Д.А. Новиков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ И ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ КОМАНД

ФМ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ И ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ КОМАНД

Д.А. Новиков

НОВИКОВ
ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

Доктор технических наук, профессор.
Заместитель директора Института проблем управления Российской академии наук, профессор Московского физико-технического института.
Автор более 300 научных работ по теории управления социально-экономическими системами, в том числе – по системному анализу, теории игр, принятию решений, управлению проектами и механизмам управления организационными системами.

E-mail: novikov@ipu.ru, www.mtas.ru, www.ipu.ru.

ISBN 9875-94052-146-0

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

Д.А. Новиков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ И ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ КОМАНД

Москва
Физматлит
2008

ББК 32.81
Н 73
УДК 519

НОВИКОВ Д.А. **Математические модели формирования и функционирования команд**. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2008. – 184 с. ISBN 9875-94052-146-0

Монография посвящена результатам исследования математических моделей формирования и функционирования команд – коллективов, способных достигать цели автономно и согласованно при минимальных управляющих воздействиях.

Выделены следующие характеристики команды, в совокупности отличающие ее от группы, коллектива или организации: единство цели; совместная деятельность; непротиворечивость интересов; автономность деятельности; коллективная и взаимная ответственность за результаты совместной деятельности; специализация и взаимодополняемость ролей (включая оптимальное распределение функций и объемов работ, а также синергетичность взаимодействия членов команды); устойчивость команды (включая оправдываемость взаимных ожиданий ее членов).

Приведен обзор известных моделей команд, а также ряд оригинальных результатов. При этом значительный акцент делается на «рефлексивные» теоретико-игровые модели, в которых автономность и слаженность совместной деятельности членов команды обеспечивается тем, что их действия согласованы с иерархией взаимных представлений друг о друге.

Рецензенты: *д.т.н., проф. В.Н. Бурков*
к.т.н., с.н.с. М.В. Губко

Утверждено к печати Редакционным советом Института

ISBN 9875-94052-146-0

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в менеджменте, управлении проектами и других разделах прикладной теории управления организационными системами все большее внимание уделяется командной деятельности персонала организации. Под **командой** понимается коллектив (объединение людей, осуществляющих совместную деятельность и обладающих общими интересами), способный достигать цели автономно и согласованно, при минимальных управляющих воздействиях [72].

Существенными в приведенном определении команды являются два аспекта. Первый – достижение цели, то есть конечный результат совместной деятельности является для команды системообразующим фактором. Второй аспект – автономность и согласованность деятельности – означает, что каждый из членов команды демонстрирует поведение, требуемое в данных условиях (позволяющее достичь поставленной цели), то есть то поведение, которого от него ожидают другие члены команды.

Команды получили широкую распространенность. С одной стороны: уже в середине 90-х годов XX века более чем в 50 % американских фирм существовали «производственные» команды [160]. С другой стороны, команды существуют во многих областях деятельности: уже привычными стали термины «*команда проекта*» [54, 55, 92], «*управленческая команда*», «*творческая команда*», не говоря уже о «*спортивных командах*».

Причины роста популярности команд: рост конкуренции, технологические достижения, необходимость решения сложных проблем и соответствия быстрым темпам перемен, текучесть кадров [6]. Но команды обладают и недостатками: высокая концентрация специалистов на узком фронте работ, повышенный фонд стимулирования и интенсивный ритм работы служб обеспечения, необходимость обучения и тренинга членов команды, ограниченность размера, возможность самораспада [33].

Следует признать, что термин «команда» чрезвычайно распространен во многих отраслях современной науки. Однако во многих случаях он употребляется на уровне обыденного языка без выявления специфических для команд (и отличающих их, например, от группы и/или коллектива) свойств. Примерами являются:

- *многоагентные системы*, в которых моделируется поведение «команд» автономных компьютерных программ – «агентов» [94, 146, 173];

- задачи описания *динамики коллективного поведения*, в которых поведение каждого из агентов в текущий момент времени определяется его собственным состоянием (а также состояниями других членов «группы») в предшествующий момент времени (реже – в предшествующие моменты времени) – см. [18, 48, 80] и раздел 2.6 настоящей работы;

- модели *группового* (кооперативного) *управления*, в которых взаимодействие подвижных «агентов» зависит от их взаимного пространственного расположения (хрестоматийным объектом управления является группа мобильных роботов) – см. обзор в [165].

Рассматриваемая и в многоагентных системах, и в моделях коллективного поведения, и в моделях группового управления «группа» агентов может условно трактоваться как «команда», однако во всех перечисленных случаях агенты пассивны в том смысле, что совместное принятие ими решений отсутствует. Соответствующие классы работ анализировать мы не будем.

Подчеркнем также, что, так как в настоящей работе речь идет о математических моделях команд, то мы не претендуем на сколь либо полное освещение многочисленных работ, посвященных качественным рассуждениям и описанию лучших практик формирования и функционирования команд. Впечатление[1] о соответствующем разделе *менеджмента* читатель может составить, ознакомившись, например, с [2, 4, 6, 16, 33, 49, 58, 83, 88, 95, 96, 115, 121, 123, 143, 144, 147, 157, 169, 174]. Кроме того, проблемы функционирования команд исследуются в *социологии* и *психологии* (см. соответственно [23, 162] и [98, 104, 174], а также ссылки в указанных работах). Ниже модели команд рассматриваются в рамках *теории организационных систем* [72] – раздела теории управления, изучающего механизмы функционирования организаций.

Структура изложения. Первый раздел содержит качественное обсуждение многочисленных определений термина «команда», систематизацию характеристических свойств команд. Во втором

---

[1] *Количество публикаций в этой области столь велико, что любая попытка исчерпывающего обзора обречена на неудачу.*

разделе вводится классификация известных направлений исследований формальных моделей формирования и функционирования[2] команд, устанавливается соответствие между свойствами команд, отражаемых в тех или иных классах моделей, а также приводится краткий обзор последних.

Третий и последующие разделы настоящей работы включают оригинальные модели команд, учитывающие «рефлексивные» аспекты принятия решений членами команды (*рефлексия* – принцип человеческого мышления, направляющий его на осмысление и осознание собственных форм и предпосылок [97, с. 579]): третий и четвертый разделы посвящены соответственно моделям формирования и функционирования однородной и неоднородной команды, в пятом разделе команды анализируются с точки зрения репутации и норм деятельности, в шестом разделе приведена модель автономного принятия решений, в седьмом – модели распределения затрат, в восьмом – модели адаптации команд, в девятом – модели обучения в командах.

В настоящей работе основной акцент делается на «рефлексивные» теоретико-игровые модели, в которых автономность и слаженность совместной деятельности членов команды (по достижению общих целей) обеспечивается тем, что их действия согласованы с иерархией взаимных представлений друг о друге[3]. В связи с этим в Приложении приведены минимально необходимые сведения из теории *рефлексивных игр* [77, 78, 105].

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность за ценные замечания и рекомендации по содержанию книги рецензентам – д.т.н., проф. В.Н. Буркову и к.т.н., с.н.с. М.В. Губко, своим коллегам – к.т.н., с.н.с. Н.А. Коргину, д.т.н., проф. С.А. Красновой и д.т.н., проф. В.А. Уткину, а также аспирантам

---

[2] *Следует предостеречь читателя от негативной трактовки термина «функционирование команды», ассоциирующейся с «функционером»: в Словаре русского языка С.И. Ожегова функционирование определяется как «быть в действии, работать».*

[3] *Под иерархией взаимных представлений членов команды о существенных параметрах понимается совокупность их представлений об этих параметрах (первый уровень иерархии), представлений о представлениях других членов команды (второй уровень) и т.д. (см. в Приложении описание информационной структуры как формальной модели иерархии взаимных представлений).*

О.Н. Толстиковой и И.В. Бурых, принявшим участие в исследовании ряда моделей.

Основные результаты. В настоящей работе принят подход, в рамках которого команда, наряду с группой, коллективом и организационной системой, рассматривается как форма организации коллективной деятельности.

В **первом разделе** выделены следующие характеристики команды, в совокупности отличающие ее от группы, коллектива и/или организации:

- единство цели;
- совместная деятельность;
- непротиворечивость интересов;
- автономность деятельности;
- коллективная и взаимная ответственность за результаты совместной деятельности;
- специализация и взаимодополняемость ролей (включая оптимальное распределение функций и объемов работ, а также синергетичность взаимодействия членов команды);
- устойчивость команды (оправдываемость взаимных ожиданий ее членов).

Кроме того, во-первых, если деятельность организации регламентируется, в основном, механизмами функционирования, то деятельность команды в значительной степени регламентируется нормами. Во-вторых, в командах, в отличие от организаций, отсутствует формальная иерархия[4], поэтому для команд существенную роль играют эффекты самоорганизации. Эти эффекты моделируются самостоятельным и автономным выбором членами команды своих действий (выполняемых функций, объемов работ и т.д.). Условием устойчивого функционирования команды при этом является согласованность выбираемых действий, причем согласованность как с общей для команды целью, так и с ожиданиями членов команды – совпадение ожидаемого (прогнозируемого) и наблюдаемого (реального) поведения.

---

[4] *Присутствующий неявно* (*в рамках традиции теории управления организационными системами*) *в рассматриваемых ниже моделях управляющий орган может условно считаться выразителем интересов команды в целом или интересов той надсистемы, в рамках которой функционирует команда.*

В первом разделе также выделены три временн*ы*х этапа существования команды – этап формирования состава команды, этап адаптации команды (обычно условно называемый «формированием команды») и этап ее «стационарного» функционирования (этапы стагнации и распада мы не рассматриваем).

Во **втором разделе** проведен обзор нескольких направлений исследований (в зависимости от используемого аппарата моделирования) моделей команд:

- «Задачи о назначении», использующие, в основном, аппарат оптимизации для решения задач формирования состава команд, распределения ролей и объемов работ (см. раздел 2.1). Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что на сегодняшний день в математической экономике и исследовании операций накоплен значительный опыт постановки и решения разнообразных задач распределения объемов работ, который целесообразно использовать и при анализе процессов эффективного формирования и функционирования команд. Например, транспортная задача и задача о назначении являются хрестоматийными задачами исследования операций и имеют множество обобщений, которые целесообразно использовать при решении задач распределения функций между членами команды. Задача поиска оптимального (с учетом и синергетического эффекта, и затрат на управление) состава команды может быть сведена к известной задаче поиска решения кооперативной игры.
- Теоретико-игровые модели, использующие аппарат теории игр для описания и исследования процессов формирования и функционирования команд (см. разделы 2.2-2.5).

Наибольшее продвижение в этой области достигнуто в двух направлениях. Первое – изучение моделей коллективного стимулирования, в которых вознаграждение членов команды зависит от достигнутого ими результата совместной деятельности (что отражает автономность деятельности команды). При этом члены команды сами согласованно принимают решения об оптимальном распределении работ между ними.

Второе направление связано с моделями норм деятельности (правил, предписывающих членам команды то или иное поведение в зависимости от ситуации) и репутации, то есть норм деятельности членов команды с точки зрения друг друга. Этот класс моделей адекватно описывает автономность и устойчивость функционирования команд.

- «Экспериментальные исследования» команд, включающие имитационные эксперименты и деловые игры (см. раздел 2.6).
- «Рефлексивные модели», использующие аппарат теории рефлексивных игр (см. Приложение и [78]) для описания взаимодействия членов команды, имеющих несовпадающие взаимные представления о существенных параметрах. Именно этому сравнительно молодому направлению посвящена значительная часть настоящей работы.

Выявленные в первом разделе характеристики команд обусловливают набор моделей, отражающих эти характеристики и рассматриваемые в последующих разделах настоящей работы (см. Табл. 1 во введении ко второму разделу).

В **третьем разделе** приводится модель формирования однородной команды, основывающаяся на рассмотрении иерархий взаимных представлений агентов об их индивидуальных параметрах (так называемых *типах* агентов), определяющих эффективность индивидуальной деятельности. Предполагается, что автономность деятельности сформированной команды соответствует стабильному информационному равновесию игры агентов, в котором ожидания членов команды относительно поведения друг друга оправдываются.

Процесс формирования команды описывается динамикой взаимных представлений агентов о типах друг друга в зависимости от наблюдаемых результатов деятельности команды в целом и/или ее отдельных членов. В рамках своих представлений каждый агент может предсказать, какие действия выберут другие агенты, какие они понесут индивидуальные затраты и каковы будут суммарные затраты. Если выбор действий производится многократно, и наблюдаемая некоторым агентом реальность оказывается отличной от его представлений, то он вынужден корректировать свои представления и при очередном своем выборе использовать «новые» представления. То есть, командой в рамках «рефлексивного» описания принятия решений считается множество агентов, выборы которых согласованы с иерархией их взаимных представлений друг о друге. Другими словами, командой будет набор агентов с такой структурой информированности, которая является неподвижной точкой отображения, описывающего динамику структур их информированности, при условии что действия, выбираемые агентами, являются информационным равновесием в рамках данных структур информированности[5].

Показано, что стабильность команды и слаженность ее работы может достигаться, в том числе, и при ложных представлениях членах команды друг о друге. Выход из ложного равновесия требует получения агентами дополнительной информации. Поэтому одна из управленческих возможностей заключается в создании, во-первых, разнообразных ситуаций деятельности (в том числе, в процессе формирования команды за счет тренингов) и, во-вторых, обеспечения максимальных коммуникаций и доступа ко всей существенной информации.

В **четвертом разделе** изучаются модели формирования и функционирования неоднородных команд, то есть таких, в которых члены команды выполняют различные функции, причем каждый член команды в общем случае характеризуется определенными эффективностями реализации тех или иных функций.

Введены такие числовые показатели команды, как: профессионализм агента, профессионализм команды, средняя квалификация команды по каждой из выполняемых ею функций, неоднородность квалификаций агента, неоднородность команды, «специализированность» команды. Решена задача оптимального распределения объемов работ между агентами, найдено оптимальное распределение значений уровней квалификаций агентов.

Так как команды характеризуются автономностью деятельности агентов, то последние могут самостоятельно принимать решения о том, какие работы и в каких объемах им выполнять. Если интересы всех членов команды едины и заключаются, например, в минимизации суммарных затрат команды, то при условии, что все параметры являются общим знанием, каждый из агентов может самостоятельно решить задачу оптимального распределения объемов работ и выбрать оптимальные действия. Однако может ока-

---

[5] *Такое определение команды качественно близко к определениям свойств стабильности и согласованности информационного управления* (*см. Приложение*), *отвечающих за то, чтобы реальные действия или выигрыши агентов совпадали с ожидаемыми действиями или выигрышами соответственно.*

заться, что каждый из членов команды преследует собственные интересы. Как же будет функционировать команда в этом случае, и как добиться слаженной и эффективной (в смысле минимума суммарных затрат) работы ее членов? Для ответа на этот вопрос в четвертом разделе рассмотрена соответствующая модель, в которой уже появляются элементы управления, характерного для иерархических организационных систем.

Установлено соответствие между результатами исследования задачи оптимального распределения функций между членами команды и результатами анализа и синтеза оптимальных организационных структур.

Исследована деятельность команды в изменяющихся внешних условиях, когда требования к ее результатам (а, следовательно, и функциям, и объемам работ) меняются во времени. В частности, получен ответ на распространенный на практике вопрос – какая команда лучше (и в каких условиях): содержащая набор «узких профессионалов», специализирующихся каждый в определенной области, или «универсалов», которые могут выполнять любые функции, пусть даже хуже профессионалов в соответствующей области? То есть, каково оптимальное соотношение между средней квалификацией, однородностью и «специализированностью» команды?

В **пятом разделе** рассматриваются модели репутации и норм деятельности, позволяющие описать и исследовать образование и функционирование команд.

В рамках теоретико-игровой модели ведено понятие *нормы* деятельности, определяемой как отображение множества возможных ситуаций, в которых агент принимает решения, во множество его действий. Другими словами, норма предписывает агенту то или иное поведение в зависимости от ситуации.

Норма является согласованной (с интересами и предпочтениями агента), если она «предлагает» агенту выбирать рациональные с его точки зрения действия.

Задача управления нормами деятельности заключается в нахождении таких согласованных норм, которые побуждали бы агентов выбирать наиболее предпочтительные с точки зрения управляющего органа действия. Однако, как отмечалось выше, в командах зачастую отсутствует в явном виде «управляющий орган», поэтому для описания команд существенно понятие *репута-*

ции – рефлексии над нормой – соответствующей тому, выбора каких действий ожидают другие агенты от данного агента в той или иной ситуации. То есть, *стабильной командой* с точки зрения репутации можно назвать множество агентов, репутация которых оправдывается в процессе их совместной деятельности. Также получен ответ на вопрос о том, что произойдет, если взаимные представления (репутация) агентов не оправдываются, то есть, рассмотрена модель *формирования команды*, описывающая в терминах норм деятельности и репутации динамику взаимных представлений агентов на основании наблюдаемой ими информации о действиях оппонентов.

Описанные в пятом разделе модели удачно отражают автономность однородной команды («*артели*») – способность агентов самостоятельно распределять работу между собой с тем, чтобы наиболее эффективным способом (например, с минимальными суммарными затратами) достичь цели (например, требуемого значения агрегированного результата совместной деятельности).

Рассмотрение моделей автономного принятия решений (см. **шестой раздел**) позволяет сделать вывод, что интересы членов команды должны быть согласованы между собой и, условно говоря, с «целями команды в целом». При этом коллективное решение является «системообразующим фактором», и каждый из членов команды должен быть заинтересован в том, чтобы принять наиболее эффективное решение. Тогда возможна автономная и согласованная деятельность команды, и никому из членов команды не будет выгодно искажать сообщаемую другим частную информацию.

В **седьмом разделе** рассматривается модель однородной команды, использующей единый ресурс, суммарные затраты на приобретение которого зависят от суммы действий, выбираемых членами команды. Условием устойчивого функционирования такой команды считается существование процедуры распределения ресурса, при которой возможен выбор агентами такого вектора ненулевых действий, который был бы одновременно устойчив по Нэшу (устойчив относительно индивидуальных отклонений агентов) и эффективен по Парето (выгоден для команды в целом). Качественно, основные результаты заключаются в следующем. Во-первых, показано, что, при гладких процедурах распределения затрат устойчивое функционирование команды невозможно. Во-вторых, доказано, что, если члены однородной команды таковы, что их можно упорядочить по эффективности деятельности, и это упорядочение не зависит от выбираемых ими действий (например, объемов производства), то устойчивое функционирование команды также невозможно. И, наконец, в-третьих, обосновано, что условием устойчивого функционирования команды является наличие синергетического взаимодействия ее членов.

В **восьмом разделе** рассмотрены модели *адаптации команд* – процесса изменения действий (включая в общем случае функции и объемы работ), выбираемых членами команды, на основе текущей информации в изменяющихся внешних условиях функционирования команды. Выделены несколько вложенных уровней адаптации:

- изменение информированности о внешней среде;
- изменение поведения (действий, выбираемых на основе имеющейся информации);
- изменение параметров системы, позволяющее реализовывать более эффективное в изменившихся условиях поведение;
- целенаправленное изменение внешней среды (активная адаптация).

Показано, что специфика команд заключается, в частности, в том, что каждый агент в качестве информации для корректировки своих представлений о неопределенном параметре может использовать не только результаты наблюдения за внешней средой, но и результаты наблюдения за действиями и результатами деятельности других агентов, пытаясь «объяснить», почему они выбрали именно эти действия. Другими словами, если результат совместной деятельности зависит от действий всех агентов, то у каждого агента имеются, как максимум, четыре «источника информации» о внешней среде:

1) априорная частная информация, которой обладает каждый из агентов;

2) действия других агентов: наблюдая их и предполагая, что оппоненты действуют рационально, агент может осуществлять рефлексию – оценивать ту информацию о внешней среде, на основании которой рационален выбор оппонентами именно этих действий;

3) выигрыши агентов – на основании этой информации агенты могут сделать вывод о тех состояниях внешней среды, при кото-

рых наблюдаемый результат приводит к наблюдаемым выигрышам;

4) множество состояний внешней среды, при которых наблюдаемый вектор действий агентов приводит именно к данному наблюдаемому значению результата:

Введено такое понятие, как «*время адаптации команды*» – время, за которое при неизменной внешней среде агенты на основании наблюдаемой информации могут однозначно идентифицировать состояние внешней среды. Время адаптации сокращается с увеличением числа наблюдаемых членами команды параметров и возрастает с ростом априорной неопределенности.

Рассмотренные в восьмом разделе модели адаптации команд отражают эффекты приспособления, привыкания и т.п. к изменяющимся внешним условиям. Приведены примеры, иллюстрирующие процессы адаптации команд как к резкому, так и к «медленному» изменению внешних условий.

В **девятом разделе** рассмотрены модели обучения членов команды в процессе работы. В рамках предположения о том, что объем уже выполненных агентом работ условно отражает накопленный им «опыт», сформулирована и решена задача об оптимальном обучении – выбора объемов работ, выполняемых агентами в те или иные промежутки времени. Проведенный анализ свидетельствует, что:

- при фиксированном суммарном объеме работ одного агента результативные характеристики научения не зависят от того, как объемы работ распределены по периодам времени;
- решение задачи об оптимальном итеративном (повторяющемся) научении одного агента не зависит от его начальной квалификации;
- чем выше скорость научения агента, тем больший объем работ он должен выполнять в последних периодах. Так как суумарный объем работ фиксирован, то с ростом скорости научения все меньший объем работ необходимо выделять на начальные периоды для повышения начальной квалификации агента;
- оптимальной стратегией итеративного научения является увеличение объема работ агента со временем, причем, чем выше скорость обучения, тем более «выпуклой» является оптимальная траектория обучения. Если кривая научения выпуклая (агент обучается все более и более эффективно), то оптимальная траектория

обучения будет убывающей, то есть оптимальной стратегией обучения будет уже не увеличение, а уменьшение объема работ агента со временем;

- если отсутствуют ограничения на индивидуальные объемы работ, то в команде весь объем работ выполняет «лучший» (с точки зрения комбинации начальной квалификации и скорости научения) агент;

- недостаток начальной квалификации агента может быть успешно компенсирован эффективным обучением как на его собственном, так и чужом опыте;

- важнейшим условием стабильного и эффективного функционирования команды является наличие общего знания, на формирование которого обычно нацелено большинство организационных и других усилий в процессе формирования и обучения команды.

Завершив краткое описание основных результатов, перейдем к их систематическому изложению.

1. КОМАНДЫ: КАЧЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД

В настоящем разделе приводятся и обсуждаются различные определения термина «команда», а также перечисляются и систематизируются характеристики команд.

Определения термина «команда». Прежде чем определять, что такое команда, разберемся с терминами «группа», «коллектив» и «организация».

«*Группа* – совокупность людей, объединенных общностью интересов, профессии, деятельности и т.п.» [79, с. 120].

«*Коллектив* – группа лиц, объединенных общей работой [79, с. 230]».

То есть, любой коллектив является группой, но не любая группа коллективом – см. Рис. 1.

В «Философском энциклопедическом словаре» приводится следующее определение *организации*: «1) внутренняя упорядоченность, согласованность взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных частей целого, обусловленная его строением; 2) совокупность процессов или действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого; 3) объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил» [97, с. 463].

То есть термин «организация» может использоваться для обозначения свойства, процесса и объекта. Понятно, что *организационная система* (см. третье определение) обладает определенной организацией (см. первое определение), которую приобретает в процессе организации (см. второе определение). Мы будем использовать последнее определение понятия «организация», то есть понимать под организацией организационную систему как объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил (эти процедуры и правила называются *механизмом функционирования*[6] организации [10, 72]). Отметим, что именно наличие процедур и правил, регламентирующих совместную деятельность членов организации, является определяющим свойством и отличает орга-

---

[6] *Общее определение механизма таково – «система, устройство, определяющее порядок какого-либо вида деятельности»* [*79, с. 283*].

низацию от группы и коллектива. Понятно, что любая «организация» включает в себя «коллектив», но не наоборот – см. Рис. 1.

