ошибаться» – этим обосновывается целесообразность сложных структур коллективной выработки решений, таких, как организационные иерархии.

В модели Саха и Стиглица организация занимается анализом потока *проектов*. С некоторой вероятностью каждый проект может быть «хорошим» (приносить прибыль), или «плохим» (приносить убыток). Задача организации состоит в отборе хороших проектов для их дальнейшей реализации. Оценку проектов осуществляют менеджеры. Отдельный менеджер может допускать ошибки, рекомендуя к реализации плохие проекты или отклоняя хорошие. С целью повышения эффективности отбора предлагается принимать решение о реализации проекта на основе коллективного мнения менеджеров, для чего может быть сформирована одна из трех организационных структур: *комитет*, *иерархия* или *полиархия*.

В комитете проект отдается на ознакомление одновременно всем менеджерам. По результатам ознакомления проводится голосование, и проект принимается, если за него проголосовало больше определенной доли менеджеров. В иерархии менеджеры выстроены в цепочку и знакомятся с проектом последовательно. Проект окончательно отклоняется, если его отклоняет хотя бы один менеджер, и направляется на рассмотрение следующему менеджеру в случае его утверждения предыдущим. В полиархии проект направляется одному из менеджеров с равной вероятностью. Проект принимается окончательно, если менеджер его принимает. Если менеджер отклоняет проект, то он направляется на рассмотрение одному из оставшихся менеджеров и т.д.

Работа менеджеров должна оплачиваться. Поскольку все менеджеры комитета тратят свое время на ознакомление с проектом, затраты на содержание комитета будут выше, чем затраты на содержание полиархии или иерархии, в которых проект может просто «не дойти» до некоторых менеджеров. Зная вероятности ошибок и зарплаты менеджеров, легко вычислить оптимальный размер комитета, иерархии и полиархии, и затем исследовать сравнительную выгодность использования этих организационных структур в зависимости от значений параметров модели. В частности, показывается, что полиархия принимает больше проектов (как хороших, так и плохих), поэтому она эффективна при хорошем среднем качестве проектов; затраты на содержание комитета максимальны, поэтому с ростом вознаграждения менеджеров сравнительная эффективность комитета падает. В [45] с использованием этой модели исследуется влияние организационной структуры на квалификацию составляющих ее менеджеров.

Три рассмотренные организационные формы можно комбинировать, строя из них более сложную организационную структуру: рассматривать, например, иерархии, каждый элемент которой представляет собой комитет; исследовать иерархии полиархий или полиархии иерархий. Подобные организационные структуры рассматриваются Я. Иоаннидесом в [31].

Совершенно другую модель иерархии, принимающей решения, предлагают О. Харт и Дж. Мур в [30]. В их модели иерархия, состоящая из m идентичных менеджеров, надстраивается над фиксированным множеством *активов*. Активом считается объект, использование которого по отдельности или в комбинации с другими активами может приносить организации прибыль. Таким образом, любой набор активов представляет собой потенциальный проект, который организация может реализовать.

Каждому менеджеру дается в управление непустое подмножество активов $A_i \subseteq N$. С вероятностью $p(A_i)$ менеджер может иметь *идею* по поводу использования этого подмножества активов. В случае ее реализации идея приносит прибыль $v(A_i) > 0$. Роль иерархии состоит в том, что в первую очередь реализуются идеи менеджеров верхнего уровня. Если у них нет идеи, решения принимают их непосредственные подчиненные. Если и те не имеют идей, право принятия решения переходит к их подчиненным, и т.д.

Интересен предлагаемый авторами способ описания иерархии – она моделируется набором последовательностей $H = \{L_1, \ldots, L_n\}$. Для k-го актива последовательность L_k перечисляет (без повторов) менеджеров, управляющих этим активом, в порядке убывания их приоритета в принятии решения по поводу актива.

Иерархия выбирается с целью максимизации ожидаемой прибыли, и основная проблема состоит в том, что иерархия должна быть построена *ex-ante*, то есть до момента, когда у менеджеров начинают появляться идеи. Используемое определение иерархии допускает довольно странные организационные формы. Так, на Рис. 4.2 а) изображена «иерархия» двух менеджеров, надстроенная над множеством из двух активов. В этой иерархии присутствует *взаимоподчинение*, то есть менеджер 1 имеет приоритет перед менеджером 2 при принятии решений по поводу первого актива, а менеджер 2 – по поводу второго актива. В то же время, один из результатов, доказанных авторами, говорит о том, что в оптимальной иерархии взаимоподчинение невозможно.

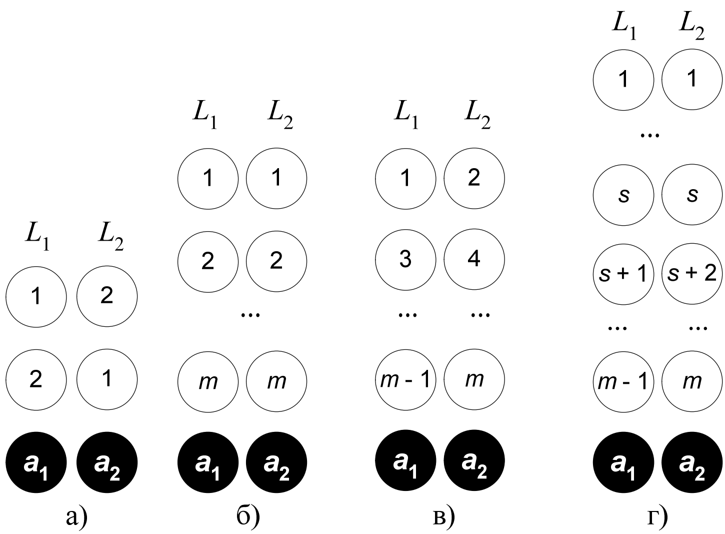


Рис. 4.2. Примеры иерархий Харта-Мура:
взаимоподчинение (*а*), *полная централизация* (*б*),

полная децентрализация (*в*), *частичная централизация* (*г*)

Общие теоретические результаты Харта и Мура позволяют существенно сузить множество иерархий, «подозрительных на оптимальность». Например, они доказывают, что чем выше уровень менеджера в оптимальной иерархии, тем меньше должна быть вероятность появления у него идеи. Авторы подробно исследуют частный случай двух идентичных активов при произвольном количестве менеджеров. Они показывают, что оптимальной при этом может быть одна из трех организационных форм: *полностью централизованная фирма* (цепочка менеджеров, каждый из которых управляет обоими активами); две независимые фирмы (одинаковые цепочки менеджеров, надстроенные над каждым из двух активов); *частично децентрализованная фирма*, представляющая собой централизованную фирму, надстроенную над двумя «специализированными» цепочками (см. Рис. 4.2, иерархии б-г). Также находятся простые условия, при которых оптимальна каждая из этих трех форм.

4.1.7. Иерархии и теория контрактов

Теория контрактов – это раздел математической экономики, изучающий задачи мотивации (*стимулирования*) экономических агентов в условиях неопределенности [22]. В отечественной традиции эти задачи также изучаются в рамках *теории активных систем* [1, 15] и *теории иерархических игр* [7].

Уже базовая модель теории контрактов включает в себя *центр*, выполняющий управленческие функции, и подчиненного ему сотрудника (*агента*), то есть модель теории контрактов по определению включает в себя простейшую двухуровневую организационную иерархию. В то же время, подавляющее большинство работ по теории контрактов исследует стимулирование сотрудников в рамках фиксированной структуры организационной системы. Более того, бóльшая часть моделей теории контрактов касается только двухуровневой организационной структуры. Это, в первую очередь, связано с существенной математической сложностью моделей теории контрактов. Данный обзор далеко не претендует на полноту и ставит целью лишь проиллюстрировать особенности подхода и трудности, связанные тем подробным описанием механизмов управления сложными иерархиями, которое предполагает теория контрактов.

В [39] на основе классической *модели неблагоприятного отбора* (*adverse selection*) [22] исследуется влияние децентрализации контрактов на эффективность функционирования организации. Рассматривается система, состоящая из двух агентов и центра, получающего доход от выбранных агентами действий. Выбор агентом действия требует от него затрат, которые зависят от персональных характеристик этого агента, т.н. *типа* агента. Тип агента является его частной (известной только ему) информацией. Каждый агент получает вознаграждение, зависящее от выбранного им действия и от сообщенного им центру значения своего типа (в общем случае, отличного от истинного).

В классической модели центр непосредственно взаимодействует с обоими агентами и предлагает им вознаграждения (*контракты*), основанные на действиях агентов и сообщенных ими оценках своего типа. Решение этой задачи хорошо известно [22], как и формула средней прибыли центра при оптимальных контрактах.

Такая схема взаимодействия центра с агентами соответствует двухуровневой иерархии. Авторы предлагают сравнить ее эффективность с эффективностью децентрализованной схемы, в которой центр заключает контракт только с первым агентом и делегирует ему право заключать субконтракт со вторым агентом. Выигрыш, получаемый центром от децентрализации, не рассматривается в явном виде, и цель статьи [39] состоит в нахождении условий, при которых децентрализация не приводит к уменьшению эффективности механизмов стимулирования (известно, что рассматриваемой постановке децентрализация не увеличивает эффективности).

Рассматриваются несколько сценариев взаимодействия сотрудников организации в рамках децентрализованной схемы. В первом сценарии центр может непосредственно наблюдать действия обоих агентов и предлагать первому агенту контракт, зависящий от пары действий. Авторы показывают, что при таком сценарии центр может предложить первому агенту контракт, приводящий к тому же значению прибыли центра и к тем же действиям агентов, что и в централизованной схеме.

Дела обстоят хуже в сценарии, где центр наблюдает лишь значение дохода и не может выделить индивидуальные вклады агентов в его достижение. В этом случае контракт с первым агентом основан только на наблюдаемой сумме дохода и сообщении агента о своем типе, и у этого агента появляется возможность перераспределять действие второго агента «в свою пользу». Доказывается, что это приводит к строгому уменьшению эффективности функционирования организации.

Третий сценарий отличается от первого тем, что первый агент сообщает центру значение своего типа уже после того, как заключает контракт со вторым агентом. При достаточно слабых предположениях относительно функции дохода центра эффективность функционирования здесь также хуже, чем в условиях полной централизации. Причина состоит в том, что первый агент в этом сценарии имеет возможность, узнав тип второго агента, отклонить предлагаемый центром контракт, получив при этом нулевое вознаграждение, но и не подвергая себя лишнему риску.

Похожий подход к анализу децентрализованных контрактов предлагается в работе [36], где авторы основываются на другой классической модели теории контрактов – *задаче постконтрактного оппортунизма* (*moral hazard*) [22]. В отличие от модели неблагоприятного отбора, агенты в ней не имеют частной информации, но результат действий агентов помимо их усилий зависит от случайных факторов – *состояния природы* (state of nature).

Как и в [39], в работе [36] рассматривается организация, состоящая из центра и двух агентов. В централизованной структуре центр предлагает агентам контракты, зависящие от наблюдаемого им результата действий агентов, и его задача состоит в максимизации своей ожидаемой прибыли. Решение этой задачи хорошо известно из литературы – см. обзор в [22].

Эффективность централизованной структуры сравнивается с эффективностью децентрализованной, в которой центр заключает контракт с одним из агентов, делегируя ему право заключать контракт с другим агентом и выплачивать ему вознаграждение. Показывается, что схема приносит центру не больший ожидаемый выигрыш, чем централизованная структура. Одинаковую эффективность можно гарантировать лишь тогда, когда агенты *нейтральны к риску* (см. определение в [22]) или когда они идентичны.

В статье [38] Э. Маскина, Ч. Киана и Ч. Ксу в рамках относительно простой модели рассматриваются сравнительные преимущества двух наиболее широко распространенных организационных структур: *функциональной*, или *унитарной* (U-организации) и *муль-*

тидивизиональной (М-организации). В функциональной структуре подразделения сводятся в более крупные объединения на основе сходства выполняемых ими функций. В дивизиональной структуре подразделения объединяются по географическому признаку, формируя относительно самодостаточные дивизионы, или по продуктовому признаку, формируя независимые «продуктовые линии».

Предлагаемая в [38] модель описывает экономику, состоящую из двух отраслей и двух регионов. Всего имеется четыре производственных подразделения (завода) – по одному на каждую комбинацию региона и отрасли. На объем производства каждого завода влияют случайные факторы трех типов: общеэкономические факторы, факторы, специфичные для данной отрасли, и специфичные для региона.

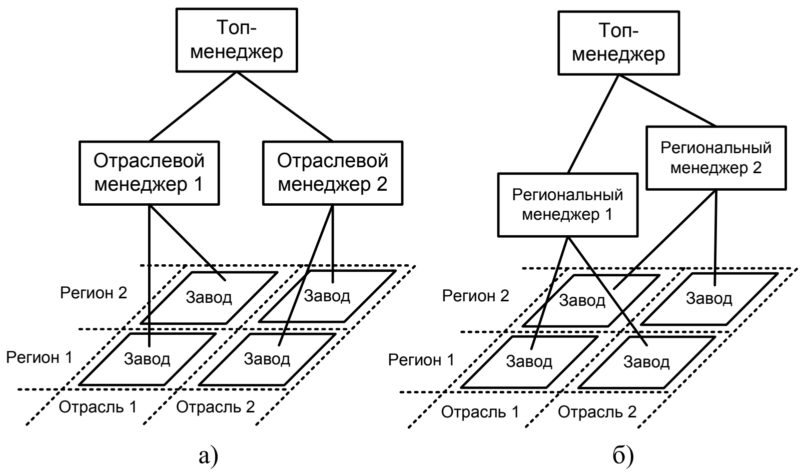


Рис. 4.3. U-иерархия (*а*) *и М-иерархия* (*б*)

Над множеством заводов надстраивается иерархия менеджеров, задача которых состоит в борьбе с отрицательным влиянием случайных факторов, находящихся в их зоне ответственности. Рассматриваются две возможных организационных иерархии – U- и М-типа (см. Рис. 4.3). В U-организации топ-менеджер занимается общеэкономическими факторами. Ему подчинены два менеджера, отвечающих за отдельную отрасль. Каждому из этих менеджеров подчинены два директора заводов, относящихся к этой отрасли. Усилия директоров направлены на борьбу с региональными факторами, влияющими на подчиненные им заводы. В М-организации менеджеры среднего звена отвечают не за отрасль, а за регион, и, соответственно, директора заводов борются уже не с региональными, а с отраслевыми факторами.

Авторы [38] показывают, что если суммарные объемы выпуска по регионам взаимосвязаны сильнее, чем суммарные выпуски по отраслям, то менеджерам М-организации можно предложить более эффективные вознаграждения, и М-организация будет выгоднее U-организации с точки зрения приносимой ею прибыли.

Рассмотренные в настоящем разделе модели сравнивают между собой очень небольшое число простых иерархий. Это связано с громоздкостью и трудоемкостью анализа задач мотивации в условиях неопределенности. Выше в разделе 2.4 описывается теоретико-игровая модель формирования иерархии, позволяющая исследовать организации, состоящие из произвольного количества сотрудников и изучать сложные организационные иерархии. Модель не накладывает ограничений на вид целевых функций и потому позволяет описывать широкий класс прикладных задач.

Итак, теоретико-игровой анализ задачи формирования организационной иерархии показывает, что:

- вид организационной структуры оказывает существенное влияние на интересы составляющих ее менеджеров и на принимаемые ими решения,
- оптимальная структура существенно зависит от эффективности стимулов, которые могут быть обеспечены менеджерам,
- эффективность стимулов, в свою очередь, зависит от уровня неопределенности и от возможностей мониторинга работы менеджеров,
- как правило, децентрализация права заключения контрактов уменьшает эффективность функционирования организации, хотя в ряде случаев подобного снижения эффективности удается избежать.

4.2. *Базовая модель иерархии управления*

Проведенный обзор показывает, что на данный момент отсутствует единая математическая модель формирования организационных иерархий, и имеющиеся подходы существенно отличаются друг от друга определениями самого понятия иерархии, обоснованием ее роли в функционировании организации, а также используемым математическим аппаратом. Существенно различаются и выводы относительно вида рациональных организационных структур и закономерностей их формирования.

На данном этапе развития теории одной из перспективных задач представляется разработка общих, не привязанных к конкретной содержательной интерпретации, моделей и методов формирования рациональных иерархических структур, которые позволяли бы описывать широкий класс прикладных задач.

В базовой модели, рассматриваемой в настоящем разделе, определяется иерархия, управляющая множеством исполнителей. Затраты менеджера иерархии зависят от потоков между теми исполнителями, которыми управляет менеджер. Приводятся примеры, показывающие, что подобная функция затрат может описывать ряд эффектов, имеющих место на практике – в реальных организациях. Функция затрат позволяет сравнивать иерархии друг с другом. Если функция соответствует реальной организации, то можно рассчитать затраты нескольких «типичных» вариантов иерархии и определить наилучший вариант. Однако гораздо важнее, что при наличии функции затрат можно поставить задачу поиска оптимальной иерархии, имеющей минимальные затраты среди всего множества иерархических структур, управляющих заданным множеством исполнителей. Затраты оптимальной иерархии могут быть значительно ниже затрат «типичных» вариантов. Поэтому весьма важно найти оптимальную иерархию. Несмотря на большую сложность этой задачи, в ряде случае ее удается решить (см. ниже).

В частности, находится оптимальная иерархия над симметричной производственной линией, а также неформально рассматривается модель сравнения дивизиональной, функциональной и матричной иерархии, описанная в работе [10]. Более сложные постановки в рамках базовой модели не исследуются, поскольку удобнее исследовать сразу общую модель (см. раздел 4.3).

4.2.1. Иерархии управления технологической сетью

Пусть $N = \{w_1, \ldots, w_n\}$ – множество *исполнителей*, которые могут взаимодействовать друг с другом. Через w_{env} будем обозначать *внешнюю среду*, взаимодействующую с исполнителями. Иногда исполнители будут обозначаться через $w, w', w'' \in N$.

Функцией потока назовем следующую функцию:

(1) $f : (N \cup \{w_{env}\}) \times (N \cup \{w_{env}\}) \to R_+^p$,

то есть для каждой пары исполнителей $w', w'' \in N$ вектор $f(w', w'')$ определяет *интенсивность потоков* между w' и w''. Этот вектор содержит p неотрицательных компонент. Каждая компонента определяет интенсивность одного типа взаимодействия исполнителей (материальный, информационный или прочий тип потока). Таким образом, технология взаимодействия исполнителей определяет функцию потока f или взвешенную *технологическую сеть* (N, f).

В работе технологическая сеть считается *неориентированной*, поскольку в рассматриваемой модели направление потока не играет роли ($\forall w', w'' \in N \quad f(w', w'') = f(w'', w')$).

Будем говорить, что между парой исполнителей отсутствует *связь* тогда и только тогда, когда поток между исполнителями нулевой. Предполагаем, что сеть не содержит петель, то есть для любого исполнителя w выполнено $f(w, w) = 0$.

Рассмотрим пример. Пусть $N = \{w_1, w_2, w_3\}$ и $p = 1$, то есть имеются трое исполнителей и потоки одного типа. Будем считать, что в технологической сети имеются четыре связи $f(w_{env}, w_1) = \lambda$, $f(w_1, w_2) = \lambda$, $f(w_2, w_3) = \lambda$, $f(w_3, w_{env}) = \lambda$, где λ – вектор интенсивности потоков. Эта технологическая сеть изображена на Рис. 4.4. Данный пример может соответствовать производственной линии («бизнес-процессу»). Исполнитель w_1 принимает сырье от поставщика, проводит первичную обработку и передает результат исполнителю w_2. Тот выполняет очередную технологическую операцию и передает результат далее. Последний исполнитель (в примере – w_3), выполнив последнюю технологическую операцию, отгружает продукцию потребителю.

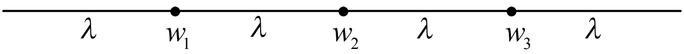


Рис. 4.4. Симметричная производственная линия

Сеть с исполнителями $N = \{w_1, \ldots, w_n\}$ и потоками $f(w_{env}, w_1) = \lambda$, $f(w_{i-1}, w_i) = \lambda$ для всех $2 \le i \le n$, $f(w_n, w_{env}) = \lambda$ будем ниже называть *симметричной производственной линией*[1], а λ – *интенсивностью линии*.

Обозначим через M конечное множество *менеджеров*, управляющих взаимодействием исполнителей. Менеджеры обычно будут обозначаться через $m, m', m'', m_1, m_2, \ldots \in M$.

Пусть $V = N \cup M$ – все множество *сотрудников* организации (исполнителей и менеджеров). Рассмотрим множество *ребер подчиненности* $E \subseteq V \times M$. Ребро $(v, m) \in E$ означает, что сотрудник $v \in V$ является *непосредственным подчиненным* менеджера $m \in M$, а m – *непосредственным начальником* сотрудника v. Таким образом, ребро направлено от непосредственного подчиненного к его непосредственному начальнику.

Сотрудник $v \in V$ является *подчиненным* менеджера $m \in M$ (менеджер m является *начальником* сотрудника v), если существует цепочка ребер подчиненности из v в m. Будем также говорить, что начальник *управляет* подчиненным, или подчиненный *управляется* начальником. Дадим строгое определение иерархии.

Определение 4.1. *Ориентированный граф* $H = (N \cup M, E)$ *с множеством менеджеров M и множеством ребер подчиненности* $E \subseteq (N \cup M) \times M$ *назовем* ***иерархией****, управляющей множеством исполнителей N, если граф H ацикличен, любой менеджер имеет подчиненных и найдется менеджер, которому подчинены все исполнители. Через* $\Omega(N)$ *обозначим множество всех иерархий.*

Ацикличность означает, что не существует «порочного круга» подчиненности, в котором каждый менеджер является одновременно и начальником, и подчиненным всех остальных. Определение 4.1 также исключает ситуации, в которых имеются «менеджеры» без

[1] *Все остальные потоки подразумеваются равными нулю.*

подчиненных, так как это противоречит роли менеджера, который должен управлять некоторыми сотрудниками.

Существование менеджера, которому подчинены все исполнители, означает, что у любого множества исполнителей найдется общий начальник, то есть иерархия способна управлять взаимодействием всех исполнителей.

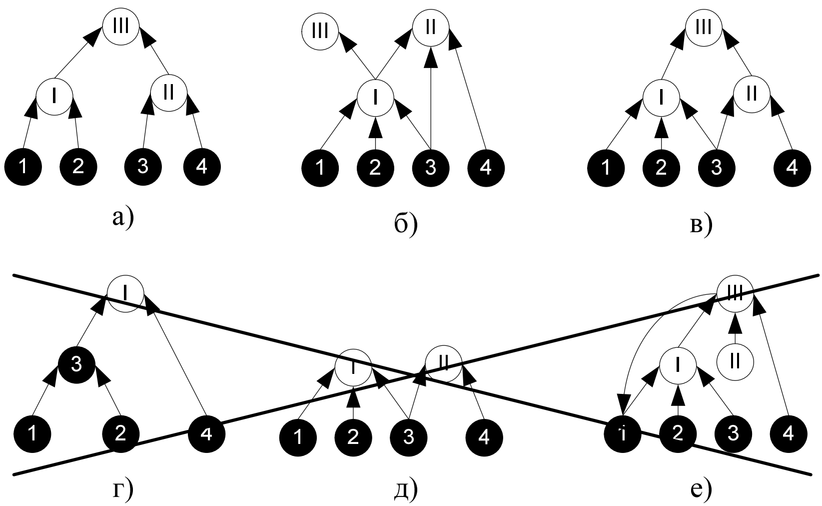


Рис. 4.5. К определению иерархии

Рис. 4.5 иллюстрирует введенное определение. Исполнители на нем изображены темными кружками и пронумерованы арабскими цифрами, а менеджеры изображены светлыми кружками и пронумерованы латинскими цифрами. Графы а)-в) являются иерархиями, управляющими множеством исполнителей $N = \{1, \ldots, 4\}$. Определенные таким образом иерархии позволяют описывать часто встречающиеся в практике управления эффекты, например, межуровневое взаимодействие, когда менеджер непосредственно управляет и другими менеджерами, и исполнителями (менеджер II иерархии б), а также множественное подчинение, когда сотрудник имеет более одного непосредственного начальника (менеджер I в иерархии б), исполнитель 3 в иерархии в). Определение 4.1 иерархии допускает наличие в ней нескольких менеджеров, не имеющих начальников (менеджеры II и III иерархии б), а также менеджеров, имеющих единственного непосредственного подчиненного (менеджер III иерархии б).

В то же время, графы г)-е) иерархиями не являются. В графе г) исполнитель с номером 3 имеет подчиненных, в графе д) нет топ-менеджера, который управлял бы всеми исполнителями, в графе е) менеджер II не имеет подчиненных, кроме того, этот граф содержит цикл 1→I→III→1.

Для определения затрат менеджера необходимо формализовать его «роль» в организации (обязанности, объем выполняемой работы и т.п.). Считаем, что «роль» менеджера определяется теми исполнителями, которыми управляет менеджер. Ниже введено соответствующее определение группы, управляемой менеджером.

Группой исполнителей $s \subseteq N$ назовем любое непустое подмножество множества исполнителей.

По определению 4.1 в любой иерархии H каждый менеджер имеет, по крайней мере, одного непосредственного подчиненного. Начав с любого менеджера m, мы можем двигаться по иерархии «сверху вниз» к подчиненным менеджера m. В итоге можно определить множество исполнителей, подчиненных менеджеру m. Будем называть это множество *подчиненной группой исполнителей* и обозначать $s_H(m) \subseteq N$. Будем также говорить, что менеджер m *управляет группой исполнителей* $s_H(m)$. Ниже в обозначении группы $s_H(m)$ будем опускать нижний индекс, если ясно, о какой иерархии идет речь. Также будем считать, что исполнитель $w \in N$ «управляет» простейшей группой $s_H(w)=\{w\}$, состоящей из него самого.

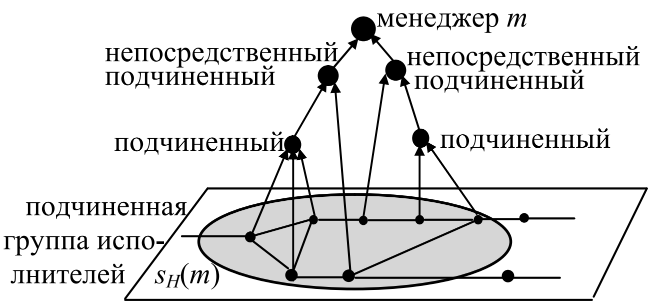


Рис. 4.6. Менеджер и подчиненная ему группа исполнителей

На Рис. 4.6 плоскость соответствует технологической сети, над которой надстраивается иерархия. Над плоскостью изображена часть иерархии, подчиненная менеджеру m. Она состоит из непосредственных подчиненных менеджера m и подчиненных, которыми менеджер m не управляет непосредственно. Подчиненная группа исполнителей $s_H(m)$ обведена на рисунке эллипсом.

Сформулируем простую лемму [10], необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма 4.1. *Для любой иерархии H и любого менеджера $m \in M$ выполнено $s_H(m) = s_H(v_1) \cup \ldots \cup s_H(v_k)$, где $v_1, \ldots, v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m. Для любого подчиненного v менеджера m выполнено $s_H(v) \subseteq s_H(m)$.*

Проиллюстрируем результат леммы на примере. На Рис. 4.6 а) менеджеру m непосредственно подчинены менеджеры m_1 и m_2. Менеджеру m подчинена группа $s(m)=\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Менеджерам m_1 и m_2 подчинены группы $s(m_1)=\{w_1, w_2\}$ и $s(m_2)=\{w_3, w_4\}$ соответственно. Таким образом, группа $s(m)$ разбивается на две подгруппы $s(m_1)$ и $s(m_2)$: $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}=\{w_1, w_2\}\cup\{w_3, w_4\}$. В данном примере подгруппы не пересекаются. В общем случае, как показано на Рис. 4.6 б), пересечения могут иметь место.

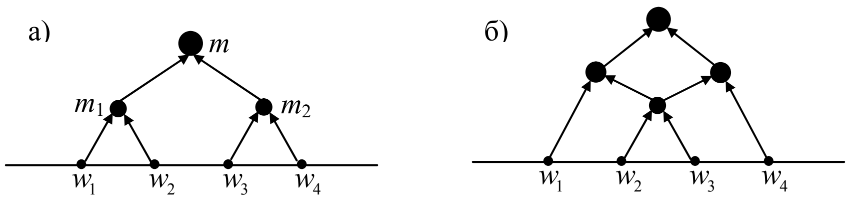


Рис. 4.7. Примеры иерархий над производственной линией

Определим несколько частных видов иерархии и введем важное понятие нормы управляемости.

Определение 4.2. *Иерархию назовем **деревом**, если в ней только один менеджер m не имеет начальников, а все остальные сотрудники имеют ровно одного непосредственного начальника. Менеджера m будем называть корнем дерева.*

На Рис. 4.7 а) изображен пример дерева. Напротив, иерархия б) деревом не является, так как в ней один менеджер имеет двух непосредственных начальников. Сформулируем еще одну простую лемму [10].

Лемма 4.2. *Пусть в иерархии H только один менеджер не имеет начальников. Иерархия H будет деревом тогда и только тогда, когда непосредственные подчиненные любого менеджера управляют непересекающимися группами исполнителей*.

Таким образом, при наличии единственного менеджера без начальников в дереве и только в нем непосредственные подчиненные любого менеджера не «дублируют» обязанности друг друга, то есть не управляют одним и тем же исполнителем.

Определение 4.3. *Иерархию назовем **r-иерархией**, если у каждого ее менеджера не более r непосредственных подчиненных, где* $r > 1$ *– целое число. r-иерархию, которая является деревом, назовем **r-деревом***.

В литературе по менеджменту часто используется термин «*норма управляемости*» – максимальное количество непосредственных подчиненных, которыми может управлять один менеджер. Определение r-иерархии соответствует норме управляемости, равной r. В силу леммы 4.2 в дереве норма управляемости не превосходит n. Максимальную среди всех деревьев норму управляемости имеет *двухуровневая иерархия*, в которой одному менеджеру непосредственно подчинены все исполнители.

Определение 4.4 [2]. ***Двухуровневой* (*веерной*) *иерархией*** называется иерархия с единственным менеджером, который непосредственно управляет всеми исполнителями.

Определение 4.5 [2]. ***Последовательной иерархией*** называется 2-иерархия, в которой каждый менеджер непосредственно управляет, как минимум, одним исполнителем.

4.2.2. Управленческие затраты и оптимальная иерархия

В рассматриваемой базовой модели затраты менеджера зависят от потоков технологической сети. Для определения потоков, в управлении которыми задействован менеджер, приведем некоторые пояснения.

На практике в отдельные моменты времени поток между исполнителями изменяется, но в среднем за достаточно большой промежуток времени (например, за месяц или за год) предполагаем поток неизменным. То есть, считаем, что технологическая сеть (множество N и функция f) задана и неизменна. Для того чтобы требуемая величина потока действительно реализовалась, необходимо постоянное управление взаимодействием исполнителей.

Каждый менеджер управляет потоками между подчиненными исполнителями. Одна из интерпретаций работы менеджера – управление реализацией *планов*. Топ-менеджеры формулируют оперативный план, который необходимо реализовать. Например, план может включать дневной или недельный объем продаж и закупок, то есть потоки между исполнителями и внешней средой. В процессе уточнения плана менеджеры на каждом уровне детализируют те его части, за которые они ответственны. Например, для обеспечения объема продаж, запланированного топ-менеджером, директор по производству может планировать соответствующие производственные потоки. После уточнения на всех уровнях детализированный план реализуется исполнителями. При этом каждый менеджер отслеживает реализацию своих планов. Таким образом, менеджер управляет некоторыми потоками в технологической сети (например, планирует эти потоки, а также контролирует выполнение планов). Приведем пример, поясняющий, в управлении какими потоками задействован менеджер.

Предположим, что в иерархии, изображенной на Рис. 4.8, в результате конфликта между исполнителями w_2 и w_3 фактический поток между w_2 и w_3 меньше необходимой величины потока $f(w_2, w_3)$. Исполнитель w_2 сообщает своему непосредственному начальнику m_1, что у него возникли проблемы. Менеджер m_1 не в состоянии разрешить конфликт, так как исполнитель w_3 ему не подчинен. Аналогично, менеджер m_2 не в состоянии самостоятельно справиться с конфликтом, о котором ему сообщил исполнитель w_3. В итоге менеджеры m_1 и m_2 сообщат о конфликте своему непосредственному начальнику m, который и примет решение, ликвидирующее конфликт. Это решение менеджеры m_1 и m_2 передадут соответственно исполнителям w_2 и w_3. Аналогично можно рассмотреть планирование потока $f(w_2, w_3)$. Менеджер m передает план потока $f(w_2, w_3)$ менеджерам m_1 и m_2, которые доводят план до исполнителей w_2 и w_3 соответственно. Факт выполнения плана доводится до менеджера m в обратном порядке.

Таким образом, в управлении потоком $f(w_2, w_3)$ задействованы менеджеры m_1, m_2 и m. В управлении потоком $f(w_1, w_2)$ задействован только менеджер m_1, так как он самостоятельно принимает все решения, связанные с потоком $f(w_1, w_2)$. Аналогично, в управлении потоком $f(w_3, w_4)$ задействован только менеджер m_2.

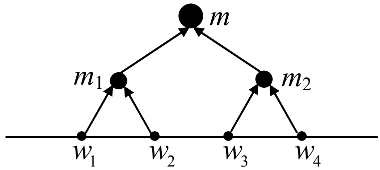


Рис. 4.8. Дерево управления производственной линией

В управлении внешним потоком $f(w_{env}, w_1)$ участвуют менеджеры m_1 и m. Например, план закупок определяется менеджером m, уточняется менеджером m_1 и передается исполнителю w_1. Аналогично, в управлении внешним потоком $f(w_4, w_{env})$ участвуют менеджеры m_2 и m. Можно выписать сумму потоков, с которыми имеет дело каждый из менеджеров при управлении исполнителями:

m_1: $f(w_1, w_2)+ (f(w_{env}, w_1) + f(w_2, w_3))$,

m_2: $f(w_3, w_4) + (f(w_2, w_3) + f(w_4, w_{env}))$,

m: $f(w_2, w_3) + (f(w_{env}, w_1) + f(w_4, w_{env}))$.

Из примера видно, что любой менеджер выполняет обязанности двух типов:

1. Управляет теми потоками внутри подчиненной группы, которые не управляются подчиненными менеджерами. Например, на Рис. 4.8 менеджер m управляет потоком $f(w_2, w_3)$.

2. Участвует в управлении потоками между подчиненной группой и всеми остальными исполнителями, внешней средой. Эта компонента потока указана в приведенных выше выражениях в скобках. Например, на Рис. 4.8 менеджер m_1 участвует в управлении потоками $f(w_{env}, w_1)$ и $f(w_2, w_3)$.

Введем формальное определение обязанностей менеджера.

Определение 4.6. *В иерархии $H \in \Omega(N)$ менеджер m выполняет* ***обязанности*** *двух типов*:

1. *Управляет потоками $f(w', w'')$ между подчиненными исполнителями $w', w'' \in s_H(m)$, которые не управляются ни одним подчиненным менеджера m. Сумму таких потоков* ***назовем внутренним потоком*** *менеджера m и обозначим $F_H^{\text{int}}(m)$*;

2. *Участвует в управлении потоками* $f(w', w'')$ *между подчиненным исполнителем* $w' \in s_H(m)$ *и неподчиненным исполнителем* $w'' \in N \setminus s_H(m)$ *или внешней средой* $w'' = w_{env}$. *Сумму таких потоков назовем **внешним потоком** менеджера m и обозначим* $F_H^{ext}(m)$.

Таким образом, **менеджер управляет внутренним потоком и участвует в управлении внешним.** ***Потоком менеджера*** назовем сумму его внутренних и внешних потоков.

Из определения 4.6 следует, что внешний поток менеджера *m* равен:

(2) $$F_H^{ext}(m) = \sum_{\substack{w' \in s_H(m), \\ w'' \in (N \setminus s_H(m)) \cup \{w_{env}\}}} f(w', w'').$$

Величина внутреннего потока определяется следующей леммой.

Лемма 4.3 [10]. *Пусть* $v_1, \ldots, v_k$ *– все непосредственные подчиненные менеджера m в иерархии H. Тогда внутренний поток менеджера m равен*

(3) $$F_H^{\text{int}}(m) = \sum_{\substack{\{w', w''\} \subseteq s_H(m), \\ \{w', w''\} \not\subset s_H(v_j) \text{ для всех } 1 \le j \le k}} f(w', w'').$$

Таким образом, при суммировании потоков $f(w', w'')$ внутри группы $s_H(m)$ достаточно проверить, чтобы поток не входил в группы, управляемые непосредственными подчиненными. В этом и только в этом случае поток не будет управляться ни одним подчиненным менеджера, то есть будет входить в его внутренний поток.

Получим, что при заданных *N* и *f* внутренний и внешний поток менеджера *m* зависит только от $s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)$, то есть от групп исполнителей, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера *m*.

По определению 4.1 в любой иерархии *H* найдется менеджер *m*, управляющий всеми исполнителями (топ-менеджер). Поэтому **каждый поток внутри технологической сети управляется либо топ-менеджером, либо его подчиненными**. Таким образом, любая иерархия обеспечивает управление всеми потоками.

Однако в различных иерархиях различается количество менеджеров и «нагрузка» каждого из менеджеров. Поэтому из всего множества иерархий $\Omega(N)$ необходимо выбрать «наилучшую» иерархию. Определим критерий оптимальности. А именно, в базовой модели будем считать, что затраты менеджера зависят только от суммы потоков, которыми он управляет, и в управлении которыми он участвует. Сформулируем строгое определение.

Определение 4.7. ***Затратами менеджера*** $m \in M$ *в иерархии* $H \in \Omega(N)$ *назовем величину*:

(4) $c(s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)) = \varphi(F_H^{\text{int}}(m) + F_H^{ext}(m))$,

где $v_1, \ldots, v_k$ *– все непосредственные подчиненные менеджера* m, $s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)$ *– управляемые ими группы*, $\varphi : R_+^p \to R_+$ *– монотонно неубывающая по всем переменным функция, ставящая в соответствие вектору* $F_H^{\text{int}}(m) + F_H^{ext}(m)$ *потока затраты менеджера*.

Суммарные затраты всей иерархии складываются из затрат менеджеров. Оптимальной будет та иерархия, которая минимизирует суммарные затраты. Дадим строгое определение.

Определение 4.8. ***Затратами иерархии*** $H = (N \cup M, E) \in \Omega(N)$ *назовем сумму затрат всех ее менеджеров*[1]:

(5) $c(H) = \sum_{m \in M} c(s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)) = \sum_{m \in M} \varphi(F_H^{\text{int}}(m) + F_H^{ext}(m))$,

где $v_1, \ldots, v_k$ *– все непосредственные подчиненные менеджера* m. ***Оптимальной иерархией*** *назовем иерархию* H^*, *затраты которой минимальны* $H^* \in \operatorname{Arg}\min\limits_{H \in \Omega} c(H)$.

Оптимальных иерархий может быть несколько. **Ниже мы будем решать задачу поиска одной из оптимальных иерархий**. При этом множество исполнителей N предполагается известным. Необходимо найти иерархию (то есть определить количество менеджеров и их подчиненность) из $\Omega(N)$, минимизирующую затраты на управление исполнителями.

Считаем, что после нахождения оптимальной иерархии можно принять на работу менеджеров, которые будут выполнять свои обязанности, если им компенсировать их затраты (например, выплачивать зарплату). Разумеется, для этого необходима полная инфор-

---

[1] *В выражении (5) и ниже одной и той же буквой* $c(\cdot)$ *обозначается и функция затрат иерархии, и функция затрат менеджера.*

мация о функции затрат. При наличии такой информации в работе [11] построен простой механизм стимулирования, обеспечивающий минимальные выплаты, равные затратам. Также в указанной работе рассмотрены некоторые механизмы стимулирования при неполной информации.

Ниже функция $c(\cdot)$ затрат менеджера предполагается известной[1]. Эта функция может определяться непосредственно по данным о затратах менеджеров. Кроме того, можно рассматривать некоторые «типичные» функции затрат (например, ниже исследуется степенная функция). При этом подбираются параметры, при которых значения функции в наибольшей степени соответствуют реальным затратам менеджеров[2].

Очевидно, что даже в простейших случаях отыскание оптимальной иерархии методом перебора вариантов требует больших вычислительных затрат (см. ниже). Ниже будут изложены методы, которые при определенных ограничениях позволяют найти оптимальную иерархию, либо сузить множество иерархий, в котором содержится оптимальная.

Утверждение 4.1 [10]. *Для любой иерархии* $H_1 \in \Omega(N)$ *найдется иерархия* $H_2 \in \Omega(N)$, *имеющая не бóльшие затраты* ($c(H_2) \le c(H_1)$), *и удовлетворяющая следующим свойствам*:

(i) *все сотрудники управляют различными группами исполнителей*;

(ii) *только один менеджер не имеет начальников. Этому менеджеру подчинены все остальные менеджеры и все исполнители*;

(iii) *среди сотрудников*, *непосредственно подчиненных одному менеджеру*, *ни один не управляет другим*.

Если H_1 – *r-иерархия*, *дерево или r-дерево*, *то и* H_2 *будет соответственно r-иерархией*, *деревом или r-деревом*.

---

[1] *Затраты могут включать не только зарплату менеджера, но и затраты на организацию его работы – рабочее место, обслуживающий персонал и т.д.*

[2] *Затраты могут измеряться, например, в денежном эквиваленте приложенных усилий, исходя из средней заработной платы менеджеров на соответствующих позициях.*

Доказательство утверждения 4.1 основано на последовательном перестроении H_1 без увеличения затрат. В итоге перестроений получаем иерархию H_2, которая удовлетворяет условиям (i)-(iii). Для r-иерархии, дерева и r-дерева перестроения не изменяют вида иерархии. Утверждение 4.1 остается верным не только для затрат базовой модели, но и для большинства секционных функций (см. ниже).

Условие (i) означает отсутствие полного дублирования, при котором два менеджера управляют одной и той же группой исполнителей. На Рис. 4.9 а) приведен пример подобного дублирования. Два менеджера управляют одной и той же группой $\{w_1, w_2, w_3\}$. При этом один них может быть удален, а всем его непосредственным начальникам можно подчинить другого менеджера без увеличения затрат. В частности, из условия (i) следует, что **у любого менеджера имеется не менее двух непосредственных подчиненных** (иначе в силу леммы 4.1 он управлял бы той же группой, что и его единственный непосредственный подчиненный).

В соответствии с условием (ii) найдется только один менеджер m, который не имеет начальников. Этому менеджеру подчинены все исполнители ($s_{H_2}(m) = N$) и все остальные менеджеры иерархии. Будем называть m *высшим* (*топ*) *менеджером*.

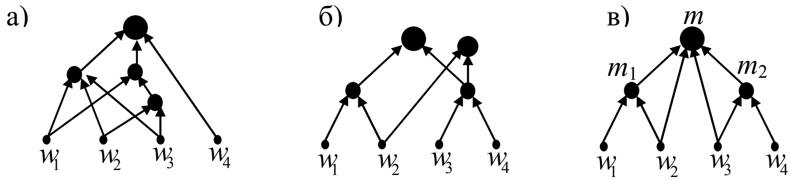


Рис. 4.9. Иерархии а)-в) нарушают свойства (i)-(iii) соответственно

Условие (ii) соответствует практике построения организаций, при которой только один высший менеджер может принимать решения, обязательные для всех сотрудников (например, может разрешить конфликт между любыми сотрудниками). На Рис. 4.9 б) приведен пример, в котором два менеджера не имеют начальников, то есть нарушается условие (ii). Очевидно, что «лишний» менеджер может быть удален без увеличения затрат иерархии.

Условие (iii) можно интерпретировать следующим образом. Пусть менеджер m_1 непосредственно подчинен менеджеру m. Тогда m непосредственно не управляет подчиненными менеджера m_1. Это соответствует «нормальному» функционированию организации, при котором менеджер управляет всеми подчиненными сотрудниками через непосредственных подчиненных, а не напрямую. На Рис. 4.9 в) приведен пример, в котором высший менеджер m непосредственно управляет исполнителями w_2 и w_3, несмотря на то, что ими уже управляют непосредственные подчиненные m_1 и m_2 менеджера m. Ребра (w_2, m) и (w_3, m) могут быть удалены без увеличения затрат иерархии.

Из утверждения 4.1 следует, что найдется оптимальная иерархия, удовлетворяющая условиям (i)-(iii)[1]. Этот факт позволяет в ряде случаев значительно упростить задачу поиска оптимальной иерархии, поскольку можно не рассматривать иерархии, нарушающие хотя бы одно из условий (i)-(iii).

Кроме того, утверждение 4.1 позволяет доказать следующий факт. **Если существует оптимальная *r*-иерархия, дерево или *r*-дерево, то существует оптимальная иерархия соответствующего вида, удовлетворяющая условиям (i)-(iii).**

Рассмотрим условие, при котором простейшая двухуровневая иерархия оптимальна в рамках базовой модели.

Утверждение 4.2 [10]. *Пусть функция затрат* $\varphi(\cdot)$ *субаддитивна, то есть для всех* $x, y \in R_+^p$ *выполнено неравенство* $\varphi(x + y) \le \varphi(x) + \varphi(y)$. *Тогда оптимальна двухуровневая иерархия.*

Условие субаддитивности означает, что затраты $\varphi(x + y)$ одного менеджера на управление суммарным потоком $x + y$ не больше, чем затраты двух менеджеров на управление частями этого потока x и y. В этом случае оптимальна простейшая двухуровневая иерархия, в которой все потоки управляются одним менеджером.

Из утверждения 4.2 следует, что **вогнутость функции затрат влечет оптимальность двухуровневой иерархии**, если все потоки

---

[1] *Если в качестве H_1 рассмотреть оптимальную иерархию, то по утверждению 4.1 иерархия H_2 удовлетворяет условиям (i)-(iii) и имеет не бóльшие затраты. Следовательно, H_2 – оптимальная иерархия.*

технологической сети однотипны (то есть вектор потока содержит одну компоненту).

В небольших организациях весьма распространены двухуровневые иерархии (так называемые «простые структуры» [8]). При росте организации единственный менеджер чрезмерно загружен, что вынуждает его принимать на работу «помощников» – переходить к многоуровневой иерархии. Модель позволяет описать этот эффект: ниже для выпуклой функции затрат найден вид оптимальной иерархии, управляющей симметричной производственной линией, и доказано, что в достаточно большой организации оптимальная иерархия будет многоуровневой.

4.2.3. Примеры

Пример 4.1. Снижение затрат при множественном подчинении для несимметричной линии. Пусть в несимметричной производственной линии имеется четыре исполнителя и потоки $f(w_{env}, w_1) = 3$, $f(w_1, w_2) = 1$, $f(w_2, w_3) = 5$, $f(w_3, w_4) = 1$, $f(w_4, w_{env}) = 3$. Рассмотрим следующую функцию затрат менеджера: $\varphi(x) = x^3$ (x – величина потока менеджера) – см. выражение (4). Оптимальная иерархия для этого примера изображена на Рис. 4.10. Обозначим ее через H. У менеджера m_1 два непосредственных начальника, то есть в оптимальной иерархии имеет место множественное подчинение.

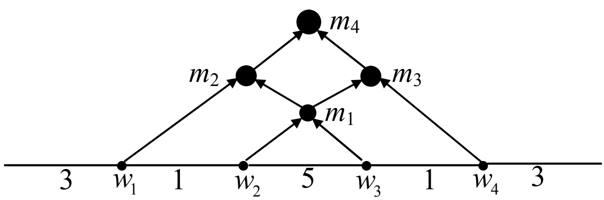


Рис. 4.10. Пример оптимальной иерархии, управляющей несимметричной производственной линией

Определим потоки каждого менеджера:

m_1: $c(\{w_2\}, \{w_3\}) = \varphi[F_H^{\text{int}}(m_1) + (F_H^{ext}(m_1))] = [5 + (1+1)]^3 = 343$;

m_2: $c(\{w_1\}, \{w_2, w_3\}) = \varphi[F_H^{\text{int}}(m_2) + (F_H^{ext}(m_2))] = [1 + (3+1)]^3 = 125$;

m_3: $c(\{w_4\}, \{w_2, w_3\}) = \varphi[F_H^{\text{int}}(m_3) + (F_H^{ext}(m_3))] = [1 + (1+3)]^3 = 125$;

m_4: $(\{w_1, w_2, w_3\}, \{w_2, w_3, w_4\}) = \varphi[F_H^{\text{int}}(m_4) + (F_H^{ext}(m_4))] = [0+(3+3)]^3 = 216$.

Таким образом, затраты всей иерархии составят:

$c(H) = c(\{w_2\}, \{w_3\}) + c(\{w_1\}, \{w_2, w_3\}) + c(\{w_4\}, \{w_2, w_3\}) +$
$+c(\{w_1, w_2, w_3\}, \{w_2, w_3, w_4\}) = 343 + 125 + 125 + 216 = 809.$

Убедимся, что найденные затраты являются минимально возможными. Пусть H^* – оптимальная иерархия, удовлетворяющая условиям (i)-(iii) утверждения 4.1. В H^* должен быть хотя бы один менеджер m нижнего уровня, которому не подчинены другие менеджеры.

Если m управляет тремя или более исполнителями, то величина потока m не менее 10. Таким образом, затраты m не менее 1000, что больше, чем $c(H) = 809$. Следовательно, m управляет ровно двумя исполнителями.

Если m управляет двумя исполнителями, идущими в производственной линии не подряд (например, w_1 и w_3), то $F_{H^*}^{\text{int}}(m) = 0$, то есть m не управляет ни одним внутренним потоком, а лишь участвует в управлении внешними. Тогда можно удалить менеджера m, подчинив исполнителей из $s_{H^*}(m)$ непосредственным начальникам m, причем их затраты не изменятся, что противоречит оптимальности H^*. Таким образом, менеджеру m могут быть подчинены только два исполнителя, идущие в линии подряд.

Если менеджеру m подчинены исполнители w_1 и w_2 (или w_3 и w_4), то его затраты составляют $9^3 = 729$. Кроме того, высший менеджер по крайней мере участвует в управлении внешними потоками, следовательно его затраты не менее $6^3 = 216$. То есть в этом случае $c(H^*) > 729 + 216 = 945$, что противоречит оптимальности H^*. Таким образом, в H^* имеется ровно один менеджер m нижнего уровня. Менеджер m управляет исполнителями w_2 и w_3, то есть наибольшим потоком $f(w_2, w_3) = 5$.

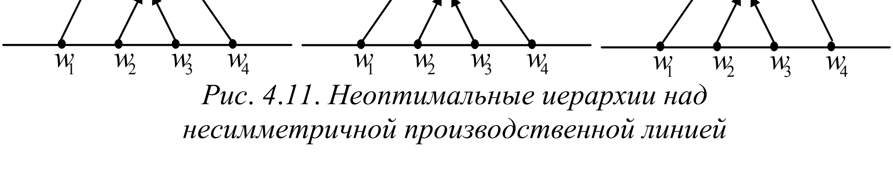


Рис. 4.11. Неоптимальные иерархии над несимметричной производственной линией

Рассматриваемый пример иллюстрирует общее правило: **потоки наибольшей интенсивности должны управляться на нижних уровнях иерархии**. Это правило отмечается во многих работах по менеджменту на основании опыта исследования реальных организаций (см., например, [8]). В примере рассмотрен предельный случай, в котором для управления наибольшим потоком специально должен быть выделен менеджер нижнего уровня.

Так как m – единственный менеджер нижнего уровня, то он подчинен всем остальным менеджерам иерархии[1]. Тогда исполнители w_2 и w_3 непосредственно подчинены только менеджеру m, так как иначе нарушается условие (iii) утверждения 4.1. То есть, после назначения менеджера m оптимальная иерархия H^* надстраивается над 3 сотрудниками: w_1, m, w_4. Тогда кроме иерархии H (см. Рис. 4.10) имеем три варианта иерархии, удовлетворяющие условиям (i)-(iii) утверждения 4.1. Эти иерархии изображены на Рис. 4.11.

Легко вычислить, что $c(H_1) = c(H_3) = 811$, $c(H_2) = 855$. В силу того, что $c(H) = 809$ все иерархии на Рис. 4.11 неоптимальны, следовательно, $H = H^*$ – единственная оптимальная иерархия[2].

Одним из интересных вопросов является оптимальность древовидной иерархии, которая встречается в реальных организациях наиболее часто. Пример 4.1 показывает, что в некоторых ситуациях ни одно из деревьев не оптимально, то есть **среди деревьев может не быть оптимальных иерархий**. Ниже оптимальность древовидной иерархии доказана для симметричной производственной линии. Кроме того, в общей модели найдено достаточное условие оптимальности древовидной иерархии. В этих условиях найти оптимальную иерархию позволяют алгоритмы поиска дерева с минимальными затратами [2].

<u>Пример 4.2.</u> Снижение управленческих затрат при росте организации. Рассмотрим несимметричную производственную линию из четырех исполнителей с потоками $f(w_{env}, w_1) = 1$, $f(w_1, w_2) = 5$,

---

[1] *Каждому отличному от m менеджеру m' непосредственно подчинен некоторый менеджер m'' (иначе m' – менеджер нижнего уровня, то есть $m' = m$). Если $m'' \neq m$, то можно повторить рассуждения. В итоге дойдем до m, то есть докажем его подчиненность менеджеру m'.*

[2] *Имеются в виду иерархии, удовлетворяющие условиям (i)-(iii) утверждения 4.1.*

$f(w_2, w_3) = 1$, $f(w_3, w_4) = 5$, $f(w_4, w_{env}) = 1$ и функцией затрат иерархии $\varphi(x) = x^2$ (x – величина потока менеджера). Сначала предположим, что к организации относятся только исполнители w_2 и w_3, то есть рассмотрим технологическую сеть $N = \{w_2, w_3\}$. Тогда существует только одна иерархия, удовлетворяющая условиям утверждения 4.1. Эта иерархия изображена на Рис. 4.12 а).

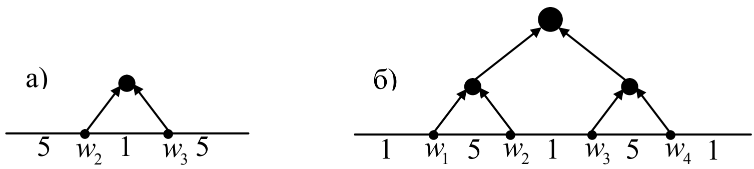


Рис. 4.12. Рост организации с одновременным снижением затрат на управление

Предположим, что мы имеем возможность расширить организацию, включив в нее еще двух исполнителей w_1 и w_4. Содержательно это можно интерпретировать следующим образом. Например, крупная компания оптовой торговли покупает фирму-производителя товара («исполнителя» w_1) и сеть розничных магазинов («исполнителя» w_4), стремясь управлять всей линией от производства до конечной реализации товаров. Большой поток $f(w_1, w_2) = 5$ может соответствовать, например, потоку информации, который связан с проблемами компании при взаимодействии с производителем (скажем из-за большого количества брака). Аналогично, большой поток $f(w_3, w_4) = 5$ может быть связан с проблемами взаимодействия с розничной сетью, например, с большим числом возвратов товара покупателями.

Таким образом, после расширения организация будет управлять технологической сетью $N = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. При этом имеется возможность перестроить иерархию управления так, как показано на Рис. 4.12 б). То есть нанять двух менеджеров нижнего уровня, которые будут ответственны за управление большими потоками. Сравним затраты иерархий:

а) $(5 + 1 + 5)^2 = 121$,

b) $(1 + 5 + 1)^2 + (1 + 5 + 1)^2 + (1 + 1 + 1)^2 = 49 + 49 + 9 = 107$.

Таким образом, затраты на управление могут снизиться при расширении технологической сети (включении новых исполнителей

– части внешней среды). Это может служить одной из причин покупки нового бизнеса, который неприбылен сам по себе, но позволяет снизить расходы на управление основным бизнесом. На практике имеется множество подобных фактов. Например, в России в 90-х годах XX века многие заводы пищевой промышленности трансформировались в вертикально интегрированные агропромышленные компании после покупки сельхозпредприятий своего региона, которые не были прибыльными, но позволяли обеспечить бесперебойную поставку дешевого сырья.

Пример 4.3. Многокомпонентные потоки. В силу утверждения 4.2 двухуровневая иерархия оптимальна при вогнутой функции затрат и однокомпонентных потоках. Покажем, что для многомерных потоков это не так. Рассмотрим двухкомпонентный поток ($p = 2$). Первая компонента соответствует материальным потокам, вторая – информационным. Предположим, что $N = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ и технологическая сеть выглядит так, как показано на Рис. 4.13.

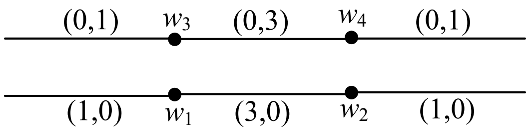


Рис. 4.13. Пример технологической сети с двухкомпонентными потоками

Исполнитель w_1 получает сырье, выполняет технологическую операцию и передает полуфабрикаты исполнителю w_2, который производит сборку готового продукта и его отгрузку клиенту. Величина потока может, например, соответствовать количеству наименований передаваемых материалов. Исполнитель w_1 получает сырье одного типа и производит из него три типа деталей. Исполнитель w_2 получает эти детали, собирает их и отгружает один тип продукта. Таким образом, внутренний поток $f(w_1,w_2)$ превосходит внешние потоки $f(w_{env}, w_1)$ и $f(w_2, w_{env})$.

Исполнитель w_4 ведет переговоры с заказчиками, готовит и заключает договора поставки продукции, учитывает оплату и отгрузку продукции и т.п.

Данные о необходимом объеме производства исполнитель w_4 передает исполнителю w_3. На основании полученных данных исполнитель w_3 размещает заказы сырья, ведет учет его поступления, обеспечивает расчеты и т.п. Также исполнитель w_3 может передавать исполнителю w_4 информацию, необходимую для расчета стоимости и срока выполнения заказа.

Внутренний поток информации $f(w_3, w_4)$ может превышать внешние потоки $f(w_{env}, w_3)$ и $f(w_4, w_{env})$, например, за счет большого количества внутренних документов.

Предположим, что функция затрат менеджера имеет вид $\varphi(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$, где (x, y) – вектор потока менеджера. Эта функция вогнута, что может соответствовать ситуации, в которой менеджеры не сильно загружены и увеличение управляемого потока снижает затраты на единицу потока. Слагаемое $\sqrt{xy}$ может соответствовать специализации менеджеров. Оно равно нулю, если менеджер управляет только потоком одного типа, например производством или документооборотом. В этом случае менеджер становится специалистом в соответствующей области и может управлять потоком с минимальными затратами. Если же менеджер вынужден управлять потоками обоих типов, то его затраты повышаются за счет снижения специализации.

На Рис. 4.14 а) изображена двухуровневая иерархия H_1. В ней поток единственного менеджера равен (5, 5), то есть затраты иерархии равны $c(H_1) = \varphi(5,5) = 2\sqrt{5} + 5$.

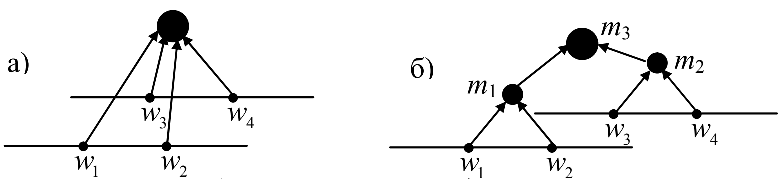


Рис. 4.14. a) – неоптимальная двухуровневая иерархия,
b) – иерархия со специализированными менеджерами m_1 и m_2

Рассмотрим иерархию H_2 с тремя менеджерами, которая изображена на Рис. 4.14 б). Менеджер m_1 управляет только производством, то есть исполнителями w_1 и w_2. Поток менеджера m_1 равен (5, 0). Затраты менеджера m_1 равны $\varphi(5, 0) = \sqrt{5}$. Аналогично, менеджер m_2 управляет только документооборотом, то есть исполнителями w_3 и w_4. Поток менеджера m_2 равен (0, 5). Затраты менеджера m_2 равны $\varphi(0, 5) = \sqrt{5}$. Высшему менеджеру m_3 подчинены менеджеры m_1 и m_2. Менеджер m_3 не вникает в детали потоков внутри технологической сети, а лишь участвует в управлении потоками между технологической сетью и внешней средой, то есть взаимоотношениями с клиентами и поставщиками. Затраты менеджера m_3 равны $\varphi(2, 2) = 2\sqrt{2} + 2$. Таким образом, $c(H_2) = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 2$.

В итоге имеем $c(H_2) < c(H_1)$, то есть **при многокомпонентных потоках за счет назначения нескольких специализированных менеджеров можно снизить затраты иерархии даже в случае вогнутой функции затрат**.

Рассмотренные примеры показывают, что в рамках построенной модели можно описывать эффекты, имеющие место в реальных организациях. Однако примеры также показывают сложность задачи поиска оптимальной иерархии. В рамках базовой модели мы опишем ниже ее решение лишь для частных случаев – симметричной производственной линии и модели дивизиональной, функциональной и матричной иерархий.

4.2.4. Оптимальная иерархия, управляющая симметричной производственной линией

Рассмотрим задачу надстройки оптимальной иерархии над симметричной производственной линией (см. Рис. 4.4), которая является простейшей технологической сетью. Вдоль линии движется некоторый поток. Например, первый исполнитель получает сырье, обрабатывает и передает полуфабрикат второму исполнителю. Аналогичным образом материальный поток движется далее вплоть до последнего исполнителя, который отгружает готовую продукцию. Сопутствующие информационные и прочие типы потоков также можно учитывать, рассматривая многокомпонентный поток ($p > 1$).

Итак, считаем, что исполнители $N = \{w_1, \ldots, w_n\}$ связаны следующей технологической сетью: $f(w_{env}, w_1) = \lambda$, $f(w_{i-1}, w_i) = \lambda$ для всех $2 \le i \le n$, $f(w_n, w_{env}) = \lambda$.

Утверждение 4.3 [10]. *Существует оптимальное дерево H, управляющее симметричной производственной линией, и обладающее следующими свойствами*:

1. *затраты H не превышают суммарных затрат любых менеджеров, управляющих всеми потоками внутри линии*[1];
2. *в H каждый менеджер управляет группой исполнителей, идущих в линии последовательно*;
3. *если функция затрат выпуклая, то у различных менеджеров H количество непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу*.

В соответствии с этим утверждением, **при поиске оптимальной иерархии можно не рассматривать недревовидные иерархии, ограничиваясь классом деревьев**. В то же время, приведенный выше пример Пример 4.1 показывает, что утверждение 4.3 не верно для несимметричной линии.