Приведем ряд распространенных определений термина «команда»[7]. **Команда**:

«1) краткий устный приказ командира; 2) вре́менная или постоянная организационная единица; 3) личный состав, экипаж судна; 4) спортивный коллектив, возглавляемый капитаном» [93, с. 238].

«Группа людей, организованная для совместной работы ради достижения общих целей и разделяющих ответственность за полученные результаты» [6].

«A group of people working together in a coordinated effort» (Webster New World Dictionary, 1988. p. 1373).

«Небольшое количество человек, имеющих взаимодополняющие навыки, приверженные общим целям, практическим задачам и подходам, в отношении которых они несут ответственность друг перед другом» [143].

«Группа из двух или более индивидов, которые для достижения определенной цели координируют свои взаимодействия и трудовые усилия» [123].

«Одна или несколько малых групп людей, функционирующих как единое целое, созданное для достижения общей цели, с максимальным уровнем сплоченности, взаимодействия, ответственности, идентификации членов группы с ней, уровнем развития группы, оптимальным распределением обязательных и вспомогательных функций» [175].

«Группа, обладающая единой целью, четкой иерархией, стандартами взаимодействия и функционально-ролевой специализацией».

«Группа людей, организованная для совместного решения общей задачи таким образом, что каждый ее участник отвечает за результаты работы всей группы» [6].

«Командой называют небольшое количество человек (чаще всего 5-7, реже до 15-20), которые разделяют цели, ценности и общие подходы к реализации совместной деятельности, имеют взаимодополняющие навыки; принимают на себя ответственность

---

[7] *Сразу исключим значение этого термина, принятое в программировании.*

за конечные результаты, способны изменять функционально-ролевую соотнесенность (исполнять любые внутригрупповые роли); имеют взаимоопределяющую принадлежность свою и партнеров к данной общности (группе)» [96].

В настоящей работе мы примем следующее общее определение *команды*: коллектив, способный достигать цели автономно [72]. То есть, любая команда является коллективом, но не наоборот; команда может существовать в рамках организационной системы – см. Рис. 1.

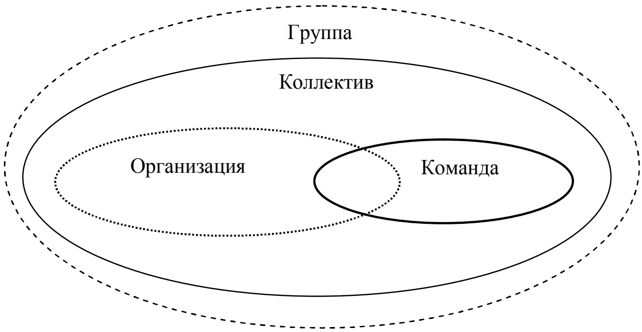

Рис. 1. Группа, коллектив, организация и команда

Таким образом, **команда, наряду с группой, коллективом и организационной системой, является формой организации коллективной деятельности**.

Зафиксировав, что понимается под «командой» в настоящей работе, перейдем к обсуждению характеристик команд.

Характеристики команд. Практически в каждой публикации, посвященной командам, перечисляются их характеристики, причем устоявшегося (общепринятого) их списка на сегодняшний день не существует.

Так, например, в [135] отмечается, что команда обладает пятью ключевыми характеристиками:

♦ команда существует для достижения совместных целей;

♦ члены команды взаимозависимы в рамках общей цели;

♦ команды ограничены и устойчивы во времени;

♦ члены команды имеют полномочия управлять своей работой и внутренними процессами;

- ♦ команды функционируют в контексте более общей системы.

В [6] приводятся следующие три основных характерных признака команды: люди объединяются для выполнения работы, наличие общей цели, наличие взаимной и коллективной ответственности.

Семь ключевых принципов организации командной формы работ приведены в [33]:

- ♦ коллективное исполнение работы,
- ♦ коллективная ответственность,
- ♦ единая форма стимулирования,
- ♦ адекватное стимулирование за результат,
- ♦ автономное самоуправление,
- ♦ повышенная исполнительская дисциплина,
- ♦ добровольность вхождения в команду.

В качестве примера неудачного – несистематизированного – «перечислизма» приведем без ссылки следующие «характеристики эффективной команды»:

- ♦ квалифицированность;
- ♦ мотивированность;
- ♦ ответственность;
- ♦ сплоченность;
- ♦ уверенность в успехе;
- ♦ нацеленность на решение задач заказчика.

Отдельно следует отметить такой непременный атрибут команды, как *синергетичность* взаимодействия ее членов, вследствие которой, действуя совместно, члены команды могут достигать бóльших результатов, чем при действии поодиночке. Синергетический эффект команды, несепарабельность результата совместной деятельности по усилиям членов команды, роль информации и другие аспекты на качественном уровне подробно обсуждаются во многих работах (см., например, [109]).

Итак, можно выделить следующие *характеристики команды*, в совокупности отличающие ее от группы, коллектива и/или организации:

1) единство цели;
2) совместная деятельность;
3) непротиворечивость интересов;

4) автономность деятельности;

5) коллективная и взаимная ответственность за результаты совместной деятельности;

6) специализация и взаимодополняемость ролей (включая оптимальное распределение функций и объемов работ, а также синергетичность взаимодействия членов команды);

7) устойчивость команды (оправдываемость взаимных ожиданий ее членов).

При рассмотрении ниже математических моделей мы будем каждый раз акцентировать внимание на том, какие из свойств команды отражает та или иная модель (см. также Табл. 1 и Табл. 2).

Классификация команд. Существует множество более или менее детальных классификаций команд по разным основаниям.

Так, например, в [16] выделяют постоянные и вре́менные, формальные и неформальные команды.

В [4] предложено выделять два основных типа команд: функциональные (рабочие группы) и творческие. В *функциональной команде* группа людей выполняет одну функцию; все члены команды «равны» между собой и подчинены одному руководителю. Примером являются коллективы отделов организации, рабочие бригады и т.д.

В *творческую команду* включают людей с самыми разнообразными познаниями и навыками, как правило, для достижения разового результата. Сюда можно отнести: проектные команды, антрепризные театральные труппы, участников любительского турпохода и т.д.

Типы команд обсуждаются в [6]: команда – рабочее подразделение, проектная команда, команда по оперативному решению поставленных задач (целевая команда, оперативная группа), команда по вопросам усовершенствования, команда управления («управленческая команда»). В этой же работе предложены три принципа построения команды: целеустремленность, сплоченность, ответственность.

Как правило, в литературе используется следующая классификация команд по количественному составу:

- маленькие команды (менее 4 человек);
- средние команды (от 5 до 9 человек);
- большие команды (свыше 10 человек).

Можно также выделять однородные и неоднородные (по ролям и функциям членов, их профессиям) команды. Примером однородной команды является рабочая бригада (бригада электриков, бригада каменщиков и т.д.), примером неоднородной команды – комплексная бригада.

Таким образом, получаем систему *классификаций команд* по нескольким основаниям (в зависимости от решаемой задачи число оснований классификации может увеличиваться):

- однородные (основная задача – распределение объемов работ) и неоднородные (основная задача – распределение ролей и видов деятельности между агентами, а потом уже – распределение объемов работ);
- постоянные и вре́менные;
- формальные и неформальные;
- функциональные и творческие.

Роли, нормы и репутация. Деятельность организации регламентируется, в основном, механизмами функционирования, деятельность команды, в значительной степени, регламентируется нормами (см. раздел 2.4). Для стабильности команды существенной является оправдываемость индивидуальных репутаций ее членов, а «место» команды в организации зависит от репутации команды (коллективной репутации ее членов). Примерами являются как модель «ситуация – действие» [1] (которая показывает, как человек должен действовать в рамках ситуации [109]), так и рассматриваемые ниже в настоящей работе «рефлексивные» модели репутации и норм деятельности (см. разделы 2.5, 5.4 и 5.6).

Понятие репутации близко к понятию *роли*. Роли членов команды комплементарны, а отклонение от роли (ожидаемого поведения) – отсутствие оправдываемости репутации – приводит к ролевому конфликту. Например, как отмечается в [16, с. 16]: «Важным компонентом характеристики положения индивида в группе является система «групповых ожиданий. … Группа через систему ожидаемых образцов поведения, соответствующих каждой роли, определенным образом контролирует деятельность своих членов».

Субкультура команды и организационная культура. Внутрикомандный культурный контекст характеризуется через описание следующих индикаторов:

1) принятые и разделенные всеми участниками нормы команды;

2) способы распределения власти;

3) сплоченность и связанность членов команды;

4) характерные способы организации и протекания командного взаимодействия (командных процессов – координации, коммуникации, деятельности по разрешению конфликтов и принятию решений, налаживанию внешних связей);

5) организация ролевого распределения [96].

Принятые неформальные нормы деятельности, принципы распределения ролей являются элементами организационной культуры. Команда, функционирующая достаточно длительное время, может иметь свою собственную организационную культуру.

Корпоративный отдых, корпоративные вечеринки, символика, ритуалы и т.д. – все это содействует как становлению организационной культуры, так и привитию норм деятельности, ощущения сопричастности общему делу, принадлежности организации и/или команде.

Формирование и функционирование команды. В первом приближении следует разделять два временн*ы*х этапа существования команды – этап ее формирования и этап функционирования. Формирование команды может быть, в свою очередь, подразделено на *формирование состава команды* и ее *адаптацию*, после чего возможен уже этап «стационарного» *функционирования* – см. Рис. 2.

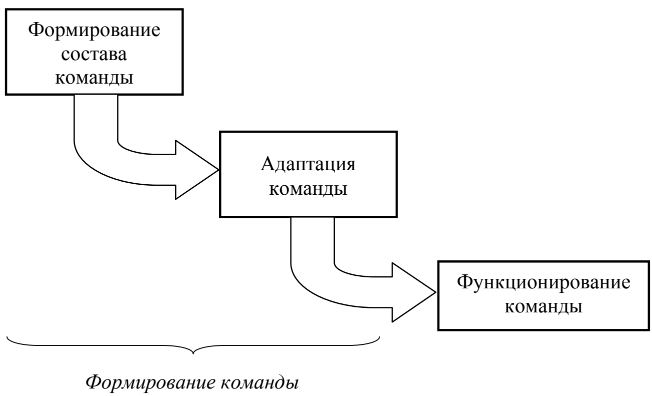

Рис. 2. Этапы существования команд

Такое разделение существенно, и в настоящей работе практически всюду (за исключением раздела 2.1) мы под формированием команды будем понимать процесс адаптации ее фиксированного (уже сформированного) состава.

Возможно выделение и несколько других, но похожих на перечисленные выше, этапов. Так, например, в [158] выделены следующие четыре этапа деятельности команды:

1. Проектирование.
2. Формирование.
3. Участие в проекте (функционирование – Д.Н.).
4. Расформирование и/или преобразование для работы над новым проектом.

Различают четыре основных подхода к методам сплочения команды: целеполагающий (основанный на целях), межличностный (интерперсональный), ролевой и проблемно-ориентированный [115].

1. Целеполагающий подход позволяет членам группы лучше ориентироваться в процессах выбора и реализации групповых целей. Процесс сплочения команды осуществляется с помощью консультанта. Цели могут быть стратегическими по своей природе или установлены в соответствии со спецификой деятельности, например, как изменение продуктивности или уровня продаж, а также как изменение внутренней среды или каких-либо процессов.

2. Межличностный подход (интерперсональный) – сфокусирован на улучшении межличностных отношений в группе. Его цель – увеличение группового доверия, поощрение совместной поддержки, а также увеличение внутрикомандных коммуникаций.

3. Ролевой подход – проведение дискуссии и переговоров среди членов команды относительно их ролей; предполагается, что роли членов команды частично перекрываются. Командное поведение может быть изменено в результате изменения их исполнения, а также индивидуального восприятия ролей.

4. Проблемно-ориентированный подход к формированию команды (через решение проблем) предполагает организацию заранее спланированных серий тренингов (с участием третьей стороны – консультанта) группы людей, имеющих общие организационные отношения и цели. Содержание процесса включает в себя последовательное развитие процедур решения командных проблем, и затем достижение главной командной задачи. Предполагается, что

наряду с наработкой такого умения у всех членов команды активность по ее формированию должна быть также сфокусирована на выполнении основной задачи, межличностных умениях, а также может включать целеполагание и прояснение функционально-ролевой соотнесенности.

Для того чтобы поддержать необходимую эффективность деятельности команды как системы и избежать возможной подмены целей проекта и команды на групповые или индивидуальные цели, используется ряд инструментов для организации деятельности команды. В частности, например, для управления проектами характерны:

- согласованные взаимные ожидания и требования как членов команды, так и других участников проекта;
- определенные границы самостоятельности каждого члена команды в рамках собственной ответственности в принятии решении о сроках, распределении и использовании ресурсов, результатах по проекту;
- групповая позитивная синергия;
- адекватная и справедливая система мотивации руководством членов команд менеджмента проекта;
- сбалансированная обратная связь;
- и другие.

В качестве регулирующих процесс самоорганизации инструментов можно использовать:

- корпоративные стандарты, правила и нормы;
- процедуры по повышению адекватности соотвествия целей команды целям и задачам проекта;
- мероприятия по развитию профессионализма управляющего проекта и членов команды;
- систему регулярных событий, формирующих единый информационный контекст проекта – рабочие совещания по проекту, отчеты по прогрессу и т.п.;
- другие, определяющиеся конкретным проектом [55].

Определив, что понимается под «командой», перечислив и систематизировав характеристики команд, перейдем к обзору известных математических моделей команд.

2. МОДЕЛИ КОМАНД: ОБЗОР

В настоящем разделе проводится обзор современного состояния математических моделей формирования и функционирования команд.

Направления исследований[8]**.** В зависимости от используемого аппарата моделирования можно выделить несколько направлений исследований (см. Рис. 3):

- «*задачи о назначении*», использующие, в основном, аппарат оптимизации для решения задач формирования состава команд, распределения ролей и объемов работ (см. раздел 2.1);

- *теоретико-игровые модели*, использующие аппарат теории игр [19, 29, 127, 159] для описания и исследования процессов формирования и функционирования команд. На сегодняшний день это, пожалуй, наиболее развитое направление формальных исследований команд, включающее (условно) в себя такие «ветви» как:

  - модель Маршака-Раднера и ее развитие (см. раздел 2.2);
  - модели коллективного стимулирования (см. раздел 2.3);
  - модели репутации и норм деятельности (см. разделы 2.4 и 2.5);

Рис. 3. Классификация моделей команд

[8] *Отметим, что речь идет именно о перечислении исторически сложившихся (и зачастую сильно пересекающихся) направлений исследований, а не о классификации моделей команд.*

- «экспериментальные исследования» команд, включающие *имитационные эксперименты* и *деловые игры* (см. раздел 2.6);

- «*рефлексивные модели*», использующие аппарат теории рефлексивных игр (см. Приложение и [78]) для описания взаимодействия членов команды, имеющих несовпадающие взаимные представления о существенных параметрах друг друга. Именно этому сравнительно молодому направлению посвящена значительная часть настоящей работы (третий и последующие ее разделы), причем при рассмотрении новых (и развитии известных) моделей значительный акцент делается на взаимной информированности агентов.

В первом разделе мы привели отличительные характеристики команд. Табл. 1 устанавливает соответствие между рассматриваемыми ниже математическими моделями команд (в скобках указаны номера разделов настоящей работы), и теми свойствами команд, которые наиболее ярко отражаются в той или иной модели. В этой таблице символ «+» обозначает, что модель в значительной степени отражает соответствующее свойство, символ «•» – учитывает соответствующее свойство.

Общая модель команды. В [72] вводится модель организационной системы, включающая:

- множество участников (*состав системы*),
- технологические, информационные, материальные и др. связи между ними (*структура системы*),
- множества допустимых действий участников системы, отражающие существующие физические, технологические, нормативные и др. ограничения на те состояния (действия), в которых могут находиться (выбирать самостоятельно) участники системы;
- целевые функции (описывающих интересы и предпочтения участников), стремление к максимизации которых отражает рациональность поведения активных участников системы;
- информированность и порядок функционирования[9].

---

[9] *Условно можно считать, что множества допустимых действий отражают «кто что может», целевые функции – «кто чего хочет», информированность – «кто что знает».*

Табл. 1

Математические модели и характеристики команд

Характеристика / **Модель**	Единство цели	Совместная деятельность	Непротиворечивость интересов	Автономность деятельности	Коллективная и взаимная ответственность	Специализация и взаимодополняемость ролей	Устойчивость команды
Распределение объемов работ (раздел 2.1)	+	•				•	
Распределение функций (раздел 2.1)	•	+				+	
Формирование команды (раздел 2.1)	+	•	•			•	
Синергетический эффект (раздел 2.1)	+	•	•			+	•
Модель Маршака-Раднера (раздел 2.2)	+	+	+			•	
Стимулирование в командах (раздел 2.3)	+	+	•	+	+	•	
Институциональное управление (разделы 2.4 и 5)	•	+	•	•	+		•
Репутация (разделы 2.5 и 5)	•	•	•	+	•	•	+
Экспериментальные исследования (раздел 2.6)	•	+	•				•
Однородная команда (раздел 3)	•	+	•	+	•		+
Неоднородная команда (раздел 4)	•	•	•	+	•	+	+
Автономное принятие решений (раздел 6)	•	•	•	+	•	+	
Распределение затрат (раздел 7)	+	+		•	+		+
Адаптация в командах (раздел 8)	•	+		•		+	+
Обучение в командах (раздел 9)		+	•	+		•	

По аналогии с этим опеделением можно выделить следующие компоненты практически любой модели команды:

1. *Состав команды*[10] (множество агентов, входящих в команду). Для того чтобы описывать команду, нужно, как минимум, задать ее состав. В большинстве моделей настоящей работы (кроме раздела 2.1) состав считается фиксированным, хотя существуют и исследования «команд» с переменным составом – см. [3, 38].

2. Состояния агентов (включая выполняемые ими *функции* (роли) и *объемы работ*) и множества допустимых состояний. Иногда в описание модели включаются уравнения, отражающие взаимосвязь между состояниями агентов и/или законы изменения состояний во времени (см., например, разделы 8 и 9).

3. В зависимости от того, выбирают ли агенты свои состояния самостоятельно или считается, что они определяются извне (в результате решения оптимизационных задач или устанавливаются некоторым руководящим органом), выделяют соответственно модели, учитывающие *активность* агентов, и модели команд с *пассивными* агентами. Активность поведения агентов обычно описывается в рамках теоретико-игровых моделей [29].

4. *Результат деятельности* команды, который зависит от состояний агентов (их индивидуальных действий).

5. *Целевые функции* агентов могут зависеть от их индивидуальных действий (состояний) и/или результата совместной деятельности. Причем целевые функции различных агентов могут как совпадать (тогда имеется одна целевая функция, отражающая единую *эффективность команды*), так и различаться.

6. *Информированность агентов* (информация, которой они обладают о существенных внешних и внутренних параметрах) может быть как одинаковой, так и различной. Кроме того, она

[10] *Внутреннюю структуру команды (включая проблемы лидерства, малых групп и т.п.) подробно в настоящей работе рассматривать мы не будем. Так как команды по определению автономны, то, в отличие от теории управления организационными системами, при рассмотрении моделей команд управляющий орган – центр (principal) – отдельно не выделяется. Что, впрочем, не мешает интерпретировать целевую функцию или эффективность команды в целом, как целевую функцию некоторого центра, решающего задачу управления командой – ее формированием и функционированием.*

может быть *тривиальной* (когда имеется *общее знание* – факт, о котором всем известно, всем известно, что всем это известно и т.д. – см. Приложение) или *нетривиальной* (тогда необходимо учитывать эффекты рефлексии – представления агентов о представлениях друг друга).

Связь между моделями команд и учитываемыми в них свойствами команд устанавливается в Табл. 2.

Табл. 2

Математические модели и учитываемые в них свойства команд

Свойство / **Модель**	Различие функций, выполняемых агентами	Активность агентов	Различие интересов агентов	Различная информированность агентов	Нетривиальная информированность агентов	Наличие динамики
Распределение объемов работ (раздел 2.1)						
Распределение функций (раздел 2.1)	+					
Формирование команды (раздел 2.1)	+	+	+			
Синергетический эффект (раздел 2.1)		+	+			
Модель Маршака-Раднера (раздел 2.2)		+		+		
Стимулирование в командах (раздел 2.3)		+	+			
Институциональное управление (разделы 2.4 и 5)		+	+	•		
Репутация (разделы 2.5 и 5)		+	+	•		
Экспериментальные исследования (раздел 2.6)	+	+	+			
Однородная команда (раздел 3)		+	+	•	+	•

Свойство / Модель	Различие функций, выполняемых агентами	Активность агентов	Различие интересов агентов	Различная информированность агентов	Нетривиальная информированность агентов	Наличие динамики
Неоднородная команда (раздел 4)	+	•	+	•	+	•
Автономное принятие решений (раздел 6)		+	+	+	•	
Распределение затрат (раздел 7)	•	+	+			
Адаптация в командах (раздел 8)	•	+		+	•	+
Обучение в командах (раздел 9)	•	•				+

Перейдем к рассмотрению перечисленных в Табл. 1 и Табл. 2 классов моделей формирования и функционирования команд.

2.1. ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ

Термин «*задачи о назначении*» является условным и охватывает широкий класс оптимизационных задач, включающий задачи формирования состава команд, задачи распределения функций (ролей) в неоднородных командах и задачи распределения объемов работ.

Перечисленные три типа задач взаимосвязаны и решаются «циклически» – ведь для того, чтобы формировать состав команды, нужно знать, какие функции будет выполнять тот или иной агент, включаемый в команду; а для оптимального распределения функций нужно знать, какой объем работ целесообразно выполнять данному агенту в рамках той или иной функции – см. Рис. 4 и раздел 4. Поэтому рассмотрим последовательно задачу распределения объемов работ, задачу распределения функций и задачу формирования состава команды.

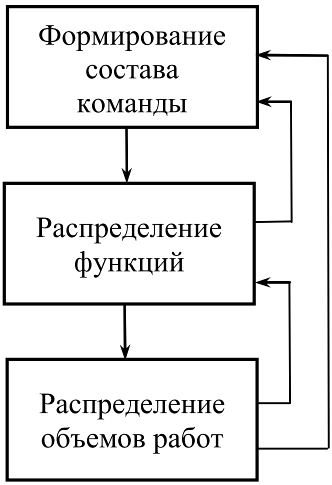

Рис. 4. Взаимосвязь задач формирования состава команд, распределения функций и распределения объемов работ

Задача распределения объемов работ. Пусть фиксирован *состав команды* – множество однородных (по функциям, то есть выполняющих однотипные функции) агентов $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, известен суммарный объем работ $R \geq 0$, который требуется выполнить, и заданы *типы* агентов $\{r_i\}_{i \in N}$ (характеристики, отражающие эффективность их деятельности). Требуется распределить объемы работ между агентами.

Такая постановка задачи является слишком общей и требует детализации. Возможны различные варианты. Во-первых, следует разделить дискретные и непрерывные задачи.

В *дискретной задаче* объем работ $d_i \geq 0$, который может выполнять i-ый агент, фиксирован. Если интерпретировать тип агента как себестоимость выполнения им единичного объема работ, то получим дискретную задачу распределения объема работ R между агентами с целью минимизации суммарных затрат (переменная x_i принимает значение 0, если i-ый агент не работает, и значение 1, если он работает):

(1) $\sum_{i \in N} d_i r_i x_i \to \min_{x_i \in \{0;1\}}$,

(2) $\sum_{i \in N} d_i x_i \ \geq R$.

Задача (1)-(2)[11] относится к классу *задач о ранце* [9, 15], и имеет решение при условии

(3) $\sum_{i \in N} d_i \ \geq R$,

то есть, когда суммарный объем работ не превышает «производственных возможностей» всех агентов.

Общим «недостатком» дискретных задач является то, что лишь малая их часть имеет эффективные (полиномиальной сложности) методы решения. Для NP-сложных задач при малой их размерности можно использовать метод полного перебора, а при увеличении размерности – различные эвристические или иные методы решения (см. [30, 42, 89]).