Согласно утверждению 4.3 затраты дерева *H* не превышают затрат любых менеджеров, управляющих всеми потоками симметричной производственной линии. Таким образом **затраты оптимального дерева, управляющего симметричной производственной линией, не превышают затрат любой структуры без централизованного управления**.

Поясним первый пункт утверждения 4.3. Заметим, что менеджеры любой иерархии из $\Omega(N)$ управляют всеми потоками внутри любой технологической сети. Однако управлять всеми потоками могут также менеджеры графа, состоящего из нескольких иерархий, каждая из которых управляет частью производственной линии. Например, на Рис. 4.15 изображена структура без централизованного управления. В ней менеджеры m_1 и m_2 управляют различными частями линии, однако над m_1 и m_2 нет общего начальника. Подобные структуры без централизованного управления редко используются на практике, поскольку в них нет единого менеджера, уполно-

[1] *То есть, затраты H не больше затрат менеджеров, управляющих всеми потоками, даже если эти менеджеры не объединены в единую иерархию (даже если отсутствует высший менеджер, которому подчинены все исполнители).*

моченного принимать решения, обязательные для всей организации[1].

Иначе говоря, для симметричной производственной линии минимизирует затраты именно иерархия, в которой по определению 4.1 имеется централизованное управление[2].

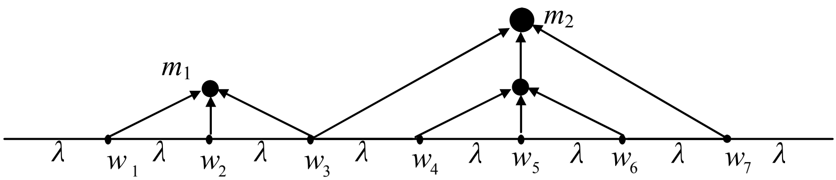


Рис. 4.15. Структура без централизованного управления

В силу второго пункта утверждения 4.3 можно рассматривать только такие деревья, в которых каждому менеджеру подчинена группа из исполнителей, идущих подряд. То есть, можно не рассматривать иерархии, в которых некоторому менеджеру подчинена, например, группа $\{w_1, w_2, w_4\}$. Содержательная интерпретация этого свойства очевидна. **Каждый менеджер должен управлять одним *участком производственной линии*, то есть последовательно следующими друг за другом исполнителями**. Попытка подчинить менеджеру несвязанные части производства увеличит затраты иерархии и приведет к ее неоптимальности.

Рассмотрим Рис. 4.16. Менеджеру m_1 подчинена группа $\{w_1, w_2, w_3\}$ из трех исполнителей. В группу $\{w_1, w_2, w_3\}$ входит поток $f(w_{env}, w_1)$ из внешней среды и выходит поток $f(w_3, w_4)$. То есть после назначения менеджера m_1 он с точки зрения затрат вышестоящих менеджеров ничем не отличается от исполнителя. Фактически, подчинив менеджеру m_1 трех исполнителей, мы «сократим» длину производственной линии на два, поскольку три исполнителя

---

[1] *Под централизованным управлением подразумевается не сосредоточение властных полномочий у одного менеджера, а лишь наличие менеджера, который управляет всеми сотрудниками организации.*

[2] *Это утверждение используется ниже в разделе 4.2.5 при построении оптимальной иерархии, управляющей несколькими производственными линиями с функциональными связями.*

заменятся на одного менеджера. Менеджер m_2 снова «сократит» число звеньев производственной линии на два. При этом менеджеру m_2 можно было бы подчинить менеджера m_1 и двух исполнителей, что привело бы к тем же затратам. Однако подобное подчинение приведет к росту числа уровней иерархии, поэтому предпочтительнее вариант, изображенный на Рис. 4.16.

Если в дереве H у менеджера m имеется k непосредственных подчиненных, то группа $s_H(m)$ разбивается на k подгрупп. Таким образом, некоторый участок производственной линии разбивается на k подучастков. Тогда менеджер m управляет $k-1$ внутренним потоком и участвует в управлении двумя внешними потоками. Следовательно, **если в дереве любой менеджер управляет исполнителями, идущими в линии подряд, то затраты менеджера с k непосредственными подчиненными равны**:

(6) $\varphi((k+1)\lambda)$.

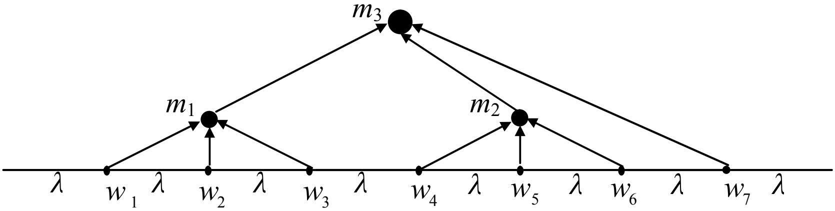


Рис. 4.16. Пример иерархии над симметричной производственной линией

Подчинив менеджеру m_1 некоторое количество r_1 исполнителей, мы фактически сократим число элементов производственной линии на $r_1 - 1$ (r_1 исполнителей заменятся на одного менеджера). Аналогично, можно назначить менеджера m_2, подчинив ему r_2 еще не подчиненных исполнителей или менеджеров, и т.д. В итоге должен остаться единственный неподчиненный менеджер[1] m_q. То есть $n-(r_1-1)-(r_2-1)-...-(r_q-1)=1$. Переписывая данное равенство, получим следующее ограничение на количество непосредственных подчиненных всех менеджеров дерева:

[1] *Напомним, что q – общее количество менеджеров.*

(7) $r_1+\ldots+r_q=n+q-1$.

По формуле (6) затраты менеджеров равны $\varphi((r_1+1)\lambda),\ldots,\varphi((r_q+1)\lambda)$. Для решения задачи об оптимальной иерархии осталось решить следующую задачу оптимизации:

(8) $\varphi((r_1+1)\lambda)+\ldots+\varphi((r_q+1)\lambda)\to\min$,

при условиях (7), $r_1,\ldots,r_q\geq 2$, где $1\leq q\leq n-1$.

Итак, **для симметричной производственной линии задача об оптимальной иерархии сводится к задаче (8) условной оптимизации функции, зависящей от *q* целочисленных переменных** (такую задачу необходимо решить при каждом q). Для решения задачи (8) можно использовать классические методы дискретной оптимизации или предложенные в [2] алгоритмы поиска оптимальных деревьев для произвольной секционной функции.

В соответствии с утверждением 4.3 для выпуклых функций задача (8) решается аналитически. В оптимальном дереве у различных менеджеров количество непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу, то есть величины $r_1, \ldots, r_q$ отличаются не более чем на единицу[1]. Пусть r – минимальное количество непосредственных подчиненных менеджера. Тогда у любого менеджера либо r, либо $r+1$ непосредственных подчиненный. Пусть $q_1>0$ – количество менеджеров первого типа (с r непосредственными подчиненными). Тогда $q_2=q-q_1$ – количество менеджеров второго типа (с $r+1$ непосредственными подчиненными). Левая часть выражения (7) имеет вид $q_1\,r+q_2(r+1)=q\,r+q_2$. То есть

(9) $qr+q_2=n+q-1$, $r=\lfloor (n+q-1)/q\rfloor$.[2]

Если $n-1$ делится на q нацело, то $q_2=0$ и у всех менеджеров одинаковое количество $r=(n+q-1)/q$ непосредственных подчиненных. Иначе согласно (9) r – ближайшее снизу целое число, а q_2 – остаток от деления $n-1$ на q.

---

[1] *Если имеются значения, которые отличаются на два и более, то в соответствии с доказательством утверждения 4.3 одно можно уменьшить, а другое увеличить, без увеличения затрат дерева.*

[2] *Символ* $\lfloor (n+q-1)/q\rfloor$ *обозначает нижнюю целую часть, то есть максимальное целое число, не превышающее* $(n+q-1)/q$.

Таким образом, в случае выпуклой функции при фиксированном q из формулы (9) определяются параметры $r_1, \ldots, r_q$ и по формуле (8) вычисляются затраты дерева. Поэтому для решения задачи об оптимальной иерархии остается лишь найти оптимальное количество менеджеров $1 \le q \le n-1$. Это можно сделать с помощью сравнения $n-1$ варианта. Иначе говоря, **для любой выпуклой функции можно найти оптимальною иерархию над симметричной производственной линией путем сравнения затрат $n-1$ дерева**. Вариант $q = 1$ соответствует двухуровневой иерархии с максимальным числом непосредственных подчиненных $r = n$. Вариант $q = n-1$ соответствует 2-иерархии с минимальным числом непосредственных подчиненных $r = 2$.

Ниже рассмотрен важный частный случай – степенной функции затрат – аналог функции Кобба-Дугласа, часто рассматриваемой в экономических исследованиях, для которой удается найти оптимальную норму управляемости, не зависящую от n и λ.

Рассмотрим симметричную производственную линию (см. Рис. 4.4) с одномерными потоками. Интенсивность потоков в линии определяется неотрицательной величиной $\lambda \ge 0$ (например, интенсивностью материального потока). Тогда можно рассмотреть *степенную функцию затрат менеджера*:

(10) $\varphi(x) = x^{\alpha}$,

где x – сумма потоков менеджера[1], $\alpha \ge 0$ – показатель степени.

Мы будем интерпретировать показатель степени α как *нестабильность внешней среды*.

Приведем пример влияния нестабильности на затраты менеджера. Предположим, что в стабильной внешней среде организация выпускает единственную модификацию продукта[2]. При нестабильном (меняющемся) спросе может потребоваться выпуск нескольких модификаций продукта, причем требования к выпускаемым модификациям могут постоянно изменяться. Пусть количество требуемых модификаций равно нестабильности внешней среды α. Сум-

[1] *Например, если менеджер управляет и участвует в управлении k потоками, то* $x = k\lambda$.

[2] *Например, для получения максимальной прибыли при ограниченной мощности производства.*

марный поток x менеджера может соответствовать количеству деталей, производством которых управляет менеджер. Менеджер должен решить, какое количество деталей использовать для выпуска каждой из модификаций, то есть определить, что для выпуска первой модификации используется $0 \le x_1 \le x$ деталей, для выпуска второй – $0 \le x_2 \le x$ деталей и т.д. Порядок роста общего количества вариантов выбора $x_1, \ldots, x_\alpha$ равен[1] $x^{\alpha-1}$. Для анализа каждого варианта может потребоваться, например, расчет себестоимости выпуска каждой из x деталей с учетом технологических ограничений[2]. Таким образом, трудоемкость выбора наилучшего варианта производства может возрастать[3] как x^α, что и определяет затраты менеджера.

Приведенный пример иллюстрирует, что затраты менеджера можно моделировать с помощью зависимости (10), в которой показатель степени α соответствует нестабильности внешней среды. В примере показатель α равен числу модификаций, появляющихся из-за нестабильности спроса. В реальной ситуации показатель α может быть меньше, поскольку с точки зрения затрат менеджера между большинством модификаций может не быть разницы. Кроме того, на затраты менеджера могут влиять прочие факторы нестабильности («текучесть» кадров, изменение качества сырья, состава поставщиков и т.п.). Поэтому мы будем считать, что имеется некоторый обобщенный показатель нестабильности внешней среды – действи-

---

[1] *Например, при* $\alpha = 2$ *имеется* $x + 1$ *вариант выбора величины* x_1*, после чего величина* x_2 *определяется из соотношения* $x_1 + x_2 = x$*. При* $\alpha = 3$ *количество вариантов равно* $x^2/2 + 3x/2 + 1$*, то есть порядок роста опять равен* $x^{\alpha-1}$*, и так далее.*

[2] *Например, детали одной модификации могут выпускаться не по одиночке, а партиями. При выпуске количества деталей, не кратного размеру партии, себестоимость возрастает, что снижает прибыль. Поэтому на выбор «наилучшего» варианта могут влиять разнообразные технологические факторы.*

[3] *При наступлении очередного периода планирования (например, месяца) от менеджера может потребоваться управление выпуском таких модификаций, с которыми он ранее не сталкивался. Поэтому менеджеру может быть неизвестен наилучший вариант или простые методы его поиска, что приводит к необходимости анализа всех вариантов.*

тельное число $\alpha > 1$, при котором затраты менеджера определяются формулой (10).[1]

Значения $\alpha \le 1$ будут соответствовать ситуациям стабильной внешней среды, при которых функция затрат (10) вогнута. Таким образом, по утверждению 4.1, в стабильной внешней среде оптимальна двухуровневая иерархия (все исполнители непосредственно подчинены единственному менеджеру). Ниже найдем оптимальную иерархию, управляющую симметричной производственной линией в нестабильной внешней среде.

Будем рассматривать только деревья, в которых у всех менеджеров число непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу, и каждый менеджер управляет одним участком производственной линии. Степенная функция затрат выпукла при $\alpha > 1$, то есть в силу утверждения 4.3 среди таких деревьев найдется оптимальная иерархия.

Если у некоторого менеджера дерева имеется r непосредственных подчиненных, то в силу формулы (6) затраты этого менеджера, определяемые степенной функцией, равны:

(11) $\varphi((r+1)\lambda) = (r+1)^{\alpha}\lambda^{\alpha}$.

Если $n - 1$ делится нацело на количество q менеджеров оптимального дерева, то согласно (9) у каждого менеджера будет ровно $r = 1 + (n - 1) / q$ непосредственных подчиненных. В этом случае затраты менеджеров дерева будут равны:

(12) $(r+1)^{\alpha}\lambda^{\alpha}(n-1)/(r-1)$,

где $(n - 1) / (r - 1)$ – количество менеджеров.

Вид формулы (12) позволяет предположить, что оптимальную иерархию можно найти с помощью выбора оптимальной нормы управляемости r_*, которая минимизирует $(r+1)^{\alpha}/(r-1)$. Следующее утверждение подтверждает это предположение.

---

[1] *То есть, будем считать, что повышение нестабильности приводит к росту α, и наоборот. На показатель степени α может также влиять множество других факторов* (*например, личные качества менеджера или рассматриваемые в менеджменте факторы «сложности», «враждебности» внешней среды*)*. Однако мы будем интерпретировать показатель α как нестабильность внешней среды.*

Утверждение 4.4 [10]. *Для симметричной производственной линии с одномерными потоками и степенной функции затрат при* $\alpha > 1$ *оптимальная норма управляемости* r_* *равна одному из двух целых чисел ближайших к* $(\alpha+1)/(\alpha-1)$.

Если $n-1$ *делится нацело на* $r_* - 1$, *то оптимально* r_**-дерево* H^*, *в котором каждый менеджер управляет одним участком линии и имеет ровно* r_* *непосредственных подчиненных. Затраты* H^* *определяются формулой* (12) *с* $r = r_*$. *При произвольном n формула* (12) *дает нижнюю оценку затрат на управление всеми потоками линии*.

В доказательстве утверждения 4.4 (см. [10]) показано, что норма управляемости $r_0 = (\alpha+1)/(\alpha-1)$ доставляет минимум функции $\xi(r) = (r+1)^{\alpha}/(r-1)$. Однако величина r_0 может не быть целым числом. Поэтому r_* равно ближайшему снизу целому значению $r_- = \lfloor r_0 \rfloor$ или ближайшему сверху целому значению $r_+ = \lceil r_0 \rceil$ в зависимости от того, какое значение минимизирует функцию $\xi(r)$. Таким образом, утверждение 4.4 определяет *оптимальную норму управляемости* следующим образом:

$$(13)\quad r_* = \begin{cases} r_-, \text{ при } \xi(r_-) < \xi(r_+), \\ r_+, \text{ при } \xi(r_+) \le \xi(r_-). \end{cases}$$

В силу утверждения 4.4 оптимальной иерархией, управляющей симметричной производственной линией, будет r_*-дерево, в котором у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. То есть, **оптимальна иерархия с нормой управляемости** r_*. При этом необходимо, чтобы подобное дерево существовало, то есть, чтобы $n-1$ делилось нацело на $r_* - 1$. Например, при $r_* = 3$ возможны следующие значения $n = 3, 5, 7, 9, \ldots$. Оптимальное дерево при $n = 7$ изображено на Рис. 4.16. Если выполнено $n = (r_*)^j$, то можно построить оптимальное дерево с $j+1$ уровнями иерархии, в котором каждому менеджеру второго уровня подчинено r_* исполнителей, каждому менеджеру следующего уровня подчинено ровно

r_* менеджеров предыдущего уровня. Для $r_* = 3$ и $n = 9$ такое дерево приведено на Рис. 4.17.

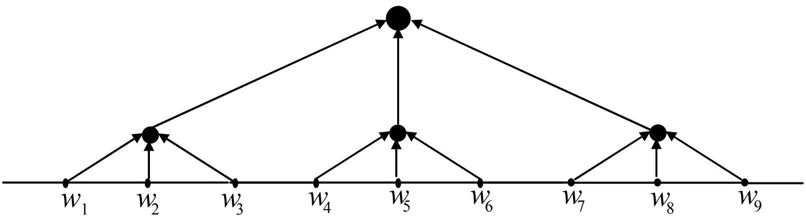


Рис. 4.17. Пример дерева над производственной линией

Если $n - 1$ не делится нацело на $r_* - 1$, то не существует дерева, в котором у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Тогда по утверждению 4.4 при любом n затраты оптимальной иерархии не могут ниже, чем:

(14) $(n-1)\lambda^\alpha (r_* + 1)^\alpha /(r_* - 1)$.

Кроме того, по утверждению 4.3 затраты оптимальной иерархии не больше суммарных затрат любой структуры, управляющей всеми потоками, даже если эта структура не имеет централизованного управления. Поэтому **затраты любых менеджеров, управляющих всеми потоками симметричной производственной линии, не меньше величины, определяемой формулой (14)**.

Если $n - 1$ делится нацело на $r_* - 1$, то достигается нижняя оценка (14) затрат оптимальной иерархии. При этом в иерархии имеется $q = (n-1)/(r_* - 1)$ менеджеров, каждый из которых управляет ровно r_* непосредственными подчиненными. Если n произвольно, то оптимальное количество менеджеров в дереве может быть одним из двух целых чисел, ближайших к $(n-1)/(r_* - 1)$. При этом количество непосредственных подчиненных в оптимальном дереве определяется формулой (9). Затраты оптимального дерева при произвольном n не могут превышать оценку (14) более чем в

$1+(r_* - 1)/(n-1)$ раз[1]. При достаточно большом n отклонение от оценки (14) незначительно. Поэтому **ниже рассматриваются только значения $n-1$, кратные $r_* - 1$, то есть считается, что затраты оптимальной иерархии определяются формулой (14)**.

Формула (13) определяет зависимость оптимальной нормы управляемости $r_*(\alpha)$ от нестабильности внешней среды α. Эта зависимость изображена на Рис. 4.18. Кроме $r_*(\alpha)$ на рисунке приведена кривая $(\alpha+1)/(\alpha-1)$.

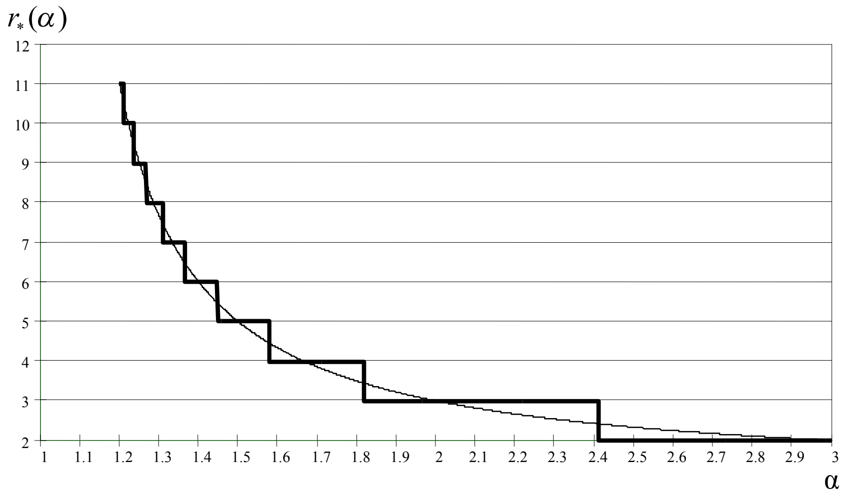


Рис. 4.18. Оптимальная норма управляемости $r_*(\alpha)$ в зависимости от нестабильности внешней среды α

Из Рис. 4.18 видно, что **при росте нестабильности внешней среды оптимальная норма управляемости снижается**. Эта закономерность часто наблюдается на практике и описана в работах по менеджменту (см., например, [8]).

---

[1] *Можно оценить затраты дерева сверху, выбирая ближайшее $n_1 > n$, при котором $n_1 - 1$ делится нацело на $r_* - 1$. Выполнено $n_1 - n < r_* - 1$, что и дает указанную оценку.*

Когда среда становится стабильной (α приближается к единице), оптимальная норма управляемости стремится к $+\infty$, то есть оптимально подчинять одному менеджеру все большее количество сотрудников. В частности, двухуровневая иерархия становится оптимальной для все бо́льших значений n, то есть для организаций все бо́льшего размера. В пределе этот результат переходит в результат для стабильной внешней среды, при которой двухуровневая иерархия с одним менеджером оптимальна при любом размере организации. **Однако, даже при наличии малой нестабильности** ($\alpha > 1$) **для организации достаточно большого размера оптимальна многоуровневая иерархия**.

Из Рис. 4.18 видно, что значения $\alpha \geq 2.5$ соответствуют *крайне нестабильной внешней среде*. В таких условиях при любом n оптимальная норма управляемости равна двум. То есть в оптимальном дереве у каждого менеджера всего два непосредственных подчиненных. Общее количество менеджеров будет равно $n - 1$, то есть оптимально наибольшее количество менеджеров, каждый из которых управляет единственным внутренним потоком. Итак, в условиях крайней нестабильности для управления каждым потоком оптимально назначить отдельного менеджера.

Как отмечено в работе [8], в большинстве реальных организаций иерархия представляет собой промежуточный вариант, при котором у каждого менеджера имеется от трех до десяти непосредственных подчиненных. В некоторых случаях число непосредственных подчиненных может доходить до сотен. Таким образом, в модели диапазон нестабильности от 1 до 2.5 ($1 < \alpha < 2.5$) соответствует эффектам, наблюдаемым на практике в реальных организациях. На Рис. 4.18 приведен пример ступенчатого возрастания оптимальной нормы управляемости при уменьшении α от 2.5 до 1.

При росте организации (увеличении числа исполнителей n) количество менеджеров и затраты оптимальной иерархии (14) растут линейно. Поэтому модель со степенной функцией затрат и изолированной производственной линией не позволяет определить пределы роста организации. Ниже модифицирована базовая модель и найдена оптимальная иерархия для нескольких производственных линий с функциональными связями, что позволило сделать выводы о необходимости реструктуризации организации при ее росте.

4.2.5. Функционально связанные производственные линии. Продуктовые и функциональные потоки

Как отмечается во многих работах по менеджменту (см., например, [8]), преимущества дивизиональной, функциональной или матричной иерархии зависят в первую очередь от характера взаимодействия исполнителей, то есть, от потоков технологической сети. В соответствии с этим ниже рассмотрена технологическая сеть, состоящая из нескольких производственных линий, связанных функциональными взаимодействиями исполнителей. Такая форма сети позволяет для некоторых функций затрат при любом размере организации доказать оптимальность типичной иерархии: функциональной, дивизиональной или матричной. Кроме того, в рамках построенной модели можно объяснить многие эффекты, имеющие место в практике управления.

В начале рассмотрим содержательную интерпретацию факторов, влияющих на интенсивность λ потоков, управляемых менеджером. Под управлением может пониматься оперативное планирование и контроль потоков. В [8] такие обязанности менеджера названы *прямым контролем*, который как раз и подразумевает оперативную работу менеджера, необходимую для того, чтобы организация функционировала должным образом.

Однако не все потоки могут требовать прямого контроля со стороны менеджера. Часть потоков не требует вмешательства менеджеров, поскольку исполнители могут справиться с такими потоками самостоятельно. В [8] приведены аргументы, согласно которым в реальных организациях *стандартизация* повышает долю потоков, не требующих вмешательства менеджеров. То есть стандартизация снижает затраты на прямой контроль. В [8] (см. также первую главу настоящей работы) выделено несколько *типов стандартизации*:

1. Стандартизация знаний и навыков. Позволяет исполнителям без участия менеджеров согласованно взаимодействовать в ряде ситуаций за счет того, что имеются общие знания и навыки действий в этих ситуациях.

2. Стандартизация выпуска. Определяет требования к результатам работы каждого исполнителя. Позволяет исполнителям без

участия менеджеров разрешать проблемы с несоответствующей продукцией.

3. Стандартизация рабочих процессов. Содержит ряд инструкций, регламентирующих действия исполнителей. Чем больше вариантов действий регламентировано, тем реже исполнителю приходится обращаться к менеджеру.

Таким образом, все типы стандартизации приводят к уменьшению доли потоков, требующих прямого контроля менеджеров.

В рамках базовой модели стандартизацию можно учесть, рассматривая соответствующую функцию затрат. Например, если обозначить степень стандартизации через $0 \le s \le 1$, то вместо функции затрат $\varphi(x) = x^{\alpha}$ можно рассмотреть функцию затрат $\varphi(x) = (x(1-s))^{\alpha}$. Если степень стандартизации нулевая, то в прямом контроле нуждаются все потоки. При полной стандартизации необходимость в прямом контроле отпадает. Однако удобнее считать, что стандартизация меняет не функцию затрат, а интенсивность потоков (все потоки умножаются на $1 - s$). С математической точки зрения это не меняет задачи, однако делает более удобной интерпретацию результатов.

Таким образом, ниже будем считать, что **для симметричной производственной линии интенсивность λ максимальна при отсутствии стандартизации и равна нулю при полной стандартизации,** то есть под λ понимается интенсивность той части потоков, которая требует прямого контроля менеджеров.

В [8] указано, что в ряде случаев в реальных организациях увеличение стандартизации лишь снижает затраты менеджеров, не изменяя нормы управляемости. Рассмотренная модель со степенной функцией затрат и симметричной производственной линией приводит к тем же результатам. Рост стандартизации приводит к снижению λ, что в силу формулы (14) снижает затраты всех менеджеров иерархии. Однако рост стандартизации не меняет оптимальной нормы управляемости r_* (см. формулу (13)), то есть выводы модели соответствуют эффекту, наблюдаемому на практике.

Итак, определим технологическую сеть специального вида. Будем считать, что она состоит из l производственных линий ($l \ge 2$). Каждая производственная линия выпускает некоторый продукт (или обслуживает определенный регион, определенных клиентов и т.п.).

Для выпуска продукта необходимо последовательное выполнение некоторых технологических операций. Считаем, что операции выполняются n исполнителями, из которых и состоит каждая производственная линия ($n \geq 2$).

В технологической сети множество исполнителей имеет вид $N = \{w_{i,j}\}$, где $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq n$. Индекс i обозначает номер производственной линии, к которой относится исполнитель, индекс j – номер исполнителя в линии (или номер операции, которую он выполняет). Таким образом, множество исполнителей содержит $n\,l$ элементов. Каждый исполнитель обозначается двумя нижними индексами, разделенными запятой.

Рассмотрим функционирование производственной линии с номером i. Исполнитель $w_{i,1}$ может, например, поставлять сырье. Полученное сырье он передает следующему за ним в линии исполнителю $w_{i,2}$, который выполняет некоторую технологическую операцию и передает ее результат следующему исполнителю $w_{i,3}$, и так далее. Последний исполнитель $w_{i,n}$ в производственной линии осуществляет реализацию продукции потребителю. Таким образом, считаем, что исполнитель $w_{i,j}$ обменивается *продуктовыми потоками* с соседними по производственной линии исполнителями $w_{i,j\text{-}1}$ и $w_{i,j+1}$ (первый и последний исполнитель обмениваются продуктовыми потоками также и с внешней средой). Предполагаем, что величина потока, проходящего вдоль всех производственных линий, постоянна (линии симметричны).

Считаем, что исполнители с одинаковым номером выполняют в различных производственных линиях схожую работу. Таким образом, исполнители с одинаковым номером имеют схожую квалификацию, могут использовать одно и то же оборудование и т.п. Например, первые исполнители $w_{1,1}, w_{2,1}, \ldots, w_{l\text{-}1,1}, w_{l,1}$ во всех производственных линиях ответственны за снабжение линии сырьем. Эти исполнители должны обладать навыками взаимодействия с поставщиками, оценки предлагаемых условий, выбора наилучших поставщиков и т.п. В связи с этим исполнители с одинаковым номером взаимодействуют друг с другом, обмениваясь потоками (как информационными, так и материальными). Например, снабженец может получать у коллег информацию об изменениях цен на сырье, о появлении сырья нового типа, о том, с каким поставщиком лучше сотрудничать и т.п. При этом считаем, что за подобной информацией снабженец обращается к «ближайшим» коллегам.

На Рис. 4.19 расположение производственных линий может соответствовать, например, территориальному расположению. В этом случае «ближайшими» будут коллеги из соседних производственных линий. Таким образом, считаем, что исполнитель $w_{i,j}$ обменивается *функциональными потоками* с коллегами $w_{i-1,j}$ и $w_{i+1,j}$ из соседних производственных линий. Исполнитель первой линии, кроме обмена с исполнителем второй линии, обменивается функциональным потоком с внешней средой (например, контактирует со специалистами аналогичных организаций). Аналогично, исполнитель последней линии (с номером l) обменивается функциональным потоком с внешней средой. Считаем, что все функциональные потоки имеют одинаковую интенсивность. То есть, по сути, рассматриваются симметричные «*функциональные линии*», величина потока в которых одинакова. Функциональные линии будем нумеровать от 1 до n (первая линия может соответствовать снабжению, последняя – сбыту продукции).

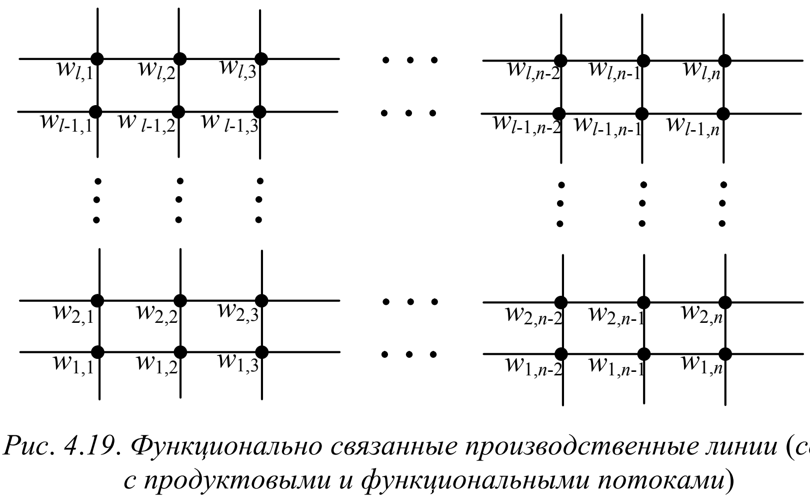


Рис. 4.19. Функционально связанные производственные линии (*сеть с продуктовыми и функциональными потоками*)

Таким образом, технологическая сеть на Рис. 4.19 представляет собой *функционально связанные производственные линии*.

Через $N_i = \{w_{i,1}, \ldots, w_{i,n}\}$ обозначим i-ю производственную линию. Объединение производственных линий $N_1, \ldots, N_l$ соответствует всему множеству исполнителей: $N = N_1 \cup \ldots \cup N_l$.