Допустим теперь, что i-ый агент может выполнить любой объем работ, не превышающий d_i. Тогда, обозначая x_i – объем работ, выполняемый i-ым агентом, получим *непрерывную задачу*:

(4) $\sum_{i \in N} r_i x_i \ \to \min_{x_i \in [0; d_i]}$,

(5) $\sum_{i \in N} x_i \ \geq R$,

которая при выполнении условия (3) имеет простое решение: следует упорядочить агентов в порядке возрастания себестоимостей r_i и последовательно загружать их по-максимуму до тех пор, пока не будет распределен весь объем работ R.

Обобщая модель дальше, предположим, что известны функции затрат агентов $c_i(x_i, r_i)$, зависящие от объемов работ и типов. Задача минимизации суммарных затрат

(6) $\sum_{i \in N} c_i(x_i, r_i) \ \to \min_{x_i \in [0; d_i]}$

при ограничении (5) является типовой задачей условной оптимизации [85, 91].

Множество аналогичных задач распределения ресурса[12] исследовались в *математической экономике* – см. [34, 37, 47, 57].

---

[11] *В настоящей работе принята незаивисмая внутри разделов нумерация формул.*

Полученные при их решении результаты могут непосредственно использоваться при распределении объемов работ между агентами, входящими в однородную команду.

Более сложными являются задачи распределения ресурсов команды между работами, связанными технологически, например – в рамках проекта [73]. При заданном сетевом графике, отражающем взаимосвязь работ, продолжительность каждой работы зависит от используемого для ее выполнения ресурса. Следовательно, за счет распределения объемов работ и ресурсов между агентами, можно влиять на длину критического пути, определяющего продолжительность проекта. Соответствующие задачи (распределение ресурсов на сетях) рассматриваются в *календарно-сетевом планировании и управлении* [7, 9, 50]. Результаты их решения также могут использоваться при распределении объемов работ между агентами, входящими в команду.

Таким образом, можно сделать вывод, что на сегодняшний день в математической экономике и *исследовании операций* [7, 15, 20] накоплен значительный опыт постановки и решения разнообразных задач распределения ресурсов, который целесообразно использовать и при анализе процессов эффективного формирования и функционирования команд. Перейдем теперь к задаче распределения функций.

Задача распределения функций. Предположим, что известно решение задачи распределения объемов работ, то есть, если решено, кто из членов команды какие функции выполняет, то можно найти оптимальную их «загрузку». Тогда можно рассматривать задачи распределения функций.

Начнем с *транспортной задачи*, в которой имеется граф, вершины которого разбиты на две группы – n агентов и m работ (функций).

Для агентов заданы количества времени, которые они могут затратить на работу в команде – a_i, $i = \overline{1,n}$, для работ – продолжительности их реализации – b_j, $j = \overline{1,m}$. Также известны

---

[12] *Вообще, задачи распределения ресурса (объемов работ) являются базовыми для математической экономики, а разнообразие их настолько велико, что ставить в рамках настоящей работы цель их сколь либо полного обзора не имеет смысла.*

затраты s_{ij} на выполнение i-ым агентом j-ой работы в течение единицы времени[13].

Пусть задача является замкнутой, то есть $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ – суммарный временно́й ресурс агентов равен суммарной продолжительности работ (вводя фиктивного агента или фиктивную работу любую незамкнутую задачу можно свести к замкнутой). Требуется определить распределение агентов по работам (функциям), минимизирующее суммарные затраты.

Формально транспортную задачу можно записать в виде:

(7) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\ s_{ij} \to \min_{\{x_{ij} \geq 0\}}$$

(8) $$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1, n},$$

(9) $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1, m}.$$

Условие (8) означает, что каждый агент «загружен» полностью, условие (9) – что все работы выполнены. Алгоритмы решения транспортной задачи описаны в [7, 9, 15].

Частным случаем транспортной задачи является *задача о назначении* (в узком смысле), заключающаяся в следующем: имеются n агентов, которые могут выполнять различные работы (реализовывать различные функции, занимать различные должности), число работ равно числу работников (введя фиктивные должности и/или фиктивных агентов, всегда можно незамкнутую задачу привести к рассматриваемой замкнутой форме). Известны затраты $\hat{s}_{ij}$ на назначение i-го агента на j-ю должность (например, минимальная зарплата, за которую он согласится работать на этой должности). Требуется найти назначение работников на должности (каждого работника на одну и только одну должность), минимизирующее суммарные затраты (если $\hat{s}_{ij}$ интерпретируется как эффективность от работы i-го работника на j-ой должности, то опти-

[13] *С точки зрения экономических интерпретаций данное предположение означает постоянство предельных затрат.*

мальное назначение должно максимизировать суммарную эффективность).

Формально задачу о назначении (см. также примеры в разделе 4) можно записать в виде (ср. с (7)-(9)):

(10) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\ \hat{s}_{ij} \ \to \min_{\{x_{ij}\in\{0;1\}\}}$$

(11) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\, i = \overline{1,n}\,,$$

(12) $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\, j = \overline{1,n}\,.$$

Методы решения задачи о назначении (10)-(12) описаны в [7, 9, 15]. Содержательной интерпретацией этой задачи в терминах менеджмента [52, 123] или управления проектами [12, 73] является нахождение оптимальной *матрицы ответственности*.

Транспортная задача и задача о назначении являются хрестоматийными задачами исследования операций и имеют множество обобщений (учет ограничений на совместимость работ, выполняемых одним агентом, ограничений на последовательность выполнения работ, многокритериальности и т.п. – см. обзоры в [15, 20, 82]), которые целесообразно использовать при решении задач распределения функций между членами команды. Кроме того, для таких задач может оказаться адекватным и аппарат теории массового обслуживания [36, 39], в случае, если набор функций, реализуемых командой, меняется во времени по известным (статистически описываемым) законам.

Задача формирования состава команды. Умея находить оптимальное распределение функций и объемов работ для фиксированного состава членов команды, можно ставить и решать задачу формирования оптимального состава команды.

Рассмотрим кратко известные на сегодняшний день подходы теории управления и экономической науки к задачам формирования состава организационных систем.

<u>Экономика труда и экономика организаций</u>. В рамках *экономики труда* основной результат, определяющий оптимальное количество работников, отражает равенство производимого ими предельного продукта (предельной производительности) и предельных затрат на их привлечение и удержание. Количество до-

полнительной продукции (дохода), которое получает фирма, нанимая одного дополнительного (сверх уже работающих) работника (единицу труда), называется предельным продуктом труда. Предельные издержки есть затраты на прием на работу дополнительного работника. Условие максимизации прибыли (разности между доходом и затратами) требует, чтобы прибыль была максимальна. Для этого следует изменять число занятых (увеличивать, если предельный доход превышает предельные издержки, и уменьшать в противном случае) до тех пор, пока предельный доход не будет равен предельным издержкам. Такой подход вполне применим для определения оптимального размера однородной команды.

В *экономике организаций* принят следующий общий подход к определению оптимального размера организации (см. подробное обсуждение и ссылки в [51]). С одной стороны, существует рынок – как система обмена прав собственности. С другой стороны, экономические агенты объединяются в организации, взаимодействующие на рынке. Объяснением существования экономических организаций служит необходимость компромисса между транзакционными и организационными издержками, которые определяются «затратами на координацию» внутри организации, растущими с увеличением ее размеров. Для команд характерно наличие тесных информационных и других связей между всеми ее членами. Поэтому с ростом числа членов команды организационные издержки (зависящие от числа связей) растут очень быстро. Наверное, этим объясняется то, что практически ни в одной сфере деятельности не встречаются команды, состоящие из нескольких сотен или даже десятков человек.

Транзакционные издержки препятствуют рынку заместить собой организацию, а организационные издержки препятствуют организации заместить собой рынок. Основная идея (качественная), используемая в экономике организаций при обсуждении задач формирования состава, заключается в том, что, так как и транзакционные, и организационные издержки зависят от размера организации и ее структуры, то теоретически должны существовать оптимальные параметры организации, при которых достигается уравновешивание упомянутых тенденций замещения (см. также [72]).

<u>Теория управления организационными системами.</u> Первые систематические постановки задач формирования состава органи-

зационных систем (ОС) появились недавно (см. монографии [38, 67, 75]). Можно выделить три общих подхода к решению задач формирования состава ОС.

Первый подход заключается в «лобовом» рассмотрении всех возможных комбинаций потенциальных участников ОС. Его достоинство – нахождение оптимального решения, недостаток – высокая вычислительная сложность.

Второй подход основывается на методах локальной оптимизации (последовательном переборе составов ОС из некоторой окрестности определенного состава). Используемые при этом эвристические методы, как правило, имеют прозрачные содержательные интерпретации, но в общем случае не дают оптимального решения и поэтому требуют оценивания их гарантированной эффективности.

И, наконец, третий подход заключается в исключении заведомо неэффективных комбинаций агентов на основании анализа специфики задачи. Например, если можно априори упорядочить претендентов на включение в команду по убыванию эффективности их деятельности или предельного вклада, привносимого в команду, то задача об оптимальном составе (число возможных команд из n претендентов имеет порядок 2^n) сведется к *задаче об оптимальном размере команды* (имеющей намного меньшую вычислительную сложность – ведь из n упорядоченных претендентов можно составить n непустых команд различного размера). При этом вычислительная сложность резко сокращается, и иногда удается получить точное (оптимальное) решение, но, к сожалению, данный подход применим далеко не всегда, и в каждом конкретном случае возможность его использования требует соответствующего обоснования.

Необходимо также упомянуть о задачах формирования оптимальных организационных иерархий [27, 56, 67], в которых речь идет о построении иерархии управления (определении отношений подчиненности) в организационных системах. Эту задачу также можно условно отнести к задаче формирования состава и «распределения обязанностей».

Более полное представление о современном состоянии исследований в области задач формирования состава организационных систем можно получить из [38, 72].

Приведем формальную постановку задачи формирования состава ОС. Введем следующие обозначения:

N_0 – множество агентов – претендентов на включение в состав команды, $|N_0| = n_0$;

N – состав команды (вариант решения задачи формирования состава), $|N| = n \leq n_0$;

$\Phi(N)$ – функционал эффективности, ставящий в соответствие каждому возможному составу $N \subseteq N_0$ действительное число. Отметим, что функционал эффективности может быть получен в результате решения (в общем случае для каждого из возможных составов) задач распределения функций и объемов работ (см. выше).

Формально *задача формирования команды* заключается в нахождении ее состава N^*, обладающего максимальной эффективностью:

(13) $N^* = \arg \max\limits_{N \subseteq N_0} \Phi(N)$.

Задача (13) является задачей дискретной оптимизации (см. выше обсуждение проблем поиска решений дискретных задач). На допустимые составы команды могут дополнительно накладываться как требования обязательного включения в нее тех или иных групп агентов (обеспечивающих реализацию определенных функций), так и запреты на включение тех или иных групп агентов (например, таких, про которых известно, что они обладают низкой эффективностью совместной деятельности или конфликтовали друг с другом ранее).

<u>Модели синергетического эффекта.</u> Как отмечалось выше, одной из ключевых характеристик команды является наличие *синергетического эффекта* взаимодействия членов команды (то есть, эмерджентности – свойства целого не сводятся к «сумме» свойств его частей). Адекватным инструментом его моделирования представляется теория кооперативных игр[14] [29, 57, 81].

Обозначим $N_0 = \{1, 2, ..., n\}$ – множество агентов. Пусть для каждого агента $i \in N_0$ известна неубывающая «производственная

---

[14] *Хотя подробно речь о теоретико-игровых моделях команд пойдет ниже, мы для полноты картины подходов к формированию команд сочли уместным поместить именно в этом разделе описание использования в этих целях аппарата кооперативных игр.*

функция» $v_i(\cdot)$: $\Re^1_+ \to \Re^1$ и имеющееся у него в распоряжении «количество ресурса» R_i. Величина $v_i(R_i)$ может трактоваться как индивидуальный (при действии в одиночку) выигрыш i-го агента, $i \in N$.

Определим

$$z_S = (z_i)_{i \in S},\ z_S \in R_S: = \{(y_i \geq 0)_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} y_i \leq \sum_{i \in S} R_i \},$$

где $S \subseteq N_0$ – *коалиция* (команда) агентов. Введем функцию множеств $v(S) = \max\limits_{z_S \in R_S} \sum\limits_{i \in S} v_i(z_i)$, обозначающую максимальный суммарный выигрыш, который могут получить члены коалиции S.

Предположим также, что этот выигрыш может быть произвольным образом поделен между членами коалиции, то есть рассмотрим *игру с трансферабельной полезностью* [57, 81].

Функция $v(\cdot)$ *монотонна*, то есть

$$\forall\ S, T \subseteq N_0, S \subseteq T\ \ v(S) \leq v(T),$$

и *супераддитивна*, то есть

$$\forall\ S, T \subseteq N_0, S \cap T = \varnothing\ \ v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Содержательно супераддитивность означает наличие синергетического эффекта (эффект целого не меньше суммы эффектов его частей) – выгодность кооперации. Однако она в общем случае не гарантирует устойчивости результатов кооперативного взаимодействия. Тем не менее, известно [81], что, если функции $v_i(\cdot)$, $i \in N_0$ – вогнутые, то С-ядро кооперативной игры агентов из множества N не пусто, то есть *максимальная коалиция* (состоящая из всех n агентов) устойчива в смысле существования дележа, такого, что ни одной коалиции S не выгодно отделяться от максимальной коалиции N и делить между членами этой коалиции выигрыш $v(S)$ [90].

Следовательно, в каждом частном случае для обоснования того, что все агенты объединятся в команду, и их взаимодействие будет устойчиво, достаточно проверить вогнутость их «производственных функций» (отметим, что эти функции не обязательно должны быть монотонно возрастающими – С-ядро существует и при однопиковых – имеющих единственную точку максимума – функциях [28]).

Если гипотетически предположить, что «производственные функции» агентов вогнутые и, следовательно, образуется максимальная коалиция, то возникает вопрос, а как определить рациональные границы команды – ведь пока в рамках рассматриваемой модели увеличение «размера» команды было выгодно. Понятно, что на практике неограниченного роста размеров команд не наблюдается. Значит, в модели необходимо учесть факторы, сдерживающие рост команды, а, как отмечалось выше, таким фактором являются организационные издержки.

Для того чтобы учесть организационные издержки, введем функцию множеств $w(S)$, $S \subseteq N_0$, обладающую свойством монотонности: $\forall\ S, T \subseteq N_0, S \subseteq T\ \ w(S) \leq w(T)$.

Определим характеристическую функцию $F(\cdot)$ кооперативной игры агентов как разность между эффектом $v(\cdot)$ от кооперации и организационными издержками $w(\cdot)$:

(14) $F(S) = v(S) - w(S),\ \ S \subseteq N_0$.

Выше отмечено, что функция $v(\cdot)$ является супераддитивной. Если дополнительно предположить и супераддитивность функции $w(\cdot)$: $\forall\ S, T \subseteq N_0,\ S \cap T = \varnothing\ \ \ w(S \cup T) \geq w(S) + w(T)$, которая содержательно означает, что издержки на управление командой больше, чем сумма издержек на управление ее частями (обусловлено это может быть, в том числе, необходимостью координации взаимодействия этих частей), то это вовсе не гарантирует супераддитивности функции $F(\cdot)$. То есть, в общем случае следующее свойство не имеет места:

(15) $\forall\ S, T \subseteq N_0, S \cap T = \varnothing$

$$F(S \cup T) = v(S \cup T) - w(S \cup T) \geq F(S) + F(T) =$$
$$= [v(S) - w(S)] + [v(T) - w(T)].$$

Для супераддитивности функции $F(\cdot)$ достаточно *субаддитивности* организационных издержек: $\forall\ S, T \subseteq N_0,\quad S \cap T = \varnothing$ $w(S \cup T) \leq w(S) + w(T)$. Содержательные интерпретации последнего свойства следующие – затраты на управление командой не превосходят суммы затрат на управление ее частями (что может иметь место, если эффекты *самоорганизации* в команде достаточно сильны).

Итак, если организационные издержки субаддитивны, то получаем кооперативную игру агентов из множества N_0 с характеристической функцией $F(S)$, $S \subseteq N_0$, которая супераддитивна, но не монотонна. Решение этой кооперативной игры (в каждом конкретном случае следует конкретизировать, какая из концепций решения кооперативных игр используется – решение в угрозахконтругрозах, N-ядро и т.д. [29]) даст ответ на вопрос – какие коалиции будут устойчивы[15], и существует ли устойчивый дележ выигрыша между членами этих коалиций.

Приведенные рассуждения можно повторить для каждого варианта $N \subseteq N_0$ состава команды из агентов, «набираемых» из множества претедентов N_0. В итоге, например, при использовании концепции С-ядра, можно для каждого из множеств $N \subseteq N_0$ оценить как суммарный выигрыш команды N в целом, так и соответствующие организационные издержки; понять, будет ли такая команда устойчива и т.д. После этого уже можно решать, какая из устойчивых команд «лучше» по тем или иным критериям.

С теоретической точки зрения ответ найден – задача поиска оптимального (с учетом и эффектов кооперации, и затрат на управление) состава команды сведена к перебору по всем возможным командам результатов анализа известной задачи поиска решения кооперативной игры. Однако эта общая задача может не иметь решения, или поиск его может оказаться чрезвычайно трудоемким. Подобного рода проблемы типичны для задач формирования состава и структуры организационных систем – см. выше.

В завершение настоящего раздела отметим, что задачи анализа и синтеза состава организационных систем (и, как частный их случай – команд) принадлежат к классу задач *системной оптимизации* (в которых критерий эффективности зависит, в том числе, от состава элементов, включаемых в систему), и универсальных эффективных алгоритмов их решения не существует. Поэтому создание относительно полной формальной теории образования команд представляется задачей будущих исследований. Перспективным представляется как теоретическое изучение задач синтеза состава команд при немонотонных характеристических функциях, так и более приближенный к реальности анализ методов построения и свойств функций транзакционных и организационных издержек.

Таким образом, «задачи о назначении» учитывают такие характеристики команды (см. Табл. 1), как: единство цели, совместную деятельность, специализацию и взаимодополняемость ролей. С другой стороны, этот класс моделей почти не учитывает такие

---

[15] *Если используется концепция С-ядра, то в случае его непустоты можно только гарантировать устойчивость максимальной коалиции.*

свойства команды, как: непротиворечивость интересов ее членов и автономность команды.

2.2. МОДЕЛЬ МАРШАКА-РАДНЕРА

В работе [152] Д. Маршак предложил следующий подход к описанию принятия решений в команде (при этом под *командой* им понимается группа людей с непротивоположными интересами), который получил дальнейшее развитие в его собственных работах, в работах Р. Раднера и др. [134, 163], а также в их классической совместной монографии [153] и многочисленных последовавших за ней публикациях на эту тему.

Рассмотрим *команду* (в терминологии Маршака-Раднера) – множество агентов $N = \{1, 2, \dots, n\}$, в которой i-ый агент принимает решение (выбирает *действие*) $x_i \in X_i$, $i \in N$. Выигрыш команды $u(x, \theta)$ зависит от вектора решений членов команды $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X' = \prod_{i \in N} X_i$ и от состояния природы $\theta \in \Omega$.

Отметим, что в данной модели (как и в большинстве теоретико-игровых моделей, следующих традициям Маршака-Раднера) целевые функции всех агентов – членов команды – одинаковы (более того, в некоторых работах команда определяется именно как множество агентов, имеющих совпадающие целевые функции – см., например, [171]). Данное предположение отражает такое свойство команды, как единство цели деятельности ее членов. Но, агенты в общем случае характеризуются различающимися множествами допустимых действий и имеют различную априорную информацию о состоянии природы (совокупность этих представлений составляет *информационную структуру команды* [113, 172]).

Агент i принимает решения в соответствии со своей *функцией принятия решений* – отображением $d_i: \Omega \to X_i$, принадлежащим множеству допустимых отображений D_i, $i \in N$. Вектор $d = (d_1(\cdot), d_2(\cdot), \dots, d_n(\cdot))$ называется функцией принятия решений команды.

Фиксируем вероятностное распределение $p(\cdot)$ на множестве Ω. Ожидаемый выигрыш команды равен

$$(1)\ U(d(\cdot), p(\cdot)) = \int_{\Omega} u(d(\theta), \theta)\, p(\theta) d\theta .$$

Если априори известно вероятностное распределение на множестве распределений $p(\cdot)$, то можно вычислить Байесовский выигрыш команды как математическое ожидание выражении (1). Функция принятия решений $d(\cdot)$, максимизирующая Байесовский выигрыш команды, называется Байесовской функцией принятия решений – см. [163]. Достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимальной функции принятия решений для квадратичных функций $u(\cdot)$ приведены в [153, 163].

Таким образом, первая задача – нахождение при заданной информационной структуре функции принятия решений, которая максимизировала бы ожидаемый выигрыш команды. Вторая задача – выбор информационной структуры, которая (при использовании соответствующей оптимальной функции принятия решений) также максимизировала бы ожидаемый выигрыш команды.

Модель Маршака-Раднера развивалась во многих работах (см. библиографию в [112]). Классическими стали работы: Т. Гровса [133, 134] по распределению ресурса и стимулированию в командах (когда целевые функции агентов начинают различаться за счет введения стимулирования, побуждающего агентов принимать согласованные решения); Эрроу и Раднера [110] по изучению влияния информированности членов команды (информационной структуры) на эффективность использования ресурса (см. также обзор в монографии [144]).

Таким образом, модель Маршака-Раднера учитывает непротиворечивость целей членов команды, осуществляющих совместную деятельность, но почти не акцентирует внимание на других характеристиках команд (см. Табл. 1).

2.3. СТИМУЛИРОВАНИЕ В КОМАНДАХ

Достаточно обширный класс математических моделей команд составляют задачи стимулирования коллектива агентов за результаты совместной деятельности в условиях, когда управляющий орган не знает (а иногда и не хочет знать) индивидуальных вкладов членов команды в общий результат, предоставляя им самим выбрать способ достижения цели. Условно такого рода команду можно назвать «артелью».

В настоящем разделе сначала дается общая постановка задачи коллективного стимулирования, затем вводится классификация моделей стимулирования в командах, поле чего приводятся результаты исследования некоторых наиболее распространенных моделей.

Модель коллективного стимулирования. Рассмотрим *команду* – множество агентов $N = \{1, 2, …, n\}$, в которой i-ый агент принимает решение $x_i \in X_i$, $i \in N$. Для простоты можно считать, что $X_i = \Re^1_+$, $i \in N$ (см. обобщения в [64, 70]). Результат деятельности команды $z = Q(x)$, где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X' = \prod_{i \in N} X_i$, $Q: X' \to \Re^1_+$ – функция агрегирования, которая зависит от вектора x действий всех агентов и наблюдается центром.

Система стимулирования $\sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z), ..., \sigma_n(z))$ ставит в соответствие результату деятельности команды индивидуальные неотрицательные (limited liability condition) вознаграждения ее членов. На систему стимулирования может быть наложено *бюджетное ограничение* (или ограничение сбалансированности):

(1) $\sum_{i \in N} \sigma_i(z) = z$.

Целевая функция i-го агента представляет собой разность между полезностью $u_i(\cdot)$ от вознаграждения и затратами $c_i(\cdot)$, причем последние зависят от вектора действий агентов и *типа* i-го агента (напомним, что типом агента $r_i > 0$ называется параметр, отражающий все существенные его характеристики: эффективность деятельности, производительность труда и т.д.):

(2) $f_i(x, \sigma_i(\cdot), r_i) = u_i(\sigma_i(z)) - c_i(x, r_i)$, $i \in N$.

Относительно функций затрат обычно предполагают, что они непрерывно дифференцируемы, возрастают и выпуклы по действию соответствующего агента.

Обозначим $E_N(\sigma(\cdot))$ – множество равновесий Нэша игры агентов при заданной системе стимулирования $\sigma(\cdot)$:

(3) $E_N(\sigma(\cdot)) = \{x^* \in X' \mid \forall\ i \in N, \forall\ x_i \in X_i$

$$f_i(x^*_{-i}, x_i, \sigma_i(Q(x^*_{-i}, x_i, r_i))) \le f_i(x^*, \sigma_i(Q(x^*)), r_i),$$

где $x_{-i} = (x_1, x_2, …, x_{i-1}, x_{i+1}, …, x_n)$ – обстановка игры для i-го агента.

Целевая функция центра представляет собой разность между его доходом $H(\cdot)$ от результата z деятельности команды и суммарным стимулированием, выплаченным агентам:

(4) $\Phi(z, \sigma(\cdot)) = H(z) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z)$.

Задача стимулирования команды (задача коллективного стимулирования) заключается в выборе системы стимулирования (быть может, удовлетворяющей бюджетному ограничению (1)), которая максимизировала бы *эффективность стимулирования* – гарантированный выигрыш центра на множестве равновесий игры агентов:

(4) $\min_{x^* \in E_N(\sigma(\cdot))} [H(Q(x^*)) - \sum_{i \in N} \sigma_i(Q(x^*))] \to \max_{\sigma(\cdot)}$.

Классификация моделей коллективного стимулирования. В Табл. 3 приведены основания классификации и значения признаков классификации моделей коллективного стимулирования.

Табл. 3

Классификация моделей стимулирования в командах

№ п.п.	Основания классификации	Значения признаков
1	Действия агентов	наблюдаются/не наблюдаются центром (*moral hazard*)
2	Неопределенность (внешняя)	отсутствует/присутствует
3	Затраты агентов	сепарабельны/несепарабельны
4	Бюджетное ограничение	отсутствует/присутствует
5	Агенты	нейтральны к риску/не склонны к риску
6	Типы агентов	известны всем агентам/каждому агенту известен свой тип (*adverse selection*)

Сепарабельность функций затрат агентов означает, что затраты каждого агента зависят только от его собственных действий, в то время как в общем случае (при несепарабельных затратах) затраты каждого агента могут зависеть от действий всех агентов.

Нейтральность агента к риску подразумевает, что его функция полезности линейна, для несклонных к риску агентов их функции полезности вогнуты.

Следует особо подчеркнуть, что именно первое основание классификации в наибольшей степени подчеркивает специфику команд. Действительно, если индивидуальные действия агентов наблюдаются центром, то последний может использовать системы *персонифицированного стимулирования* (в которых вознаграждение каждого агента зависит только от его собственных действий или от действий всех агентов – см. монографию [70]). Но, если центр наблюдает только агрегированный результат деятельности команды, то он воспринимает ее как единое целое и вынужден стимулировать каждого из членов команды за результат совместной деятельности. Ключевым вопросом, возникающим при рассмотрении такого *коллективного стимулирования*, является вопрос о существовании «*идеального агрегирования*», то есть при каких условиях существует система стимулирования, которая в условиях ненаблюдаемых центром действий агентов дает центру тот же выигрыш, что и в условиях наблюдаемых действий? Приведем краткий обзор известных на сегодняшний день вариантов ответа на этот вопрос.

Модель Б. Холмстрома и ее развитие. Одной из первых моделей стимулирования в командах (ставшей хрестоматийной) является предложенная в [140] Б. Холмстромом. В соответствии с введенной выше системой классификаций в ней: действия агентов не наблюдаемы, неопределенность отсутствует, затраты агентов сепарабельны, бюджетное ограничение присутствует, агенты нейтральны к риску, типы агентов известны всем участникам – и центру и всем агентам.

Теорема Холмстрома [140, с. 326] гласит, что в рамках введенных предположений не существует системы стимулирования, которая удовлетворяла бы балансовому ограничению и реализовывала бы вектор действий агентов, максимизирующий сумму целевых функций всех агентов и центра, как равновесие Нэша их игры (см. также модель распределения затрат в разделе 7.1). Для существования такой системы стимулирования достаточно предположить, что бюджетное ограничение выполнено как неравенство [140], или что агенты не склонны к риску [164].

Основной результат, полученный Б. Холмстромом, заключается в следующем. Не наблюдая индивидуальных действий агентов, а зная только агрегированный результат их деятельности, центр может, налагая на агентов неограниченные штрафы за недостижение требуемого результата, добиться от них выбора действий, приводящих к требуемому результату.

Однако возможность использования штрафов имеет место далеко не всегда, поэтому многие исследователи посвятили свои усилия развитию модели на случай, когда стимулирование может быть только неотрицательным. Работа [154] обобщает модель Холмстрома на случай неизвестных центру типов агентов в отсутствии бюджетного ограничения. При этом доказывается, что в рамках вводимых предположений возможно идеальное агрегирование. В [170] изучаются модели коллективного стимулирования команд в некоммерческих организациях; в [151] – конкурсные механизмы.

Детерминированные модели коллективного стимулирования. Наиболее общие результаты удается получить в детерминированном случае – когда неопределенность отсутствует, а типы агентов являются общим знанием. Отметим, что предположения о сепарабельности затрат агентов при этом не требуется. Приведем, следуя [74], основные результаты.

Определим множество векторов действий агентов, приводящих к заданному результату деятельности ОС:

$$X(z) = \{x \in X' \mid Q(x) = z\}.$$

Известно, что в случае наблюдаемых действий агентов минимальные затраты центра на стимулирование по реализации вектора действий $x \in X'$ равны суммарным затратам агентов $\sum_{i \in N} c_i(x, r_i)$ [70]. Вычислим минимальные суммарные затраты агентов по достижению результата деятельности z:

$$C(z, r) = \min_{x \in X(z)} \sum_{i \in N} c_i(x, r_i),$$

а также множество действий $X^*(z) = \operatorname{Arg} \min_{x \in X(z)} \sum_{i \in N} c_i(x, r_i)$, на котором этот минимум достигается. Фиксируем произвольный результат деятельности z', произвольный вектор $x^*(z') \in X^*(z') \subseteq X(z')$ и набор положительных констант $\{\delta_i\}$.

В [74] (при следующем дополнительном предположении «технического» характера: $\forall\, z \geq 0$, $\forall\, x' \in X(z)$, $\forall\, i \in N$, $\forall\, x_i \in Proj_i\, X(z)$ функция $c_j(x_i,\ x_{-i}^*(z))$ не убывает по x_i, $j \in N$) доказано, что:

1) при использовании центром системы стимулирования

(5) $\sigma_{ix}^*(z', z) = \begin{cases} c_i(x^*(z), r_i) + \delta_i, & z = z' \\ 0, & z \neq z' \end{cases}, \ i \in N,$

вектор действий агентов $x^*(z')$ реализуется как единственное равновесие с минимальными затратами центра на стимулирование по реализации результата z', равными: $C(z', r) + \delta$, где $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$;

2) система стимулирования (5) является δ-оптимальной.

На втором шаге решения задачи стимулирования, как обычно [17, 70], ищется наиболее выгодный для центра результат деятельности команды z^* как решение задачи оптимального согласованного планирования:

(6) $z^*(r) = \arg \max_{z \geq 0}\ [H(z) - C(z, r)]$.

Таким образом, выражения (5)-(6) дают решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования результатов совместной деятельности членов команды в условиях полной информированности.

Отметим, что если существуют ограничения на результаты деятельности или вознаграждения агентов (например, бюджетное ограничение типа условия (1)), то они могут быть учтены вычислением в выражении (6) максимума по соответствующему множеству результатов деятельности команды.

Завершив описание базовой модели коллективного стимулирования, отметим, что существуют различные ее модификации. Так, в [71, 108, 132, 137, 139] приведены обобщения одноэлементной динамической задачи теории контрактов (с двумя действиями и двумя результатами деятельности) на случай нескольких агентов. Несколько вариантов оптимальной системы стимулирования: JPE (joint performance evaluation), RPE (relative performance evaluation) и IPE (independent performance evaluation), в зависимости от «производительности» агентов, определяемой их затратами, значениями результатов деятельности и вероятностями реализации тех или иных результатов в зависимости от выбираемых действий, рассматривались в [120, 149].

Таким образом, модели коллективного стимулирования учитывают такие характеристики команды (см. Табл. 1), как: единство цели, совместная деятельность, коллективная ответственность, автономность деятельности. С другой стороны, этот класс моделей почти не учитывает такие свойства команды, как: устойчивость команды, специализация и взаимодополняемость ролей.

2.4. МОДЕЛИ ИНСТИТУЦИОНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В первом разделе настоящей работы отмечалось, что нормы деятельности членов команды играют определяющую роль в процессе формирования и функционирования команды. Исследованием ограничений и норм деятельности участников организационных систем занимается такой раздел теории управления социально-экономическими системами, как теория *институционального управления*. Настоящий раздел содержит краткое описание известных подходов и результатов этого научного направления. Прежде чем переходить к их изложению, приведем определение нормы.

Норма – «узаконенное установление, признанный обязательным порядок» [93, С. 338], общепризнанное правило, стандарт, образец поведения.

Различают явные (например, закон, контракт, должностная инструкция и т.д.) и неявные нормы (например, этические нормы, организационная или корпоративная культура, коллективные договоренности и т.д.). В частности, организационная культура в соответствии с [169] может быть описана на следующих уровнях: «базовые положения – ценности – нормы поведения – стереотипы (шаблоны) поведения – атрибуты и символы».

В работе [65], посвященной институциональному управлению организационными системами (ОС), рассмотрена следующая модель управления нормами деятельности.

Пусть ОС состоит из n агентов, выбирающих действия $x_i \in X_i$ из компактных множеств X_i и имеющих непрерывные целевые функции $f_i(\theta, x)$, где $\theta \in \Omega$ – состояние природы, $x = (x_1, x_2,$

$\ldots, x_n) \in X' = \prod_{i \in N} X_i$, $i \in N$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов.

Нормой деятельности будем называть отображение $\aleph$: $\Omega \to X'$ множества возможных состояний природы (множества существенных параметров) во множество допустимых векторов действий агентов. Содержательно i-ая компонента вектор-функции $\aleph(\cdot)$ определяет, какое действие i-ый агент выбирает в зависимости от состояния природы.

Пусть предпочтения центра заданы на множестве состояний природы, норм деятельности и действий агентов: $\Phi(\theta, \aleph(\cdot), x)$. Предполагая, что агенты следуют установленным нормам, обозначим $K(\aleph(\cdot)) = F_\theta(\Phi(\theta, \aleph(\cdot), \aleph(\theta)))$ – эффективность институционального управления $\aleph(\cdot)$, где $F_\theta(\cdot)$ – оператор устранения неопределенности. В качестве оператора устранения неопределенности (в зависимости от информированности центра) может использоваться гарантированный результат по множеству Ω или математическое ожидание по известному распределению вероятностей $p(\theta)$ на множестве Ω.

Тогда задачей институционального управления при ограничениях $M_\aleph$ на нормы деятельности будет выбор допустимой нормы $\aleph^*(\cdot) \in M_\aleph$, имеющей максимальную эффективность:

(1) $\aleph^*(\cdot) = \arg \max\limits_{\aleph(\cdot) \in M_\aleph} K(\aleph(\cdot))$,

при условии, что агенты следуют установленным нормам деятельности.

Последнее условие требует пояснений. Так как агенты активны и выбирают свои действия самостоятельно, то выбор агента будет совпадать с выбором, предписываемым нормой, только в том случае, если агенту это выгодно. Детализируем, что понимать под «выгодностью».

Определим параметрическое равновесие Нэша [29]:

(2) $E_N^0(\theta) = \{x \in X' \mid \forall\, i \in N, \forall\, y_i \in X_i\ f_i(\theta, x) \geq f_i(\theta, x_{-i}, y_i)\}$,

Будем называть норму $\aleph(\cdot)$ *согласованной* (с предпочтениями агентов), если

(3) $\forall\, \theta \in \Omega\ \ E_N^0(\theta) \cap \aleph(\theta) \neq \varnothing$.

Условие (3) означает, что норма согласована с интересами агентов, если при любом состоянии природы каждому агенту выгодно следовать норме деятельности при условии, что остальные агенты также следуют этой норме.

Условие (3) можно интерпретировать и следующим образом: норма деятельности реализует то или иное равновесие, если для любого состояния природы выбор, предписываемый нормой, не противоречит рациональности поведения агентов (обеспечивает им соответствующий выигрыш и/или делает невыгодным одностороннее отклонение от нормы). Если $\aleph(\cdot)$ – однозначное отображение, то «навязывание» центром согласованной нормы деятельности может рассматриваться как сужение множества равновесий (подсказка о существовании фокальной точки и т.д. – см. обсуждение проблемы множественности равновесий в [29, 127, 159]). С этой точки зрения управление нормами деятельности можно рассматривать как задачу поиска *конвенции* (см. ниже раздел 2.5) или как задачу реализации соответствия группового выбора (см. обзор результатов *теории реализуемости* в [84]), в которой $\theta \in \Omega$ является вектором индивидуальных характеристик агентов. Такой аспект рассмотрения представляется перспективным направлением дальнейших исследований, но выходит за рамки настоящей работы.

Рассмотрим, какой информированностью должны обладать агенты для того, чтобы существовала согласованная норма. Легко видеть, что условия игры – множество агентов, целевые функции, допустимые множества, а также норма деятельности и состояние природы – должны быть общим знанием. Напомним, что *общим знанием* в теории игр [78] называется факт, о котором:

а) известно всем игрокам;

б) всем игрокам известно а);

в) всем игрокам известно б);

и так далее до бесконечности.

Действительно, для вычисления параметрического равновесия Нэша (2) в рамках действующих норм деятельности каждый агент должен быть уверен, что и остальные агенты вычислят то же равновесие, что и он. Для этого он должен поставить себя на место остальных агентов, моделирующих его поведение, и т.д. Одним из способов создания общего знания является публичное сообщение соответствующего факта всем агентам, собранным вместе. Наверное, в том числе этим объясняется то, что для формирования *корпоративной культуры*, корпоративных стандартов поведения и т.д. в современных фирмах так много внимания уделяется неформальному общению сотрудников, лояльности фирме и т.д., то есть созданию у работников впечатления (убежденности в) принадлежности общему делу, разделения общих ценностей и т.д. – все это нужно для существования общего знания.

Итак, под *задачей институционального управления*, как управления нормами деятельности, понимают задачу (1), (3) – поиска нормы, обладающей максимальной эффективностью на множестве допустимых согласованных норм [65].

Отметим, что и для репутации, и для норм деятельности существенна рефлексия – взаимные представления субъектов о представлениях, представлениях о представлениях и т.д. о существенных параметрах.

Таким образом, модели норм деятельности учитывают такие характеристики команды (см. Табл. 1), как: совместная деятельность, единство цели, коллективная ответственность. С другой стороны, этот класс моделей почти не учитывает такие свойства команды, как: автономность деятельности, специализация и взаимодополняемость ролей, устойчивость команды. Последнее свойство можно адекватно отразить в моделях, учитывающих репутацию членов команды (как минимум, с точки зрения друг друга) – в некотором смысле «рефлексию» над нормами их деятельности. Поэтому перейдем к описанию моделей репутации.

2.5. МОДЕЛИ РЕПУТАЦИИ

Репутация – «создавшееся общее мнение о достоинствах или недостатках кого-либо, чего-либо, общественная оценка» [93, с. 431].

Норма деятельности агента (индивидуального или коллективного) в рамках формальных моделей (см. выше) описывается отображением множества возможных значений существенных параметров во множество действий агента (см. раздел 2.4). Качественно говоря, норма определяет, какие действия в каких ситуациях агент выбирает. С этой точки зрения репутацию можно рассматривать как ожидаемую (другими агентами) норму деятельности агента – какого поведения от него в той или иной ситуации ожидают остальные. Репутация оправдывается, если выбор агента в рамках нормы деятельности совпадает с тем, чего от него ожидают остальные.

Будем считать, что репутация любого агента в его собственных глазах определяется нормой его деятельности.

Отдельно отметим, что, если нормы деятельности индивидуальны (коллективная норма должна быть детализирована в предписания конкретных выборов всех агентов), то репутация может быть как индивидуальной, так и коллективной – например, отражающей какого поведения команды ожидают другие субъекты.

Можно рассматривать нормы деятельности и репутацию как в случае априори несовпадающих ролей агентов (например, репутация исполнителя с точки зрения заказчика), так и в случае практически одинаковых функций агентов, осуществляющих совместную деятельность (например, производители товаров или услуг, стремящихся создать выгодную для себя репутацию в глазах потребителей, или членов организации, совместно достигающих общую цель). Последний случай соответствует командам.

Анализ литературы показывает, что на сегодняшний день существуют несколько подходов к определению репутации и стереотипов (норм) поведения (конвенций).

Модель Ж. Тироля. В [175] J. Tirole предложил рассматривать групповую репутацию как агрегированную репутацию членов группы. Поведение отдельных агентов в прошлом при этом наблюдается несовершенно (то есть, не полностью), и работодатели ориентируются на репутацию группы в целом. Модель является динамической, с памятью, то есть новые поколения не в состоянии мгновенно изменить репутацию группы, и агент, запятнавший свою репутацию, не может ее исправить.

В [26] предложена модель коллективной репутации с забыванием, в которой потеря репутации в прошлом забывается с течением времени (при поддержании в это время хорошей репутации). В упомянутой работе определяется «оптимальная скорость забывания» – при меньшей скорости забывания нарушения репутации помнятся слишком долго, и агент не стремится ее восстанавливать, а при слишком большой скорости забывания агент не задумывается о потере репутации, так как она быстро восстанавливается.

Близкие теоретико-игровые модели репутации (в основном, использующие аппарат биматричных и/или повторяющихся игр) приведены в [128-131, 148, 155, 162].

Модель норм поведения (*конвенций* – conventions – см. качественное обсуждение с точки зрения философии в [150], с точки зрения экономики – в [162]). Если в игре существует несколько равновесий (например, равновесий Нэша), то нормой поведения называется правило выбора того или иного конкретного равновесия [32] (см. также выше определение согласованной однозначной нормы).

Конвенция (соглашение) интерпретируется как соответствие отбора равновесий[16] в [77, 114, 179]. В [122, 142, 147] нормы поведения (отображения множества значений состояния природы или, соответственно, множества равновесий во множество действий агентов [65]) рассматриваются как элемент корпоративной культуры. К этому же классу моделей можно отнести: статистическую теорию дискриминации К. Эрроу [110]; модели неявных (implicit, self-enforcing) контрактов [138]; динамические модели, в которых использование стратегии наказания игроков, отклонившихся от коллективного оптимума [69, 159], интерпретируется как общественная «норма» [142] (см. также обзор экспериментальных исследований в [124]).

Модель общих характеристик (common trait) предполагает, что норма поведения является индивидуальной (ненаблюдаемой явно) характеристикой агента, наблюдая за поведением которого управляющий орган – центр – может получать о ней все более полную информацию и соответственно корректировать свои представления о характеристиках той группы, которой принадлежит агент (предположение о том, что агенты, принадлежащие той или иной группе, обладают схожими характеристиками, является существенным) – см., например, [114].

Модель Шапиро-Стиглица [168] представляет собой модель «центр-агент», в которой агенту предлагается заработная плата и он имеет возможность путем обмана (взятки и т.п.) получить до-

---

[16] *В случае если игра агентов имеет несколько равновесий, для того, чтобы однозначно «предсказать» исход их игры, приходится вводить соответствие отбора равновесий – однозначное отображение множества равновесий в себя.*

полнительный доход. Аудит проводится центром с некоторой вероятностью, в результате аудита обман достоверно обнаруживается, в результате чего агент увольняется и получает резервную полезность. Стоимость аудита для центра известна.

Если агент и центр взаимодействуют в течение нескольких периодов, то можно записать условие того, что ожидаемая полезность агента при добросовестном поведении больше, чем при обмане [157]. Задача центра заключается в выборе размера вознаграждения агента (его зарплаты) и вероятности аудита, которые минимизировали бы затраты центра при условии выгодности для агента добросовестного поведения. В результате получается стандартная оптимизационная задача. Результаты анализа ее решения (сравнительная статика) и содержательные интерпретации приведены в [168].

Перечисленные выше классы моделей трактовали репутацию агента (индивидуальную) или группы агентов (коллективную) как мнение остальных агентов (или центра) о том, что данный субъект ведет (и вел себя в прошлом) себя добросовестно и корректно – не стремится получить дополнительный доход (например, взятку), нарушить взятые на себя обязательства и т.д. При этом, как правило, считалось, что репутация может быть хорошей или плохой, и агент может вести себя «хорошо» или «плохо». Тогда задача заключается в построении моделей, которые на основании наблюдаемых характеристик позволяют определять истинную норму поведения агентов и побуждать их вести себя «хорошо». Однако в жизни все гораздо более разнообразно – не всегда можно любое действие однозначно классифицировать как «хорошее» или «плохое», да и приведенное выше определение репутации («создавшееся общее мнение о достоинствах или недостатках кого-либо») гораздо шире. Существует класс моделей, трактующих репутацию как ожидаемое оппонентами поведение субъектов. Именно этому подходу следуют модели, описываемые в [32] и рассматриваемые ниже.

Таким образом, модели репутации акцентируют внимание на таких характеристиках команды (см. Табл. 1), как: ее автономность и устойчивость, совместная деятельность, единство цели. Но этот класс моделей почти не учитывает такие свойства команды, как: специализация и взаимодополняемость ролей, коллективная ответственность членов команды за результат ее деятельности.

2.6. «ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ» ИССЛЕДОВАНИЯ КОМАНД

Под «экспериментальными» исследованиями команд понимаются *деловые игры* или *имитационные компьютерные эксперименты*, проводимые с целью проверки тех или иных гипотез о процессах и условиях эффективного формирования и/или функционирования команд.

В [161] рассматриваются два механизма распределения результатов деятельности команды между ее членами: уравнительный (все агенты получают поровну) и «иерархический» – по решению руководителя (лидера) команды (центра). По результатам деловых игр делается вывод, что при обоих механизмах имеет место *оппортунистическое поведение* членов команды (напомним, что оппортунистическим поведением называется «преследование собственного интереса, доходящее до вероломства» (self-interest-seeking-with-guile, О. Уильямсон) и/или «поведение контрагентов, уклоняющихся от выполнения контракта» (Г.Б. Клейнер) – см. обзоры в [22, 157]).

При использовании уравнительного механизма наблюдается «*эффект безбилетника*» (free-riding), когда агенты надеются получить неадекватное своим усилиям вознаграждение за счет других агентов. При принятии центром в повторяющейся игре решений о размерах вознаграждений агентов оказывается, что наличие центра (иерархической структуры команды) приводит к повышению эффективности функционирования команды в целом [161].

Значительное количество экспериментальных исследований посвящено изучению предпочтений людей принимать решения индивидуально или в рамках команды, а также анализу эффективности деятельности реальных команд по сравнению с группами индивидуумов (см. обзоры и результаты в [118, 136, 145]). Так, по результатам, приведенным в [145], более 60 % людей предпочитают коллективное принятие решений в рамках команды.

Наблюдаемый на практике *эффект «справедливости»*, заключающийся в том, что членов команды (коллектива) интересует не только адекватность оплаты их труда, но и адекватность вознаграждения, получаемого их коллегами, также служил объектом теоретико-игровых и экспериментальных исследований. Так в [166] изучался «эффект справедливости» в команде из двух агентов. При этом стремление агентов к «справедливости» моделировалось модификацией их целевых функций следующим образом, предложенным в [125]. Пусть в команду входят n агентов, имеющих целевые функции $f_i(\cdot)$, $i \in N$. Построим новые целевые функции

$$(1)\quad \hat{f}_i(\cdot) = f_i(\cdot) - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \max\{0; f_i - f_j\} - \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \max\{0; f_j - f_i\},$$

в которых неотрицательные константы $\{\alpha_{ij}\}$ и $\{\beta_{ij}\}$ отражают, насколько i-ый агент «чувствителен» к тому, что выигрыши других агентов отличаются от его выигрыша и наоборот. Получаем, что появляется возможность моделирования двух явлений – «зависти» (envy – когда агент низко ценит свой выигрыш потому что другие агенты получили бóльшие выигрыши, то есть агент стремится быть не хуже других) и «вины» (guilt – когда агент низко ценит свой выигрыш потому что его маленькое значение привело к снижению ценности выигрышей других агентов). Если допустить возможность отрицательных констант в целевых функциях (1), то это даст возможность отражать такой эффект, как «стремление к повышению статуса». В [166] приведены результаты анализа частных моделей, для которых показано, что в зависимости от значений констант $\{\alpha_{ij}\}$ и $\{\beta_{ij}\}$ эффекты «зависти», «вины» и «стремления к повышению статуса» могут приводить к росту результатов деятельности команды в целом. Более того, как показано в [119], использование целевых функций вида (1) позволяет повысить эффективность функционирования команды в условиях, когда индивидуальные действия агентов не наблюдаются центром, но известны другим агентам (team monitoring).