Через $N^j = \{w_{1,j}, \ldots, w_{l,j}\}$ обозначим j-ю функциональную линию. Объединение функциональных линий $N^1, \ldots, N^n$ соответствует всему множеству исполнителей: $N = N^1 \cup \ldots \cup N^n$.

Как отмечено выше, затраты менеджера соответствуют его обязанностям по «прямому контролю» потоков. При этом стандартизация снижает интенсивность тех потоков, которые нуждаются в прямом контроле. Введем следующие обозначения.

Через $\lambda > 0$ обозначим интенсивность той части *продуктового потока*, которая должна управляться менеджером.

Через $\theta > 0$ обозначим интенсивность той части *функционального потока*, которая должна управляться менеджером.

Считаем, что **стандартизация снижает объем прямого контроля как продуктовых, так и функциональных потоков**. Если стандартизация отсутствует, то прямой контроль менеджеров необходим для всех потоков, величины λ и θ максимальны. Если стандартизация полная, то $\lambda = \theta = 0$.

Величины λ и θ обычно взаимосвязаны. Если нарастают продуктовые потоки, то увеличивается и объем функциональных взаимодействий. Это соответствует практическим ситуациям, при которых увеличение объемов производства приводит к росту затрат всех менеджеров, которые управляют как продуктовыми, так и функциональными потоками. Мы не будем вникать в характер связи между интенсивностью продуктовых и функциональных потоков, а исследуем модель при любых значениях λ и θ.

Таким образом, функция потока $f(\cdot)$ имеет следующий вид. Для $1 \le i \le l$ и $1 \le j \le n$ исполнитель $w_{i,j}$ имеет следующие связи:

$$(15)\quad f(w_{i,j-1}, w_{i,j}) = f(w_{i,j}, w_{i,j+1}) = \lambda,$$

$$f(w_{i-1,j}, w_{i,j}) = f(w_{i,j}, w_{i+1,j}) = \theta.$$

Если в формулах (15) индекс $j-1$ равен нулю или индекс $j+1$ превышает n, то под «исполнителем» $w_{i,0} = w_{i,n+1} = w_{env}^{prod}$ понимается та часть внешней среды, с которой исполнители обмениваются продуктовыми потоками. Назовем *внешнюю среду* w_{env}^{prod} *продуктовой*.

Аналогично, под «исполнителями» $w_{0,j} = w_{l+1,j} = w_{env}^{prod}$ понимается та часть внешней среды, с которой исполнители обмениваются функциональными потоками. Назовем *внешнюю среду* w_{env}^{prod} *функциональной*. Все потоки определяются формулами (15). Других связей в технологической сети нет. На Рис. 4.20 изображены потоки технологической сети для первой производственной и первой функциональной линии. В остальных линиях потоки аналогичны.

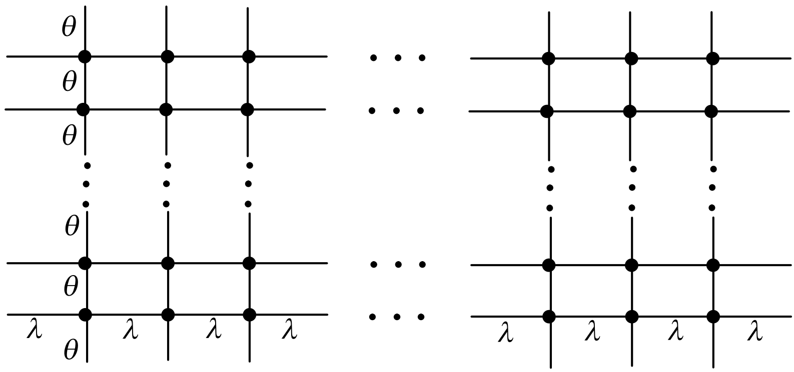


Рис. 4.20. Интенсивность продуктовых и функциональных потоков в первой производственной и функциональной линиях

Форма технологической сети (см. Рис. 4.19) и вид потоков (см. Рис. 4.20) накладывает весьма сильные ограничения на технологию. Предполагается, что каждая производственная линия содержит одинаковое количество n исполнителей. При этом исполнители разных линий с одинаковым номером имеют схожие обязанности. В реальных организациях могут возникать отклонения от этой модели. Например, один исполнитель может снабжать все линии, производственные линии могут быть различной длины, в некоторых производственных линиях могут быть исполнители, выполняющие уникальную работу, которая отсутствуют в других линиях и т.п. Также возможны ситуации, при которых интенсивность потоков изменяется вдоль продуктовых или функциональных линий. Однако в некоторых случаях технологическая сеть может быть близка к функционально связанным производственным линиям. Такой вид сети позволяет в ряде случаев исследовать задачу аналитически. Если технологическая сеть значительно более сложна, то для поиска оптимальной иерархии могут быть использованы общие методы, описанные ниже в общей модели (см. раздел 4.3).

4.2.6. Дивизионы и департаменты. Типичные иерархии

Каждый менеджер иерархии управляет определенной частью технологической сети. Исходя из этого, определим несколько типов менеджеров.

Дивизиональным менеджером назовем менеджера, который управляет исполнителями только одной производственной линии. Если дивизиональный менеджер m управляет всеми исполнителями производственной линии, то менеджера m назовем *начальником дивизиона*; менеджера m и всех подчиненных ему сотрудников назовем *дивизионом*.

Считаем, что номер дивизиона совпадает с номером входящей в него производственной линии. Если в иерархии нет менеджера, управляющего всей производственной линией, то будем считать, что в иерархии отсутствует дивизион с соответствующим номером (даже если дивизиональные менеджеры управляют частями производственной линии). Очевидно, что дивизиональному менеджеру могут быть подчинены только другие дивизиональные менеджеры или исполнители.

Аналогичным образом можно определить типы менеджеров, управляющих исполнителями функциональных линий.

Функциональным менеджером назовем менеджера, который управляет исполнителями только одной функциональной линии. Если функциональный менеджер m управляет всеми исполнителями функциональной линии, то менеджера m назовем *начальником департамента*; менеджера m и всех подчиненных ему сотрудников назовем *департаментом*.

Считаем, что номер департамента совпадает с номером входящей в него функциональной линии. Если в иерархии нет менеджера, управляющего всей функциональной линией, то будем считать, что в иерархии отсутствует департамент с соответствующим номером. Функциональному менеджеру могут быть подчинены только другие функциональные менеджеры или исполнители.

Дивизиональных и функциональных менеджеров назовем *менеджерами среднего звена*. Кроме того, определим два типа *стратегических менеджеров*:

1. *Менеджером, управляющим взаимодействием дивизионов*, назовем менеджера, каждый непосредственный подчиненный которого управляет одной производственной линией (является начальником дивизиона) или несколькими производственными линиями.

2. *Менеджером, управляющим взаимодействием департаментов*, назовем менеджера, каждый непосредственный подчиненный которого управляет одной функциональной линией (является начальником департамента) или несколькими функциональными линиями.

Рассмотрим технологическую сеть N, состоящую из функционально связанных производственных линий.

Дивизиональной иерархией назовем иерархию из $\Omega(N)$, которая состоит из l дивизионов и стратегических менеджеров, управляющих их взаимодействием.

Функциональной иерархией назовем иерархию из $\Omega(N)$, которая состоит из n департаментов и стратегических менеджеров, управляющих их взаимодействием.

Матричной иерархией назовем иерархию из $\Omega(N)$, которая состоит из l дивизионов, n департаментов и высшего менеджера, которому непосредственно подчинены начальники дивизионов и департаментов.

Рассмотрим пример. Пусть $l = 3$ и $n = 9$, то есть имеются три производственные линии, каждая из которых содержит девять исполнителей. Таким образом, имеется девять функциональных линий.

На Рис. 4.21 изображен пример дивизиональной 3-иерархии. В иерархии созданы три дивизиона, каждый из которых управляет одной производственной линией (выпуском одного продукта). Каждый дивизион состоит из начальника, трех непосредственно подчиненных ему дивизиональных менеджеров и исполнителей производственной линии. В дивизиональной иерархии на Рис. 4.21 имеется единственный стратегический менеджер. Он управляет взаимодействием трех дивизионов.

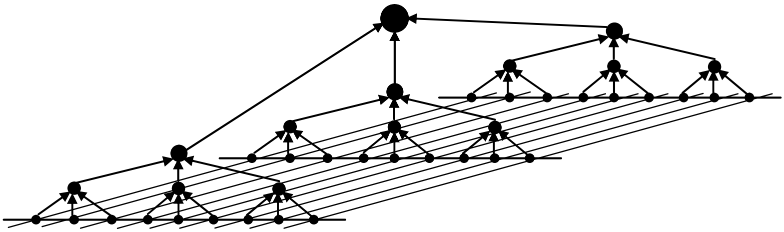


Рис. 4.21. Пример дивизиональной 3-иерархии

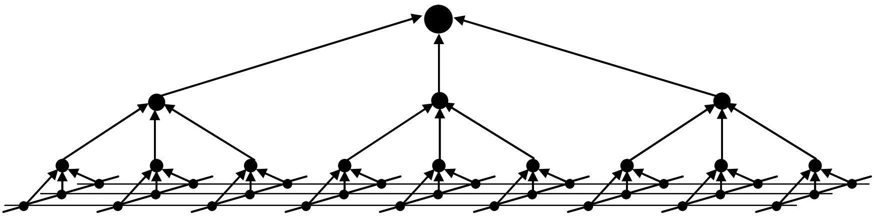


Рис. 4.22. Пример функциональной 3-иерархии

На Рис. 4.22 изображен пример функциональной 3-иерархии. В иерархии созданы девять департаментов, каждый из которых управляет одной функциональной линией (одним видом деятельности). Каждый департамент состоит из начальника и исполнителей функциональной линии. В функциональной иерархии на Рис. 4.22 имеются четыре стратегических менеджера. Первый стратегический менеджер управляет взаимодействием департаментов 1, 2, 3, второй – взаимодействием департаментов 4, 5, 6, третий – взаимодействием департаментов 7, 8, 9. Высшему менеджеру непосредственно подчинены эти три стратегических менеджера. Высший менеджер управляет оставшимся взаимодействием департаментов.

На Рис. 4.23 изображен пример матричной иерархии. В иерархии имеются три дивизиона, каждый из которых управляет одной производственной линией (аналогично дивизиональной иерархии на Рис. 4.21). Кроме того, в ней созданы девять департаментов, каждый из которых управляет одной функциональной линией (аналогично функциональной иерархии на Рис. 4.22). Функциональные связи и ребра подчинения департаментов изображены пунктиром. Для того чтобы граф был иерархией, в нем должен быть высший менеджер. По определению высшему менеджеру непосредственно подчинены начальники всех дивизионов и всех департаментов. Чтобы не загромождать Рис. 4.23, высший менеджер не изображен.

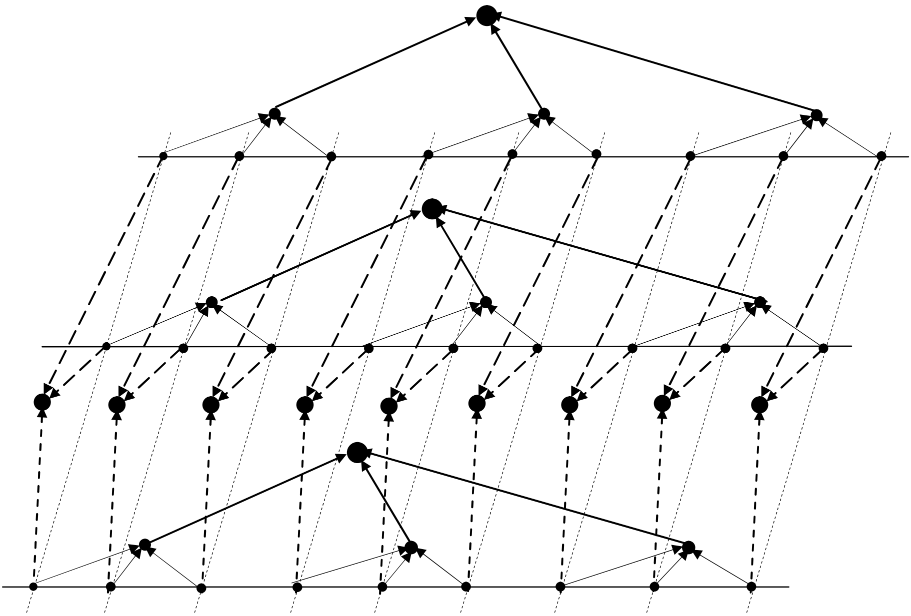


Рис. 4.23. Пример матричной иерархии (*высший менеджер не изображен*)

Дивизиональные, функциональные и матричные иерархии ниже будем называть *типичными иерархиями*, поскольку иерархии такого вида часто встречаются на практике [8].

4.2.7. Функция затрат менеджеров

Рассмотрим изолированную линию с интенсивностью потоков λ. Пусть k – количество потоков менеджера. Тогда степенная функция определяет затраты менеджера следующим образом $\varphi(k\,\lambda) = (k\,\lambda)^{\alpha}$, где α – нестабильность внешней среды (см. выражение (10)). При нулевой интенсивности затраты на управление нулевые. Однако на практике менеджер несет постоянные затраты на управление связью между исполнителями, даже если поток по этой связи незначителен или отсутствует. Рассмотрим более реалистичную функцию, в которой управление связью влечет не только переменные, но и постоянные затраты менеджера.

Считаем, что *переменные затраты* $(k\,\lambda)^{\alpha}$ менеджера m равны суммарной интенсивности потоков менеджера в степени α, а *постоянные затраты в стабильной внешней среде на управление одной связью равны* $c_0 > 0$ (например, менеджер может периодически оформлять отчеты по фактическому потоку). Константу постоянных затрат c_0 считаем одинаковой как для продуктовых, так и для функциональных потоков. То есть считаем, что постоянные затраты не зависят ни от интенсивности, ни от типа потоков.

Менеджер m несет постоянные затраты для каждого из k своих потоков. Таким образом, в стабильной внешней среде суммарные постоянные затраты менеджера составят $k\,c_0$. Эти затраты не зависят от величины потока, однако зависят от нестабильности внешней среды. Например, нестабильность внешней среды вызывает изменение форм и порядка разработки планов, отчетов, что заставляет менеджера корректировать формы отчетов, осваивать новые процедуры контроля. То есть, нестабильность внешней среды приводит к росту как переменных затрат, так и постоянных. Поэтому считаем, что *постоянные затраты менеджера m равны* $(k\,c_0)^{\alpha}$. Итак, будем рассматривать следующую *функцию затрат*:

(16) $(k\,\lambda)^{\alpha} + (k\,c_0)^{\alpha} = k^{\alpha}(\lambda^{\alpha} + c_0^{\alpha})$,

где k – количество потоков менеджера, λ – интенсивность каждого потока, c_0 – постоянные затраты менеджера, связанные с одним потоком в условиях стабильности внешней среды, $\alpha > 1$ – показатель нестабильности внешней среды.

В разделе 4.2.4 рассматривалась функция затрат $\varphi((k_1 + k_2)\,\lambda)$, где k_1 и k_2 – соответственно количество внутренних и внешних потоков менеджера m. Таким образом, для степенной функции затраты определялись выражением $k^{\alpha}\lambda^{\alpha}$, где $k = k_1 + k_2$ – общее количество потоков менеджера m. В формуле (16) затраты менеджера равны $k^{\alpha}(\lambda^{\alpha} + c_0^{\alpha})$. То есть введение постоянных затрат лишь изменило множитель λ^{α} на множитель $(\lambda^{\alpha} + c_0^{\alpha})$ для всех менеджеров любой иерархии. Очевидно, что при этом в затратах любой иерархии множитель λ^{α} также поменяется на множитель $(\lambda^{\alpha} + c_0^{\alpha})$. То есть **введение постоянных затрат не изменило вида оптимальной иерархии, управляющей симметричной линией, поэтому все результаты раздела 4.2.4 остаются справедливыми и для функции затрат (16)**. Кратко изложим те из них, которые будут использованы в дальнейшем.

Оптимальная норма управляемости r_* определяется формулой (13). В формуле (14) множитель λ^{α} заменится множителем $(\lambda^{\alpha} + c_0^{\alpha})$. Таким образом**, затраты любых менеджеров, управляющих всеми потоками изолированной симметричной линии, не меньше**:

(17) $(n-1)(\lambda^{\alpha} + c_0^{\alpha})(r_* + 1)^{\alpha} / (r_* - 1)$.

Ниже мы будем рассматривать и производственные и функциональные линии и считать, что **для изолированной линии (как производственной, так и функциональной) оптимально r_*-дерево, затраты которого определяются формулой** (17) (с точностью до замены λ на θ и n на l для функциональной линии).

Оптимальный дивизион

Пусть m – некоторый дивизиональный менеджер, управляющий исполнителями i-ой производственной линии ($s(m) \subseteq N_i$). Внутри группы $s(m)$, управляемой менеджером, имеются только продуктовые потоки. Следовательно, *дивизиональный менеджер управляет только внутренними продуктовыми потоками* и участвует в управлении внешними продуктовыми потоками группы $s(m)$. Кроме того, исполнители группы $s(m)$ обмениваются функциональными потоками с другими производственными линиями. Однако дивизиональный менеджер отвечает за выпуск продукта производственной линии и не контролирует функциональное взаимодействие. Поэтому будем считать, что *дивизиональный менеджер не участвует в управлении функциональными потоками*. Например, на Рис. 4.24 менеджер m управляет двумя внутренними продуктовым потоками и участвует в управлении двумя внешними продуктовыми потоками (толстые линии на Рис. 4.24). Однако m не участвует в управлении внешними функциональными потоками (пунктирные линии на Рис.

4.24). Таким образом, дивизиональный менеджер управляет производственной линией без учета ее функциональных связей. Поэтому в соответствии с формулой (16) **затраты дивизионального менеджера равны**:

(18) $(k\,\lambda)^{\alpha} + (k\,c_0)^{\alpha} = k^{\alpha}(\lambda^{\alpha} + c_0^{\alpha})$,

где k – количество продуктовых потоков менеджера.

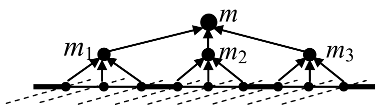


Рис. 4.24. Дивизиональный менеджер управляет производственной линией без учета ее функциональных связей

Затраты всего дивизиона совпадают с затратами иерархии, управляющей независимой производственной линией. Следовательно, дивизионом с минимальными затратами будет r_*-дерево, в котором у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Назовем это дерево *оптимальным дивизионом*. В дивизионе имеется n исполнителей, связанных продуктовыми потоками интенсивности λ (см. Рис. 4.19 и 4.20). Поэтому в соответствии с формулой (17) **затраты оптимального дивизиона равны**:

(19) $(n-1)(\lambda^{\alpha} + c_0^{\alpha})(r_* + 1)^{\alpha} / (r_* - 1)$.

Это – минимально возможные затраты менеджеров, управляющих всеми продуктовыми потоками производственной линии длины n.

Оптимальный департамент

По аналогии с затратами дивизиональных менеджеров определим затраты функциональных менеджеров.

Функциональный менеджер в организации несет ответственность за деятельность одного вида (управление исполнителями одной функциональной линии, имеющими аналогичные обязанности). *Функциональный менеджер управляет только внутренними функциональными потоками* и участвует в управлении внешними функциональными потоками группы $s(m)$. *Функциональный менеджер не участвует в управлении продуктовыми потоками*[1].

Например, на Рис. 4.25 изображен отдельный департамент – фрагмент функциональной иерархии (см. Рис. 4.22). Менеджер *m* управляет двумя внутренними функциональными потоками и участвует в управлении двумя внешними функциональными потоками, однако не участвует в управлении внешними продуктовыми потоками (пунктирные линии на Рис. 4.25).

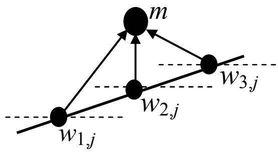


Рис. 4.25. Функциональный менеджер управляет функциональной линией без учета ее продуктовых связей

По формуле (16) **затраты функционального менеджера равны**:

(20) $(k\,\theta)^{\alpha} + (k\,c_0)^{\alpha} = k^{\alpha}(\theta^{\alpha} + c_0^{\alpha})$,

где k – количество функциональных потоков менеджера.

Департаментом с минимальными затратами будет r_*-дерево, в котором у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Назовем это дерево *оптимальным департаментом*. В департаменте имеется l исполнителей, связанных функциональными потоками с интенсивностью θ (см. Рис. 4.19 и 4.20). Поэтому по формуле (17) **затраты оптимального департамента равны**:

(21) $(l-1)(\theta^{\alpha} + c_0^{\alpha})(r_* + 1)^{\alpha} / (r_* - 1)$.

Это – минимально возможные затраты менеджеров, управляющих потоками функциональной линии длины l.

---

[1] *Связь затрат функциональных менеджеров с объемами производства может быть опосредованной, поскольку при изменении интенсивности продуктовых потоков может измениться и интенсивность функциональных потоков. Но при фиксированных λ и θ будем считать, что затраты функционального менеджера не зависят от интенсивности продуктовых потоков.*

Затраты стратегических менеджеров

Пусть m – некоторый стратегический менеджер, управляющий взаимодействием дивизионов. По определению любой непосредственный подчиненный менеджера m управляет одним или несколькими дивизионами. Например, на Рис. 4.21 высшему менеджеру непосредственно подчинены три менеджера, каждый из которых управляет одним дивизионом. На Рис. 4.21 начальники первого, второго и третьего дивизионов непосредственно подчинены менеджеру m. В общем случае его непосредственный подчиненный может управлять несколькими дивизионами.

Определим потоки менеджера m. Его подчиненные управляют всеми продуктовыми потоками внутри подчиненных производственных линий. Поэтому *m управляет только функциональными потоками внутри группы $s(m)$*, то есть только функциональным взаимодействием производственных линий (например, на Рис. 4.21 высший менеджер управляет восемнадцатью внутренними функциональными потоками). Также менеджер *m участвует в управлении внешними функциональными потоками группы $s(m)$* (в примере на Рис. 4.21 это восемнадцать функциональных потоков между дивизионами и функциональной внешней средой). Кроме того, каждый дивизион обменивается продуктовыми потоками с продуктовой внешней средой. В управлении этими потоками участвуют непосредственные подчиненные менеджера m или их подчиненные. Мы будем считать, что они полностью ответственны за выпуск продукта. Таким образом, считаем, что менеджер *m не участвует в управлении продуктовыми потоками*. То есть подчиненные «скрывают» от стратегического менеджера детали управления выпуском конкретного продукта.

Между двумя соседними дивизионами имеется функциональный поток с суммарной интенсивностью $n\,\theta$. Поэтому по формуле (16) затраты стратегического менеджера, управляющего взаимодействием дивизионов, равны:

(22) $(k\,n\,\theta)^{\alpha} + (k\,c_0)^{\alpha} = k^{\alpha}((n\,\theta)^{\alpha} + c_0^{\alpha})$,

где k – количество функциональных взаимодействий между дивизионами, которыми управляет менеджер или в управлении которыми он участвует.

Предположим, что в иерархии имеются l дивизионов, всеми функциональными взаимодействиями которых управляют стратегические менеджеры, фактически управляющие «линией» длины l, которая состоит из начальников дивизионов и содержит функциональные потоки интенсивности $n\,\theta$. Например, на Рис. 4.21 высший менеджер управляет «линией» с функциональными потоками интенсивности $9\,\theta$, состоящей из трех начальников дивизионов. Подставляя в формулу (17) соответствующие значения, получим *нижнюю оценку затрат стратегических менеджеров*, *управляющих функциональным взаимодействием l дивизионов*:

(23) $(l-1)((n\,\theta)^{\alpha}+c_0^{\alpha})(r_*+1)^{\alpha}/(r_*-1)$.

Кроме того, над начальниками дивизионов можно надстроить r_*-дерево, имеющее затраты (23) и состоящее из стратегических менеджеров, каждый из которых имеет r_* непосредственных подчиненных. Следовательно, **r_*-дерево является иерархией, которая состоит из стратегических менеджеров и с минимальными затратами управляет функциональным взаимодействием l дивизионов**.

Аналогично вышеизложенному определим затраты стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием департаментов. Пусть m – некоторый стратегический менеджер, управляющий взаимодействием департаментов. По определению любой непосредственный подчиненный менеджера m управляет одним или несколькими департаментами. Например, на Рис. 4.22 высшему менеджеру непосредственно подчинены три менеджера, каждый из которых управляет тремя департаментами.

Поэтому *m управляет только продуктовыми потоками внутри группы $s(m)$*, то есть только продуктовым взаимодействием функциональных линий (например, на Рис. 4.22 высший менеджер m управляет шестью внутренними продуктовыми потоками). Также менеджер *m участвует в управлении внешними продуктовыми потоками группы $s(m)$* (в примере на Рис. 4.22 это шесть продуктовых потоков между департаментами и продуктовой внешней средой). Менеджер *m не участвует в управлении функциональными потоками*. То есть подчиненные «скрывают» от стратегического менеджера детали управления рабочими процессами. Например, стратегический менеджер может распределять по департаментам план выпуска продукта и контролировать его выполнение, не заботясь о том, как именно план будет выполнен.

Между двумя соседними департаментами имеется продуктовый поток с суммарной интенсивностью $l\,\lambda$. Поэтому по формуле (16) затраты стратегического менеджера, управляющего взаимодействием департаментов, равны:

(24) $(k\,l\,\lambda)^{\alpha} + (k\,c_0)^{\alpha} = k^{\alpha}((l\,\lambda)^{\alpha} + c_0^{\alpha})$,

где k – количество продуктовых взаимодействий между департаментами, которыми управляет менеджер или в управлении которыми он участвует.

Предположим, что в иерархии имеются n департаментов, всеми продуктовыми взаимодействиями которых управляют стратегические менеджеры, фактически управляющие «линией» длины n, которая состоит из начальников департаментов и содержит продуктовые потоки интенсивности $l\,\lambda$. Подставляя в формулу (17) соответствующие значения, получим *нижнюю оценку затрат стратегических менеджеров*, *управляющих продуктовым взаимодействием n департаментов*:

(25) $(n-1)\,((l\,\lambda)^{\alpha} + c_0^{\alpha})\,(r_* + 1)^{\alpha} / (r_* - 1)$.

r_*-дерево является иерархией, которая состоит из стратегических менеджеров и с минимальными затратами (25) **управляет продуктовым взаимодействием *n* департаментов**.

Формулы (18) и (20) определяют затраты менеджеров среднего звена. Формулы (22) и (24) определяют затраты стратегических менеджеров. Пользуясь этими формулами, выпишем функцию, которая определяет затраты любого менеджера иерархии.

Для произвольной иерархии $H \in \Omega(N)$, управляющей функционально связанными производственными линиями, затраты менеджера m определяются следующей функцией:

(26)

$$c(s_H(v_1),\dots,s_H(v_k)) =$$

$$= \begin{cases} k_1^\alpha(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) \text{ для дивизионального менеджера;} \\ k_2^\alpha(\theta^\alpha + c_0^\alpha) \text{ для функционального менеджера;} \\ k_3^\alpha((l\,\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) \text{ для стратегического менеджера,} \\ \text{управляющего взаимодействием департаментов;} \\ k_4^\alpha((n\,\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \text{ для стратегического менеджера,} \\ \quad \text{управляющего взаимодействием дивизионов;} \\ 0, \text{ для прочих менеджеров, у которых } F_H^{\text{int}}(m) = 0; \\ +\infty, \text{ для прочих менеджеров, у которых } F_H^{\text{int}}(m) > 0, \end{cases}$$

где $v_1, \dots, v_k$ – непосредственные подчиненные менеджера m, k_1 – количество продуктовых потоков дивизионального менеджера, k_2 – количество функциональных потоков функционального менеджера, k_3 – количество продуктовых взаимодействий между департаментами, которыми управляет m или в управлении которыми он участвует, k_4 – количество функциональных взаимодействий между дивизионами, которыми управляет m или в управлении которыми он участвует.

Затраты менеджера по формуле (26) можно определить на основании групп $s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)$, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера, и группы $s_H(m) = s_H(v_1) \cup \dots \cup s_H(v_k)$, которой управляет менеджер m. Действительно, если $s_H(m)$ входит в продуктовую или функциональную линию, то m – дивизиональный или функциональный менеджер соответственно. Если каждая из групп $s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)$ состоит из производственных линий или функциональных линий, то m – стратегический менеджер соответствующего типа. Величины k_1, k_2, k_3, k_4 и внутренний поток менеджера $F_H^{\text{int}}(m)$ (см. лемму 4.3 выше) также полностью определяются группами $s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)$ и группой $s_H(m)$.

Таким образом, функция затрат (26) записывается в виде секционной функции $c(s_H(v_1), \dots, s_H(v_k))$, так же как и затраты менеджера в базовой модели (см. формулу (4)).

Функция затрат (26) допускает появление в иерархии менеджеров, которые не управляют ни одним внутренним потоком

($F_H^{\mathrm{int}}(m)=0$). Затраты подобных менеджеров нулевые. Например, *высший менеджер матричной иерархии не участвует в управлении потоками*. Его обязанности не связаны с управлением потоками. Однако в базовой модели затраты определяются только исходя из управляемых потоков. Поэтому считаем нулевыми затраты высшего менеджера матричной иерархии, который не управляет внутренними потоками.

Функция затрат (26) запрещает построение иерархии, в которой некоторый менеджер управляет одновременно и продуктовыми функциональными потоками (затраты такого менеджера бесконечны). То есть предполагаем, что слишком велики затраты «универсального» менеджера, поскольку такой менеджер выполняет слишком разнообразные функции. Подобный менеджер изображен на Рис. 4.26.

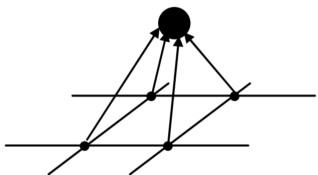


Рис. 4.26. Менеджер, управляющий и продуктовыми, и функциональными потоками

Также предполагаем, что **управлять взаимодействием дивизионов или департаментов могут лишь стратегические менеджеры**. Такие менеджеры требуют для своей работы подготовленных подчиненных. Например, стратегический менеджер, управляющий взаимодействием дивизионов, требует, чтобы сами дивизионы уже были сформированы. При этом их начальники решают все проблемы с продуктовыми потоками внутри дивизиона, а стратегическому менеджеру остается лишь управлять функциональными взаимодействием дивизионов. Если же сформирована только часть дивизионов, то менеджер, управляющий этими частями, несет слишком большие затраты, поскольку ему приходится участвовать в управлении потоками обоих типов.

Рассмотрим функцию затрат (26) и некоторую оптимальную иерархию, управляющую функционально связанными производственными линиями. Любой продуктовый поток внутри производственной линии управляется некоторым менеджером m. То есть этот поток – внутренний для менеджера m. Поэтому $F^{\mathrm{int}}(m) > 0$. Затраты менеджера m конечны, поскольку он входит в оптимальную иерархию. То есть, в соответствии с функцией затрат (26) m – либо дивизиональный менеджер, либо стратегический менеджер, управляющий взаимодействием департаментов. Аналогичные рассуждения можно провести для функциональных потоков. В результате получим следующие выводы.

Для функции затрат (26) в оптимальной иерархии любой продуктовый поток управляется дивизиональным менеджером или стратегическим менеджером, управляющим взаимодействием департаментов. Любой функциональный поток управляется функциональным менеджером или стратегическим менеджером, управляющим взаимодействием дивизионов. То есть, для функции (26) **можно рассматривать только иерархии, в которых всеми потоками управляют менеджеры среднего звена и стратегические менеджеры**. Это позволяет найти оптимальную иерархию. Решению этой задачи посвящен следующий раздел.