В [177] исследовался вопрос, в каких ситуациях сотрудники предпочитают коллективное стимулирование (за результаты деятельности команды в целом) индивидуальному. Оказывается, что рост величины вознаграждения в случае независимых агентов с ненаблюдаемыми действиями может привести к снижению эффективности стимулирования.

В *эволюционных играх* предполагается, что поведение в типичном, многократно повторяющемся взаимодействии представляет собой итог эволюционного процесса формирования поведения [19, 156, 178]. Поэтому, в отличие от классической теории игр, носящей нормативный характер, эволюционная теория игр пытается предсказать, какую стратегию поведения выберут игроки, причем функция выигрыша характеризует успех стратегии, а не отдельного игрока [19, 167]. Во многих случаях используется эволюционный подход, в котором процесс формирования поведения (модификации стратегий) описывается динамической системой, определяющей распределение по стратегиям внутри популяции в зависимости от результатов взаимодействия в предшествующие моменты времени. Этот процесс сходится к тому или иному равновесию (устойчивому состоянию динамической системы) [126, 179].

Наконец, *поведенческая теория игр* ищет ответ на вопрос – почему люди принимают те или иные решения [117], то есть, «тестирует» те или иные предположения о принципах принятия решений.

Завершив краткий обзор известных математических моделей формирования и функционирования команд, перейдем к более подробному рассмотрению «рефлексивных» и других моделей, учитывающих автономность и согласованность взаимодействия членов команды, принимающих свои решения на основании в общем случае различной информации о существенных внешних факторах и параметрах самой команды.

3. ФОРМИРОВАНИЕ И ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ КОМАНДЫ

В настоящем разделе приводится модель формирования однородной команды, основывающаяся на рассмотрении иерархий взаимных представлений агентов о *типах* друг друга, то есть о существенных параметрах, определяющих эффективность индивидуальной деятельности (чем выше эффективность деятельности агента – больше значение его типа, тем меньше его затраты).

При этом предполагается, что автономность деятельности сформированной команды соответствует стабильному информационному равновесию игры агентов, в котором ожидания членов команды относительно поведения друг друга оправдываются. Процесс же формирования команды описывается динамикой взаимных представлений агентов о типах друг друга в зависимости от наблюдаемых результатов деятельности команды в целом и/или ее отдельных членов.

В качестве содержательного примера в настоящем разделе используется распределение между членами однородной команды заданного объема работ с целью минимизации суммарных затрат на выполнение этого объема работ. Минимально необходимые сведения из теории рефлексивных игр приведены в Приложении.

Рассмотрим команду – множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ агентов. Стратегией i-го агента является выбор действия $x_i \geq 0$, что требует от него затрат $c_i(x_i, r_i)$, где $r_i > 0$ – тип данного агента, отражающий эффективность его деятельности (будем считать, что функции затрат являются квадратичными функциями типа Кобба-Дугласа, то есть $c_i(x_i, r_i) = (x_i)^2 / 2\, r_i$). Обозначим $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор действий агентов. Предположим, что целью совместной деятельности агентов является достижение результата – суммарного «действия» R (то есть, обеспечение выполнения условия $\sum_{i \in N} x_i = R$) с минимальными суммарными затратами $c(x, r) = \sum_{i \in N} c_i(x_i, r_i)$. С теоретико-игровой точки зрения можно условно считать, что целевые функции агентов совпадают (как и в модели Маршака-Раднера – см. раздел 2.2) и определяются взятыми с обратным знаком суммарными затратами. Однородность команды следует из аддитивности результата деятельности команды по действиям агентов.

Содержательными интерпретациями данной задачи являются: выполнение заказа объединением предприятий, выполнение заданного объема работ бригадой, отделом и т.д. Без ограничения общности положим $R = 1$.

Если вектор типов $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ является общим знанием [78], то, решая задачу условной оптимизации

$$\sum_{i \in N} \frac{x_i^2}{2r_i} \to \min_{\{x_i \geq 0 \mid \sum_{i \in N} x_i = 1\}},$$

каждый из агентов может вычислить оптимальный вектор действий

$$x^*(r) = (x_1^*(r),\ x_2^*(r),\ \ldots,\ x_n^*(r)),$$

где[17]

(1) $x_i^*(r) = r_i \,/ \sum_{j \in N} r_j$, $i \in N$.

Рассмотрим несколько различных вариантов информированности агентов о векторе их типов, отличающихся от общего знания (в данной модели имеется иерархия представлений агентов о типах друг друга). А именно, ограничимся двумя случаями[18]: в первом каждый агент имеет представления $r_{ij} > 0$ о типах других агентов, во втором – представления $r_{ijk} > 0$ об этих представлениях, $i, j, k \in N$. Другими словами, в первом случае, соответствующем первому рангу рефлексии, i-ый агент считает, что j-ый агент имеет тип r_{ij} и, в свою очередь, считает это общим знанием. Во втором случае, соответствующем второму рангу рефлексии, i-ый агент считает, что j-ый агент считает, что k-ый агент имеет тип r_{ijk} и, в свою очередь, считает именно это общим знанием.

Основная идея информационного равновесия на качественном уровне заключается в том, что каждый реальный агент моделирует поведение своих оппонентов – *фантомных агентов* (то есть представлений реальных или фантомных агентов друг о друге) – на основании своих представлений об их типах, их представлениях о

---

[17] *Отметим, что вектор действий* (1) *оптимален при любых функциях затрат агентов вида* $r_i\, \varphi(y_i / r_i)$, *где* $\varphi(\cdot)$ *– строго возрастающая, гладкая выпуклая функция, равная нулю при нулевом значении аргумента.*

[18] *Аналогичным образом можно описывать и более высокие ранги рефлексии агентов.*

типах друг друга и т.д. (в зависимости от ранга рефлексии). На нижнем уровне такой «последовательности отражений» должно существовать общее знание, что позволяет найти «равновесие Нэша» игры фантомных агентов нижнего уровня, затем вычислить наилучшие ответы агентов следующего уровня и т.д., вплоть до реальных агентов – см. формальное описание информационного равновесия в Приложении.

В качестве отступления отметим, что если существует управляющий орган – *центр*, которому известны истинные типы агентов и который осуществляет мотивационное управление (стимулирует агентов в зависимости о выбираемых действий и/или достигнутых результатов – см. выше и [70, 71]), то, независимо от информированности агентов при использовании центром пропорциональной системы стимулирования со ставкой оплаты $1 / \sum_{j \in N} r_j$ каждый из агентов независимо выберет соответствующее действие (1) [70]. Кроме того, центр может взять на себя координацию распределения информационных потоков между агентами, снизив тем самым информационную нагрузку на них (подобные эффекты в иерархических системах рассматривались в монографии [67]).

Будем считать, что свой тип каждому агенту известен достоверно. Кроме того, в рамках *аксиомы автоинформированности* [78] получаем, что $r_{ii} = r_i$, $r_{iij} = r_{ij}$, $r_{ijj} = r_{ij}$, $i, j \in N$, то есть представления агента о своих представлениях совпадают с самими представлениями (случаи «раздвоения личности» и нетривиальной авторефлексии мы не рассматриваем).

В рамках своих представлений каждый агент может предсказать, какие действия выберут другие агенты, каковы будут индивидуальные затраты и каковы будут суммарные затраты. Если выбор действий производится многократно, и наблюдаемая некоторым агентом реальность оказывается отличной от его представлений, то он вынужден корректировать свои представления и при очередном своем выборе использовать «новые» представления.

Совокупность наблюдаемых i-ым агентом параметров назовем его *субъективной историей игры* (см. Приложение) и обозначим h_i, $i \in N$. В рамках рассматриваемой модели субъективная история игры может включать:

1) действия, выбранные другими агентами (будем считать, что свои действия агент знает всегда) – $x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$;

2) затраты (фактические) других агентов (при этом он может вычислить и суммарные затраты) – $c_{-i} = (c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n)$;

3) суммарные затраты всех агентов – $c = \sum_{i \in N} c_i$;

4) действия и затраты (фактические) других агентов (при этом он может вычислить и суммарные затраты) – $(x_{-i}; c_{-i})$;

5) действия других агентов и суммарные затраты – $(x_{-i}; c)$.

Видно, что перечисленные варианты неравнозначны: вариант четыре наиболее «информативен», вариант три менее «информативен», чем вариант два и т.д. Выбор варианта информированности является одним из способов информационного управления со стороны центра. Другими словами, решая, какая информация будет доступна тому или иному члену команды, центр может оказывать влияние на их поведение (см. обсуждение постановок и результатов исследования задач информационного управления в [76, 77, 78, 105]).

Два случая структур информированности (представления вида r_{ij} и вида r_{ijk}) и пять вариантов субъективных историй игры (будем считать, что субъективные истории и структуры информированности всех агентов одинаковы, иначе число возможных вариантов резко возрастает) порождают десять моделей, условно обозначенных 1-10 (см. Табл. 4).

Табл. 4

Модели формирования команды

Субъективная история игры	Структура информированности	
	$\{r_{ij}\}$	$\{r_{ijk}\}$
y_{-i}	Модель 1	Модель 6
c_{-i}	Модель 2	Модель 7
c	Модель 3	Модель 8
$(y_{-i}; c_{-i})$	Модель 4	Модель 9
$(y_{-i}; c)$	Модель 5	Модель 10

Рассмотрим, какие процедуры принятия решений могут использовать агенты при выборе своих действий. В рамках структуры информированности $\{r_{ij}\}$ i-ый агент выбирает свое действие, следуя процедуре (1), тогда

(2) $x_i^*(\{r_{ij}\}) = r_i / \sum_{j \in N} r_{ij}$,

Или, что то же самое, оценив действия оппонентов в соответствии с процедурой (2), вычисляет свое действие, приводящее к требуемой сумме действий:

(3) $x_i^*(\{r_{ij}\}) = 1 - \sum_{j \neq i} (r_{ij} / \sum_{j \in N} r_{ij}), i \in N.$

Легко видеть, что процедуры (2) и (3) эквивалентны.

В рамках структуры информированности $\{r_{ijk}\}$ i-ый агент может, оценив действия оппонентов в соответствии с процедурой (1):

(4) $x_{ij}^*(\{r_{ijk}\}) = r_{ij} / \sum_{k \in N} r_{ijk}$, $j \in N,$

вычислить свое действие, приводящее к требуемой сумме действий:

(5) $x_i^*(\{r_{ijk}\}) = 1 - \sum_{j \neq i} (r_{ij} / \sum_{k \in N} r_{ijk}), i \in N.$

Описав модели принятия агентами решений в статике, рассмотрим *динамику их коллективного поведения* (см. также раздел П.5 Приложения).

Предположим, что на каждом шаге агенты принимают решения, используя информацию только о предыдущем шаге, то есть субъективная история игры включает только соответствующие значения предыдущего периода времени. Этим предположением мы исключаем из рассмотрения случай, когда принятие решений осуществляется на основании всей наблюдаемой рассматриваемым агентом предшествующей траектории игры (модели принятия решений в подобном случае чрезвычайно сложны – см. обзор и результаты исследования моделей динамических организационных систем в [69], и вряд ли позволят сделать простые содержательно интерпретируемые выводы).

Обозначим $W_i^t(h_i^t)$ – текущее «*положение цели*» i-го агента в периоде t – его представления I_i^t о типах оппонентов, которые могли бы приводить к наблюдаемым данным агентом их выборам в периоде $t = 0, 1, 2, \dots$, $i \in N$. Другими словами, $W_i^t(h_i^t)$ – такая структура информированности, которая «объясняет» наблюдаемое агентом поведение оппонентов.

Предположим, что первоначально агенты имеют представления I_i^0 и изменяют их в зависимости от субъективной истории игры в соответствии с *гипотезой индикаторного поведения* [80][19]:

(6) $I_i^{t+1} = I_i^t + \gamma_i^t \ (W_i^t(h_i^t) - I_i^t), t = 1, 2, \dots, i \in N,$

где γ_i^t – вектор, компоненты которого – числа из отрезка [0; 1], интерпретируемые как «величины шагов» к положению цели и обладающие описываемыми в [80] свойствами, необходимыми для сходимости процедуры (6). Так как представления каждого агента описываются конечным числом параметров r_{ij} или r_{ijk}, $i, j, k \in N$, то под записью (6) будем понимать «векторную» формулировку закона независимого изменения компонент структуры информированности.

Отметим, что гипотеза индикаторного поведения является лишь одним из возможных вариантов описания коллективного поведения [48, 62, 63, 80], но мы ограничимся ее использованием, так как, с одной стороны, ее свойства исследованы наиболее подробно по сравнению с другими процедурами, а с другой стороны – как показывают имитационные эксперименты, она достаточно адекватно описывает поведение многих реальных субъектов.

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы корректно формально определить, что будет пониматься под командой. А именно, **командой** в рамках «рефлексивного» описания принятия решений будем считать множество агентов, выборы которых согласованы с иерархией их взаимных представлений друг о друге. В рассматриваемой модели командой будет набор агентов с такой структурой информированности, которая является неподвижной точкой отображения (6) при условии, что действия, выбираемые агентами в зависимости от структур их информированности, определяются выражениями (2) или (5). Введенное определение команды качественно близко к определениям свойств *стабильности* и

---

[19] *Подчеркнем, что гипотеза индикаторного поведения не учитывает стратегическую рефлексию агентов, то есть их возможность принимать решения с учетом того, что оппоненты следуют гипотезе индикаторного поведения, знают, что другие об этом знают и учитывают при принятии решений и т.д.*

согласованности информационного управления, отвечающих за то, чтобы реальные действия или выигрыши агентов совпадали с ожидаемыми действиями или выигрышами (см. Приложение и [76-78]).

Таким образом, в каждом конкретном случае динамика изменения взаимных представлений агентов описывается зависимостью $W_i^t(\cdot)$ положения цели от субъективной истории игры. Рассмотрим в качестве иллюстративного примера модели 1-10 (Табл. 4), детализировав историю игры и положения целей.

Модель 1. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ij}\}$, наблюдает действия x_{-i}, выбранные другими агентами.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых их действия, выбираемые в соответствии с выражением (2), совпадут с наблюдаемыми действиями x_{-i}:

(7) $$\Omega_i^1 = \{r_{ij} > 0, j \in N \setminus \{i\} \mid r_{ij} / \sum_{j \in N} r_{ij} = x_j,\ j \in N \setminus \{i\}\}.$$

Обозначим $w_{ij}^t(x_{-i}^t)$ – j-ую проекцию ближайшей к точке $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^1. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать следующим образом

(8) $$r_{ij}^{t+1} = r_{ij}^t + \gamma_{ij}^t\ (w_{ij}^t(x_{-i}^t) - r_{ij}^t), j \in N \setminus \{i\}, t = 1, 2, \ldots,\ i \in N,$$

а выбор им действий будет следовать выражению (2).

Отметим, что данная процедура определения положения цели не является единственно возможной. Например, альтернативой является вычисление агентом на основе своих представлений предполагаемых действий других агентов в соответствии с процедурой (2), а затем выбор своего действия, дополняющего сумму действий оппонентов до требуемой величины (в рассматриваемой модели принятой равной единице).

Модель 2. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ij}\}$, наблюдает затраты c_{-i} других агентов.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых их затраты при действиях, выбираемых в соответствии с выражением (2), совпадут с наблюдаемыми затратами c_{-i}:

(9) $$\Omega_i^2 = \{r_{ij} > 0, j \in N \setminus \{i\} \mid c_j(r_{ij} / \sum_{j \in N} r_{ij}\ , r_{ij}) = c_j,\ j \in N \setminus \{i\}\}.$$

Обозначим $w_{ij}^t(c_{-i})$ – j-ую проекцию ближайшей к точке $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^2. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать процедурой, аналогичной процедуре (8), а выбор им действий будет следовать выражению (2).

Качественно, данный случай (в смысле информативности и разрешимости соответствующей системы уравнений – см. выражения (7) и (9)) не сильно отличается от модели 1.

Модель 3. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ij}\}$, наблюдает суммарные затраты c всех агентов.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых суммарные затраты совпадут с наблюдаемыми суммарными затратами c:

$$(10)\ \Omega_i^3 = \{r_{ij} > 0, j \in N\backslash\{i\} \mid c_i(y_i, r_i) + \sum_{j \in N\backslash\{i\}} [c_j(r_{ij} / \sum_{j \in N} r_{ij}\ , r_{ij})] = c\}.$$

Обозначим $w_{ij}^t(c)$ – j-ую проекцию ближайшей к точке $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^3. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать процедурой, аналогичной процедуре (8), а выбор им действий будет следовать выражению (2).

Качественно, данный случай (в смысле информативности и множественности решений уравнения, входящего в определение множества Ω_i^3 в выражении (10), а также сложности моделирования) существенно отличается от моделей 1 и 2.

Модели 4 и 5 описываются по аналогии с моделями 1 и 2, и рассматривать их подробно мы не будем.

Модель 6. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ijk}\}$, наблюдает действия x_{-i}, выбранные другими агентами.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых их действия, выбираемые в соответствии с выражением (4), совпадут с наблюдаемыми действиями x_{-i}:

$$(11)\ \Omega_i^6 = \{r_{ijk} > 0, j \in N \setminus \{i\}, k \in N \mid r_{ij} / \sum_{k \in N} r_{ijk} = x_j,\ j \in N \setminus \{i\}\}.$$

Обозначим $w_{ijk}^t(x_{-i}^t)$ – jk-ую проекцию ближайшей к точке $(r_{ijk}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^6. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать следующим образом

(12) $r_{ijk}^{t+1} = r_{ijk}^t + \gamma_{ij}^t\ (w_{ijk}^t(x_{-i}^t) - r_{ijk}^t), j \in N \setminus \{i\}, t = 1, 2, \ldots, i \in N,$

а выбор им действий будет следовать выражению (5), то есть:

(13) $x_i^{t*}(\{r_{ijk}^t\}) = 1 - \sum_{j \neq i} (r_{ij}^t\ /\ \sum_{k \in N} r_{ijk}^t), i \in N.$

Модель 6 по технике описания и анализа аналогична модели 1, модель 7 – модели 2 т.д., поэтому рассматривать подробно модели 7-10 мы не будем.

Итак, с точки зрения каждого из агентов в модели 1 имеется $n - 1$ уравнение с $n - 1$ неизвестным; в модели 2: $n - 1$ уравнение с $n - 1$ неизвестным; в модели 3: одно уравнение с $n - 1$ неизвестным; в модели 4: 2 $(n - 1)$ уравнений с $n - 1$ неизвестным; в модели 5: n уравнений с $n - 1$ неизвестным; в модели 6: $n - 1$ уравнение с $n\ (n - 1)$ неизвестным и т.д.

В заключение настоящего раздела рассмотрим наиболее простую из десяти перечисленных выше моделей, а именно – модель 1 команды из трех агентов, имеющих сепарабельные квадратичные функции затрат $c_i(x_i, r_i) = (x_i)^2 / 2\ r_i$.

<u>Пример 3.1.</u> Рассмотрим модель 1. Из (7) вычисляем:

$$w_{13}(x_2, x_3) = x_3\ r_1 / (1 - x_2 - x_3),$$
$$w_{12}(x_2, x_3) = x_2\ r_1 / (1 - x_2 - x_3),$$
$$w_{21}(x_1, x_3) = x_1\ r_2 / (1 - x_1 - x_3),$$
$$w_{23}(x_1, x_3) = x_3\ r_2 / (1 - x_1 - x_3),$$
$$w_{31}(x_1, x_2) = x_1\ r_3 / (1 - x_1 - x_2),$$
$$w_{32}(x_1, x_2) = x_2\ r_3 / (1 - x_1 - x_2),$$

Пусть r_1 =1,8; r_2 = 2; r_3 = 2,2, а начальные представления агентов о типах друг друга одинаковы и равны двум (вариант 1). Объективно оптимальным (в смысле минимума суммарных затрат) является вектор действий (0,30; 0,33; 0,37).

Предположим, что агенты действуют следующим образом: на основании собственных представлений о своем типе и типах оппонентов они вычисляют в соответствии с процедурой (2) действия оппонентов, доставляющие «субъективный» суммарный минимум сумме затрат (предсказывают действия оппонентов); сравнивают наблюдаемые действия с предсказанными и изменяют свои представления о типах оппонентов пропорционально разности между наблюдаемыми и предсказанными действиями с коэффициентом пропорциональности $\gamma_{ij}^t = 0{,}25$, $i, j \in N$, $t = 1, 2, \ldots$.

В результате такой процедуры получаем через 200 шагов вектор действий (0,316; 0,339, 0,345) и следующие представления агентов о типах друг друга $r_{12} = 1{,}93 < r_2$, $r_{13} = 1{,}94 < r_3$, $r_{21} = 1{,}86 > r_1$, $r_{23} = 2{,}01 < r_3$, $r_{31} = 2{,}02 > r_1$, $r_{32} = 2{,}17 > r_2$. Несмотря на несовпадение представлений с реальностью, ситуация является стабильной – ожидаемые и наблюдаемые действия совпадают.

На Рис. 5[20] для первого варианта приведена динамика действий агентов, на Рис. 6 – суммарное «рассогласование» действий агентов (корень из суммы квадратов разностей наблюдаемых и ожидаемых действий).

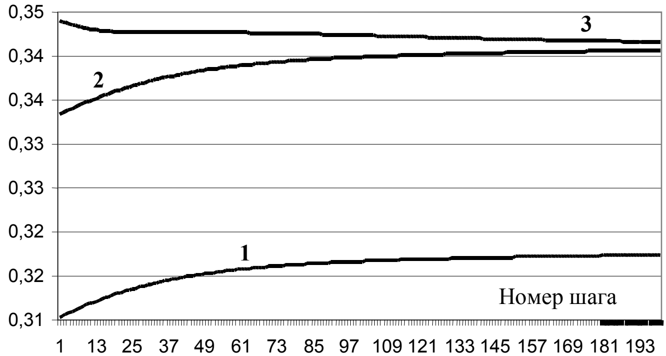

Рис. 5. Динамика действий агентов (*вариант 1*)

Пусть при $r_1 = 1{,}8$; $r_2 = 2$; $r_3 = 2{,}2$ начальные представления агентов о типах друг друга изменились и стали равны следующим значениям (вариант 2):

$$r_{12}^0 = 2,\ r_{13}^0 = 2{,}5,\ r_{21}^0 = 1{,}5,\ r_{23}^0 = 2{,}5,\ r_{31}^0 = 1{,}5,\ r_{32}^0 = 2.$$

Объективно оптимальным (в смысле минимума суммарных затрат) является по-прежнему вектор действий (0,30; 0,33; 0,37).