4.2.8. Условия оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархий

Рассмотрим дивизиональную иерархию (см. пример на Рис. 4.21), имеющую минимальные затраты среди всех дивизиональных иерархий. Стратегическим менеджерам могут быть непосредственно подчинены начальники дивизионов, но не все прочие дивизиональные менеджеры. Поэтому сами дивизионы могут перестраиваться независимо друг от друга и от стратегических менеджеров. Таким образом, в дивизиональной иерархии с минимальными затратами все дивизионы оптимальны. Затраты оптимального дивизиона определяются формулой (19). Минимальные затраты стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием l дивизионов, определяются формулой (23). Таким образом, **минимальные затраты имеет дивизиональная r_*-иерархия** $H_{divisional}$, в которой у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Затраты этой иерархии равны:

$$(27)\ c(H_{divisional}) = \frac{(r_* + 1)^\alpha}{r_* - 1}[l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha)],$$

где r_* – оптимальная норма управляемости, зависящая от нестабильности внешней среды (см. формулу (13) на странице 273). Например, при $\alpha = 2$ минимальные затраты имеет дивизиональная 3-иерархия (см. Рис. 4.21). В формуле (27) первое слагаемое в квадратных скобках соответствует затратам l дивизионов, второе слагаемое соответствует затратам стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием дивизионов.

Аналогичные рассуждения справедливы для функциональной иерархии (см. пример на Рис. 4.22): **минимальные затраты имеет функциональная r_*-иерархия** $H_{functional}$, в которой у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Затраты этой иерархии равны:

$$(28)\ c(H_{functional}) = \frac{(r_* + 1)^\alpha}{r_* - 1}[n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + (n-1)((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha)].$$

Например, при $\alpha = 2$ минимальные затраты имеет функциональная 3-иерархия (см. Рис. 4.22). В формуле (28) первое слагаемое в квадратных скобках соответствует затратам n департаментов, второе слагаемое соответствует затратам стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием департаментов.

Рассмотрим матричную иерархию (см. пример на Рис. 4.23), имеющую минимальные затраты среди всех матричных иерархий. Иерархия состоит из l дивизионов и n департаментов, начальники которых непосредственно подчинены высшему менеджеру. Следовательно, и дивизионы и департаменты могут перестраиваться независимо друг от друга. Поэтому в матричной иерархии с минимальными затратами все дивизионы и департаменты оптимальны. Затраты оптимального дивизиона определяются формулой (19). Затраты оптимального департамента определяются формулой (21). Таким образом, **минимальные затраты имеет матричная иерархия** H_{matrix}, в которой у каждого менеджера среднего звена ровно r_* непосредственных подчиненных. Затраты этой иерархии равны:

$$(29)\ c(H_{matrix}) = \frac{(r_* + 1)^\alpha}{r_* - 1}[l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha)].$$

Например, при $\alpha = 2$ минимальные затраты имеет матричная иерархия, изображенная на Рис. 4.23. В формуле (29) первое слагаемое в квадратных скобках соответствует затратам *l* дивизионов, второе слагаемое – затратам *n* департаментов.

Вопрос об оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархии решает следующее ключевое утверждение.

Утверждение 4.5 [10]. *Для функционально связанных производственных линий и функции затрат* (26) *найдется оптимальная дивизиональная*, *функциональная или матричная иерархия*.

В соответствии с данным утверждением на всем множестве $\Omega(N)$ иерархий, управляющих функционально связанными производственными линиями, оптимальна одна из типичных иерархий: дивизиональная, функциональная или матричная. Таким образом, **можно не рассматривать более сложные иерархии – достаточно ограничиться типичными иерархиями, которые наиболее широко распространены в реальных организациях**.

Доказательство утверждения 4.5 весьма громоздко и основано на сравнении затрат произвольной оптимальной иерархии с затратами типичных иерархий (см. [10]).

Независимо от того, какая из типичных иерархий оптимальна, **оптимальная норма управляемости равна** $\boldsymbol{r_*}$, причем r_* зависит только от показателя нестабильности внешней среды (см. Рис. 4.18 на странице 275). В крайне нестабильной внешней среде ($\alpha > 2.5$) оптимальная норма управляемости минимальна ($r_* = 2$), при стабилизации внешней среды r_* растет. На Рис. 4.21, 4.22 и 4.23 приведены примеры иерархий для случая $r_* = 3$ (одна из них оптимальна, например, для $\alpha = 2$). Ниже под дивизиональной, функциональной и матричной иерархией подразумеваются иерархии с оптимальной нормой управляемости r_*.

Для решения задачи об оптимальной иерархии осталось сравнить минимальные затраты типичных иерархий.

Преобразуя неравенства $c(H_{matrix}) \le c(H_{divisional})$, $c(H_{matrix}) \le c(H_{functional})$ и $c(H_{divisional}) \le c(H_{functional})$ в соответствии с формулами (27)-(29), получим условия:

$$c_0^\alpha \le \theta^\alpha \frac{n^\alpha - n}{n-1},\ c_0^\alpha \le \lambda^\alpha \frac{l^\alpha - l}{l-1} \text{ и } \theta^\alpha \frac{n^\alpha - n}{n-1} \le \lambda^\alpha \frac{l^\alpha - l}{l-1}.$$

Таким образом, из сравнения величин $\theta^\alpha(n^\alpha - n)/(n-1)$, $\lambda^\alpha(l^\alpha - l)/(l-1)$ и c_0^α можно определить, какая из иерархий оптимальна: дивизиональная, функциональная или матричная. Если минимально значение $\theta^\alpha(n^\alpha - n)/(n-1)$, то оптимальна дивизиональная r_*-иерархия, если минимально значение $\lambda^\alpha(l^\alpha - l)/(l-1)$, то оптимальна функциональная r_*-иерархия, если минимально значение c_0^α, то оптимальна матричная иерархия, в которой у каждого менеджера среднего звена ровно r_* непосредственных подчиненных.

Более наглядно этот результат можно изобразить графически (см. Рис. 4.27). Перепишем неравенства в другой форме. Условие оптимальности матричной иерархии можно записать в виде:

$$(30)\quad \frac{c_0}{\theta} \le \left(\frac{n^\alpha - n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ и } \frac{c_0}{\lambda} \le \left(\frac{l^\alpha - l}{l-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Условие $c(H_{divisional}) \le c(H_{functional})$ можно переписать в виде:

$$(31)\quad \frac{c_0}{\lambda}\left(\frac{n^\alpha - n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \frac{c_0}{\theta}\left(\frac{l^\alpha - l}{l-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

В соответствии с формулами (30) и (31) диаграмму оптимальности различных видов иерархии можно построить в координатах c_0/θ и c_0/λ. То есть **абсцисса будет соответствовать отношению постоянных и переменных затрат на управление функциональной связью, а ордината – отношению постоянных и переменных затрат на управление продуктовой связью в условиях стабильной внешней среды**.

Отметим, что на оптимальность дивизиональной, функциональной или матричной иерархии влияет только отношение постоянных и переменных затрат, а не «масштаб» измерения. То есть результаты не зависят от того, в каких единицах измеряются затраты. По формулам (30) область оптимальности матричной иерархии расположена левее и ниже точки с координатами $([(n^\alpha - n)/(n-1)]^{1/\alpha}; [(l^\alpha - l)/(l-1)]^{1/\alpha})$. По формуле (31) через эту точку и через точку (0; 0) проходит прямая, ниже которой дивизиональная иерархия имеет меньшие затраты, чем функциональная. На Рис. 4.27 изображена соответствующая диаграмма оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархий.

Рассмотрим случай одинакового количества производственных и функциональных линий: $n = l$. В этом случае на Рис. 4.27 линия разграничения области оптимальности дивизиональной и функциональной иерархии наклонена под 45º. Если продуктовые связи интенсивнее функциональных ($\lambda > \theta$), то дивизиональная иерархия предпочтительнее, чем функциональная. И наоборот, при сильных функциональных связях ($\theta > \lambda$) функциональная иерархия предпочтительнее дивизиональной. Таким образом, из модели следует следующее правило: **менеджеры среднего звена должны управлять наиболее интенсивными потоками, снижая нагрузку стратегических менеджеров**. Таким образом, модель позволяет доказать правило, широко известное практикам построения организаций (например, в [8] приведены аргументы в пользу того, что низшие менеджеры должны управлять наиболее сложными (интенсивными) связями исполнителей, «скрывая» сложность от вышестоящих менеджеров). Для случая $n = l = 2$ в [29] также доказана указанная закономерность. Рис. 4.27 позволяет сделать еще один вывод: если достаточно велика интенсивность как продуктовых, так и функциональных потоков, то оптимальна матричная иерархия, то есть менеджеры среднего звена должны управлять всеми потоками.

Лемма 4.4 [10]. При $n \geq 2$ и $\alpha > 1$ величина $[(n^\alpha - n)/(n-1)]^{1/\alpha}$ монотонно возрастает по n и по α.

В силу леммы величина $[(l^\alpha - l)/(l-1)]^{1/\alpha}$ также монотонно возрастает. Таким образом, увеличение n и α приводит к смещению вправо границы оптимальности матричной иерархии. Аналогично, увеличение l и α приводит к смещению вверх границы оптимальности матричной иерархии.

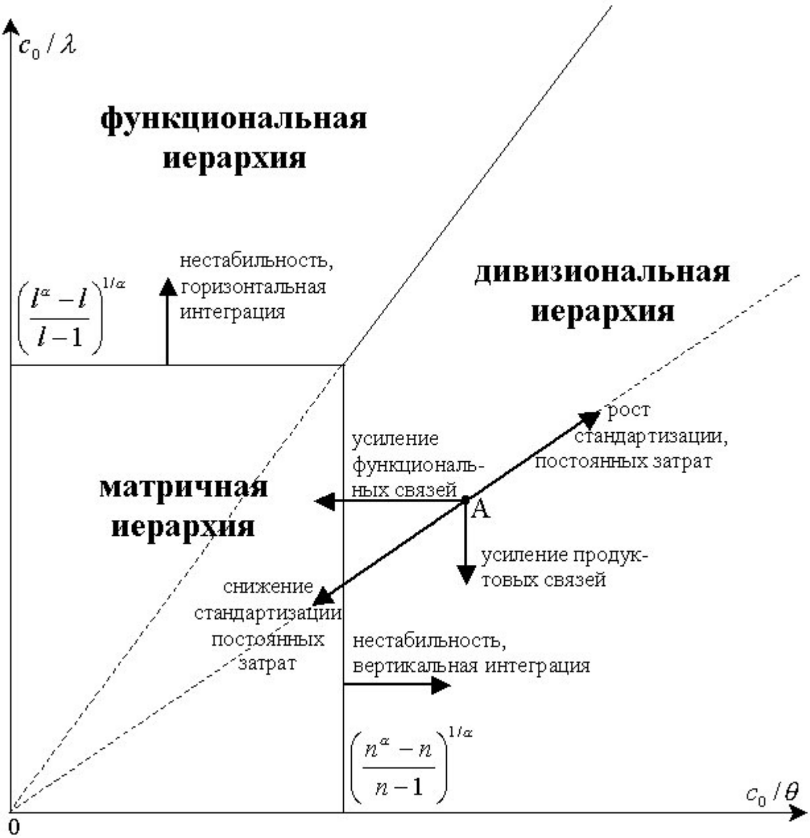


Рис. 4.27. Области оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархий

Рассмотрим случай равенства интенсивности продуктовых и функциональных потоков: $\lambda = \theta$. На Рис. 4.27 эта точка лежит на прямой, наклоненной под 45°, то есть делящей всю область пополам. Если $n > l$, то затраты функциональной иерархии меньше, чем затраты дивизиональной, если $n < l$ – наоборот[1]. То есть **при равной интенсивности продуктовых и функциональных потоков менеджеры среднего звена должны управлять более короткими**

[1] *При $n > l$ прямая, разделяющая области оптимальности дивизиональной и функциональной иерархий, наклонена менее, чем под 45°, при $n < l$ – наоборот.*

линиями, снижая интенсивность потоков, управляемых стратегическими менеджерами. Действительно, пусть $n > l$. Тогда предпочтительнее функциональная иерархия (см. Рис. 4.22), в которой менеджеры среднего звена управляют более короткими функциональными линиями, а стратегические менеджеры управляют взаимодействием линий с интенсивностью $l\lambda$. Дивизиональная иерархия (см. Рис. 4.21) в этом случае привела бы к тому, что стратегические менеджеры управляли бы взаимодействием «длинных» производственных линий с интенсивностью $n\theta = n\lambda > l\lambda$. Аналогично, при $n < l$ предпочтительнее дивизиональная иерархия.

Предположим, что организация растет «в обоих направлениях», то есть увеличиваются и n и l. Это приводит к расширению области оптимальности матричной иерархии (см. лемму 4.4 и Рис. 4.27). **При одновременном росте *n* и *l* стратегические менеджеры как в дивизиональной, так и в функциональной иерархии несут большие затраты, поэтому оптимальной становится матричная иерархия**.

Следует отметить, что значительный рост n и l можно компенсировать незначительным снижением потоков. При больших n и l границы оптимальности матричной иерархии растут соответственно как $n^{(\alpha-1)/\alpha}$ и $l^{(\alpha-1)/\alpha}$. В достаточно нестабильной внешней среде ($\alpha = 2$) двукратный рост n и l (то есть увеличение числа исполнителей в четыре раза) компенсируется снижением интенсивностей потоков θ и λ в $\sqrt{2} \approx 1.4$ раза. Легко видеть, что при этом на Рис. 4.27 точка $(c_0/\theta; c_0/\lambda)$ сдвинется вправо и вверх пропорционально сдвигу границ области оптимальности матричной иерархии. Если была оптимальной дивизиональная или функциональная иерархия, то они и останутся оптимальными. При стабилизации внешней среды небольшое изменение интенсивности компенсирует еще больший рост размеров. Например, при $\alpha = 1.1$ двукратный рост n и l компенсируется снижением потоков на 7 %.

Указанную закономерность можно интерпретировать как «пределы роста» организации с древовидной иерархией. В полностью стабильной внешней среде организация с дивизиональной или функциональной иерархией может расти неограниченно. В реальных же ситуациях при наличии нестабильности **рост организации с древовидной иерархией ограничен,** поскольку рост затрат стратегических менеджеров заставляет передавать часть полномочий дополнительным менеджерам среднего звена – переходить к матричной иерархии.

В соответствии с леммой 4.4, **при увеличении нестабильности внешней среды α становится оптимальной матричная иерархия** (см. Рис. 4.27). В различных работах по менеджменту (см., например, [8]) отмечается, что нестабильная внешняя среда приводит преимущественно к матричной иерархии. Эту закономерность, наблюдаемую на практике, модель объясняет следующим образом. В условиях меняющейся внешней среды стратегические менеджеры уже не справляются с управлением большим количеством потоков (передают полномочия по управлению всеми потоками менеджерам среднего звена). При достаточно большом показателе нестабильности границы оптимальности матричной иерархии приближаются к n и l. То есть при крайне нестабильной внешней среде матричная иерархия оптимальна при любых разумных отношениях постоянных и переменных затрат[1].

Наоборот, в стабильной внешней среде матричная иерархия не оптимальна. При $\alpha = 1$ границы оптимальности матричной иерархии становятся нулевыми (см. Рис. 4.27). То есть область оптимальности матричной иерархии «стягивается» в начало координат. Кроме того, в стабильной внешней среде одинаковы затраты дивизиональной и функциональной иерархий. Оптимальная норма управляемости в этом случае неограниченно возрастает (см. Рис. 4.18 на странице 275). То есть дивизионы и департаменты представляют собой двухуровневые иерархии, начальники которых непосредственно подчинены единственному стратегическому менеджеру.

Рассмотрим влияние стандартизации на вид оптимальной иерархии. Как указано в разделе 4.2.5, рост стандартизации ослабляет интенсивность производственных и функциональных потоков, которыми должны управлять менеджеры. Таким образом, рост стандартизации приводит к пропорциональному снижению величин λ и θ.

---

[1] *Постоянные затраты на управление одной связью не должны превышать переменных затрат на управление всеми связями производственной или функциональной линии.*

На Рис. 4.27 рассмотрим точку A в области оптимальности дивизиональной иерархии. Рост стандартизации приводит к сдвигу точки A по прямой, соединяющей ее с началом координат. На Рис. 4.27 этот сдвиг обозначен стрелкой, идущей вправо и вверх, то есть от начала координат. Поэтому рост стандартизации не изменит оптимальности дивизиональной иерархии. Наоборот, снижение стандартизации переведет организацию в область оптимальности матричной иерархии. Аналогичным образом можно рассмотреть точку в области оптимальности функциональной иерархии. В результате получим следующие выводы. Рост уровня стандартизации не изменит оптимальности дивизиональной или функциональной иерархии. Снижение уровня стандартизации приведет к оптимальности матричной иерархии.

Во многих исследованиях по менеджменту отмечено, что в реальных организациях матричная иерархия имеет место в основном в случае низкой стандартизации (см. [8]). Этот факт объясняется следующим образом: низкая стандартизация приводит к перегрузке стратегических менеджеров, заставляя их увеличивать число менеджеров среднего звена, которые будут управлять всеми потоками на нижнем уровне. В построенной модели снижение стандартизации также приводит к росту затрат стратегических менеджеров.

При изменении параметров модели (в частности, стандартизации и стабильности) вид оптимальной иерархии также может измениться (см. Рис. 4.27). В этом случае созданная в организации иерархия становится неоптимальной и появляется необходимость *реструктуризации – изменения иерархии*[1]. Реструктуризация обычно связана с весьма большими затратами времени, средств и т.п. Поэтому полезно сделать несколько выводов об устойчивости вида оптимальной иерархии по отношению к изменению ключевых параметров модели.

Матричная иерархия устойчива к снижению уровня стандартизации и стабильности внешней среды. Повышение уровня стандартизации или стабильности может привести к неоптимальности матричной иерархии.

---

[1] *Без реструктуризации организация может не выдержать конкурентной борьбы, поскольку ее эффективность ниже, чем у организаций с оптимальными иерархиями.*

Дивизиональная и функциональная иерархия устойчивы к повышению уровня стандартизации и стабильности внешней среды. Снижение уровня стандартизации или стабильности может привести к оптимальности матричной иерархии.

Аналогично стандартизации можно рассмотреть изменение постоянных затрат c_0 на управление потоком. Как видно из Рис. 4.27, изменение c_0 приводит к тем же эффектам, что и изменение стандартизации. Таким образом, низкие постоянные затраты приводят к оптимальности матричной иерархии. Высокие постоянные затраты приводят к оптимальности дивизиональной или функциональной иерархии. Обратные выводы можно сделать при пропорциональном росте интенсивности потоков, то есть при росте переменных затрат. Таким образом, дивизиональная и функциональная иерархия устойчивы к росту постоянных затрат по отношению к переменным. Снижение отношения постоянных и переменных затрат приводит к оптимальности матричной иерархии. В [29] сделан аналогичный вывод о влиянии отношения постоянных и переменных затрат на оптимальность матричной иерархии.

Определим *два типа роста организации*:

1. *Горизонтальная интеграция*. Соответствует увеличению количества производственных линий l. Компания может приобретать аналогичные производства, выпускающие похожие товары, либо расположенные в другом регионе и т.п. Одним из примеров горизонтальной интеграции может служить покупка нефтеперерабатывающей компанией еще одного нефтеперерабатывающего завода, что позволяет увеличить объемы производства, либо выйти на новый региональный рынок.

2. *Вертикальная интеграция*. Соответствует увеличению длины производственной линии n. Компания может приобретать предприятия, поставляющие сырье, либо приобретающие продукцию. Все это увеличивает общую длину производственной линии, то есть количество операций от получения сырья до отгрузки продукции конечному потребителю. Одним из примеров вертикальной интеграции может служить покупка нефтеперерабатывающей компанией предприятия нефтедобычи и сети автозаправочных станций с целью контроля всей производственной цепочки – от добычи до конечного потребителя.

В литературе по менеджменту приводится большое количество примеров горизонтальной и вертикальной интеграции. Рассмотрим вопрос о том, как различные виды интеграции связаны с необходимостью реструктуризации.

Предположим, что в организации создана оптимальная дивизиональная иерархия, то есть имеется некоторая точка в области оптимальности дивизиональной иерархии. Как видно из Рис. 4.27, горизонтальная интеграция приведет к увеличению l, то есть к расширению областей оптимальности матричной и дивизиональной иерархии. Поэтому при горизонтальной интеграции дивизиональная иерархия останется оптимальной. Вертикальная интеграция сужает область оптимальности дивизиональной иерархии, что может потребовать реструктуризации – перехода к функциональной или матричной иерархии. Итак, для организации с дивизиональной иерархией предпочтительным видом роста является горизонтальная интеграция, поскольку вертикальная интеграция может потребовать реструктуризации.

Рассмотрим, как влияет на оптимальную иерархию изменение интенсивности потоков. Усиление продуктовых связей соответствует росту объемов производства. Если есть возможность нарастить объемы производства без усиления функциональных связей, то точка A на Рис. 4.27 сдвигается вниз. При этом дивизиональная иерархия останется оптимальной, поскольку возрастут лишь затраты менеджеров среднего звена и не изменятся затраты стратегических менеджеров. Напротив, усиление функциональных связей увеличивает затраты стратегических менеджеров, что может вызвать необходимость реструктуризации (точка A на Рис. 4.27 сдвигается влево).

Итак, **дивизиональная иерархия устойчива по отношению к горизонтальной интеграции и росту объемов производства без усиления функциональных связей. Вертикальная интеграция и усиление функциональных связей могут привести организацию с дивизиональной иерархией к необходимости реструктуризации**. **Функциональная иерархия устойчива по отношению к вертикальной интеграции и росту функциональных связей. Горизонтальная интеграция и рост объемов производства (продуктовых потоков) могут привести к необходимости реструктуризации организации с функциональной иерархией**.

4.3. Общая модель иерархии управления

В рамках определений, введенных в предыдущем разделе, *общую задачу поиска оптимальной иерархии* можно сформулировать следующим образом.

Пусть задано конечное множество исполнителей N, множество допустимых иерархий $\Omega \subseteq \Omega(N)$ и *функция затрат* $C : \Omega \to [0,+\infty)$, которая каждой допустимой иерархии ставит в соответствие неотрицательное число. Необходимо найти допустимую иерархию с минимальными затратами, то есть найти

$$H^* \in \operatorname*{Arg\,min}_{H \in \Omega} C(H).$$

Множество допустимых иерархий Ω может как совпадать с множеством $\Omega(N)$ всех иерархий, управляющих набором исполнителей N, так и быть его строгим подмножеством. В частности, в зависимости от содержательной постановки задачи, может искаться оптимальное дерево или оптимальная r-иерархия.

Когда количество исполнителей мало, эта задача может решаться полным перебором всех возможных иерархий (понятно, что в общем случае это единственный способ решения). Однако обычно допустимых иерархий настолько много, что задать функцию затрат перечислением ее значений для всех иерархий из множества Ω невозможно. Тогда функция затрат определяется аналитическим выражением или алгоритмом, которые зависят от структурных параметров иерархии – количества менеджеров, числа их подчиненных, выполняемых менеджерами задач и т.п.

Для разработки эффективных методов поиска оптимальных иерархий необходимо делать предположения о виде функции затрат – ограничивать рассмотрение некоторым их классом. Эти предположения могут основываться на эмпирических исследованиях вида функций затрат реальных организационных иерархий или вводиться из общеэкономических соображений.

Сформулируем понятие секционных функций затрат, которые позволяют моделировать и решать широкий класс задач поиска оптимальных иерархий.

4.3.1. Группы исполнителей и секционные функции затрат

Определение 4.9 [10]. Пусть задано множество исполнителей N. Функция затрат менеджера называется ***секционной***, если она зависит только от групп исполнителей, которыми управляют его непосредственные подчиненные.

Таким образом, если менеджер m в иерархии H имеет r непосредственных подчиненных $v_1, v_2, \ldots, v_r$, то его затраты можно записать в виде

$$c(m, H) = c(s_H(v_1), \ldots, s_H(v_r)).$$

Число аргументов секционной функции затрат равно количеству непосредственных подчиненных менеджера и функция определяется для любого их количества. Значение секционной функции затрат не зависит от порядка следования ее аргументов (групп) и не изменяется при их перестановке. Таким образом, секционная функция затрат ставит в соответствие произвольному непустому множеству групп исполнителей число – затраты менеджера, непосредственные подчиненные которого управляют этими группами исполнителей.

При секционной функции затраты менеджера не зависят от того, как «внутри» организована работа его непосредственных подчиненных, а зависят только от групп исполнителей, которыми те управляют. Так, затраты менеджера m в иерархиях на Рис. 4.28 а) и 4.28 б) одинаковы, поскольку в обеих иерархиях менеджер m имеет двух непосредственных подчиненных, управляющих группами исполнителей $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 4, 5, 6\}$. При этом, понятно, что совокупные затраты этих иерархий могут отличаться.

Например, в базовой модели, рассмотренной в предыдущем разделе, затраты $c(\cdot)$ менеджера определяются заданными технологическими потоками и функцией $\varphi(\cdot)$. Внутренние и внешние потоки менеджера зависят только от групп, управляемых его непосредственными подчиненными $v_1, \ldots, v_k$. Таким образом, функция затрат менеджера (4) зависит только от групп $s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)$, то есть является секционной. Таким образом, **в базовой модели рассматривается частный случай секционной функции затрат**.

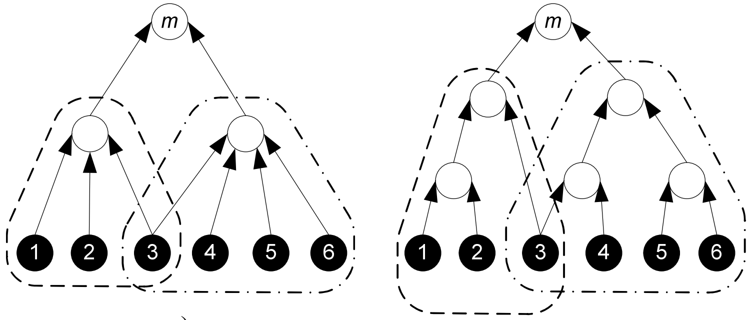


Рис. 4.28. К определению секционной функции затрат

4.3.2. Некоторые свойства секционных функций затрат

При незначительном техническом ограничении на секционную функцию утверждение 4.1 остается верным и для общей модели. Свойства оптимальных иерархий (i)-(iii) из утверждения 4.1 существенно облегчают поиск оптимальной иерархии: в числе прочего, из них следует, что можно рассматривать только конечные множества допустимых иерархий, и каждый менеджер будет иметь как минимум двух непосредственных подчиненных. Несмотря на это, задача поиска оптимальной иерархии для произвольной секционной функции затрат остается весьма сложной. В то же время, даже для такой общей постановки задачи в ряде случаев удается очень много сказать о виде оптимальной иерархии.

Ниже описывается ряд свойств секционных функций затрат, при выполнении которых оптимальной будет одна из введенных в разделе 4.2.1 «типовых» иерархий – дерево, 2-иерархия, веерная или последовательная иерархия. Эти результаты позволяют во многих случаях решить задачу или существенно упростить применение численных алгоритмов поиска оптимальной иерархии. Начнем с условий, при которых оптимальной иерархией будет дерево.

Определение 4.10 [2]. Секционная функция затрат менеджера называется ***монотонной по группам***, если затраты любого менеджера не убывают как при расширении групп, управляемых непосредственными подчиненными, так и при добавлении новых непосредственных подчиненных, то есть для любого набора групп $s_1, \ldots, s_r$ выполнены неравенства:

$c(s_1, s_2, \ldots, s_r) \le c(s, s_2, \ldots, s_r)$, где группа s содержит s_1 ($s_1 \subset s$);

$c(s_1, s_2, \ldots, s_r) \le c(s_1, s_2, \ldots, s_r, s)$, где s – произвольная группа.

Свойство монотонности по группам иллюстрируется Рис. 4.29, на котором изображена часть иерархии, подчиненная менеджеру m, имеющему непосредственных подчиненных m_1 и m_2.

Стрелками показаны возможные способы расширения групп, управляемых непосредственными подчиненными менеджера m (иерархии 4.29 а) и 4.29 б) и добавления новой подчиненной группы (иерархия 4.29 в). Иерархия 4.29 а) получена из исходной путем расширения группы, подчиненной менеджеру m_2, за счет подчиненных менеджера m_1. В иерархии 4.29 б) подчиненная менеджеру m_2 группа расширяется за счет добавления новых исполнителей. Наконец, в иерархии 4.29 в) менеджеру m добавляется новый непосредственный подчиненный – менеджер m_3. Добавляемые части иерархии для наглядности обведены штрихованной линией. Функция затрат менеджера будет монотонной по группам, если при любых подобных преобразованиях затраты менеджера m (выделенного на рисунке жирной линией) не уменьшаются.

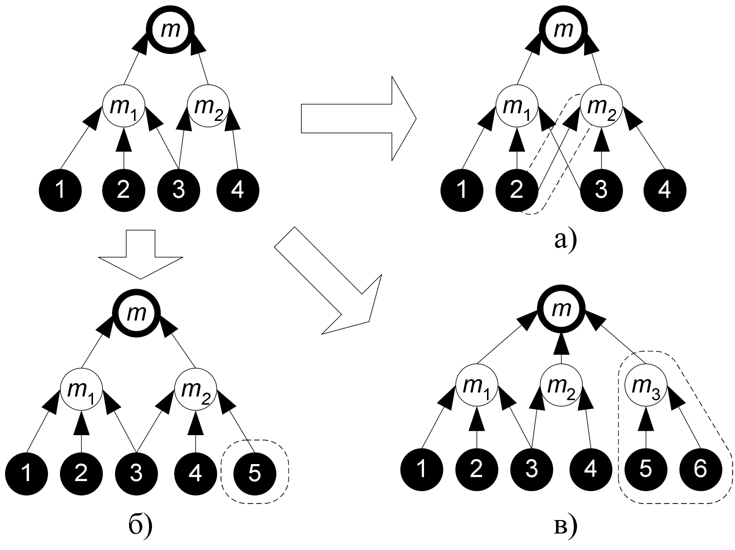


Рис. 4.29. К определению монотонности по группам

Утверждение 4.6 [2]. *Если функция затрат монотонна по группам, то для заданного множества исполнителей N на множестве $\Omega(N)$ всех иерархий существует оптимальное дерево.*

Таким образом, если функция затрат менеджера монотонна по группам и на множестве всех иерархий необходимо найти оптимальную, то можно искать ее только среди деревьев[1]. Это позволяет использовать разработанные в [2] численные алгоритмы поиска оптимальных деревьев[2].

По сути, монотонность по группам говорит о неоптимальности так называемого *множественного подчинения* сотрудников – если функция затрат монотонна по группам, то каждый сотрудник, за исключением топ-менеджера, должен иметь единственного непосредственного начальника.

Далее рассматриваются условия, при которых оптимальными будут иерархии с минимальной и максимальной возможными нормами управляемости.

Определение 4.11. Секционная функция затрат называется ***сужающей***, если для любого менеджера m с непосредственными подчиненными $v_1, \ldots, v_r$ при $r \geq 3$ можно без увеличения затрат иерархии переподчинить нескольких сотрудников из $v_1, \ldots, v_r$ новому менеджеру m_1 и непосредственно подчинить менеджера m_1 менеджеру m. Секционная функция затрат называется ***расширяющей***, если при любых подобных переподчинениях затраты иерархии не уменьшаются.