[20] *Все рисунки настоящего примера представляют собой результаты имитационного моделирования.*

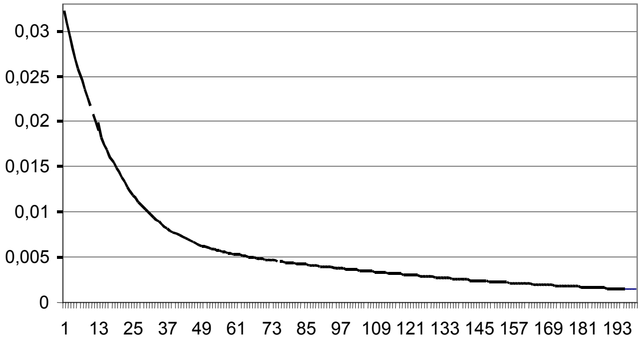

Рис. 6. Динамика рассогласования (*вариант 1*)

Через 200 шагов вектор действий (0,298; 0,3484, 0,3524) и следующие представления агентов о типах друг друга $r_{12} = 2{,}1 > r_2$, $r_{13} = 2{,}12 < r_3$, $r_{21} = 1{,}71 < r_1$, $r_{23} = 2{,}01 < r_3$, $r_{31} = 1{,}85 > r_1$, $r_{32} = 2{,}16 > r_2$. Несмотря на несовпадение представлений с реальностью, ситуация является стабильной – ожидаемые и наблюдаемые действия совпадают.

На Рис. 7 приведена динамика действий агентов, на Рис. 8 – суммарное «рассогласование» действий агентов.

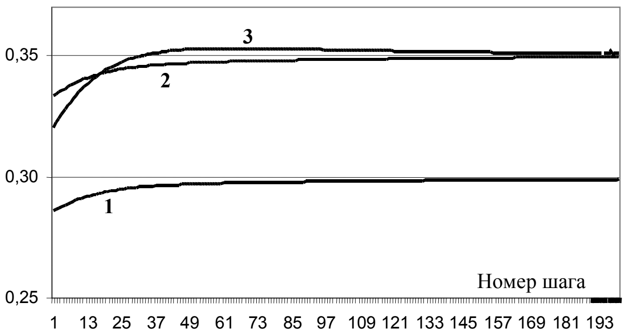

Рис. 7. Динамика действий агентов (*вариант 2*)

При использовании процедуры (8) при тех же начальных данных получаем вектор действий (0,318; 0,341, 0,341) и следующие представления агентов о типах друг друга $r_{12} = 1{,}93 < r_2$, $r_{13} = 1{,}93 < r_3$, $r_{21} = 1{,}87 > r_1$, $r_{23} = 2{,}00 < r_3$, $r_{31} = 1{,}05 > r_1$, $r_{32} = 2{,}2 > r_2$. Несмотря на несовпадение представлений с реальностью, в этом случае ситуация также является стабильной – ожидаемые действия и наблюдаемые совпадают с точностью до шести знаков после запятой.

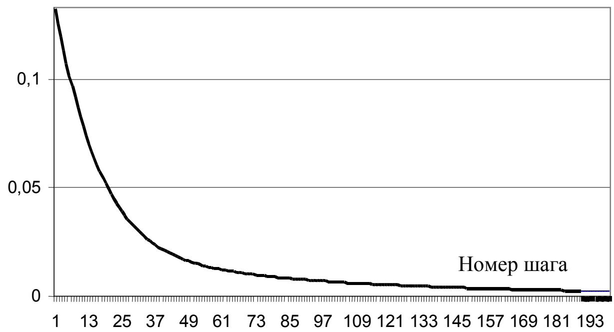

Рис. 8. Динамика рассогласования (*вариант 2*)

Такое явление, как стабильность информационного равновесия, в котором представления агентов друг о друге не совпадают с истиной, имеет простое объяснение: набор систем уравнений (7) для всех агентов относительно представлений агентов и их действий имеет не единственное решение. Действительно, например, в случае двух агентов система из трех уравнений

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{r_{12}}{r_1 + r_{12}} = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ \dfrac{r_{21}}{r_2 + r_{21}} = x_1 \end{cases}$$

с четырьмя неизвестными r_{12}, r_{21}, x_1, x_2 имеет бесконечное множество решений: выражая все неизвестные через x_1, получим следующее семейство решений (при подстановке представлений агентов в (2) получаются тождества): $r_{12} = r_1\,(1 / x_1 - 1)$, $r_{21} = r_2\, x_1 / (1 - x_1)$, $x_2 = 1 - x_1$, $x_1 \in (0;\, 1)$. •[21]

[21] *Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера.*

Отметим, что переход к модели 4, то есть добавление информации о затратах оппонентов, может сузить множество решений соответствующей системы уравнений. В рассматриваемой модели одновременное наблюдение затрат и действий агента позволяет однозначно определить его тип (за один шаг). Приведем пример.

Пример 3.2. Пусть имеются два агента, типы которых $r_1 = 1{,}5$; $r_2 = 2{,}5$. Начальные представления: $r_{12}^0 = 1{,}8$, $r_{21}^0 = 2{,}2$, то есть существенно «неправильные». Конечные (через 200 шагов) представления агентов друг о друге равны $r_{12} = 1{,}747$; $r_{21} = 2{,}147$, то есть не приблизились к истине.

На Рис. 9 приведена динамика действий агентов, на Рис. 10 – суммарное «рассогласование» действий агентов.

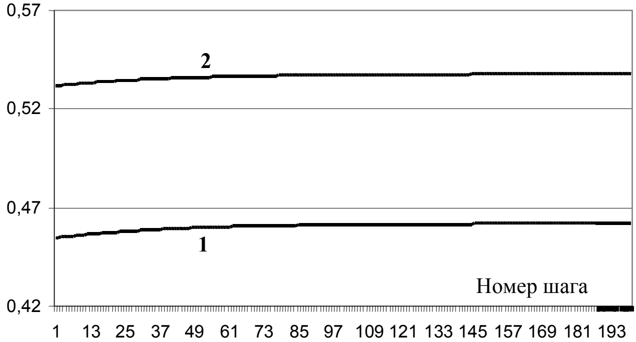

Рис. 9. Динамика действий агентов в примере 3.2

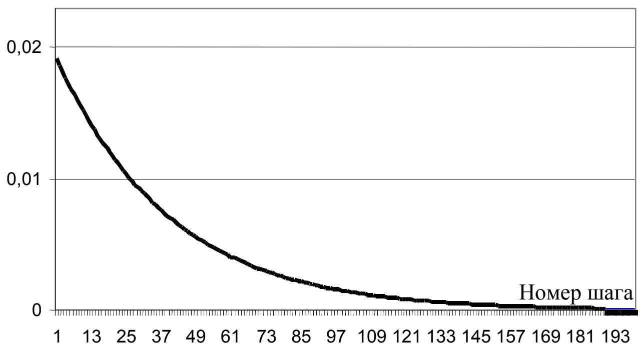

Рис. 10. Динамика рассогласования в примере 3.2

Субъективно равновесными являются действия $x_1 = 0,4614$; $x_2 = 0,5376$. При этом наблюдаемые действия являются информационным равновесием – они согласованы с индивидуальными представлениями агентов (удовлетворяют системе уравнений (14)).

Множество субъективных равновесий для рассматриваемого примера изображено на Рис. 11, на котором кружком помечена начальная точка, ромбиком – истинные значения типов, стрелкой указано изменение представлений агентов.

Рис. 11. Множество субъективных равновесий

Из системы уравнений (14) следует, что стабильными будут все информационные равновесия, удовлетворяющие следующему условию:

(15) $r_{12}\, r_{21} = r_1\, r_2$.

Содержательно условие (15) означает, что во сколько раз первый агент переоценивает (недооценивает) второго, во столько раз второй недооценивает (переоценивает) первого. Агрегированной характеристикой команды в целом в рассматриваемом случае можно условно считать произведение типов членов команды.

Множество взаимных представлений (r_{12}; r_{21}), удовлетворяющих (15), представляет собой гиперболу на соответствующей плоскости. Пример такой гиперболы для случая $r_1 = 2$; $r_2 = 1$ приведен на Рис. 11.

Проведенный анализ дает возможность не только определить множество равновесий (15), но и исследовать области их притяжения: из (8) следует, что динамика взаимных представлений удовлетворяет следующему уравнению:

(16) $\frac{\Delta r_{12}^t}{\Delta r_{21}^t} = \frac{\gamma_{12}^t}{\gamma_{21}^t} \; \frac{r_{12}^{t-1}}{r_{21}^{t-1}}$, $t = 1, 2, \ldots$,

следовательно, при постоянных и одинаковых «шагах» γ траекториями изменения взаимных представлений будут прямые, проходящие через ноль. Угол наклона этих прямых (см. Рис. 12) – областей притяжения точек их пересечения с гиперболой (15) – определяется начальной точкой (например, любая начальная точка, лежащая на выделенной на Рис. 12 жирным шрифтом прямой $r_{12} = r_{21} / 2$, приводит к истинному равновесию).

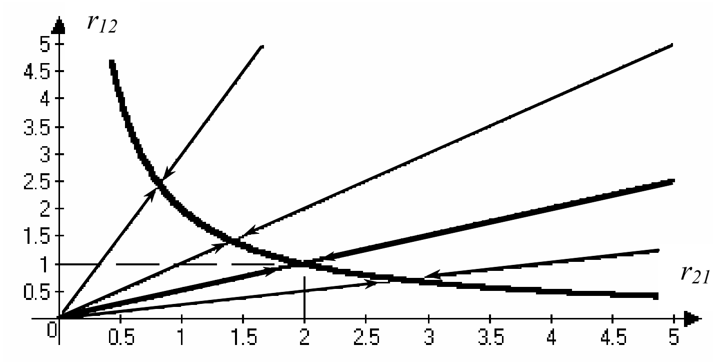

Рис. 12. Множество субъективных равновесий и области их притяжения

Данный факт представляет интерес с точки зрения информационного управления – зная интересующую его конечную точку, центр легко может вычислить множество начальных точек (прямую), начав движение из которой агенты сами придут в требуемое для центра равновесие[22]. •

Завершив рассмотрение примера, можно сделать вывод, что стабильность команды и слаженность ее работы может достигаться, в том числе, и при ложных представлениях членах команды

[22] *В случае переменных «шагов» задача сводится к поиску траектории, удовлетворяющей* (16) *и проходящей через заданную точку множества* (16).

друг о друге. Выход из ложного равновесия требует получения агентами дополнительной информации друг о друге.

Таким образом, модели формирования и деятельности однородных команд, описываемые в терминах рефлексивных игр, позволяют ставить и решать задачи управления процессом формирования команды.

Действительно, из рассмотрения моделей 1-10 следует, что существенной является та информация, которой обладают агенты об истории игры. Поэтому одна из управленческих возможностей заключается в создании, во-первых, разнообразных ситуаций деятельности (обеспечивающих выявление существенных характеристик агентов – см. модели научения в [63] и разделе 9) и, во-вторых, обеспечения максимальных коммуникаций и доступа ко всей существенной информации.

Кроме того, проведенный анализ свидетельствует, что на скорость формирования команды (скорость сходимости к равновесию) существенно влияют параметры γ – «размеры шагов», фигурирующие в процедурах динамики коллективного поведения агентов (см. также [62, 80]). Влияние на эти параметры также может рассматриваться как управление со стороны центра[23].

Таким образом, рассмотренные в настоящем раздел «рефлексивные» модели формирования и функционирования команд адекватно отражают такие свойства (см. Табл. 1), как автономность, согласованность и устойчивость взаимодействия членов команды.

---

[23] *Следует иметь в виду, что, с одной стороны, увеличение размера шага ведет к увеличению скорости сходимости, однако при слишком больших размерах шагов процедура может оказаться неустойчивой.*

4. ФОРМИРОВАНИЕ И ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ КОМАНДЫ

В неоднородных командах члены команды выполняют различные функции, причем каждый член команды в общем случае характеризуется определенными эффективностями реализации тех или иных функций. Рассмотрим команду $N = \{1, 2, ..., n\}$, состоящую из n агентов. Предположим, что успешная деятельность команды требует осуществления множества $M = \{1, 2, ..., m\}$ различных функций. Обозначим через $r_i^j \geq 0$ эффективность выполнения i-ым агентом j-ой функции (примером является производительность труда), $i \in N, j \in M$.

Для простоты будем считать, что эффективности принимают значения от нуля до единицы.

Свойства неоднородных команд. Матрица $\boldsymbol{r} = \| r_i^j \|$ характеризует потенциальные возможности команды по выполнению заданного набора функций.

Введем такие числовые (но интерпретируемые с известной долей условности) показатели команды, вычисляемые на основании матрицы $\boldsymbol{r}$, как:

- профессионализм i-го агента – среднее значение эффективности выполнения им различных функций:

(1) $r_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} r_i^j \ , i \in N;$

- профессионализм команды – средняя эффективность выполнения командой различных функций:

(2) $r = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_i^j \ ;$

- средняя квалификация команды по каждой из функций:

(3) $H^j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i^j \ , j \in M;$

- неоднородность квалификаций i-го агента – стандартное отклонение его эффективностей выполнения различных функций:

(4) $d_i = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(r_i^j - r_i)^2} \ , i \in N;$

- неоднородность команды[24] – нормированное значение суммы различий эффективностей агентов:

$$(5)\ d = \frac{1}{2mn(n-1)} \sum_{i,k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} | r_i^j - r_k^j | ;$$

- «специализированность» команды, характеризующая наличие в ней для каждой функции агентов, специализирующихся именно на реализации данной функции. Данный показатель определим как отношение числа членов команды, выполняющих при оптимальном распределении функций (в рамках, например, транспортной задачи – см. выражения (7)-(9) раздела 2.1) какие-либо функции, к общему числу членов команды n.

Приведем пример, иллюстрирующий, с одной стороны информативность, а с другой стороны – условность[25] введенных показателей.

Пример 4.1. Рассмотрим несколько команд, состоящих из трех агентов, выполняющих три различные функции – см. Табл. 5.

Первая команда обладает высокой (даже избыточной) квалификацией и низкой неоднородностью. Вторая команда обладает меньшей средней квалификацией, большей неоднородностью, но такой же «специализированностью» (условно можно считать, что в ней отсутствует избыточность квалификаций). Наконец, третья команда, хотя и обладает такой же средней квалификацией, что и вторая команда, но в ней низок уровень «специализированности» (эффективности двух членов команды равны нулю). •

---

[24] *Выше под неоднородной командой было предложено понимать команду, функции членов которой отличаются. Неоднородность такой команды отражает различие эффективностей выполнения различных функций ее членами. Так, например, неоднородная команда может включать как абсолютно одинаковых* («*однородных*» *с точки зрения эффективностей*) *агентов – см. п.*1 *примера* 4.1, *так и абсолютно различных* («*неоднородных*») *агентов – см. п.*2 *примера* 4.1.

[25] *Действительно, все интерпретации* (1)-(5) *эффективностей достаточно условны, и могут быть применимы к тем или иным практическим задачам только в случае линейных «производственных функций»* (*функций выпуска или функций затрат*) *при отсутствии ограничений на объемы выполняемых агентами работ.*

Табл. 5. Характеристики команд в примере 4.1

№ п/п	**r**	r_i	d_i	r	H^j	d	q
1	1 1 1 1 1 1 1 1 1	1	0	1	1	0	1
2	1 0 0 0 1 0 0 0 1	1/3	$1/\sqrt{3}$	1/3	1/3	1/2	1
3	1 1 1 0 0 0 0 0 0	$r_1=1$ $r_2=r_3$ $=0$	0	1/3	1/3	1/3	1/3

Исследуем последовательно (в порядке усложнения несколько моделей).

Случай 1 – фиксированные объемы работ, любой агент может выполнять любое количество работ. Рассмотрим задачу оптимального распределения заданного вектора объемов работ $\boldsymbol{R} = (R^1, R^2, \ldots, R^m)$, между агентами, имеющими аддитивные[26] функции затрат типа обобщенных функций Кобба-Дугласа:

$$c_i(x_i, r_i) = \sum_{j \in M} r_i^j \varphi\left(\frac{x_{ij}}{r_i^j}\right), \; i \in N,$$

где $\varphi(\cdot)$ – возрастающая выпуклая гладкая функция, равная нулю в нуле. Предположим, что любой агент может выполнить любой неотрицательный объем работ каждого вида (ограниченность «производственных» возможностей агентов в модели учитывается ростом предельных издержек с увеличением объемов работ). Тогда, решая методом множителей Лагранжа следующую задачу:

$$(6) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\varphi\left(\frac{x_{ij}}{r_i^j}\right) \to \min_{\{x_{ij} \geq 0\}}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = R^j, \; j \in M, \end{cases}$$

[26] *То есть, дополнительность затрат по различным видам работ не учитывается.*

получим оптимальное распределение объемов работ между агентами:

(7) $x_{ij}^{*}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = r_i^j \dfrac{R^j}{n\,H^j}$, $i \in N, j \in M$.

Суммарные затраты агентов (команды в целом) по выполнению вектора $\boldsymbol{R}$ объемов работ равны:

(8) $C_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}) = n \sum_{j \in M} H^j \varphi(\dfrac{R^j}{n\,H^j})$.

Проанализируем выражения (7) и (8).

Во-первых, силу специфики выбранного вида функций затрат команда может рассматриваться как единое целое – один агент с функцией затрат $c(\boldsymbol{x}) = \sum_{j \in M} nH^j \varphi(\dfrac{x^j}{nH^j})$ и с вектором типов, компоненты которого равны суммарной эффективности команды по выполнению соответствующего вида работ. Из данного свойства оптимального решения вытекает важный содержательный вывод – в рассматриваемом случае при фиксированных средних квалификациях (3) команды не важно, какими конкретными квалификациями обладает тот или иной агент (то есть, характеристики (1), (2) и (4) не столь существенны). Другими словами, при фиксированной (для каждой из функций) суммарной квалификации две команды – одна, в которой один агент имеет высокую квалификацию, а остальные – нулевую, и вторая, в которой все агенты обладают одинаковыми квалификациями – равноценны с точки зрения минимальных суммарных затрат.

Необходимо подчеркнуть, что данный вывод справедлив в предположении, что не рассматриваются затраты на привлечение и удержание агентов в команде, а эти затраты для каждого агента, очевидно, тем выше, чем выше его квалификация (1) – см. ниже обсуждение проблем формирования неоднородных команд.

Во-вторых, затраты команды (8), естественно, монотонны по объемам выполняемых работ. Кроме того, в силу выпуклости функции $\varphi(\cdot)$ они убывают с ростом средней квалификации (3) команды по любой из функций.

В-третьих, можно ставить и решать задачу нахождения оптимального (в смысле минимума затрат (8)) распределения квалификаций агентов, например, при заданной средней квалификации команды (2):

$$(9)\quad \sum_{j \in M} H^j \varphi\left(\frac{R^j}{n\,H^j}\right) \to \min_{\{H^j \geq 0\}},$$

$$(10)\quad \frac{1}{m} \sum_{j \in M} H^j = r.$$

Решение задачи (9)-(10) имеет вид:

$$(11)\quad H^j = m\,r\,\frac{R^j}{\sum_{k \in M} R^k},\ j \in M.$$

Содержательно выражение (11) означает, что при фиксированной средней квалификации оптимальна та команда, в которой выше квалификация агентов, выполняющих (при оптимальном распределении функций) наибольший объем работ. Другими словами, чем больше предстоящий объем работ того или иного вида, тем выше должна быть квалификация занятых на этих работах членов команды.

Сформулируем сделанные выводы в виде следующего утверждения.

Утверждение 4.1. При условии, что в неоднородной команде фиксированы объемы работ, а любой агент может выполнять любое количество различных работ:

а) оптимальное распределение объемов работ между агентами определяется выражением (7);

б) при фиксированной (для каждой из функций) суммарной квалификации распределение агентов по квалификациям несущественно;

в) при фиксированной средней квалификации оптимальна команда с квалификациями агентов, удовлетворяющих выражению (11).

Имея решение (7)-(8) задачи об оптимальном распределении работ в неоднородной команде, можно решать и задачу формирования ее состава. Пусть при фиксированном множестве претендентов известны затраты $S(\boldsymbol{r})$ на привлечение и удержание состава команды квалификации $\boldsymbol{r}$. Тогда можно формулировать в той или иной постановке (см. раздел 2.1) задачу нахождения состава, минимизирующего сумму затрат $S(\boldsymbol{r}) + C_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})$ на формирование и функционирование команды, которой предстоит реализовывать объем работ $\boldsymbol{R}$.

Выше предполагалось, что при фиксированных объемах работ (функций) каждый агент мог реализовывать одновременно несколько функций. Иногда (в силу технологических ограничений или существующих затрат на координацию деятельности агентов [67, 72]) требуется, чтобы разделение функций между агентами было более жестким, например, можно потребовать, чтобы каждый агент выполнял не более одной работы, и наоборот – чтобы одну работу выполнял только один агент (см. задачу о назначении в разделе 2.1). Рассмотрим соответствующую модель.

Случай 2 – фиксированные объемы работ, любой агент может выполнять только одну работу. Предположим, что число агентов равно числу функций: $n = m$. Обозначим $\hat{s}_{ij} = c_i(R^j, r_i) = r_i^j \varphi(\frac{R^j}{r_i^j})$, $i \in N$, $j \in M$. Тогда задача оптимального распределения функций будет описываться выражениями (10)-(12) раздела 2.1, то есть будет являться классической задачей о назначении.

Вспомним теперь, что мы исследуем команды, характеризуемые автономностью деятельности агентов. Последняя в том числе подразумевает, что члены команды могут самостоятельно принимать решения о том, какие работы и в каких объемах им выполнять. Если интересы всех членов команды едины и заключаются в минимизации суммарных затрат, то при условии, что все параметры являются общим знанием, каждый из агентов может решить задачу (6) или задачу (10)-(12) раздела 2.1 и выбрать оптимальные действия.

Однако может оказаться, что каждый из членов команды преследует собственные интересы. Как же будет функционировать команда в этом случае, и как добиться слаженной и эффективной (в смысле минимума суммарных затрат) работы ее членов? Для ответа на этот вопрос рассмотрим следующую модель, в которой уже появляются элементы управления, характерного для иерархических организационных систем.

Перенумеруем агентов таким образом, чтобы оптимальным решением задачи о назначении было диагональное назначение ($x_{ii} = 1$, $x_{ij} = 0$, $j \neq i$, $i, j \in N$).

Пусть за выполнение j-ой функции установлено вознаграждение q_j, $j \in M$. Выигрыш i-го агента описывается разностью между вознаграждением за выполнение выбранной им функции j и затратами на выполнение этой функции: $q_j - \hat{s}_{ij}$, $i, j \in N$. Спрашивается, каковы должны быть размеры вознаграждений, чтобы выборы агентов соответствовали оптимальному решению задачи о назначении. Для ответа на этот вопрос воспользуемся полученными в [75] результатами решения задачи синтеза оптимальных нормативных ранговых систем стимулирования.

Для того чтобы i-му агенту было выгодно выбирать i-ю функцию (а не любую другую), необходимо и достаточно выполнения следующей системы неравенств:

(12) $q_i - \hat{s}_{ii} \geq q_j - \hat{s}_{ij}$, $i, j \in N$.

Запишем (12) в виде

(13) $q_j - q_i \leq \alpha_{ij}$, $i, j \in N$,

где $\alpha_{ij} = \hat{s}_{ij} - \hat{s}_{ii}$, $i, j \in N$. Обозначим суммарное вознаграждение агентов

(14) $\vartheta = \sum_{i=1}^{n} q_i$,

где $\boldsymbol{q}$ удовлетворяет (13). Тогда задача заключается в выборе неотрицательных вознаграждений, минимизирующих выражение (14) при условии (13). Введем в рассмотрение n-вершинный граф G_α, веса дуг в котором определяются $||\alpha_{ij}||$. Задача минимизации (14) при условии (13) является задачей о минимальных неотрицательных потенциалах вершин графа G_α, для существования решения которой необходимо и достаточно отсутствия контуров отрицательной длины [7]. Рассмотрим следующую задачу о назначении:

(15) $\sum_{i,j=1}^{n} \hat{s}_{ij}\, x_{ij} \to \min_{\{x_{ij}\}}$

(16) $x_{ij} \in \{0; 1\}$, $i, j \in N$,

(17) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j \in N$,

(18) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i \in N$.