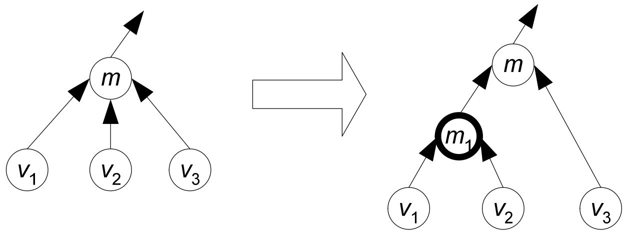
Рис. 4.30 иллюстрирует это определение. На нем слева (иерархия а) изображена секция менеджера m, состоящая из него самого и его непосредственных подчиненных v_1, v_2, v_3, которые могут быть как менеджерами, так и исполнителями. Справа на рисунке (иерархия б) изображена та же часть иерархии после переподчинения части непосредственных подчиненных менеджера m (например,

---

[1] *То же можно сказать и о поиске оптимальной иерархии на любом другом допустимом множестве Ω, включающем все деревья, а также о множестве r-иерархий, включающем все r-деревья.*

[2] *Для произвольной секционной функции затрат точный алгоритм поиска оптимального дерева имеет довольно высокую вычислительную сложность, позволяя решить задачу не более чем для 15-20 исполнителей (имеется в виду решение задачи персональным компьютером в течение нескольких минут).*

сотрудников v_1 и v_2) новому менеджеру m_1 (обведенному на рисунке жирной линией). Если для любого менеджера всегда найдется подобное перестроение, не увеличивающее затраты иерархии, то функция затрат является сужающей. Если же любое такое перестроение не приводит к уменьшению затрат иерархии, то функция затрат является расширяющей.



а) б)

Рис. 4.30. К определению сужающих и расширяющих функций затрат

Подчеркнем, что определение требует невозрастания или неубывания затрат всей иерархии. При этом изменение затрат иерархии складывается из затрат добавляемого менеджера m_1 и изменения затрат менеджера m (у него уменьшается количество непосредственных подчиненных). Поэтому для того, чтобы функция затрат была сужающей, как минимум необходимо, чтобы затраты менеджера m не увеличивались при замене нескольких его непосредственных подчиненных менеджером m_1.

Содержательно определение сужающей функции затрат означает, что при наличии в иерархии менеджера с более чем двумя непосредственными подчиненными всегда выгодно нанять ему «помощника», сняв с менеджера часть его нагрузки. При расширяющей функции затрат, наоборот, всегда выгодно увольнять промежуточных менеджеров. Эти соображения иллюстрируют идею доказательства (см. [2]) следующего результата

Утверждение 4.7 [2]. *При сужающей функции затрат на множестве $\Omega(N)$ существует оптимальная 2-иерархия, при расширяющей функции затрат оптимальна веерная иерархия.*

Таким образом, если функция затрат сужающая, то на множестве $\Omega(N)$ (или на произвольном множестве Ω, включающем все 2-

иерархии) оптимальную иерархию можно искать только среди 2-иерархий. Если функция затрат – расширяющая, и веерная иерархия допустима, то эта иерархия и будет оптимальной[1].

Если функция затрат одновременно и монотонная по группам, и сужающая, то, пользуясь утверждениями 4. и 4.7, несложно показать, что оптимальная иерархия будет 2-деревом. Более того, для монотонной по группам функции затрат определение 4.11 можно ослабить, требуя его выполнения только в случае, когда все сотрудники $v_1, \ldots, v_r$ управляют непересекающимися группами исполнителей. При выполнении такого ослабленного условия функция затрат называется *сужающей на непересекающихся группах* [10]. Для монотонной функции расширение на непересекающихся группах влечет оптимальность веерной иерархии.

Результат утверждения 4.7 использует невозрастание (или неубывание) затрат иерархии при последовательных операциях переподчинения – для сужающей функции каждое переподчинение не увеличивает затрат иерархии, а для расширяющей – не уменьшает их. При этом оптимальными оказываются иерархии, которые не могут быть преобразованы никаким переподчинением. Таким же образом можно вводить и другие преобразования иерархии и пользоваться неубыванием или невозрастанием затрат иерархии относительно них.

Пусть, например, на множестве допустимых иерархий $\Omega(N)$ ищется оптимальная иерархия при сужающей функции затрат. Согласно утверждению 4.7 оптимальную иерархию можно искать среди 2-иерархий. Допустим, в некоторой 2-иерархии H менеджер m имеет непосредственно подчиненных ему менеджеров m_1 и m_2, причем первый из них управляет некоторым сотрудником v и исполнителем w, а второй – некоторым сотрудником v' и исполнителем w' (см. Рис. 4.31 а). У всех этих сотрудников могут быть и другие начальники, не изображенные на рисунке. Обозначим через s_1 и s_2 группы, управляемые соответственно менеджерами m_1 и m_2.

---

[1] *Найти 2-дерево с минимальными затратами позволяют алгоритмы, предложенные в* [2].

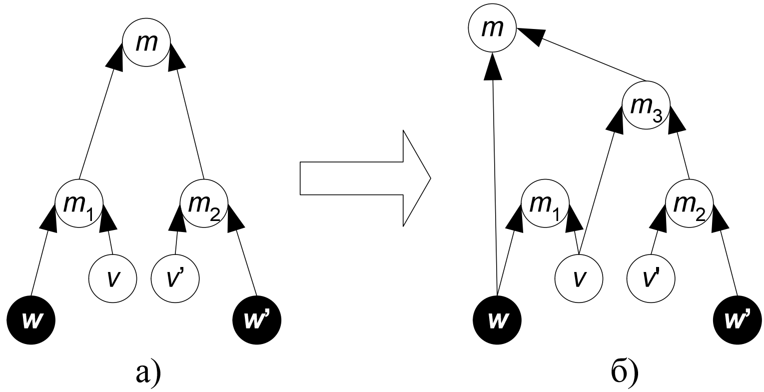


Рис. 4.31. К определению сильно сужающей функции затрат

Преобразуем изображенную на рисунке часть иерархии: удалим связи от менеджеров m_1 и m_2 к m, добавим нового менеджера m_3, которого подчиним менеджеру m и назначим менеджеру m_3 в непосредственные подчиненные сотрудника v и менеджера m_2. Кроме того, непосредственно подчиним исполнителя w менеджеру m (см. Рис. 4.31 б). Легко проверить, что при таком преобразовании затраты менеджеров иерархии, не изображенных на рисунке, не меняются, и затраты иерархии изменятся на величину

$$c(s_1 \setminus \{w\}, s_2) + c((s_1 \setminus \{w\}) \cup s_2, \{w\}) - c(s_1, s_2).$$

Точно такую же операцию можно проделать и с менеджером m_2.

Определение 4.12 [10]. Сужающая функция затрат называется ***сильно сужающей***, если для любых групп s_1 и s_2 из двух или более исполнителей выполнено по крайней мере одно из двух условий:

а) для любого $w \in s_1$ $c(s_1, s_2) \ge c(s_1 \setminus \{w\}, s_2) + c((s_1 \setminus \{w\}) \cup s_2, \{w\})$,

б) для любого $w \in s_2$ $c(s_1, s_2) \ge c(s_1, s_2 \setminus \{w\}) + c(s_1 \cup (s_2 \setminus \{w\}), \{w\})$.

Таким образом, для сильно сужающей функции затрат всегда можно, не увеличив затрат иерархии, проделать описанное выше преобразование. Это преобразование не может быть проделано только в том случае, если иерархия является последовательной иерархией, что приводит к следующему утверждению.

Утверждение 4.8 [10]. *Для сильно сужающей функции затрат на множестве $\Omega(N)$ существует оптимальная последовательная иерархия.*

Следовательно, при сильно сужающей функции затрат оптимальную на $\Omega(N)$ иерархию можно искать только среди последовательных иерархий, для чего в [2] разработаны как аналитические методы, так и численные алгоритмы.

Несложно показать[1], что как монотонные по группам функции, так и функции, не являющиеся монотонными по группам, могут быть сужающими, могут быть расширяющими, могут не быть ни сужающими, ни расширяющими. Кроме того, в предельных случаях функция может быть и сужающей, и расширяющей одновременно. Соотношение классов функций изображено на Рис. 4.32. Для монотонных по группам функций оптимально дерево, для расширяющих функций оптимальна двухуровневая иерархия, для сужающих функций оптимальна 2-иерархия, для монотонных по группам сужающих функций оптимально 2-дерево.

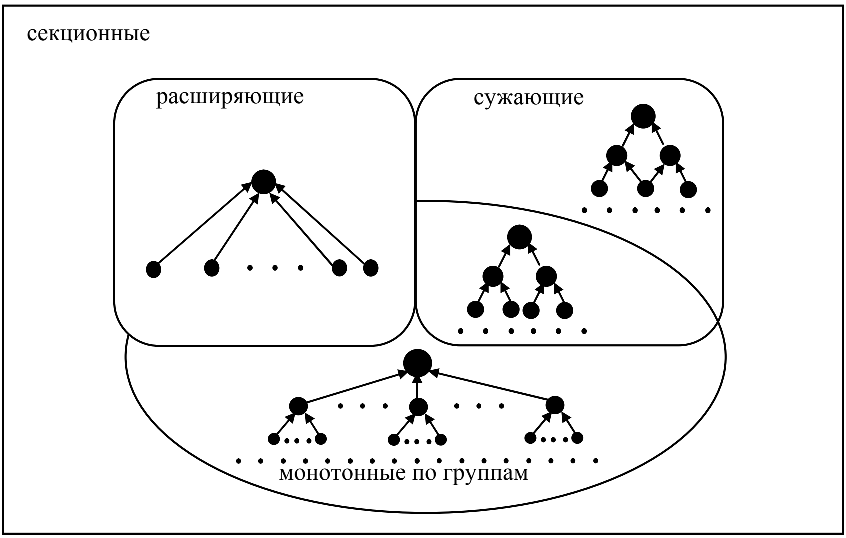


Рис. 4.32. Соотношение классов монотонных по группам, сужающих и расширяющих функций

---

[1] *См. примеры ниже и примеры, приведенные в* [*10*].

4.3.3. Примеры секционных функций затрат

В общем виде секционная функция затрат менеджера $c(s_1, \ldots, s_r)$ представляет собой функцию множеств и потому является довольно сложным объектом. Задание такой функции затрат в общем случае сводится к прямому перечислению ее значений для всех возможных наборов групп, что обычно невозможно из-за огромного количества таких наборов.

Для иллюстрации описанных в предыдущем разделе свойств секционных функций представим секционную функцию затрат менеджера в компактной форме, поставив в соответствие каждой группе или набору групп одну или несколько числовых характеристик и считая функцию затрат менеджера зависящей уже от этих характеристик.

Проще всего это сделать, введя меру на множестве исполнителей. Каждому исполнителю $w \in N$ ставится в соответствие положительное число $\mu(w)$ – его *мера*. Мерой $\mu(s)$ группы исполнителей $s \subseteq N$ называется суммарная мера исполнителей, входящих в группу, то есть $\mu(s) := \sum_{w \in s} \mu(w)$. Тогда считаем, что функцию затрат менеджера можно записать в виде функции $r + 1$ переменных: $c(s_1, \ldots, s_r) = c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$, где $\mu_1, \ldots, \mu_r$ – это меры групп, управляемых непосредственными подчиненными менеджера, а μ – мера группы, которой управляет он сам. Такую функцию затрат будем называть *зависящей от мер*[1]. Содержательно мера исполнителя может соответствовать, например, сложности выполняемой им работы. Тогда мера группы соответствует суммарной сложности или объему работ, выполняемых группой, и именно от этой сложности зависят затраты по управлению группой.

Пример 4.4. Пусть все исполнители считаются одинаковыми, и каждый из них имеет меру, равную единице. Тогда мера группы равна количеству входящих в нее исполнителей, а функция затрат менеджера зависит от количества подчиненных ему исполнителей и от количества исполнителей, которыми управляют непосредственно подчиненные ему сотрудники. •

---

[1] *Напомним, что функция затрат менеджера задается для любого количества его непосредственных подчиненных r и симметрична по перестановке аргументов $\mu_1, \ldots, \mu_r$ (но не последнего аргумента μ).*

Задание меры исполнителей, конечно, является далеко не единственным, хотя и самым простым способом введения числовых характеристик групп. В частности, выше рассматривались «потоковые» функции затрат менеджера, зависящие от материальных, финансовых и информационных потоков между подчиненными группами исполнителей. Приведем несколько примеров функций затрат, зависящих от мер.

<u>Пример 4.5.</u> Пусть затраты менеджера пропорциональны мере управляемой им группы, то есть $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu) = \mu$. В этом случае среди всех возможных иерархий оптимальна веерная иерархия, поскольку любая иерархия по определению включает менеджера, управляющего группой N из всех исполнителей, и только в веерной иерархии этот менеджер будет единственным. Однако оптимальные иерархии будут уже не столь тривиальными, если ограничиться поиском только среди r-иерархий, где $r > 1$ – некоторое заданное число. •

<u>Пример 4.6.</u> Пусть функция затрат зависит от количества r непосредственных подчиненных менеджера и меры μ группы, которой управляет сам менеджер. Частным видом такой функции является *мультипликативная* функция затрат вида $c(r, \mu) = \varphi(r)\,\chi(\mu)$, где $\varphi(\cdot)$ и $\chi(\cdot)$ – некоторые неотрицательные монотонно возрастающие функции.

В мультипликативной функции затраты по работе с непосредственными подчиненными $\varphi(r)$ умножаются на «коэффициент ответственности» $\chi(\mu)$, зависящий от меры управляемой менеджером группы. •

<u>Пример 4.7.</u> В [2, 10] были введены и исследованы несколько более сложных зависящих от мер функций затрат менеджера:

(I) $c(\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu) = [\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_r^\alpha - \max(\mu_1^\alpha,\ldots,\mu_r^\alpha)]^\beta$,

(II) $c(\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu) = [\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_r^\alpha]^\beta$,

(III) $c(\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu) = [\mu^\alpha / \max(\mu_1^\alpha,\ldots,\mu_r^\alpha) - 1]^\beta$,

(IV) $c(\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu) = [\sum_{i=1}^{r}(\mu^\alpha - \mu_i^\alpha)]^\beta$.

Здесь α и β – некоторые неотрицательные параметры, позволяющие «подстроить» эти функции затрат к конкретным условиям. Ниже мы будем ссылаться на эти функции затрат по их номеру, то есть говорить о функции затрат (I), (II) и т.д.

Функции (I)-(IV) затрат менеджера определяются «сложностью» (объемом работ) сотрудников «секции» (отдела, подразделения и т.п.), которая непосредственно подчинена менеджеру. В различных организациях секция может управляться с использованием различных механизмов взаимодействия между менеджером и непосредственными подчиненными (внутри секции). Ниже функции (I)-(IV) интерпретируются как затраты менеджера для различных способов взаимодействия внутри секции. В менеджменте на качественном уровне рассматривается множество подобных способов взаимодействия.

Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера имеется «*полулидер*», который полностью справляется со своими обязанностями, не требуя от непосредственного начальника затрат на управление собой. Этому случаю может соответствовать функция (I). В (I) затраты менеджера определяются сложностями групп, которые управляются всеми непосредственными подчиненными, кроме «полулидера». Под полулидером подразумевается подчиненный, который управляет группой с наибольшей сложностью. Если среди непосредственных подчиненных менеджера *отсутствует «лидер»*, то менеджер несет затраты на управление всеми непосредственными подчиненными (функция (II)).

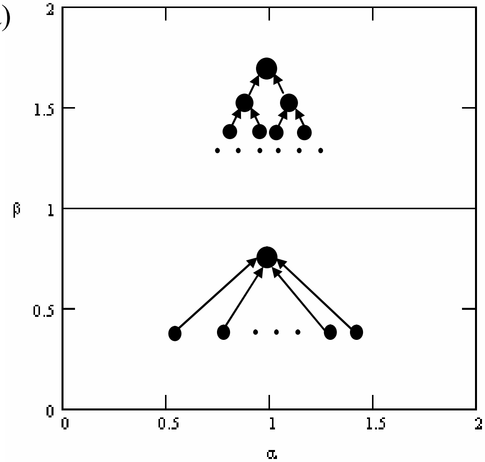
Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера (внутри секции) имеется «*лидер*», который помогает решить проблемы взаимодействия других непосредственных подчиненных (например, с помощью своего авторитета или опыта). За счет этого снижаются затраты непосредственного начальника. Этому случаю может соответствовать функция затрат (III). Чем более сложной группой управляет подчиненный менеджеру лидер, тем выше значение «лидера», тем более снижаются затраты его начальника.

Функция (IV) может описывать затраты *в процессе индивидуальной работы менеджера с каждым непосредственным подчиненным*. Затраты определяются разностями между сложностью группы, которой управляет менеджер, и сложностями групп, которыми управляют непосредственные подчиненные[1].

---

[1] *Например, менеджер m, которому подчинена группа $s_H(m)$, в процессе управления непосредственным подчиненным m_1 передает ему информацию о той части группы $s_H(m)$, которой m_1 не управляет. Объем этой инфор-*

а)



б)

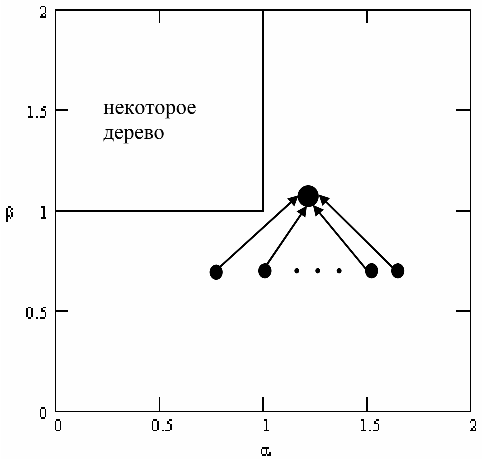


Рис. 4.33. Виды оптимальной иерархии для функции (*I*) (*а*) *и функции* (*II*) (*б*)

Очевидно, что функции (I) и (II) монотонны по группам, функции (III) и (IV) не являются монотонными по группам. Несложно проверить свойства сужения и расширения для этих функций. В

мации определяется разностью сложностей $\mu(s_H(m))$ *и* $\mu(s_H(m_1))$. *Сумма объемов информации по всем непосредственным подчиненным и определяет затраты менеджера* (*IV*).

результате можно доказать (см. [10]), что функция (I) при $\beta \le 1$ – расширяющая, а при $\beta \ge 1$ – сужающая. Это значит, что при $\beta \le 1$ оптимальна веерная иерархия, а при $\beta \ge 1$ оптимальным является некоторое 2-дерево (см. Рис. 4.33 а).

Также доказывается, что функция (II) при $\beta \le 1$ расширяющая, а при $\beta > 1$ и $\alpha \ge 1$ – расширяющая на непересекающихся группах, то есть в этих случаях оптимальна веерная иерархия (см. Рис. 4.33 б). В области $\beta > 1$ и $\alpha < 1$ функция (II) не является ни расширяющей, ни сужающей даже на непересекающихся наборах групп. То есть для этого случая утверждение 4.7 не может помочь в поиске оптимальной иерархии. Однако функция (II) монотонна по группам, поэтому оптимальным является дерево (см. утверждение 4.).

В [10] показано, что при $\beta \ge 1$ функции (III) и (IV) сужающие, то есть оптимальной является 2-иерархия, имеющая минимальные затраты (см. утверждение 4.7)[1]. Для $\beta < 1$ дерево с минимальными затратами можно найти с помощью алгоритмов (см. [2]). Однако это дерево может не быть оптимальной иерархией, поскольку функции (III) и (IV) не монотонны по группам.

Расширяющие и сужающие функции затрат приводят к оптимальности крайних случаев – веерной иерархии и 2-иерархии. Как правило, в реальных организациях имеет место «промежуточная» иерархия, в которой норма управляемости $2 < r < +\infty$. Поэтому, функция затрат, описывающая такую организацию, не будет ни расширяющей, ни сужающей. Таким образом, важна разработка методов решения задачи об оптимальной иерархии для этого случая. На данный момент такие методы разработаны для важного класса так называемых однородных функций затрат, результаты исследования которых описываются в следующем разделе.

---

[1] *Для функции* (*III*) *и* $\beta \ge 1$ *в* [2] *оптимальная 2-иерархия найдена в явном виде.*

4.4. Оптимальные деревья при однородной функции затрат

4.4.1. Однородные функции затрат и однородные деревья

Определение 4.13 [2]. Функция затрат менеджера $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$, зависящая от мер, называется ***однородной***, если существует такое неотрицательное число γ, что для любого положительного числа A и любого набора мер $\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu$ выполняется тождество $c(A\mu_1, \ldots, A\mu_r, A\mu) = A^\gamma c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$. Число γ называется ***степенью однородности*** функции затрат.

Таким образом, при однородной функции затрат пропорциональное увеличение мер групп всех исполнителей в A раз приводит к росту затрат менеджера в A^γ раз.

<u>**Пример 4.8.**</u> Функция затрат менеджера вида $c(r, \mu)$ будет однородной тогда и только тогда, когда она мультипликативная и при этом $c(\mu, r) = \mu^\gamma \varphi(r)$. Функция, при которой затраты любого менеджера зависят только от количества его непосредственных подчиненных, будет однородной степени 0. Функции затрат (I), (II) и (IV) – однородные степени $\alpha \beta$, функция (III) – однородная степени 0. •

Определение 4.14. *r-мерным симплексом D_r* называется такое множество r-мерных векторов $x = (x_1, \ldots, x_r)$ с неотрицательными компонентами, что $x_1 + \ldots + x_r = 1$. Элементы такого симплекса будем называть *r-пропорциями* или просто ***пропорциями***.

Легко видеть, что если менеджер имеет r непосредственных подчиненных, то вектор $x := (\mu_1/\mu, \ldots, \mu_r/\mu)$ является r-пропорцией. Будем в этом случае говорить, что менеджер делит подчиненную ему группу исполнителей между своими непосредственными подчиненными в пропорции x.

В экономической литературе имеются определенные эмпирические предпосылки к описанию затрат менеджера именно однородными функциями. Большое количество публикаций (см., например, [18, 35, 49]) экспериментально исследуют зависимость вознаграждения топ-менеджеров[1] от размера организации и обосновывают ее

[1] В силу большого размера вознаграждений, получаемых менеджерами высоких уровней в крупных организациях, эти вознаграждения составляют большую часть затрат на содержание менеджера.

степенной вид. Поразительным является тот факт, что зависимость вида $c = s^{\gamma}$ между суммой вознаграждения топ-менеджера c и размером управляемой им компании s (в различных работах в качестве оценки размера компании рассматривалась сумма продаж, стоимость активов и др.) проявляет удивительную стабильность во времени[1] и пространстве, слабо завися от сферы деятельности компании и страны ее размещения.

В настоящем разделе описывается метод поиска оптимальной древовидной иерархии для однородных функций затрат менеджера. Интерес к древовидным иерархиям связан с тем, что задача поиска оптимального дерева гораздо проще задачи поиска оптимальной иерархии общего вида, кроме того, древовидные иерархии остаются наиболее широко распространенными на практике.

Для поиска оптимального дерева в случае функций затрат, зависящих от мер, существуют численные алгоритмы (см. [2]). Исследование результатов их работы при различных однородных функциях затрат позволяет выделить ряд общих свойств, которыми обладают оптимальные деревья. Во-первых, в оптимальных деревьях каждый менеджер имеет примерно одинаковое количество непосредственных подчиненных. Во-вторых, при фиксированной функции затрат менеджеры во всех оптимальных деревьях делят подчиненные группы исполнителей между своими непосредственными подчиненными приблизительно в одинаковой пропорции. Для некоторых функций затрат эта пропорция предполагает деление группы на примерно равные части, для других же функций затрат могут быть оптимальны другие пропорции. Это позволяет предположить, что пропорция определяется в основном функцией затрат менеджера, а не размером иерархии (количеством исполнителей).

Чтобы формализовать эти наблюдения и определить условия, при выполнении которых описанные свойства оптимальных деревьев имеют место, необходимо ввести ряд определений.

Определение 4.15. Дерево называется (r, x)-***однородным***, если каждый его менеджер имеет ровно r непосредственных подчиненных и делит между ними подчиненную ему группу исполнителей в пропорции $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Число r называется ***нормой управляемости*** однородного дерева.

---

[1] Экспериментальные данные, подтверждающие эту зависимость, охватывают временной диапазон практически в 80 лет.

Пример 4.9. На Рис. 4.34 изображены три однородных дерева. Для каждого сотрудника на рисунке изображена мера управляемой им группы. Иерархия а) – это 3-дерево с пропорцией $x = (1/3, 1/3, 1/3)$. Дерево имеет симметричный вид (однородные деревья всегда симметричны, если исполнители имеют одинаковые меры). Иерархия б) – это 2-дерево с пропорцией (1/2, 1/2), а иерархия в) – 2-дерево с пропорцией (1/3, 2/3). •

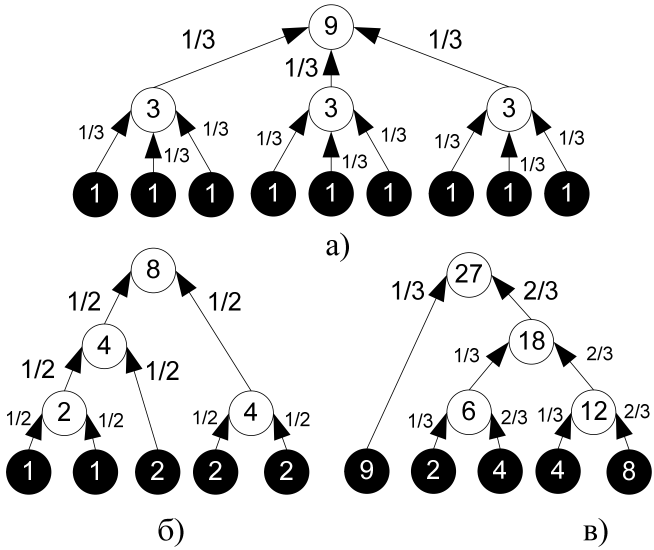


Рис. 4.34. Примеры однородных деревьев

В однородных деревьях наиболее полно реализуются отмеченные выше эмпирические свойства оптимальных древовидных иерархий. Однако, понятно, что для заданного множества исполнителей может не существовать ни одного однородного дерева, кроме веерной иерархии (любая веерная иерархия, как легко видеть, является однородным деревом). Так, если все n исполнителей имеют одинаковые меры, то однородное дерево с нормой управляемости r и пропорцией $(1/r, \ldots, 1/r)$ существует только в том случае, если n является целой степенью r, как, например, в иерархии на Рис. 4.34 а).

В то же время, если однородное дерево существует, его затраты легко вычисляются.

Утверждение 4.9 [4]. *Пусть заданы множество исполнителей* $N = \{1, ..., n\}$ *с мерами* $\mu(1), ..., \mu(n)$ *и однородная степени* γ *функция затрат менеджера* $c(\mu_1, ..., \mu_r)$. *Если существует однородное дерево* H *с нормой управляемости* r *и пропорцией* $x = (x_1, ..., x_r)$, *то его затраты определяются выражением*

$$(32)\ C(H) = \begin{cases} |\mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma| \dfrac{c(x_1,...,x_r)}{|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma|}, & \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \dfrac{c(x_1,...,x_r)}{-\sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i}, & \text{если } \gamma = 1, \end{cases}$$

где $\mu := \mu(N) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$ *– суммарная мера всех исполнителей.*

Затраты однородного дерева записываются по-разному при степени однородности $\gamma \neq 1$ и при $\gamma = 1$. Дело в том, что при $\gamma = 1$ в верхнем выражении формулы (32) имеется неопределенность типа 0/0. Однако если взять предел верхнего выражения при $\gamma \to 1$, получим как раз нижнее выражение формулы (32), так что затраты (r, x)-однородного дерева непрерывны по γ.

Если меры всех n исполнителей равны единице, формула затрат однородного дерева упрощается и принимает вид

$$(33)\qquad C(H) = \begin{cases} |n^\gamma - n| \dfrac{c(x_1,...,x_r)}{|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma|}, & \text{если } \gamma \neq 1, \\ n \ln n \dfrac{c(x_1,...,x_r)}{-\sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i}, & \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Пример 4.10. Пусть все исполнители имеют меру 1, а функция затрат менеджера $c(\cdot) = \mu$. Найдем затраты однородного 2-дерева с пропорцией $x = (1/2, 1/2)$. В данном случае степень однородности $\gamma = 1$, поэтому, по формуле (33), $C(H) = n \cdot \ln n / \ln 2 = n \cdot \log_2 n$.

Если меры всех исполнителей одинаковы, то однородное 2-дерево существует при количестве исполнителей n, равном целой степени двойки. То есть $(2, x)$-однородное дерево с затратами $n \cdot \log_2 n$ существует, если $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$ •

4.4.2. Нижняя оценка затрат оптимального дерева

Как отмечалось выше, для заданной нормы управляемости r и пропорции x однородное дерево существует редко. Однако выражение (32) можно вычислить независимо от факта существования (r, x)-однородного дерева, и для любой нормы управляемости r и пропорции $x \in D_r$ можно говорить о том, какие затраты имело бы (r, x)-однородное дерево, **если бы оно существовало**.

Имея аналитическое выражение для затрат однородного дерева, точно так же можно ставить вопрос о том, какое из всего множества однородных деревьев **было бы оптимальным, если бы оно существовало**. Для того, чтобы найти такое наилучшее однородное дерево, необходимо минимизировать выражение (32) по всем возможным нормам управляемости r и пропорциям x. Соответственно, пара (r, x), на которой достигается этот минимум, даст параметры наилучшего однородного дерева, а, подставив их в формулу (32), получим его затраты.

Понятно, что при фиксированном множестве исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$ с мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ топ-менеджер любого дерева будет иметь не более n непосредственных подчиненных, поэтому при поиске наилучшего однородного дерева минимизировать достаточно по всем r от 2 до n.

Кроме того, каждый непосредственный подчиненный топ-менеджера будет управлять, по меньшей мере, одним исполнителем, и, значит, мера управляемой им группы будет не меньше минимальной из мер исполнителей. Следовательно, каждая из компонент x_i, $i = 1, \ldots, r$ пропорции любого однородного дерева будет не меньше чем $\varepsilon := \min_{i \in N} \mu(i) / \sum_{i \in N} \mu(i)$.

Для произвольного неотрицательного числа ε обозначим через $D_r(\varepsilon)$ ту часть симплекса D_r, на которой каждая компонента вектора больше или равна ε.