Утверждение 4.2. Для того чтобы в оптимальном решении задачи (15)-(18) $x_{ii} = 1$, $x_{ij} = 0$, $j \neq i$, $i, j \in N$, необходимо и достаточно, чтобы граф G_α не имел контуров отрицательной длины.

Из теории графов известно [7], что в оптимальном решении задачи (15)-(18) минимальна не только сумма потенциалов вершин графа G_α (суммарные затраты на вознаграждение членов команды), но и минимальны все потенциалы вершин (индивидуальные вознаграждения).

Имея результат утверждения 4.2, мы имеем возможность предложить алгоритм вычисления минимальных потенциалов. Поставим в соответствие ограничениям (17)-(18) двойственные переменные u_j и v_i, $i, j \in N$. Ограничения двойственной задачи имеют вид:

(19) $u_j - v_i \leq \alpha_{ij}$, $i, j \in N$.

Заметим, что, так как $x_{ii} = 1$, $i \in N$, то $u_i - v_i = \alpha_{ii} = 0$, а значит $u_i = v_i = q_i$. Используя этот факт, определим следующий алгоритм:

Шаг 0. $u_j = c_{jj}$, $j \in N$.

Шаг 1. $v_i := \max\limits_{j \in N} \{u_j - \alpha_{ij}\}$, $i \in N$.

Шаг 2. $u_j := \max\limits_{j \in N} \{v_i + \alpha_{ij}\}$, $j \in N$.

Последовательное повторение шагов 1 и 2 алгоритма конечное число (очевидно, не превышающее n) раз даст оптимальное решение задачи (15)-(18):

(19) $q_i = u_i = v_i$, $i \in N$.

Приведенный выше алгоритм позволяет решать задачу поиска минимальных потенциалов графа G_α, удовлетворяющих условию (13), то есть побуждающих членов команды выбрать оптимальные действия.

Обозначим $C_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})$ – значение целевой функции в оптимальном решении задачи (15)-(18). Легко видеть, что

(20) $\forall\ \boldsymbol{r} \geq 0, \forall\ \boldsymbol{R} \geq 0\ \ C_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}) \geq C_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})$,

То есть суммарные затраты команды на выполнение фиксированного набора работ в случае фиксации «ролей» членов команды не ниже, чем в случае, когда каждый член команды может выполнять несколько функций одновременно. Это свойство оптимальных решений имеет прозрачную содержательную интерпретацию в терминах свойств организационных структур [72]. Сделаем маленькое отступление, проясняющее связь между свойствами оптимальных решений задач распределения функций и типами организационных структур.

Оргструктуры и задачи распределения функций. Для большинства современных организаций актуальна проблема поиска рационального баланса между линейной[27] и проектной структурой. Линейная структура, порождаемая, например, четкой функциональной специализацией, оказывается эффективной при процессном функционировании, то есть в условиях относительного постоянства набора реализуемых системой функций. При проектной структуре участники системы «привязаны» не к функциям, а к проектам, которые могут сменять друг друга во времени (см. подробное обсуждение свойств линейных, матричных и сетевых структур в [68]). «Гибридом» линейно-функциональной и линейно-проектной структур является матричная структура, в которой каждый исполнитель в общем случае подчинен одновременно нескольким руководителям, например, некоторому функциональному руководителю и руководителю определенного проекта.

Качественно, рассмотренные выше задачи распределения функций в неоднородной команде соответствуют определению структуры взаимосвязей между агентами и руководителями – центрами (когда центр «отвечает» за некоторый проект – работу). В общем случае каждый агент оказывается связан с каждым центром, так как первый выполняет в оптимальном распределении работ работы нескольких (быть может, даже всех) типов. Можно условно считать, что подобным связям соответствует матричная структура управления, эффективность которой зависит от объемов работ и типов агентов и равна $C_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})$. Такую задачу можно условно назвать задачей синтеза оптимальной матричной структуры.

Альтернативой является использование линейной структуры, в которой каждый агент закреплен за одним и только одним центром (проектом или типом работ). Для того чтобы найти оптимальную линейную структуру, следует решить задачу назначения исполнителей. Тогда $C_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})$ – минимальные суммарные затраты в этом случае.

[27] *Линейной является древовидная структура, в которой подразделения выделяются по тому или иному признаку* (*на различных уровнях иерархии признаки могут быть различны*)*: функциональному, территориальному, продуктовому и т.д.*

Из (20) следует, что в рамках рассматриваемых моделей затраты оптимальной линейной структуры всегда не меньше, чем затраты оптимальной матричной структуры. Последнее утверждение не учитывает затрат на управление. То есть, линейная структура требует минимальных затрат на управление (собственное функционирование). Но она приводит к неэффективному распределению работ между агентами. С другой стороны, матричная структура приводит к более эффективному распределению работ, но требует бóльших затрат на управление, которые выше не учитывались. Поэтому при решении вопроса о выборе структуры (или переходе от одной структуры к другой) следует принимать во внимание оба фактора: затраты на управление и эффективность выполнения работ.

Неполная информированность относительно типов агентов. Выше предполагалось, что все параметры модели являлись общим знанием среди агентов. Если члены неоднородной команды имеют нетривиальные взаимные представления относительно типов друг друга, то динамика их взаимных представлений (процесс формирования команды) и условия устойчивого функционирования команды (стабильность информационного равновесия) могут быть описаны по аналогии с тем, как это делалось выше в разделе 3 для случая однородной команды. Поэтому рассмотрим более подробно ситуацию, когда различаются представления агентов об объёмах работ, которые предстоит выполнить команде.

Неполная информированность относительно объемов работ. Возможны ситуации, когда либо агенты не полностью информированы относительно объемов работ, которые необходимо выполнять команде, либо эти объемы меняются во времени. Исследуем сначала первый вариант.

Предположим, что типы агентов являются общим знанием, и имеет место рефлексия первого ранга относительно объемов работ – i-ый агент обладает структурой информированности $I_i = \{ R_{ik}^j \}_{k \in N,\, j \in M}$, где R_{ik}^j – представления i-го агента о том, каков объем j-ой работы с точки зрения k-го агента, $i \in N$. Напомним, что в силу аксиомы автоинформированности (см. Приложение) имеет место: $R_{ii}^j = R_i^j$, где R_i^j – собственные представления i-го агента об объеме j-ой работы.

В силу выражения (7) с точки зрения i-го агента k-ый агент должен выбрать действие

(21) $x^*_{ikj} = r^j_k \dfrac{R^j_{ik}}{nH^j}$, $i, k \in N, j \in M$.

Тогда оптимальным (в силу, опять же, выражения (7)) для i-го агента является выбор действия

(22) $x^*_{ij}(I_i) = R^j_i - \sum_{k \neq i} x^*_{ikj}$, $i \in N, j \in M$.

Дальше возможны различные варианты, в зависимости от того, что наблюдает каждый агент. Если каждый агент наблюдает только свое действие, то условие стабильности (совпадения (7) и (22)) примет вид:

(23) $\sum_{k \in N} r^j_k (R^j_i - R^j_{ik}) = 0$, $i \in N, j \in M$.

Из (23) видно, что в случае двух агентов ложных равновесий возникнуть не может.

Если каждый агент наблюдает выборы всех агентов (ситуация, наверное, типичная для команд), то условие стабильности (дополнительно к (23) нужно потребовать, чтобы выборы реальных и соответствующих фантомных агентов – см. Приложение – совпадали, то есть $x^*_{ikj} = x^*_{kj}$, $i, k \in N, j \in M$) примет вид:

(24) $R^j_{ik} = R^j_i$, $i, k \in N, j \in M$,

то есть, наблюдаемость всех действий исключает ложные равновесия. Итак, мы обосновали справедливость следующего утверждения.

<u>Утверждение 4.3.</u> Если типы агентов являются общим знанием, и имеет место рефлексия первого ранга относительно объемов работ, то:

а) если каждый агент наблюдает только свои действия, то условие стабильности имеет вид (23);

б) если каждый агент наблюдает действия всех агентов, то ложных равновесий не возникает.

Неоднородная команда в нестационарной внешней среде (динамика объемов работ). Выше рассмотрена модель формирования и функционирования неоднородной команды в условиях, когда набор функций и объемы работ были фиксированы. Исследуем теперь деятельность команды в изменяющихся внешних условиях, когда требования к ее результатам (а, следовательно, и функциям, и объемам работ) меняются во времени. В частности, попытаемся ответить на распространенный на практике вопрос – какая команда лучше (и в каких условиях): содержащая набор «узких профессионалов», специализирующихся каждый в определенной области, или «универсалов», которые могут выполнять любые функции, пусть даже хуже профессионалов в соответствующей области? То есть, каково «оптимальное» соотношение между средней квалификацией, однородностью и «специализированностью» команды?

Для ответа на эти вопросы рассмотрим две команды – одну, в которой уровень специализации (неоднородность квалификаций) высок, и вторую, в которой квалификации агентов одинаковы.

Предположим, что число работ равно числу агентов ($m = n$), а типы агентов принадлежат отрезку [0; 1].

Первая команда. Предположим, что в первой команде для каждой работы существует единственный агент, который умеет эту работу хорошо выполнять, но кроме нее он не может делать ничего (см. также п.2 примера 4.1), то есть:

(25) $r_i^i = 1, i \in N, \ r_i^j = 0, j \neq i.$

Вычислим для такой команды величины (1)-(4):

(26) $r_i = 1/n$, $r = 1/n$, $H^i = 1/n$, $d_i = 1/\sqrt{n}$, $i \in N$.

Неоднородность квалификаций в первой команде максимальна. Затраты такой команды равны

(27) ${}_1C_2(\boldsymbol{R}) = \sum_{i \in N} \varphi(R_i)$.

Рассмотрим теперь вторую команду, в которой тот же средний уровень профессионализма[28] (3), но квалификации агентов одинаковы.

Вторая команда. Предположим, что во второй команде квалификации агентов одинаковы (см. также п.1 примера 4.1), то есть:

(25) $r_i^j = 1/n, i, j \in N.$

Вычислим для такой команды величины (1)-(4):

---

[28] *Это предположение обосновано тем, что таким образом можно попытаться «уровнять» средние затраты на привлечение и удержание членов первой и второй команды.*

(26) $r_i = 1/n$, $r = 1/n$, $H^i = 1/n$, $d_i = 0$, $i \in N$.

Неоднородность квалификаций во второй команде равна нулю. Затраты такой команды равны

(27) $${}_2C_2(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} \varphi(nR_i)\,.$$

В силу выпуклости функции $\varphi(\cdot)$ имеем:

(28) $\forall\ \boldsymbol{R} \geq 0\ \ {}_2C_2(\boldsymbol{R}) \geq {}_1C_2(\boldsymbol{R})$,

то есть при одной и той же средней квалификации команды более выгодно иметь «узких» специалистов, покрывающих весь спектр решаемых командой задач, чем специалистов «широкой» (но более низкой) квалификации. Например, при $\varphi(z) = z^2$ затраты второй команды в n раз выше затрат первой команды.

Необходимо подчеркнуть, что вывод о выгодности узкой специализации сделан в предположении, что набор и объем работ, выполняемых командой, фиксирован, и, кроме того, каждый агент может выполнить любой объем работ[29]. Если учесть динамику и считать, что в различные моменты времени команде приходится выполнять различные виды и объемы работ, то в зависимости от свойств «потока» работ может оказаться более выгодным включать в состав команды специалистов-универсалов, умеющих одинаково хорошо выполнять разнообразные функции.

Выдвинутое предположение вполне соответствует как практическому опыту, накопленному в менеджменте (см. [53] и обзор в [27]), так и теоретическим моделям – см. [56, 68, 72], в которых показано, что в стационарных условиях оптимальны линейные иерархические организационные структуры с высоким уровнем специализации, а в условиях изменяющейся внешней среды эффективными оказываются матричные или сетевые структуры (см. также примеры в [25]).

Косвенным подтверждением является результат, установленный выражением (11), в соответствии с которым в непрерывной модели квалификация агентов должна быть пропорциональна объему работ. Другими словами, если известно, что команде предстоит выполнять, в основном, работу одного вида, то включаемые

---

[29] *Данное предположение является существенным, так как в задачах* (6) *и* (15)-(18) *считалось, что агенты способны выполнить любой объем работ.*

в ее состав агенты должны уметь эффективно выполнять именно эту работу. Если же объемы работ различного вида примерно одинаковы, то и средняя квалификация команды должна быть примерно одной и той же для всех видов работ.

Подводя итог краткому обсуждению взаимосвязи между уровнем специализации и видом организационной структуры, отметим, что эффективность той или иной структуры в динамике может оцениваться как сумма (или математическое ожидание, если характеристики потока не известны) затрат на реализацию всего набора работ за рассматриваемый период времени. Сделанный выше вывод о том, что матричная структура характеризуется не бóльшими суммарными затратами агентов, чем линейная, в динамике также остается в силе. Следует при этом отметить, что нами не учитывались затраты на изменение оргструктуры, ведь использование оптимальной матричной структуры требует для каждого нового «пакета работ» использовать соответствующую оптимальную структуру. Модели, учитывающие затраты на «перестроение» оргструктур, рассматривались в [21, 27, 56].

5. КОМАНДЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ РЕПУТАЦИИ И НОРМ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В настоящем разделе рассматриваются модели репутации и норм деятельности (см. также обзор в разделах 2.4 и 2.5), позволяющие описать и исследовать эффекты образования и функционирования команд. В том числе, в разделе 5.1 приводится общее описание модели и постановка задачи управления для случая, когда все существенные параметры являются общим знанием среди участников системы. Раздел 5.2 посвящен моделированию ситуации, в которой управляющий орган – *центр* – не полностью информирован о параметрах управляемых им субъектов – *агентов*. Раздел 5.3 содержит результаты решения задач управления в условиях общего знания, разделы 5.4 и 5.5 – модели формирования и функционирования команд, учитывающие эффекты рефлексии с точки зрения репутации и норм деятельности членов команд.

5.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим следующую модель *организационной системы* (ОС), состоящей из одного управляющего органа – центра – и n управляемых субъектов – агентов. Обозначим $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество агентов. Каждый агент выбирает свое действие. Действие i-го агента обозначим $x_i \in X_i$, $i \in N$.

Целевая функция i-го агента $f_i(x, u, r_i)$ зависит от вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ действий всех агентов, где $x \in X' = \prod_{i \in N} X_i$, от управления $u \in U$, выбираемого центром, и от параметра $r_i \in \Omega_i$ – типа i-го агента, $i \in N$. Будем считать, что вектор типов агентов $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ принадлежит множеству $\Omega = \prod_{i \in N} \Omega_i$.

Игра (в нормальной форме) агентов описывается кортежем $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N}, u \in U, r \in \Omega)$. Предполагая, что Γ является общим знанием среди агентов и центра, при фиксированных значениях управления $u \in U$ со стороны центра и параметра $r \in \Omega$ в качестве решения этой игры выберем множество равновесий Нэша:

(1) $E_N(u, r) = \{x \in X' \mid \forall i \in N, \forall y_i \in X_i \;\; f_i(x, u, r_i) \geq f_i(x_{-i}, y_i, u, r_i)\}$,

где $x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$ – обстановка игры для i-го агента.

Если центр разыгрывает игру Γ_2 (см. [24]), назначая управление $u = w(x)$ в виде функции от действий агентов, где $w(\cdot)$: $X' \to U$, то множество равновесий Нэша примет вид

(2) $E_N(w(\cdot), r) = \{x \in X' \mid \forall\, i \in N,\ \forall\, y_i \in X_i$

$$f_i(x, w(x), r_i) \geq f_i(x_{-i}, y_i, w(x_{-i}, y_i), r_i)\}.$$

Обозначим $E_{Ni}(u, r) = Proj_i\, E_N(u, r)$, $i \in N$. *Согласованной нормой* деятельности $\aleph_i(u, r)$ i-го агента (см. определения нормы и согласованной нормы деятельности в разделе 2.4) в рассматриваемой модели можно считать соответствие отбора равновесий: $\aleph_i$: $E_{Ni}(u, r) \to E_{Ni}(u, r)$, которое предписывает i-му агенту выбирать одно из его действий, равновесных по Нэшу. Нормы деятельности отдельных агентов должны быть согласованы с множеством равновесий, то есть вектор действий, выбираемых агентами в соответствии с нормами их деятельности, также должен быть равновесием Нэша:

(3) $(\aleph_1(u, r), \aleph_2(u, r), \ldots, \aleph_n(u, r)) \in E_N(u, r)$.

Пусть задана целевая функция центра $\Phi(x, u)$, Φ: $X' \times U \to \Re^1$. Тогда задача управления примет вид

(4) $\min\limits_{x \in E_N(u, r)} \Phi(x, u) \to \max\limits_{u \in U}$,

то есть, будет заключаться в выборе центром такого допустимого управления, которое максимизировало бы его гарантированный выигрыш при условии, что агенты при заданном управлении выбирают действия, являющиеся равновесием Нэша их игры при данном управлении.

В случае если $u = w(x)$, то задача управления формулируется аналогично (4).

Постановке и решению задач управления вида (4) в условиях полной информированности посвящено множество работ, как для одноэлементных [24, 70], так и для многоэлементных [72] организационных систем. Ниже мы откажемся от ряда распространенных предположений – в частности, от предположения том, что центр адекватно информирован о типах агентов, или о том, что вектор $r \in \Omega$ типов агентов является общим знанием для агентов и центра.

5.2. НЕПОЛНАЯ ИНФОРМИРОВАННОСТЬ

Предположим, что центр не имеет достоверной информации о векторе типов агентов, который по-прежнему является среди них общим знанием. Если у центра имеются представления $\Omega_0 \subseteq \Omega$ о множестве возможных значений вектора типов агентов, то он может устранить неопределенность относительно типов агентов вычислением гарантированного результата [24, 29] и решать следующую задачу управления:

(1) $\min\limits_{r \in \Omega_0} \min\limits_{y \in E_N(u, r)} \Phi(y, u) \to \max\limits_{u \in U}$.

Решение задачи (1) обозначим $u^*(\Omega_0)$.

Возможно также использование других методов устранения неопределенности – см. монографию [71], посвященную задачам управления организационными системами, функционирующими в условиях неопределенности.

Если взаимодействие центра с агентами производится многократно, то он может использовать наблюдения за действиями, выбираемыми агентами, для корректировки своих представлений об их типах.

Обозначим

(2) $\Psi_r(u, x) = \{r \in \Omega \mid x \in E_N(u, r)\}$

множество таких векторов типов агентов, при которых выбор ими вектора действий $x \in X'$ является равновесием Нэша при использовании центром управления $u \in U$.

Рассмотрим модель «обучения» центра. Предположим, что первоначальные представления центра Ω_0 не противоречат истине, то есть $r \in \Omega_0$. Тогда возможно использование <u>алгоритма корректировки представлений центра:</u>

1. Центр решает задачу (1) и сообщает агентам управление $u^*(\Omega_0)$;
2. Агенты, зная управление $u^*(\Omega_0)$ и вектор своих типов, выбирают действие $x^* \in E_N(u^*(\Omega_0), r)$, являющееся равновесием Нэша;
3. Центр, наблюдая вектор x^* действий агентов, вычисляет $\Psi_r(u^*(\Omega_0), x^*)$ в соответствии с (2).
4. Если $\Psi_r(u^*(\Omega_0), x^*) = \Omega_0$, то алгоритм останавливается, если же $\Psi_r(u^*(\Omega_0), x^*) \subset \Omega_0$, то центр корректирует свои пред-

ставления о множестве возможных значений вектора типов агентов следующим образом:

(3) $\Omega_0 := \Omega_0 \cap \Psi_r(u^*(\Omega_0), x^*)$

и переходит к пункту 1.

Отметим, во-первых, что использование приведенного выше алгоритма подразумевает, что агенты выбирают действия, являющиеся равновесиями Нэша. Если бы они были *дальновидны* – максимизировали бы свои выигрыши в повторяющейся игре, зная об использовании центром принципа принятия решений (2)-(3), то для них было бы рациональным выбирать на каждом шаге не соответствующее равновесие Нэша, а такие действия, которые максимизировали бы их выигрыш в *суперигре* [69, 127], с учетом того, что центр будет корректировать свои представления и выбирать управления в будущих периодах на основании наблюдаемых действий агентов (см. *эффект обмена ролями*[30] в [69]).

Во-вторых, процедура (3) корректировки представлений центра не является единственно возможной (см. модели индикаторного поведения в [48, 80]).

В-третьих, использование процедуры (3) может в ряде случаев (см. примеры ниже) дать центру возможность найти истинный вектор типов агентов за один шаг. В то же время, в ряде случаев процедура (3) может остановиться на представлениях центра, представляющих собой целое множество возможных типов агентов (см. пример 5.3).

Пример 5.1. Пусть $n = 1$, $f(x, u, r) = u\,x - x^2 / 2\,r$, $\Omega = [r_{min}, +\infty)$, $\Phi(x, u) = (\lambda - u)\,x$, $X = [0; +\infty)$, $U = [0; +\infty)$, $\Omega_0 = [r_0; +\infty)$, $r_0 \geq r_{min}$, $r_0 \leq r$. Содержательно, целевая функция агента представляет собой разность между доходом и затратами, причем центр управляет «внутренней ценой» единицы продукции, производимой агентом (ставка оплаты в случае, когда агент является работником, внутренняя цена объединения в случае, когда агент является подразде-

---

[30] *Эффект обмена ролями заключается в том, что более дальновидный субъект, прогнозируя поведение своего оппонента, предпринимает такие действия, чтобы «навязать» последнему принятие наиболее выгодных для первого решений. При этом, если в организационной системе агент более дальновиден, чем центр, то может оказаться, что центр превращается в «агента» (а агент в «центр»), манипулируемого агентом.*

лением корпорации или холдинга). Целевая функция центра зависит от разности между рыночной ценой и «внутренней ценой».

Тогда[31]

$$E_N(u, r) = \operatorname{Arg} \max_{y \in A} f(y, u, r) = \{u\, r\}.$$

То есть $x^* = u\, r$, а $u^* = \lambda / 2$, занчит в данном примере оптимальное управление не зависит от типа агента и представлений центра об этом типе. При этом $\Psi_r(u^*(\Omega_0), x^*) = r$, то есть за один шаг, независимо от используемого управления, центр восстанавливает достоверную информацию о типе агента. Отметим, что в рассматриваемом примере дальновидные агенты будут вести себя таким же образом, что и недальновидные. •

<u>Пример 5.2.</u> Пусть $n = 2$, $f_i(x, u, r_i) = u\, x_i - x_i^2 / 2\, (r_i + \alpha\, x_{3-i})$, $\Phi(x, u) = (\lambda - u)\, (x_1 + x_2)$, $\Omega = [r_{min}, +\infty)$, $\Omega_0 = [r_0; +\infty)$, $r_0 \geq r_{min}$, $X_i = [0; +\infty)$, $i = 1, 2$, $U = [0; +\infty)$, $\alpha \geq 0$, $\lambda > 0$, $\alpha\, \lambda \leq 1$. Содержательно, затраты агента зависят не только от его собственных действий, но и от действий других агентов – чем бóльшие действия они выбирают, тем меньше его затраты (случай «возрастающей отдачи на масштаб»).

Тогда $E_N(u, r) = (x_1^*, x_2^*)$, где

(4) $x_i^*(u) = (u\, r_i + \alpha\, u^2\, r_{3-i}) / (1 - \alpha^2\, u^2)$, $i = 1, 2$.

Из (1) следует, что $\Phi(x^*(u), u, r) = \dfrac{(\lambda - u)\, u}{1 - \alpha\, u}\, (r_1 + r_2)$, тогда $u^* = (1 - \sqrt{1 - \alpha\lambda}\,) / \alpha$, то есть оптимальное управление не зависит от типов агентов и представлений центра об этих типах.