Тогда при фиксированной функции затрат минимальные затраты однородного дерева определяются количеством n и мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ исполнителей и задаются следующим выражением:

$$C_L(N) =$$

(34) $$= \begin{cases} |\mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma| \min_{k=2\ldots n} \min_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1, \ldots, y_k)}{|1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^\gamma|}, \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \min_{k=2\ldots n} \min_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1, \ldots, y_k)}{-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i}, \text{если } \gamma = 1, \end{cases}$$

где $\mu = \sum_{i \in N} \mu(i)$, $\varepsilon = \min_{i \in N} \mu(i) / \mu$.[1]

При заданной функции затрат параметры однородного дерева, доставляющие минимум выражению (34), зависят от количества исполнителей n и числа ε – отношения минимальной из мер исполнителей к их суммарной мере. Обозначим $r(n, \varepsilon)$ – оптимальное количество непосредственных подчиненных, $x(n, \varepsilon) = (x_1(n, \varepsilon), \ldots, x_{r(n, \varepsilon)}(n, \varepsilon))$ – оптимальную пропорцию. Нахождение этих параметров сводится к решению n классических задач минимизации функции на компактном множестве. Для удобства введем обозначение

(35) $$F(n, \varepsilon) := \begin{cases} \min_{k=2\ldots n} \min_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1, \ldots, y_k)}{|1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^\gamma|}, \text{если } \gamma \neq 1, \\ \min_{k=2\ldots n} \min_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1, \ldots, y_k)}{-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i}, \text{если } \gamma = 1, \end{cases}$$

тогда

(36) $$C_L(N) = \begin{cases} |\mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma| F(n, \varepsilon), \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) F(n, \varepsilon), \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Если меры всех исполнителей равны единице, параметр ε в формуле (34) равен $1/n$ (где n – количество исполнителей). При этом затраты наилучшего однородного дерева принимают вид:

(37) $$C_L(N) = \begin{cases} |n^\gamma - n| F(n, 1/n), \quad \text{если } \gamma \neq 1, \\ (n \ln n) F(n, 1/n), \quad \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

---

[1] *Поскольку $D_r(\varepsilon)$ – компактное множество, минимумы в формуле* (34) *достигаются при достаточно слабых условиях на функцию затрат* (*достаточно потребовать ее полунепрерывности снизу* [6] *на симплексе*), *и ниже считается, что они достигаются.*

Итак, при заданной функции затрат и множестве исполнителей параметры наилучшего однородного дерева можно вычислить по формуле (34). Как отмечалось выше, эмпирически установлено, что оптимальная (на множестве всех деревьев) древовидная иерархия «стремится» быть однородным деревом. В связи с этим возникает предположение о том, что, если для заданного множества исполнителей существует наилучшее однородное дерево (с нормой управляемости $r(n, \varepsilon)$ и пропорцией $x(n, \varepsilon)$), то оно и будет оптимальным на множестве всех деревьев. На самом деле оказывается, что справедлив даже более сильный результат.

Утверждение 4.10 [4]. *Пусть заданы множество исполнителей $N = \{1, ..., n\}$ с мерами $\mu(1), ..., \mu(n)$ и однородная степени γ функция затрат менеджера $c(\cdot)$. Тогда затраты оптимального дерева будут не меньше, чем $C_L(N)$. Иначе говоря, функция $C_L(N)$ является нижней оценкой затрат оптимального дерева.*

Кроме того, если ставится задача поиска оптимального r-дерева, то есть дерева, каждый из менеджеров которого имеет не более r подчиненных, то нижняя оценка его затрат будет определяться затратами *наилучшего однородного* r-дерева, то есть однородного дерева с нормой управляемости не более чем r.

Легко видеть, что затраты наилучшего однородного r-дерева задаются формулой

$$(38)\quad C_L^{\,r}(N) = \begin{cases} |\,\mu^{\gamma} - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^{\gamma}\,|\, F(\min[n, r], \varepsilon), \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) F(\min[n, r], \varepsilon), \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 4.11 [4]. *В условиях утверждения 4.10 затраты оптимального r-дерева будут не менее $C_L^r(N)$.*

Следствие 4.1 [4]. Если наилучшее однородное дерево (r-дерево) существует, то оно является оптимальным на множестве всех деревьев (r-деревьев).

Доказательство. Действительно, из утверждения 4.10 следует, что затраты любого дерева (соответственно, r-дерева) не меньше, чем $C_L(N)$ (соответственно, $C_L^r(N)$). Но если наилучшее однородное дерево (r-дерево) с нормой управляемости $r(n, \varepsilon)$ и пропорцией $x(n, \varepsilon)$ существует, то его затраты в точности равны $C_L(N)$ (соответственно, $C_L^r(N)$), и, значит, оно оптимально. •

Описанная нижняя оценка затрат оптимального дерева имеет широкий спектр применения. Например, оказывается, что при большом количестве исполнителей она обычно достаточно точно аппроксимирует затраты оптимального дерева. Будем считать, что нижняя оценка $C_L(N)$ *имеет хорошее качество*, если предел отношения затрат $C(N)$ оптимального дерева к нижней оценке $C_L(N)$ стремится к единице при стремлении количества исполнителей во множестве N к бесконечности. В [4] доказывается, что, если степень однородности функции затрат менеджера не меньше единицы и задача поиска параметров наилучшего однородного дерева имеет внутреннее решение, то нижняя оценка имеет хорошее качество. Аналогичные результаты доказываются также для случая, когда степень однородности меньше единицы, меры всех исполнителей одинаковы, а наилучшее однородное дерево симметрично. Более того, результаты [4] позволяют использовать нижнюю оценку $C_L(N)$ для построения субоптимальных деревьев, затраты которых лишь не намного превышают оптимальные.

Поиск нижней оценки затрат оптимального дерева облегчается следующим результатом.

Лемма 4.5 [4]. Если при любой норме управляемости затраты менеджера минимальны при делении управляемой им группы исполнителей между своими непосредственными подчиненными на части одинаковой меры, то в наилучшем однородном дереве каждый менеджер также делит подчиненную ему группу исполнителей на части одинаковой меры.

В частности, лемма 4.5 верна, если при любой норме управляемости k функция затрат менеджера выпукла на симплексе D_k.

Пример 4.11. Рассмотрим мультипликативную однородную функцию затрат менеджера $c(r, \mu) = \mu^\gamma \varphi(r)$, где μ – мера управляемой менеджером группы исполнителей, r – количество его непосредственных подчиненных, $\varphi(r)$ – некоторая гладкая неубывающая функция, γ – степень однородности функции затрат. Легко видеть, что для любой пропорции y из симплекса D_k $c(y_1, \ldots, y_k) = \varphi(k)$, то есть при фиксированной норме управляемости k функция затрат менеджера равна константе на симплексе. Следовательно, она выпукла на симплексе, и при поиске параметров наилучшего однородного дерева для однородной мультипликативной функции затрат достаточно ограничиться рассмотрением симметричных решений. •

4.4.3. Модель организационной иерархии

Рассмотрим пример решения задачи поиска оптимальной организационной структуры. В его основу легла простая модель принятия решения менеджерами на основе отчетов от своих непосредственных подчиненных.

Рассмотрим организацию, основной задачей которой является реализация некоторого технологического процесса (например, процесса производства продукта или коммерческой деятельности). В этот процесс вовлечено n сотрудников – конечных исполнителей, каждый из которых выполняет некоторые фиксированные задачи, реализует некоторый этап процесса.

В процессе работы у исполнителей могут возникать проблемы, решение которых необходимо для успешной реализации порученных им задач. Эти проблемы могут быть обусловлены необходимостью координации работы исполнителей, отсутствием нужной информации, отработкой нештатных ситуаций (например, брака производства) и многими другими причинами.

Исполнители не могут самостоятельно решать данные проблемы в силу своей узкой специализации, ограниченности квалификации, отсутствия времени и т.п. Поэтому возникает потребность делегирования решения проблем специально обученным сотрудникам – менеджерам. Менеджеры формируют систему управления, которая берет на себя обеспечение бесперебойного выполнения технологического процесса, а значит, и успешное решение задач организации.

Из-за большого количества проблем, возникающих в процессе работы исполнителей, один менеджер может не справляться с их решением, и эту задачу необходимо разбивать на подзадачи, поручая отдельным менеджерам управление отдельными участками технологического процесса – различными группами исполнителей. Однако, если ответственность менеджера ограничена решением проблем лишь одной группы исполнителей, он не может решать проблемы, в которые помимо исполнителей его группы вовлечены и другие сотрудники.

В связи с этим возникает необходимость координации работы менеджеров, для чего формируется новый, более высокий уровень системы управления, состоящий из менеджеров, управляющих менеджерами. Эти менеджеры, в свою очередь, нуждаются в следующем уровне управления, координирующего их работу, и так далее до тех пор, пока на последнем уровне не останется лишь один менеджер (называемый топ-менеджером), которому непосредственно или опосредовано будут подчинены все менеджеры и исполнители организации, и который поэтому сможет решать любую возникающую проблему. Таким образом, система управления представляет собой иерархию (см. определение 4.1) над множеством исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$.

Содержание каждого менеджера требует затрат (зарплата, организация рабочего места и т.п.), в общем случае зависящих от объема выполняемой менеджером работы. Объем работы, в свою очередь, определяется количеством принимаемых менеджером решений, направленных на решение стоящих перед ним проблем.

Предположим, что если менеджеру в единицу времени приходится принимать P решений, то затраты на его содержание равны P^β, где β – константа, описывающая скорость роста затрат. Логично считать, что маржинальные затраты не убывают с ростом объема работы, то есть $\beta \geq 1$. Параметр β описывает эффективность работы менеджеров – более квалифицированные менеджеры при одинаковом числе проблем несут меньшие затраты, а при одинаковых затратах решают большее число проблем.

Пусть каждый исполнитель $w \in N$ характеризуется своей мерой $\mu(w)$, соответствующей количеству проблем, возникающих на его участке в единицу времени. Тогда число проблем, которые в единицу времени возникают у группы исполнителей, равно сумме мер входящих в нее исполнителей, то есть мере группы.

Менеджер принимает решения на основе отчетов, предоставляемых его непосредственными подчиненными. Будем считать, что объем отчета, который готовит подчиненный для своего начальника, равен μ^α, где μ – мера управляемой этим подчиненным группы исполнителей. Кроме того, предположим, что количество принимаемых начальником решений пропорционально суммарному объему получаемых им отчетов.

Параметр α, принимающий значения из отрезка [0, 1], интерпретируется как коэффициент сжатия информации о проблемах в отчете. Этот коэффициент определяется типичностью проблем, возникающих у исполнителей – если у многих исполнителей возникает одинаковые проблемы, то объем отчета об этих проблемах слабо зависит от количества исполнителей[1], и значение α существенно меньше единицы. Иначе говоря, параметр α описывает степень единообразия технологического процесса. С другой стороны, этот параметр может описывать «проблемность» технологического процесса – если $\alpha = 0$, то объем отчета о работе группы исполнителей минимален и не зависит от размера группы, что соответствует отчету «Все в порядке».

Итак, если k непосредственных подчиненных менеджера управляют группами мер $\mu_1, \ldots, \mu_k$, то суммарный объем подготовленного ими отчета равен $\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_k^{\alpha}$, и затраты менеджера с точностью до константы равны

(39) $c(\mu_1, \ldots, \mu_k) = (\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_k^{\alpha})^{\beta}$.

Построение оптимальной организационной структуры сводится к поиску иерархии с минимальными суммарными затратами менеджеров. Помимо собственно получения оптимальной иерархии интерес представляет и анализ зависимости ее основных характеристик – нормы управляемости менеджеров и затрат иерархии – от параметров модели (степени единообразия технологического процесса α и квалификации менеджеров β).

Результаты этого анализа позволяют выбирать наиболее эффективные организационные мероприятия по снижению управленческих расходов и предусматривать меры по адаптации организационной структуры к изменению внешних условий.

В рассматриваемом примере выражение (39) затрат менеджера совпадает с формулой введенной выше в примере 4.7 функции затрат (II). Эта функция затрат монотонна по группам, следовательно, оптимальная иерархия имеет вид дерева. Выше показывалось, что при $\alpha \geq 1$ или $\beta \leq 1$ оптимальна веерная иерархия. Поэтому интерес представляет поиск оптимального дерева в области параметров $\alpha < 1$, $\beta > 1$. Для решения этой задачи найдем параметры наилучшего однородного дерева – норму управляемости и пропорцию.

---

[1] *Сравним, например объемы отчетов «Рабочему X необходимо приобрести рабочие рукавицы» и «Для работников слесарного цеха необходимо приобрести 200 пар рабочих рукавиц».*

Пусть степень однородности функции затрат $\alpha\beta \neq 1$. По формуле (34), чтобы для фиксированной нормы управляемости k найти наилучшую пропорцию, необходимо найти пропорцию $(y_1, \ldots, y_k)$, минимизирующую выражение

(40) $(y_1^\alpha + \ldots + y_k^\alpha)^\beta \,/\, |1 - \sum_{i=1}^k y_i^{\alpha\beta}|$.

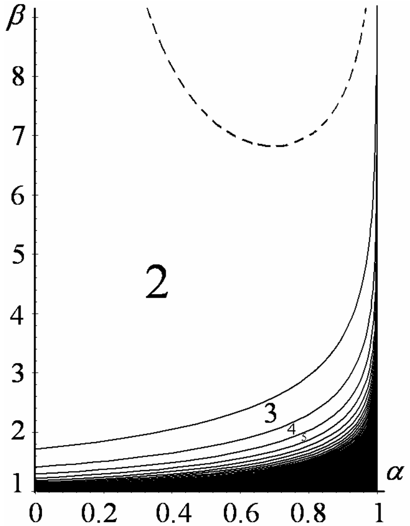


Рис. 4.35. Нормы управляемости наилучшего однородного дерева для функции затрат (II)

Эту задачу можно решить численно с помощью описанного в [4] алгоритма. Показано, что в наиболее важной с практической точки зрения области параметров ($\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [1, 6]$) наилучшие однородные деревья симметричны (для $\beta > 6.7$ имеется область, где оптимальна асимметричная пропорция). Зная оптимальную пропорцию, по формуле (34) легко вычислить наилучшую норму управляемости однородного дерева. Результаты ее численного расчета приведены на Рис. 4.35. Видно, что для больших значений параметра β оптимальны 2-деревья. Область их оптимальности отмечена на рисунке числом «2» (область, где оптимальны асимметричные 2-деревья, выделена пунктиром). С уменьшением β, а также со стремлением α к единице, последовательно становятся оптимальными 3-

деревья, 4-деревья и т.д. (эти области подписаны на рисунке числами «3», «4», …).

Найдем аналитическое выражение для границ областей оптимальности различных норм управляемости.

Для нормы управляемости k и симметричной пропорции выражение (40) приобретает вид $k^{\beta(1-\alpha)}/\ |1-k^{1-\alpha\beta}|$. Следовательно, на границе между областями оптимальности k-деревьев и $(k+1)$-деревьев выполняется равенство

$$k^{\beta(1-\alpha)}/\ |1-k^{1-\alpha\beta}| = (k+1)^{\beta(1-\alpha)}/\ |1-(k+1)^{1-\alpha\beta}|.$$

Вводя новую переменную $t = \alpha\beta$, и разрешая получившуюся систему уравнений относительно α и β, получаем в плоскости $\alpha \times \beta$ семейство параметрических кривых

$$\left(\beta(t) = \ln\left(\frac{|(k+1)^{-t} - k - 1|}{|k^{-t} - k|}\right) / \ln\left(\frac{k+1}{k}\right), \alpha(t) = t / \beta(t)\right), k = 2, 3, \ldots$$

Подставляя в эти выражения $k = 2$, получаем уравнение границы областей оптимальности 2-деревьев и 3-деревьев, подставляя $k = 3$ – 3-деревьев и 4-деревьев, и так далее. Полученные кривые изображены сплошными линиями на Рис. 4.35.

Для фиксированных α, β обозначим через $r(\alpha, \beta)$ найденную норму управляемости наилучшего однородного дерева. Если обозначить через μ суммарную меру всех исполнителей множества N, то, по формуле (34), затраты этого однородного дерева определяются выражением

$$(41)\ C_L(N) = \begin{cases} |\mu^{\alpha\beta} - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^{\alpha\beta}| \dfrac{r(\alpha,\beta)^{\beta(1-\alpha)}}{|1 - r(\alpha,\beta)^{1-\alpha\beta}|}, \text{если } \alpha\beta \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \dfrac{r(\alpha,\beta)^{\beta-1}}{\ln r(\alpha,\beta)}, \text{если } \alpha\beta = 1. \end{cases}$$

По утверждению 4.10 это же выражение задает и нижнюю оценку затрат оптимального дерева. В [4] описывается, как можно построить субоптимальное дерево с затратами, близкими к этой нижней оценке.

Проанализируем зависимость нормы управляемости оптимального дерева и его затрат от параметров модели – квалификации менеджеров β и степени единообразия технологии α.

Из Рис. 4.35 видно, что с ростом квалификации (с уменьшением параметра β) оптимальная норма управляемости растет, то есть более квалифицированным менеджерам назначается большее количество непосредственных подчиненных. Это вполне объяснимо и с содержательной точки зрения – более квалифицированные менеджеры выполняют больший объем работы.

Более неожиданным является то, что оптимальная норма управляемости увеличивается с ростом степени атипичности проблем (параметра α). Действительно, если считать, что меры всех исполнителей больше единицы, то легко проверить, что с ростом α объем работы менеджера, определяемый выражением $\mu^{\alpha} r^{1-\alpha}$, увеличивается, а, следовательно, возрастают его затраты. Увеличение нормы управляемости r еще сильнее увеличивает объем выполняемой менеджером работы.

Общее количество менеджеров в однородной иерархии равно $(n-1)/(r-1)$, то есть с ростом нормы управляемости количество менеджеров убывает. Оказывается, что уменьшение числа менеджеров – это самый «дешевый» способ противодействия росту степени атипичности проблем, поскольку при усложнении иерархии в решении большого количества проблем участвуют все больше и больше менеджеров, что увеличивает суммарные затраты.

Для оценки влияния параметров α и β на затраты оптимальной иерархии найдем приближенное аналитическое выражение для оптимальной нормы управляемости $r(\alpha, \beta)$. Известно, что при оптимальной норме управляемости выражение $k^{\beta(1-\alpha)}/\ |1-k^{1-\alpha\beta}|$ достигает минимума по всем целым $k > 1$. Для упрощения задачи снимем ограничение целочисленности k и найдем оптимальную норму управляемости из условий первого порядка. Эта (нецелочисленная) норма управляемости определяется выражением

$$r(\alpha,\beta) = [\beta(1-\alpha)/(\beta-1)]^{\frac{1}{1-\alpha\beta}}.$$

Подставляя ее в формулу (41), получаем примерную зависимость затрат оптимальной иерархии от параметров модели.

Кроме того, вычислим затраты топ-менеджера иерархии, определяемые формулой

$$\mu(N)^{\alpha\beta} c(1/r(\alpha,\beta),\ldots,1/r(\alpha,\beta)) = \mu(N)^{\alpha\beta} r(\alpha,\beta)^{\beta(1-\alpha)}.$$

Теперь легко проверить, что, с ростом α (степени атипичности проблем) как затраты оптимальной иерархии, так и затраты топ-менеджера возрастают. Это вполне ожидаемо из содержательной интерпретации задачи. Также вполне логично, что затраты оптимальной иерархии монотонно убывают с ростом уровня квалификации менеджеров (с уменьшением параметра β).

Однако зависимость затрат топ-менеджера от параметра β уже не столь очевидна. Из Рис. 4.36 видно, что с ростом квалификации (с уменьшением β) затраты топ-менеджера сначала уменьшаются (ведь его квалификация также растет), а затем начинают возрастать. Дело в том, что, как было отмечено выше, с ростом квалификации менеджеров растет и оптимальная норма управляемости, уменьшается количество менеджеров в иерархии, и, следовательно, растут затраты отдельного менеджера.

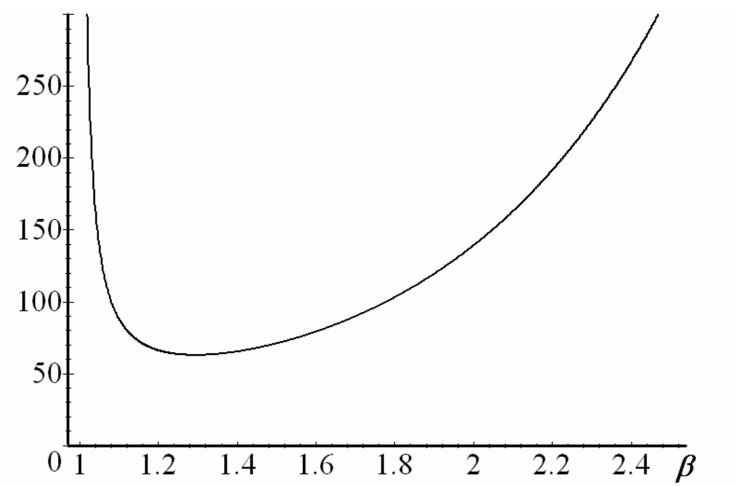


Рис. 4.36. Пример зависимости затрат топ-менеджера от параметра β при α = 0.2

Следовательно, если высшее руководство организации вкладывает средства в повышение квалификации менеджеров иерархии, например в их обучение, то эти действия приводят к уменьшению управленческих расходов иерархии, однако затраты самого высшего руководства при этом могут и возрасти, если, конечно, иерархия параллельно изменяется с тем, чтобы наилучшим образом использовать новые условия.

Описанную модель можно постепенно усложнять, включая в нее новые факторы, влияющие на затраты менеджера (см. [4]). Во-первых, заметим, что работа менеджера состоит не только в принятии решений, но и в составлении отчетов для своего непосредственного начальника (даже топ-менеджер, у которого нет руководителя, должен отчитываться, например, перед акционерами). Если менеджер управляет группой меры μ, то он готовит своему руководителю отчет объема μ^{α}. Введем новый параметр A, описывающий трудоемкость составления отчетов по сравнению с процессом решения проблем. Тогда к объему выполняемой менеджером работы необходимо добавить слагаемое $A\,\mu^{\alpha}$.

Далее, среди допущений, легших в основу модели работы менеджера, одним из наиболее сильных является предположение о линейной зависимости между количеством принимаемых менеджером решений и суммарным объемом отчетов $\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_r^{\alpha}$, предоставляемых его непосредственными подчиненными.

Действительно, более логично считать, что менеджер в первую очередь включает в отчет для своего руководителя информацию о проблемах, которые сам менеджер решить не в состоянии. Соответственно, разность между суммарным объемом отчетов $\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_k^{\alpha}$ и объемом $(\mu_1 + \ldots + \mu_k)^{\alpha}$ отчета, отправляемого начальнику, является более адекватной характеристикой количества решенных менеджером проблем, чем суммарный объем получаемых отчетов. Тогда формулу объема работы следует скорректировать, вычтя слагаемое $(\mu_1 + \ldots + \mu_k)^{\alpha}$.

В то же время, принятие решения о том, что ту или иную проблему сам менеджер решить не в состоянии, и должен передать ее своему руководству, тоже требует трудозатрат. Если обозначить через B сравнительную трудоемкость принятия такого решения по сравнению с самостоятельным решением проблемы, то учет этих трудозатрат сводится к добавлению слагаемого $B(\mu_1 + \ldots + \mu_k)^{\alpha}$ к формуле объема работы менеджера.

Подытоживая все сказанное, приходим к выводу, что скорректированный объем работы менеджера должен определяться формулой $\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_r^{\alpha} + (A + B - 1)(\mu_1 + \ldots + \mu_r)^{\alpha}$, а его затраты

(42) $c(\mu_1, \ldots, \mu_r) = [\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_r^{\alpha} + (A + B - 1)(\mu_1 + \ldots + \mu_r)^{\alpha}]^{\beta}$.

Поиск оптимальных деревьев для этой функции затрат проводится по той же схеме, что и для функции (II). Результаты качественно соответствуют Рис. 4.35 – если коэффициент $A + B - 1$ больше нуля, то границы всех областей сдвигаются на рисунке вверх, в сторону бóльших значений параметра β (включая и обозначенную пунктиром границу области оптимальности асимметричных иерархий). Если же $A + B - 1 < 0$, то границы всех областей сдвигаются вниз.

Таким образом, если при фиксированных параметрах α и β коэффициент $A + B$ растет (то есть растут трудозатраты менеджера по общению со своим руководителем), то оптимальная норма управляемости возрастает, если же $A + B$ убывает, то и оптимальная норма управляемости убывает. Качественный вид зависимости оптимальной нормы управляемости, затрат оптимальной иерархии и затрат топ-менеджера от параметров α и β будет таким же, как и для функции (II).

4.4.4. Исполнение приказов и детализация планов

Рассмотренная в предыдущем разделе модель базировалась на предположении, что затраты менеджера зависят от количества проблем, которые решает этот менеджер. При этом источником проблем были конечные исполнители, а одной из задач менеджеров иерархии было информирование руководства о возникающих проблемах, то есть обеспечение движения информации снизу вверх, от нижних уровней иерархии к топ-менеджеру.

Однако в организации присутствуют и информационные потоки, направленные сверху вниз, от топ-менеджера к его подчиненным и далее до конечных исполнителей. Например, подобные информационные потоки возникают в процессе планирования функционирования организации.

Сначала высшее руководство (например, собрание акционеров) определяет стратегический план функционирования и развития организации. План, оформленный соответствующими документами, доводится до топ-менеджера организации, чья задача состоит в том, чтобы дополнить этот план, обычно довольно общий и схематичный, конкретными деталями, действиями и мероприятиями, необходимыми для успешной его реализации.

Выполнение запланированных действий относится к сфере ответственности различных непосредственных подчиненных топ-менеджера, поэтому он должен, помимо всего прочего, подготовить более детальный план работы для каждого из подразделений, управляемых его непосредственными подчиненными.

Эти более детальные планы передаются непосредственным подчиненным топ-менеджера, и теперь уже они должны проделать такую же работу по детализации планов и по разбиению их на «подпланы» для своих непосредственных подчиненных. Процесс уточнения и детализации продолжается до тех пор, пока каждый исполнитель на самом нижнем уровне иерархии не получит свой максимально детализированный план работы.

Такие же нисходящие информационные потоки характерны и для процесса разработки и исполнения приказов. Менеджеры анализируют полученные от своих начальников указания для того чтобы определить, какие из подчиненных им подразделений будут участвовать в выполнении приказа, формируют для руководителей этих подразделений более подробные инструкции, в частности, по организации взаимодействия между ними, и передают эти инструкции вниз по иерархии.

В данном разделе рассматриваются одна из возможных формализаций процесса планирования и исполнения приказов, и решается задача поиска оптимальной иерархической структуры системы управления организацией, в которой основной задачей менеджеров является именно детализация планов и выполнение приказов руководства. Формулировка модели приводится в терминах исполнения приказов – процессы планирования описываются аналогично.

Пусть в технологический процесс организации вовлечено n исполнителей. Работы, порученные исполнителям, могут требовать различных усилий по управлению ими, поэтому для каждого исполнителя $w \in N = \{1, \dots, n\}$ определим число $\mu(w)$ (меру), описывающее сложность управления этим исполнителем. На протяжении данного раздела будем считать, что меры всех исполнителей одинаковы и равны единице (это предположение существенно упрощает содержательную интерпретацию модели). Тогда объем максимально детализированной инструкции, подробно регламентирующей работу некоторой группы исполнителей $s \subseteq N$ (измеряемый, например, количеством знаков в соответствующем документе), будет пропорционален суммарной мере $\mu(s)$ исполнителей группы, то есть количеству входящих в нее исполнителей.

Однако на практике создание такой подробной инструкции действий для сколько-нибудь большой группы сотрудников невозможно – руководители верхних уровней иерархии зачастую просто не обладают настолько подробной информацией о работе подчиненных им исполнителей. Поэтому реальный объем приказа, который получает от своего начальства менеджер крупного подразделения, будет существенно меньше, и информации, содержащейся в нем, будет недостаточно для полного описания того, что должны делать подчиненные этого менеджера. Ниже считается, что объем приказа, получаемый менеджером, управляющим группой меры μ, равен μ^{α}, где $\alpha \in [0, 1]$ – коэффициент, определяющий то самое неизбежное сжатие информации.

Задача менеджера состоит в том, чтобы проанализировать каждое положение приказа с целью определения того, какие из k непосредственно подчиненных ему подразделений будут вовлечены в процесс исполнения данного приказа, то есть, по сути, решить задачу классификации.

Если приказ касается просто организации работы подразделений, то объем работы менеджера по анализу каждого положения приказа будет пропорционален количеству k его непосредственных подчиненных. Однако если реализация приказа, помимо индивидуальной работы подразделений, требует их согласованного взаимодействия, менеджер уже вынужден думать о том, требуется ли организовать совместную работу каждой пары непосредственных подчиненных, и объем работы над каждым положением приказа будет пропорционален k^2. В общем случае объем работы задается некоторой функцией $\rho(k)$, а совокупный объем работы менеджера пропорционален[1] $\mu^{\alpha}\rho(k)$.

Затраты менеджера могут нелинейно зависеть от объема P выполняемой им работы. Будем считать, что эта зависимость описыва-

---

[1] *Такая зависимость объема работы менеджера от меры управляемой группы* μ *и нормы управляемости* k *может возникать не только при решении задачи классификации. Например, работа менеджера может состоять в ознакомлении непосредственных подчиненных с положениями полученного им приказа. Если менеджер собирает для этого своих подчиненных вместе, то объем его работы пропорционален объему приказа* μ^{α}, *если он знакомит с приказом каждого из* k *своих починенных по отдельности, то объем работы пропорционален* $k\,\mu^{\alpha}$.

ется степенной функцией вида P^{β}. Тогда если анализ положений приказа является единственной работой менеджера, то его затраты задаются выражением $\mu^{\alpha\beta}\rho(k)^{\beta}$, то есть описываются введенной в примере 4.6 мультипликативной функцией затрат.

Однако в рамках рассматриваемой модели менеджер должен еще дополнить и детализировать полученный приказ, превратив его в k приказов для своих непосредственных подчиненных. Будем считать, что объем связанной с этим работы пропорционален разности $\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_k^{\alpha} - \mu^{\alpha}$ между суммарным объемом детализированных приказов и объемом полученного приказа.

Следовательно, если k непосредственных подчиненных менеджера управляют группами исполнителей с мерами $\mu_1, \ldots, \mu_k$, а сам он управляет группой меры $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_k$, то его затраты определяются выражением

(43) $(A\ \mu^{\alpha}\rho(k) + \mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_k^{\alpha} - \mu^{\alpha})^{\beta}$,

где A – коэффициент, описывающий трудоемкость анализа одного положения приказа по сравнению с трудоемкостью его детализации для подчиненных.

Ниже, как и в предыдущем разделе, решается задача поиска иерархии с наименьшими затратами на содержание менеджеров. Основной интерес представляет зависимость нормы управляемости оптимальной иерархии и ее затрат от параметров модели.

При этом уменьшение параметра β соответствует росту общей квалификации менеджеров, как управленцев, повышению их способности к переработке информации. Увеличение же параметра α можно интерпретировать как рост уровня специализации менеджеров, их информированности о технологических особенностях функционирования данной организации, что позволяет им готовить более детальные приказы для своих подчиненных.

Рассмотрим произвольного менеджера, управляющего группой исполнителей меры μ, r непосредственных которого управляют группами исполнителей с мерами $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Легко проверить, что объем $\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_k^{\alpha} - \mu^{\alpha}$ работы этого менеджера по детализации получаемых приказов немонотонно зависит от показателя степени

α, возрастая до некоторого значения α, а затем убывая до нуля при α, стремящемся к единице[1].

Эта немонотонность является результатом двух тенденций – стремления суммарного объема работы всех менеджеров иерархии к уменьшению с ростом уровня специализации α этих менеджеров (более специализированные менеджеры легче и быстрее принимают правильные решения), и стремления объема работы по детализации приказов к увеличению (более специализированные менеджеры сильнее детализируют приказы).

На практике при подборе персонала редко удается найти достаточное количество сотрудников, которые были бы одновременно и специалистами в технологии, и опытными управленцами, и приходится искать некоторый компромисс в обладании этими навыками. Исследование влияния параметров α и β на затраты оптимальной иерархии позволяет в процессе формирования команды менеджеров сделать выбор между специалистами и профессиональными управленцами.

Можно проверить, что функция затрат (43) монотонна по группам и, следовательно, оптимальную иерархию достаточно искать в классе деревьев.

Рассматриваемая функция затрат представляет собой «гибрид» мультипликативной функции и функции затрат (42), введенной в конце предыдущего раздела. Поэтому сначала рассмотрим решение задачи поиска оптимальной иерархии для мультипликативной функции затрат вида $(\mu^\alpha \rho(k))^\beta$.

Степень ее однородности равна $\alpha\beta$. Найдем параметры наилучшего однородного дерева. В примере 4.11 показано, что для этой функции затрат достаточно рассматривать только симметричные пропорции вида $(1/k, \ldots, 1/k)$.

Пусть степень однородности $\alpha\beta \neq 1$. Подставим оптимальную пропорцию $(1/k, \ldots, 1/k)$ в минимизируемое выражение формулы

---

[1] *Степень однородности рассматриваемой функции затрат равна $\alpha\beta$. Согласно имеющимся статистическим данным* (*см.* [*18, 35, 49*]), *в коммерческих фирмах степень однородности функции затрат менеджера не превышает 0.4. Поскольку параметр β обычно близок к 1, то можно сделать вывод о том, что значений α, превышающих, скажем, 0.5, на практике не наблюдалось.*

(34). Получим функцию $\rho(k)^{\beta} / |1-k^{1-\alpha\beta}|$. Чтобы найти оптимальную норму управляемости, необходимо найти ее минимум по всем целым k, большим единицы.

Например, рассмотрим случай, когда объем работы менеджера линеен по количеству его непосредственных подчиненных, то есть $\rho(k) = k$. Тогда минимизируем функцию $k^{\beta} / |1-k^{1-\alpha\beta}|$.

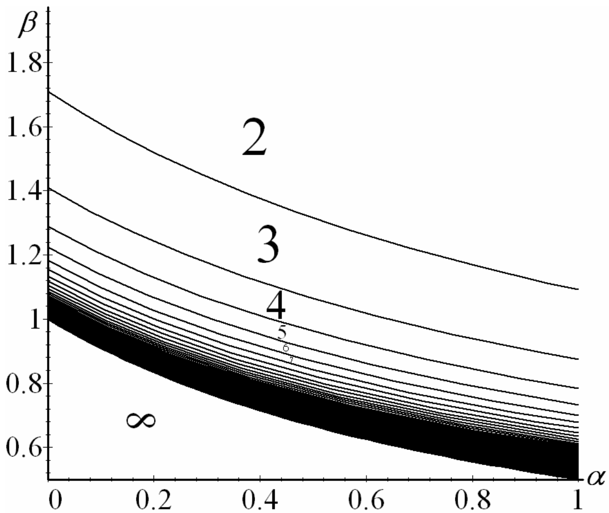


Рис. 4.37. Оптимальные нормы управляемости для мультипликативной функции затрат $c(r, \mu) = \mu^{\alpha\beta} r^{\beta}$

При $\beta + \alpha\,\beta < 1$ эта функция монотонно стремится к нулю при $k \to +\infty$. В этом случае оптимальна веерная иерархия. Если $\beta + \alpha\,\beta \geq 1$, то из условия первого порядка (равенства нулю производной) имеем следующее уравнение относительно k:
$\beta\,(1 - k^{1-\alpha\,\beta}) = (\alpha\,\beta - 1)k^{1-\alpha\,\beta}$, из которого находим

$$k^{*} = \left(\frac{\beta + \alpha\beta - 1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta - 1}}.$$

Легко показать, что для заданных параметров α и β функции затрат оптимальная норма управляемости r^{*} будет одним из ближайших целых к величине k^{*}.

На Рис. 4.37 изображены области оптимальности различных значений нормы управляемости. При достаточно больш*и*х α и β оптимальны 2-деревья, при уменьшении этих параметров становятся оптимальными 3-деревья, далее – 4-деревья, и т.д.

Чем ближе параметры функции затрат α и β к кривой $\beta + \alpha\,\beta = 1$, тем б*о*льшие значения принимает оптимальная норма управляемости. Ниже этой кривой оптимальны веерные иерархии (на рисунке эта область отмечена символом «∞»). В силу непрерывности функции затрат по степени однородности $\alpha\,\beta$ Рис. 4.37 остается верным и для $\alpha\,\beta = 1$, поэтому в проведении отдельного расчета для этого случая нет необходимости.

Вернемся к рассмотрению «гибридной» функции (43). При интересных с содержательной точки зрения сочетаниях параметров для составляющих этой функции затрат (мультипликативной функции и функции (II)) наилучшие однородные деревья были симметричны. Поэтому при поиске оптимальной иерархии ограничимся поиском наилучших симметричных деревьев.

Тогда в соответствии с формулой (34), чтобы при фиксированных параметрах α, β и A найти норму управляемости наилучшего однородного дерева, необходимо найти целое число k, большее единицы, при котором достигается минимум функции

$$(A\,\rho(k) + k^{1-\alpha} - 1)^{\beta} \,/\, |1 - k^{1-\alpha\beta}|\,.$$

Эта стандартная задача минимизации легко решается численно. Скажем, на Рис. 4.38 оптимальные нормы управляемости изображены для значения параметра A (описывающего трудоемкость анализа приказа по сравнению с его детализацией) равного 0.5. Из рисунка видно, что и с уменьшением уровня специализации менеджеров (уменьшением α), и с ростом их квалификации (уменьшением β), оптимальная норма управляемости растет.

Таким образом, иерархии, составленные из «чистых» управленцев (для них значение α относительно мало), должны быть более «плоскими», то есть включать меньшее количество менеджеров, имеющих большее количество непосредственных подчиненных. Использование же в роли менеджеров специалистов в технологии (с б*о*льшим значением α) предполагает более «высокие» иерархии с меньшей нормой управляемости.

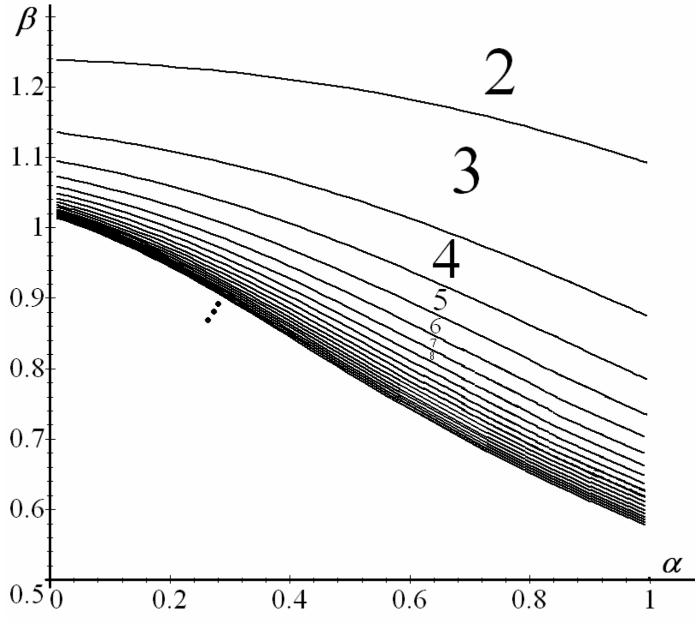


Рис. 4.38. Оптимальные нормы управляемости для функции затрат (43) *при* $A = 0.5$

В то же время, если детализация плана становится более трудоемкой по сравнению с его анализом (то есть если значение параметра A уменьшается), это правило может и нарушаться.

Так, например, на Рис. 4.39 изображены оптимальные нормы управляемости для $A = 0.05$. Легко видеть, что при небольших значениях β (более квалифицированных менеджерах) сохраняется прежняя зависимость нормы управляемости от уровня специализации α, в то время как при $\beta > 1.03$ оптимальная норма управляемости с ростом α уже не убывает, а растет.

Чтобы ответить на вопрос о том, кто для организации более выгоден – специалисты в технологии или «универсальные» управленцы, исследуем зависимость затрат оптимальной иерархии от уровня специализации менеджеров (параметра α).

Для простоты положим значение параметра β (уровня квалификации менеджеров) равным единице и найдем приближенное аналитическое выражение для оптимальной нормы управляемости. При $\beta = 1$ для ее нахождения необходимо найти целочисленную норму управляемости k, минимизирующую выражение $(A\,k + k^{1-\alpha} - 1)/|1 - k^{1-\alpha}|$. Ослабив ограничение целочисленности, из условий первого порядка без труда находим, что оптимальная норма управляемости (нецелочисленная), задается выражением $k^* = \sqrt[\alpha-1]{\alpha}$. Заметим, что она не зависит от значения параметра A (трудоемкости анализа приказа по сравнению с трудоемкостью его детализации).

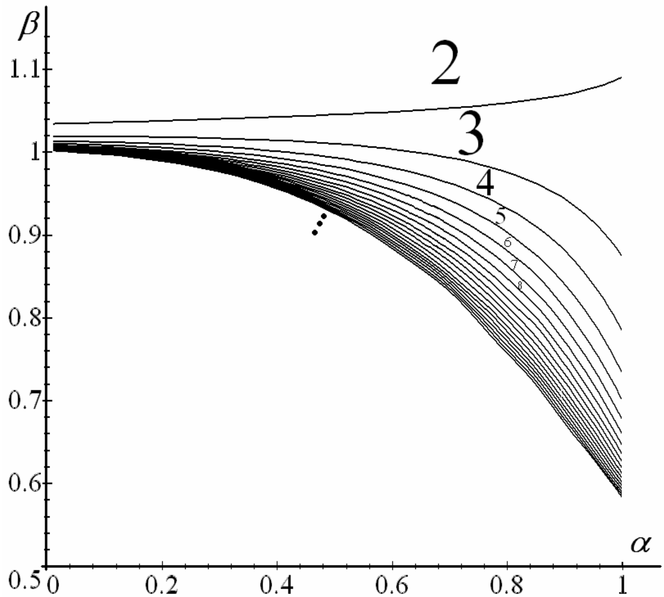


Рис. 4.39. Оптимальные нормы управляемости для функции затрат (43) *при* A = 0.05

Подставив найденную оптимальную норму управляемости в формулу (37), получим приближенное выражение для затрат оптимальной иерархии, зависящее от количества исполнителей n, а также от параметров α и A.

Приведем пример зависимости затрат оптимальной иерархии (точнее, их приближенного значения) от параметра α для количества исполнителей n = 1000.

Семейство кривых на Рис. 4.40 описывает зависимости затрат иерархии от α при различных значениях параметра A. Из рисунка видно, что если детализация приказов играет б*о*льшую роль в работе менеджеров (то есть значение параметра A мало), то затраты иерархии минимальны при большом уровне специализации менеджеров (максимальном значении α). Значит, в этом случае организации более выгодно иметь менеджеров – специалистов в технологии. Однако с увеличением роли работы по классификации положений приказа (с ростом параметра A) затраты «узких специалистов» возрастают, и при A, больших 0.05, затраты иерархии минимальны уже при минимальном α, то есть становится выгодным формировать организационную иерархию из «универсальных» управленцев.

Рис. 4.38-4.40 показывают, что характеристики оптимальной иерархии сложным образом зависят от параметров функции затрат менеджеров. Поэтому обоснованные выводы о выгодности тех или иных управленческих действий по изменению организационной структуры можно делать лишь после подробного анализа конкретной ситуации, в которой находится организация.

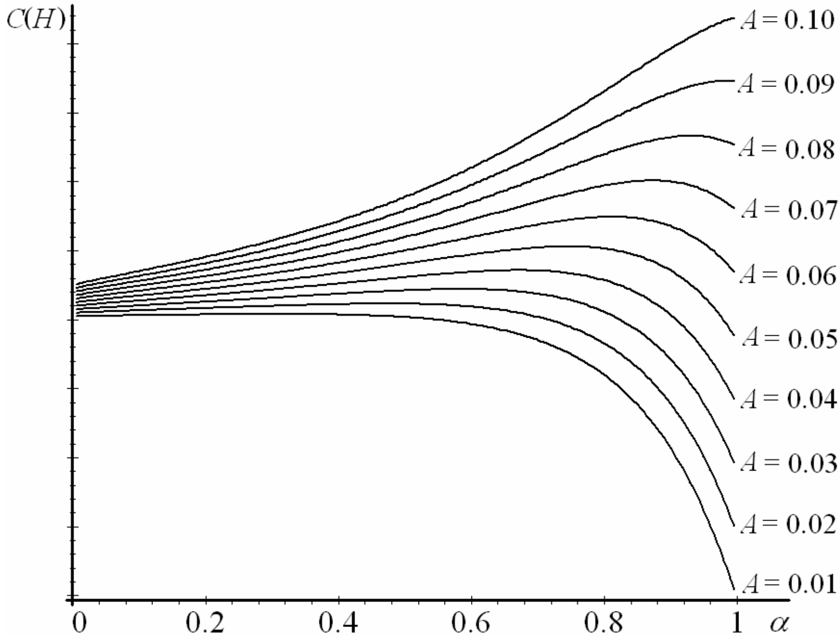


Рис. 4.40. Пример зависимости затрат оптимальной иерархии от уровня специализации менеджеров (параметра α) при n = 1000

4.4.5. Затраты на управление и размер организации

С точки зрения математической экономики весьма важно знать, как затраты иерархической системы управления организацией зависят от размера этой организации. Понимание этой зависимости позволяет дать ответ на принципиальный вопрос – может ли иерархически управляемая организация расти неограниченно, или существует некоторый критический размер, превышение которого для организации невыгодно, и дальнейший рост может осуществляться только посредством взаимодействия равноправных экономических субъектов – в рамках рыночных отношений [24, 32].

Рассматриваемую проблему можно проиллюстрировать следующей простейшей моделью. Пусть доход организации в зависимости от количества n рабочих, непосредственно вовлеченных в процесс производства, описывается функцией $V(n)$. Логично предположить, что эта функция не убывает по n. Для простоты будем считать, что функция $V(n)$ имеет вид $p\,n$ (линейный доход на масштаб), где p – размерный коэффициент.

Пусть расходы организации состоят только из заработной платы ее сотрудников. Если все рабочие имеют одинаковую зарплату σ, то общий фонд их заработной платы равен $\sigma\, n$.

Однако, как показывает практика, для нормального функционирования организации одних производственных рабочих мало, необходима система управления – иерархия менеджеров, содержание которых также требует расходов. Для заданного количества рабочих n существует оптимальная иерархия менеджеров – иерархия с минимальными возможными затратами $C(n)$.

Тогда прибыль организации (доход минус затраты) определяется выражением $(p - \sigma)\, n - C(n)$. Из этого выражения видно, что если затраты иерархии $C(n)$ при больших n растут линейно (причем со скоростью меньше $p - \sigma$), то прибыль возрастает по n, то есть неограниченный рост организации приносит выгоду. Если же затраты иерархии при больших n растут сверхлинейно, то существует оптимальное количество рабочих n^* (для выпуклой функции $C(n)$ оно определяется условием $C\,'(n^*) = p - \sigma$), при превышении которого прибыль организации уменьшается, то есть дальнейший рост организации становится невыгодным.

Именно линейность зависимости затрат иерархии от размера организации стала предметом продолжительной дискуссии в экономической литературе. Например, в [19, 40] рассматривается ряд моделей, из которых следует линейная зависимость затрат иерархии от размера организации. В то же время? в [27, 33, 47] показывается, что затраты иерархии с ростом организации растут сверхлинейно. В [41] рассматриваются модели «вычислительных иерархий» как с линейными, так и со сверхлинейными затратами.

Покажем, как с помощью однородных функций затрат можно в зависимости от параметров модели описывать оба варианта зависимости затрат оптимальной иерархии от размера организации.

Пусть задана однородная степени γ функция затрат менеджера $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ и известно, что для нее задача поиска параметров наилучшего однородного дерева имеет решение – некоторую норму управляемости r^* и пропорцию x^*.

Будем считать, что организация включает в себя n исполнителей меры 1. Тогда, как показано в разделе 4.4.2, для достаточно больших n нижняя оценка $C_L(n)$ затрат оптимальной иерархии определяется выражением

$$(44)\quad C_L(n) = \begin{cases} |n^\gamma - n| F_\infty, & \text{если } \gamma \neq 1, \\ (n \ln n) F_\infty, & \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

В нем положительная константа F_∞ не зависит от количества исполнителей n. Выше говорилось о том, что эта оценка хорошо описывает затраты оптимальной иерархии, и ею можно пользоваться вместо точного значения затрат.

Исследуем зависимость затрат оптимальной иерархии от размера организации (количества исполнителей n). Из (44) легко видеть, что для любой степени однородности γ затраты оптимальной иерархии выпукло возрастают по n. Действительно, при $\gamma < 1$ множитель $|n^\gamma - n|$ равен разности линейной функции n и вогнутой функции n^γ, при $\gamma > 1$ этот множитель равен разности выпуклой функции n^γ и линейной функции n, при $\gamma = 1$ зависимость затрат от n также определяется выпуклой возрастающей функцией $n \ln n$.

Далее, заметим, что если $\gamma < 1$, то при больших n затраты оптимальной иерархии растут линейно с увеличением n, поскольку в этом случае отношение $C_L(n)/n = (1 - n^{1-\gamma})F_\infty$ стремится к константе F_∞ при стремлении n к бесконечности. Если $\gamma = 1$, то затраты иерархии растут пропорционально $n \ln n$, то есть сверхлинейно. Также сверхлинейный рост затрат наблюдается и при $\gamma > 1$ – при этом затраты растут пропорционально n^γ (см. Рис. 4.41).

Таким образом, если в рамках введенных предположений степень однородности γ функции затрат менеджера организационной иерархии меньше единицы, то такая организация может расти неограниченно. Если же степень однородности больше или равна единице, то затраты организационной иерархии растут сверхлинейно и существует предел роста организации, превышать который для организации невыгодно.

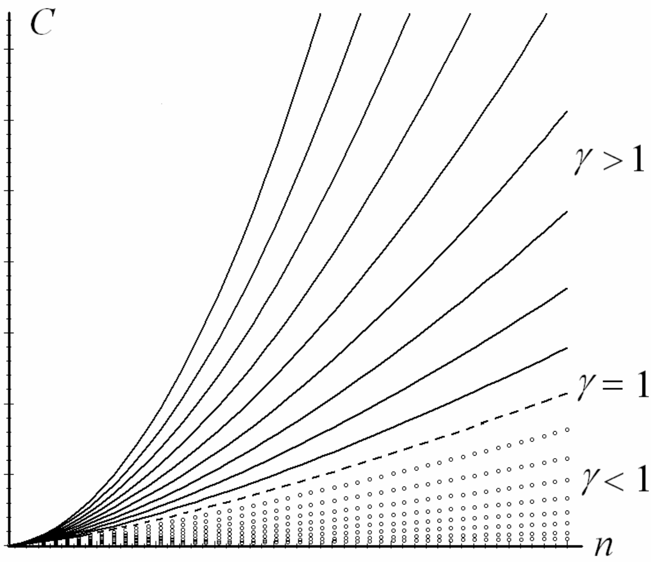


Рис. 4.41. Пример зависимости затрат C оптимальной иерархии от размера организации n

Заметим, кстати, что затраты на содержание отдельного менеджера оптимальной иерархии с ростом размера $|s|$ управляемой им группы исполнителей s растут как $|s|^\gamma$. Они вогнуты при степени однородности $\gamma < 1$, линейны при $\gamma = 1$ и выпуклы при $\gamma > 1$.

Таким образом, для решения вопроса о возможности неограниченного роста организации необходимо знать, превышает ли степень однородности функции затрат менеджера[1] единицу.

Для конкретной организации степень однородности функции затрат можно грубо оценить с помощью следующей процедуры анализа затрат на содержание ее менеджеров. Предположим, что функция затрат менеджеров организации однородная и существующую в настоящий момент организационную структуру можно считать оптимальной. Тогда, если затраты на содержание менеджера иерархии больше суммарных затрат на содержание всех непосредственно подчиненных ему менеджеров, то степень однородности функции затрат больше единицы. Если его затраты меньше, то степень однородности меньше единицы, если равны – то степень однородности равна единице.

Действительно, в предположении однородности функции затрат оптимальная древовидная иерархия является однородным деревом (или является близкой к нему). Если менеджер этой иерархии управляет группой исполнителей меры μ и делит эту группу между r своими непосредственными подчиненными в пропорции $x = (x_1, \dots, x_r)$, то его затраты равны $\mu^\gamma c(x)$, а затраты непосредственных подчиненных – $\mu^\gamma x_1^\gamma c(x)$, …, $\mu^\gamma x_r^\gamma c(x)$. Тогда разность между затратами менеджера и суммарными затратами его непосредственных подчиненных определяется выражением

(45) $\mu^\gamma c(x)(1 - x_1^\gamma - \dots - x_r^\gamma)$.

Легко проверить, что выражение (45) положительно при $\gamma > 1$, отрицательно при $\gamma < 1$ и равно нулю при $\gamma = 1$. Итак, грубо говоря, если в организации содержание начальника стоит меньше, чем содержание всех его непосредственных подчиненных вместе взятых, то такая организация может расти неограниченно, если больше – то организация имеет верхний предел размера, превышение которого невыгодно.

[1] *Под затратами менеджера может пониматься не только зарплата, но и затраты на организацию работы* (*аренда помещений, оргтехника и т.п.*)*, включающие, возможно, и содержание секретарей, помощников.*

Темы для самостоятельного изучения

4.1. Развитие моделей формирования организационных структур [8, 9, 15-17, 19-21, 23, 25-31, 33, 36-47].

4.2. Общая модель оптимизации иерархических структур [2, 10].

4.3. Алгоритмы поиска оптимальных иерархий [2].

4.4. Оптимальные деревья при однородных функциях затрат менеджеров [4].

4.5. Связь между задачами стимулирования и задачами формирования организационной иерархии [11, 15, 22, 36, 39].

4.6. Типовые организационные структуры [8, 10].

4.7. Классическая теория фирмы [24, 32, 34, 48].

4.8. Многоуровневые организационные иерархии [1, 2, 4, 10, 13].

4.9. Команды и организации [12, 15].

4.10. Динамика организационных структур [2].

4.11. Сетевые и иерархические организационные структуры [5, 12, 14].

4.12. Иерархические игры и организационные структуры [3, 14].

Литература к главе 4

1 *Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981.

2 *Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ РАН, 2003.

3 *Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.

4 *Губко М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур. – М.: ЛЕНАНД, 2006.

5 *Губко М.В., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Классификация моделей анализа и синтеза организационных структур // Управление большими системами. 2004. Вып. 6. С. 5 – 21.

6 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. – М:. Физматлит, 2004.

7 Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. – М.: ВЦ АН СССР, 1991.

8 Минцберг Г. Структура в кулаке: создание эффективной организации. – М.: Питер, 2001.

9 Михайлов А.П. Модель коррумпированных властных иерархий // Математическое моделирование. 1999. Т.11. № 1. С. 3 – 17.

10 *Мишин С.П. Оптимальные иерархии управления в экономических системах. – М.: ПМСОФТ, 2004.

11 *Мишин С.П. Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах // Автоматика и телемеханика. 2004. № 5. С. 96 – 119.

12 *Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. – М.: Физматлит, 2008.

13 *Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.

14 *Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003.

15 *Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007.

16 Овсиевич Б.И. Модели формирования организационных структур. – Л.: Наука, 1979.

17 Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем. –

М.: Наука, 1982.

18 Baker J.P., Jansen M.C., Murphy K.J. Compensation and Incentives: Practice and Theory // The Journal of Finance. 1988. Vol. 43. P. 593 – 616.

19 Beckmann M.J. Some Aspects of Returns to Scale in Business Administration // The Quarterly Journal of Economics. 1960. Vol. 74. №. 3. P. 464 – 471.

20 Beggs A.W. Queues and Hierarchies // The Review of Economic Studies. 2001. Vol. 68. № 2. P. 297 – 322.

21 Bolton P., Dewatripont M. The Firm as a Communication Network // The Quarterly Journal of Economics. 1994. Vol. 109. № 4. P. 809 – 839.

22 Bolton P., Dewatripont M. Contract Theory. – Cambridge and London: MIT Press, 2005.

23 Calvo G.A., Wellisz S. Supervision, Loss of Control and the Optimal Size of the Firm // The Journal of Political Economy. 1978. Vol. 86. № 5. P. 943 – 952.

24 Coase R.H. The Nature of the Firm // Economica, New Series. 1937. Vol. 4. № 16. P. 386 – 405.

25 Cremer J. A Partial Theory of the Optimal Organization of a Bureaucracy // The Bell Journal of Economics. 1980. Vol. 11. № 2. P. 683 – 693.

26 Garicano L. Hierarchies and Organization of Knowledge in Production // The Journal of Political Economy. 2000. Vol. 108. № 5. P. 874 – 904.

27 Garicano L., Hubbard T.N. Hierarchies, Specialization, and the Utilization of Knowledge: Theory and Evidence from the Legal Services Industry. – NBER Working Paper 10432, 2004.

28 Geanakoplos J., Milgrom P. A Theory of Hierarchies Based on Limited Managerial Attention // The Journal of Japanese and International Economies. 1991. Vol. 5(3). P. 205 – 225.

29 Harris M., Raviv A. Organization Design. Mimeo. 2000.

30 Hart O. Moore J. On the Design of Hierarchies: Coordination vs Specialization // The Journal of Political Economy. 2005. Vol. 113. P. 675 – 702.

31 Ioannides Y. Compexity and Organizational Architecture. – Working Paper, Dep. of Economics. Taft Univ., 2003.

32 Kaldor N. The equilibrium of the Firm // The Economic Journal.

1934. Vol. 44. № 173. P. 60 – 76.

33 Keren M., Levhari D. The Internal Organization of the Firm and the Shape of Average Costs // The Bell Journal of Economics. 1983. Vol. 14. № 2. P. 474 – 486.

34 Knight F.H. Risk, Uncertainty and Profit. – Boston: Houghton Mifflin, 1921.

35 Kostiuk P.F. Firm Size and Executive Compensation // The Journal of Human Resources. 1989. Vol. 25. P. 91 – 105.

36 Macho-Stadler I., Perez-Castrillo J.D. Centralized and Decentralized Contracts in a Moral Hazard Environment // The Journal of Industrial Economics. 1998. Vol. 46. № 4. P. 489 – 510.

37 Marschak T.A., Reichelstein S. Network Mechanisms, Information Efficiencies and the Role Of Hierarchies. – Unpub. Ms. Graduate School of Business Administration. Stanford U., 1987.

38 Maskin E., Qian Y., Xu C. Incentives, Information and Organizational Form // The Review of Economic Studies. 2000. № 67(2). P. 359 – 378.

39 Melumad D.N., Mookherjee D., Reichelstein S. Hierarchical Decentralization of Incentive Contracts // The RAND Journal of Economics. 1995. Vol. 26. № 4. P. 654 – 672.

40 Qian Y. Incentives and Loss of Control in an Optimal Hierarchy // The Review of Econ. Studies. 1994. Vol. 61. № 3. P. 527 – 544.

41 Radner R. Hierarchy: The Economics of Managing // The Journal of Economic Literature. 1992. Vol. 30. № 3. P. 1382 – 1415.

42 Rosen S. Authority, Control, and the Distribution of Earnings // The Bell Journal of Economics. 1982. Vol. 13. № 2. P. 311 – 323.

43 Sah R.K., Stiglitz J.E. The Architecture of Economic Systems: Hierarchies and Polyarchies // The American Economic Review. 1986. Vol. 76. № 4. P. 716 – 727.

44 Sah R.K., Stiglitz J.E. Committees, Hierarchies and Polyarchies // The Economic Journal. 1988. Vol. 98. № 391. P. 451 – 470.

45 Sah R. K., Stiglitz J.E. The Quality of Managers in Centralized Versus Decentralized Organizations // The Quarterly Journal of Economics. 1991. Vol. 106. № 1. P. 289 – 295.

46 Van Zandt T. Efficient Parallel Addition / Unpub. ms. AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1990.

47 Williamson O. Hierarchical Control and Optimal Firm Size // The Journal of Political Economy. 1967. Vol. 75. № 2. P. 123 – 138.

48 Williamson O. Markets and Hierarchies. – New York: Free Press, 1975.

49 Zhou X. CEO Pay, Firm Size, and Corporate Performance: Evidence from Canada // The Canadian Journal of Economics. 2000. Vol. 33. № 1. P. 213 – 251.

Основные обозначения

Обозначения:

A – множество допустимых действий агента;

A' – множество допустимых векторов действий агентов;

A_0 – множество допустимых результатов деятельности агентов;

$A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_i$ – множество допустимых обстановок игры для i-го агента;

$c(\cdot)$ – функция затрат агента;

δ – мотивирующая надбавка;

$f(\cdot)$ – целевая функция агента;

$\Phi(\cdot)$ – целевая функция центра;

i – номер агента (используется в качестве нижнего индекса у соответствующей переменной, например, y_i – действие i-го агента);

$H(\cdot)$ – функция дохода центра;

$K(\sigma)$ – эффективность системы стимулирования $\sigma(\cdot)$;

λ – ставка оплаты;

n – число агентов;

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов;

$P(\sigma)$ – множество решений игры (действий агента(ов), реализуемых системой стимулирования $\sigma(\cdot)$);

$Q(\cdot)$ – оператор агрегирования;

r – тип агента;

R – ограничение фонда заработной платы;

ρ – норматив рентабельности;

S – множество согласованных планов;

$\sigma(\cdot)$ – функция стимулирования;

Σ – значение суммы целевых функций всех участников организационной системы;

x – план или вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ планов;

x^* – оптимальный согласованный план;

y – действие агента или вектор $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ действий агентов;

y^* – действие агента, на котором достигается максимум его целевой функции;

$y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ – обстановка игры для i-го агента;

z – результат деятельности агента(ов).

Определения

$\operatorname{Arg}\max\limits_{x \in X} f(x) = \{x \in X \mid \forall x' \in X \; f(x') \le f(x)\}$ – множество максимумов функции $f(\cdot)$ на множестве X;

$\arg\max\limits_{x \in X} f(x)$ – значение аргумента, при котором достигается максимум функции $f(\cdot)$ на множестве X;

$g: X \to Y$ – функция $g(\cdot)$, отображающая множество X во множество Y;

$\max\limits_{x \in X} f(x)$ – максимальное значение функции $f(\cdot)$ на множестве X;

$\prod\limits_{i \in N} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ – декартово произведение множеств;

$\Re_1$ – множество действительных чисел;

$\Re_1^+$ – множество неотрицательных действительных чисел.

Сведения об авторах

ВОРОНИН АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

1961 г.р., доктор физико-математических наук, профессор, проректор по информатизации и телекоммуникациям Волгоградского государственного университета.

Автор более 50 научных работ по нелинейной механике, асимптотической теории дифференциальных уравнений, методам оптимизации иерархических структур.

E-mail: voronin@volsu.ru

ГУБКО МИХАИЛ ВЛАДИМИРОВИЧ

1977 г.р., кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института проблем управления Российской академии наук.

Область научных интересов: теория управления организационными системами, теория игр, задачи формирования иерархических структур.

E-mail: mgoubko@mail.ru.

МИШИН
СЕРГЕЙ
ПЕТРОВИЧ

1978 г.р., кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем управления Российской академии наук. Область научных интересов: теория управления организационными системами, теория игр, задачи формирования иерархических структур.

E-mail: smishin@newmail.ru

НОВИКОВ
ДМИТРИЙ
АЛЕКСАНДРОВИЧ

1970 г.р., доктор технических наук, профессор, заместитель директора Института проблем управления Российской академии наук, профессор Московского физико-технического института.

Автор более 300 научных работ по теории управления социально-экономическими системами, в том числе – по системному анализу, теории игр, принятию решений, управлению проектами и механизмам управления организационными системами.

E-mail: novikov@ipu.ru.