При этом $\Psi_r(u^*(\Omega_0), x^*)$ определяется из решения системы уравнений (4) относительно r_1 и r_2 при известных x_1^* и x_2^*, то есть вычисляется однозначно и за один шаг, независимо от используемого управления, центр восстанавливает достоверную информацию о типах агентов:

$$r_1(x^*, u) = x_1^* / u - \alpha\, x_2^*,\ r_2(x^*, u) = x_2^* / u - \alpha\, x_1^*. \bullet$$

<u>Пример 5.3.</u> Пусть $n = 1$, $f(x, u, r) = u\, x - x^2 / 2\, r$, $\Omega = [r_{min}, +\infty)$, $\Phi(x, u) = (\lambda - u)\, x$, $X = [0; a]$, $U = [0; +\infty)$, $\Omega_0 = [r_0; +\infty)$, $r_0 \geq r_{min}$, $r_0 \leq r$. Содержательно, λ может интерпретироваться как рыночная,

---

[31] *В случае единственного агента равновесие Нэша «вырождается» во множество действий агента, максимизирующих его целевую функцию.*

а u – как внутренняя цена единицы продукции, производимой агентом.

Тогда

$$E_N(u, r) = \mathrm{Arg} \max_{y \in A} f(y, u, r) = \{\min (a; u\, r)\}.$$

То есть $x^* = \min (a; u\, r)$. Если бы тип агента был достоверно известен центру, то оптимальным было бы управление

(5) $u^*(\lambda, r) = \begin{cases} \lambda / 2, & r \le 2a / \lambda \\ a / r, & r \ge 2a / \lambda \end{cases}.$

Если центр использует управление $u \ge 0$, то, наблюдая выбираемое при этом агентом действие x, центр может восстановить

(6) $\Psi_r(u, x) = \begin{cases} r = x / u, & x < a \\ [a / u; +\infty), & x = a \end{cases}.$

Видно, что при определенных соотношениях параметров a, λ и r_0 центр, используя оптимальное управление, не может в силу (5) получить дополнительной информации о типе агента. Качественный вывод таков – не ставя перед агентами задач на пределе их возможностей, центр никогда не узнает реальных возможностей агентов. •

В заключение настоящего раздела отметим, что в ситуации, когда приведенный выше алгоритм «зацикливается» на достаточно широком множестве, для дальновидного центра может оказаться более эффективным использовать в течение нескольких первых периодов на каждом шаге не оптимальное в каждом периоде управление, а то, которое позволило бы лучше идентифицировать тип агента. Постановка и решение подобных задач *активной идентификации* [11] выходит за рамки настоящей работы.

5.3. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

В настоящем разделе рассматриваются две модели, описывающие совместную деятельность членов команды. Первая модель основывается на предположении о том, что агенты выбирают равновесные по Нэшу действия, приводящие к требуемому центром результату их деятельности с минимальными затратами центра на управление (ср. с результатами раздела 2.3). Во второй модели агенты выбирают из множества векторов действий, приводящих к требуемому результату, один из векторов, эффективных по Парето (а именно, максимизирующий сумму их целевых функций).

«Модель 5.3.1». Пусть целевые функции агентов аддитивны по управлению (рассматривается иерархическая игра с побочными платежами [24, 29, 68]), которое персонифицировано (то есть $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, причем в целевую функцию i-го агента входит только управление $u_i \in U_i = \Re^1_+$, $U = \prod_{j \in N} U_j = \Re^n_+$):

$$f_i(x, u, r_i) = v_i(x, r_i) + u_i,$$

где $v_i(x, r_i)$ – функция выигрыша i-го агента в отсутствии управления, $i \in N$. Будем рассматривать случай, когда известно однозначное отображение Q: $X' \to X_0$ (при описании моделей коллективного стимулирования в разделе 2.3 считалось, что $X_0 = \Re^1_+$, однако все результаты остаются в силе для любого компактного множества размерности, меньшей, чем n – см. [35]) и центр использует управление следующего вида:

(1) $w_{0i}(z', z) = \begin{cases} \sigma_i, & z = z' \\ 0, & z \neq z' \end{cases}$,

где $z = Q(x)$ – результат деятельности агентов, $z', z \in X_0$.

Предположим, что функция агрегирования строго монотонна по всем переменным, тогда

(2) $\forall\, i \in N\ \forall\, y_{-i} \in X_{-i}, \forall\, y_i^1, y_i^2 \in X_i, y_i^1 \neq y_i^2,\ \ Q(y_{-i}, y_i^1) \neq Q(y_{-i}, y_i^2)$.

Содержательные интерпретации рассматриваемой модели таковы: выигрыш каждого агента зависит от его действий, от действий его оппонентов, от его типа, а также от вознаграждения, выплачиваемого центром в том случае, если результат команды (совместной деятельности агентов) принадлежит заданному множеству. При этом условие выплаты вознаграждения зависит только от значения результата деятельности (см. (1)) и не зависит явным образом от вектора действий агентов, который может быть и не наблюдаем центром.

Тогда множество равновесий Нэша игры агентов при заданном управлении (1) примет вид

(3) $E_N(z', \sigma, r) = \{x \in X' \mid \forall\, i \in N, \forall\, y_i \in X_i$

$$v_i(x, r_i) + w_{0i}(z', Q(x)) \geq v_i(x_{-i}, y_i, r_i) + w_{0i}(z', Q(x_{-i}, y_i))\},$$

где $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ – вектор вознаграждений.

Обозначим $X(z) = \{x \in A' \mid Q(x) = z\} \subseteq X'$ – множество действий агентов, приводящих к результату $z \in X_0$ их деятельности.

Тогда можно записать управление (1) в следующем виде:

(4) $w_i(z', x) = \begin{cases} \sigma_i, x \in X(z') \\ 0, \ x \notin X(z') \end{cases}, i \in N,$

а множество равновесий Нэша (3) примет вид:

(5) $E_N(z', \sigma, r) = \{x \in X' \mid \forall\ i \in N, \forall\ y_i \in X_i$

$v_i(x, r_i) + w_i(z', x) \geq v_i(x_{-i}, y_i, r_i) + w_i(z', x_{-i}, y_i)\}$.

Предположим, что вектор типов агентов является общим знанием среди центра и агентов. Фиксируем этот вектор типов агентов и результат $z' \in X_0$ деятельности агентов. Рассмотрим, какими должны быть управления со стороны центра, приводящие к тому, что агенты выбирают (как равновесие Нэша своей игры при заданном управлении) действия, приводящие к требуемому центру результату $z' \in X_0$. Формально это требование можно записать следующим образом:

(6) $E_N(z', \sigma, r) \cap X(z') \neq \emptyset$.

Условия (6), совместно с гипотезой благожелательности (заключающейся в том, что из множества равновесий Нэша агенты выберут наиболее предпочтительное для центра равновесие), достаточно для того, чтобы быть уверенным в реализации результата $z' \in X_0$.

Определим множество управлений, обеспечивающих выполнение (6). Для этого фиксируем произвольную точку $z \in X_0$ множества X_0 и рассмотрим, при каких управлениях со стороны центра выбор агентами действий, приводящих к данному результату z, будет равновесием Нэша их игры.

В силу строгой монотонности функции агрегирования $x \in X(z)$ – равновесие Нэша тогда и только тогда, когда

(7) $\forall\ i \in N, \forall\ y_i \in A_i\ \ v_i(x, r_i) + \sigma_i \geq v_i(x_{-i}, y_i, r_i)$.

Отсюда получаем, что $\sigma_i \geq \Delta_i(x, r_i)$, где

(8) $\Delta_i(x, r_i) = \max\limits_{y_i \in X_i} v_i(x_{-i}, y_i, r_i) - v_i(x, r_i), i \in N$.

Значит, можно найти минимальное суммарное вознаграждение агентов, побуждающее их выбрать как равновесие действия, приводящие к результату $z \in X_0$:

(9) $\Delta(z, r) = \min\limits_{x \in X(z)} \sum\limits_{i \in N} \Delta_i(x, r_i)$.

Обозначим

(10) $x^*(z, r) = \arg \min\limits_{x \in X(z)} \sum\limits_{i \in N} \Delta_i(x, r_i)$

Утверждение 5.1. [64] При использовании управления

(11) $w_{0i}(z', z, r) = \begin{cases} \Delta_i(x^*(z', r), r_i), & z = z' \\ 0, & z \neq z' \end{cases}, \; i \in N,$

вектор действий $x^*(z', r)$ является равновесием Нэша игры агентов. Суммарное вознаграждение агентов со стороны центра, равное $\Delta(z', r)$, при этом является минимально возможным среди всех управлений, реализующих результат $z' \in X_0$.

Утверждение 5.1, по существу, является обобщением модели стимулирования с агрегированием информации, описанной в разделе 2.3 и в [70, 74], на случай произвольных целевых функций агентов.

Рассмотренная в настоящем разделе модель может интерпретироваться в терминах команд: деятельность команды (совместная деятельность коллектива взаимосвязанных агентов) оценивается на основании некоторого агрегированного показателя, зависящего от действий всех членов команды. Члены команды поощряются, если команда в целом достигает успеха, то есть если достигается требуемый результат ее деятельности.

В соответствии с выражением (11) согласованной нормой деятельности агентов является выбор из множества $X(z)$ действий, приводящих к заданному результату деятельности, такого вектора действий $x^*(z, r)$, на котором достигается минимум суммарных «затрат» (9) центра на стимулирование агентов, или, что то же самое, такого вектора действий, который приводит к требуемому результату с минимальными суммарными затратами членов команды.

Еще раз отметим, что описанная модель удачно отражает автономность однородной команды («*артели*») – способность агентов самостоятельно распределять работу между собой с тем, чтобы наиболее эффективным способом (с минимальными суммарными затратами) достичь цели (требуемого значения агрегированного результата совместной деятельности).

«Модель 5.3.2». Концепция равновесия Нэша отражает устойчивость исхода взаимодействия (игры) агентов относительно индивидуальных отклонений отдельных агентов [29, 159]. Однако зачастую действия, равновесные по Нэшу, не эффективны по Парето – может существовать вектор действий, приводящий к тому же результату деятельности и обеспечивающий всем агентам не меньшие полезности, а кому-то – строго большие (при этом мы, правда, «забываем» об интересах центра – условно можно считать, что центр заинтересован в реализации того или иного результата деятельности и не различает суммарных затрат различных вариантов его достижения). Поэтому альтернативой описанной выше «модели 5.3.1», основывающейся на гипотезе о выборе агентами равновесных по Нэшу действий, является рассмотрение случая, когда агенты выбирают эффективные по Парето действия, например – максимизирующие сумму их целевых функций на множестве действий, приводящих к требуемому для центра результату.

Обозначим

(12) $\mathrm{Par}(z, r) = \mathrm{Arg} \max\limits_{x \in X(z)} \sum\limits_{i \in N} v_i(x, r_i)$, $z \in X_0$, $r \in \Omega$,

– множество векторов действий агентов, максимизирующих сумму их целевых функций на множестве всех действий, приводящих к заданному результату деятельности. Множество агентов (команда) в данном случае описывается вектором $r \in \Omega$ типов своих членов.

Нормой деятельности в рассматриваемой модели можно считать отображение $\aleph: X_0 \times \Omega \to X'$ множества пар результатов деятельности и векторов типов агентов во множество их Парето-эффективных действий. Другими словами, норма предписывает агентам выбирать из множества (12) определенные действия. Какими должны быть эти действия, можно задавать аксиоматически, используя, например, те или иные механизмы компромисса [46, 72].

Возникает вопрос, а как связаны между собой нормы деятельности в «модели 1» и в «модели 2». Частичный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Утверждение 5.2. [64]. Если

(13) $\forall\, i \in N$, $\forall\, x_{-i} \in X_{-i}$ $\max\limits_{y_i \in X_i} v_i(x_{-i}, y_i, r_i) = L_i$,

то $x^*(z, r) \in \mathrm{Par}(z, r)$.

Условие (13) является достаточно сильным требованием (но иногда оно выполнено, например, в задачах стимулирования

[67, 70]), и в общем случае может оказаться, что равновесный по Нэшу вектор действий агентов не является Парето-оптимальным.

Завершив краткое описание второй модели, отметим, что до сих пор мы считали, что все существенные параметры (типы агентов) являются среди агентов общим знанием. Понятно, что это достаточно сильное предположение. Поэтому откажемся от него – перейдем к рассмотрению эффектов рефлексии (см. Приложение и [44, 78]) – и исследуем, как члены команды будут себя вести в отсутствии общего знания.

5.4. НОРМЫ И РЕПУТАЦИЯ: ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ КОМАНДЫ

В соответствии с результатами предыдущего раздела, если выполнено условие (13) (а в ходе дальнейшего изложения будем считать выполненными условия (2) и (13) раздела 5.3), то агенты будут выбирать эффективные по Парето равновесия Нэша своей игры.

Обозначим множество равновесий

(1) $X(z, r) = \mathrm{Arg} \max\limits_{x \in X(z)} V(x, r)$,

где $V(x, r) = \sum\limits_{i \in N} v_i(x, r_i)$.

Предположим, что $\forall\, z \in X_0$, $\forall\, r \in \Omega$ множество $X(z, r)$ состоит из одной точки $x^*(z, r)$. Это предположение, которое содержательно означает, что для данного набора агентов (характеризуемого вектором типов $r \in \Omega$) существует единственный эффективный (в смысле максимума суммы целевых функций) способ достижения результата $z \in X_0$ совместной деятельности, имеет место во многих практически важных случаях – см. [70], а также примеры ниже.

В рассматриваемой модели согласованной нормой деятельности i-го агента будет выбор действия $x_i^*(z, r)$, то есть при условии, что $r \in \Omega$ – общее знание, имеем:

(2) $\aleph_i(z) = x_i^*(z, r)$, $i \in N$, $z \in X_0$, $r \in \Omega$.

Пусть теперь общее знание относительно вектора типов агентов отсутствует.

Обозначим $r^i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$ – вектор представлений i-го агента о типах оппонентов, $r^{ij} = (r_{ij1}, r_{ij2}, \dots, r_{ijn})$ – представления i-го агента о представлениях j-го агента о типах оппонентов, $i, j \in N$.

Если структура информированности имеет единичную глубину (i-ый агент считает общим знанием вектор r^i), то агент $i \in N$ ожидает от агента j выбора действия $x_j^*(z, r^i)$, $i, j \in N$. Следовательно, *репутацией* j-го агента в глазах i-го агента является

(3) $\Re_{ij}(z) = x_j^*(z, r^i)$, $i, j \in N$.

Предположим, что каждый агент наблюдает все действия, выбранные своими оппонентами, а также, естественно, знает, какое действие выбрал он сам. Тогда репутация будет оправдываться, если взаимные представления агентов таковы, что

(4) $\forall\, i, j \in N \;\; x_j^*(z, r^i) = x_j^*(z, r^j)$,

то есть, если агенты будут выбирать (в соответствии со своими собственными представлениями о векторе типов – см. правую часть выражения (4)) те действия, которых от них ожидают оппоненты. Определение (4) оправданности репутации легко обобщается на случай, когда каждый агент наблюдает значение некоторой функции (называемой *функцией наблюдения* – см. Приложение) от действий оппонентов, по аналогии с тем, как это делается в [105].

Поэтому **командой** с точки зрения репутации можно назвать множество агентов, взаимные представления которых удовлетворяют (4). Отметим, что такое понимание команды тесно связано с понятием стабильного информационного равновесия [77], в котором все агенты (реальные и фантомные) наблюдают те выборы оппонентов, которых они и ожидали – см. раздел 2.5 и Приложение.

Если структура информированности имеет глубину, большую, чем единица, то условие оправданности репутации будет определяться соответствующими этой структуре информированности условиями стабильности информационного равновесия [77]. Приведем иллюстративный пример, являющийся «рефлексивным» обобщением рассмотренной выше модели формирования однородной команды.

<u>Пример 5.4.</u> Пусть $v_i(x, r_i) = x_i - x_i^2 / 2\, r_i$, $i \in N$, $z = \sum_{j \in N} x_j$ (см. также пример 3.2). Тогда предположения (2) и (13) раздела 5.3 выполнены, и

(5) $x_i^*(z, r) = z\, r_i \,/ \sum_{j \in N} r_j$, $i \in N$.

Условия (4) примут вид:

(6) $$\frac{r_{ij}}{\sum_{l \in N} r_{il}} = \frac{r_j}{\sum_{k \in N} r_{jk}}, \; i, j \in N.$$

Если $n = 2$, то (4) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{r_{12}}{r_1 + r_{12}} = \dfrac{r_2}{r_{21} + r_2} \\ \dfrac{r_{21}}{r_2 + r_{21}} = \dfrac{r_1}{r_2 + r_{12}} \end{cases},$$

что эквивалентно следующему условию:

(7) $r_{12}\, r_{21} = r_1\, r_2$. •

Модель, рассмотренная в предыдущем примере, может быть обобщена.

Утверждение 5.3. Если

(8) $v_i(x, r_i) = C_i - r_i\, \varphi(x_i / r_i)$, $i \in N$,

где $\varphi(\cdot)$ – возрастающая дифференцируемая выпуклая функция, то оптимальные действия агентов удовлетворяю (5), а условие оправданности репутации имеет вид (6).

Пример 5.4 иллюстрирует утверждение 5.3 для случая $\varphi(t) = t^2/2$. Содержательная интерпретация целевой функции (8) такова: агент получает фиксированный доход и несет затраты, зависящие от его действия и его типа.

Таким образом, в настоящем разделе мы рассмотрели рефлексивную модель *функционирования команды*, в рамках которой устойчивость совместной деятельности коллектива агентов обусловлена «правильными» их взаимными представлениями о существенных характеристиках друг друга. Однако вне рассмотрения остался вопрос – а что произойдет, если взаимные представления агентов не удовлетворяют, например, (4). Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо рассмотреть модель *формирования команды*, описывающую в терминах норм деятельности и репутации динамику взаимных представлений агентов на основании наблюдаемой ими информации о действиях оппонентов.

5.5. НОРМЫ И РЕПУТАЦИЯ: ФОРМИРОВАНИЕ КОМАНДЫ

Впервые модели динамики иерархии взаимных представлений агентов в приложении к задаче формирования команд рассматривались в [65, 77]. Рассмотрим процесс формирования команды. Для этого введем множество $X(Q(x)) \subseteq X'$ таких векторов действий агентов, которые приводят к тому же результату деятельности, что и вектор $x \in X'$. Обозначим

(1) $\Omega(x) = \{r \in \Omega \mid x \in \operatorname{Arg} \max\limits_{y \in X(Q(x))} V(y, r)\}$

– множество таких векторов $r \in \Omega$ типов агентов, что вектор действий $x \in X'$ доставляет максимум суммарной полезности агентов, обладающих этими типами.

Обозначим

(2) $\Omega_{-i}(x, s_i) = \{r \in \Omega(x) \mid r_i = s_i\}$, $s_i \in \Omega_i$, $x \in X'$, $i \in N$,

– множество типов оппонентов, которые i-ый агент, обладающий типом s_i, может восстановить, наблюдая выбранный агентами вектор действий $x \in X'$.

Пусть взаимодействие агентов происходит многократно. На шаге $t = 0, 1, 2, ...$ агенты, имеющие представления $\{r_t^i\}_{i \in N}$, выбирают действия $x_i^*(z, r_t^i)$, $i \in N$, и каждый агент наблюдает действия, выбранные всеми агентами. Агент i, зная свой тип r_i, может «восстановить» следующее множество типов оппонентов:

$$\Omega_{-i}(\{x_i^*(z, r_t^i)\}, r_i).$$

Для завершения описания динамической модели осталось определить, как агенты будут изменять свои представления, то есть каковы станут представления r_{t+1}^i i-го агента на шаге $t + 1$, $i \in N$. Здесь возможны различные варианты. По аналогии сразделом 3 для описания динамики характеристик агентов можно использовать *процедуру индикаторного поведения* [10, 19, 48, 62, 80].

В рассматриваемой модели гипотеза индикаторного поведения выглядит следующим образом. Вычислим текущее «положение цели»:

(3) $w_t^{ij}(x, r_i, r_{t-1}^{ij}) = \arg \min\limits_{s \in \Pr_j \Omega_{-i}(x, r_i)} |s - r_{t-1}^{ij}|$, $i, j \in N$, $t = 1, 2, ...$.

Если первоначально агенты имели некоторые представления r_0^i о типах оппонентов, $i \in N$, то динамика их представлений описывается следующим образом – агенты делают в каждом периоде времени «шаг» от текущих представлений в сторону «положения цели»[32]:

(4) $r_t^{ij} = r_{t-1}^{ij} + \gamma_t^{ij} \; [w_t^{ij}(\{x_k^*(z, r_{t-1}^k)\}_{k \in N}, r_i, r_{t-1}^{ij}) - r_{t-1}^{ij}]$,

где $\gamma_t^{ij} \in [0; 1]$ – константы, определяющие «величину шага» $i, j \in N$, $t = 1, 2, \dots$.

Процедура (4) обладает тем свойством, что любой набор взаимных представлений, удовлетворяющий условию (4) раздела 5.4, является ее стационарной точкой. Сходимость процедуры (4) и области притяжения ее стационарных точек требуют в каждом случае отдельного исследования.

Система (4) описывает динамику представлений агентов о типах оппонентов. Так как эти представления полностью определяют то, каких действий ожидает агент от оппонентов, следовательно, можно считать, что (4) описывает и динамику репутации. Так как выше командой было предложено считать множество агентов с «оправдываемой» репутацией, то стабильной команде соответствует стационарная точка процедуры (4), а динамика репутации, описываемая этой процедурой, отражает процесс формирования команды (команду можно считать сформировавшейся, если взаимные представления ее членов не изменяются со временем в процессе функционирования команды). Примеры динамики взаимных представлений (результаты имитационного моделирования) агентов в процессе формирования команды приведены в [77].

6. АВТОНОМНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

На качественном уровне идея автономного принятия решений заключается в том, что члены команды должны принимать коллек-

---

[32] *Отметим, что в рамках процедуры индикаторного поведения предполагается, что агенты не осуществляют стратегическую рефлексию относительно поведения друг друга. В противном случае пришлось бы учитывать, что агент, зная, что его оппоненты следуют принципу принятия решений* (4)*, изменит соответствующим образом свое поведение* (*см. также сноску с разделе* 3).

тивные решения автономно и согласованно на основе имеющейся у них информации.

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, ..., n\}$ агентов – членов команды. Ситуация, в которой функционирует команда, описывается параметром θ, принадлежащим множеству возможных ситуаций Ω. При этом i-ый агент выбирает действие $x_i \in X$ – то решение, которое он предлагает принять команде в целом, и сообщает другим членам команды свою оценку $s_i(x_i, \theta) \geq 0$ эффективности этого решения в ситуации θ, $i \in N$.

Предположим, что каждый агент на момент выбора решения и сообщения оценки его эффективности правильно идентифицирует ситуацию $\theta \in \Omega$ и достоверно знает эффективность $F_i(x_i, \theta)$ предлагаемого им решения, но не знает действительных эффективностей решений, предложенных другими агентами. Если некоторое решение принято, то его действительная эффективность наблюдается всеми агентами. То, что агенты знают все перечисленное, является среди них общим знанием.

С точки зрения команды в целом желательно в любой ситуации принимать наиболее эффективные решения.

Обозначим $k(\theta)$ – номер агента, предлагающего в ситуации $\theta \in \Omega$ наиболее эффективное решение:

(1) $k(\theta) = \arg \max\limits_{i \in N} \{F_i(x_i, \theta)\}$.

Тогда команде в ситуации $\theta \in \Omega$ следует принимать решение

(2) $z(\theta) = x_{k(\theta)}$,

эффективность которого будет равна

(3) $G(\theta) = F_{k(\theta)}(x_{k(\theta)}, \theta)$,

то есть

(4) $G(\theta) = \max\limits_{i \in N} \{F_i(x_i, \theta)\}$.

Принцип принятия решений (1) или (4) хорош тем, что он позволяет в каждой ситуации выбирать наилучшее решение, однако этот принцип нереализуем в рамках существующей информированности, так как эффективности решений агентов $\{F_i(x_i, \theta)\}_{i \in N}$ не являются общим знанием (см. также обсуждение проблем реализуемости соответствий группового выбора в [84, 155]). Возможным выходом является построение процедуры принятия командой решений на основе сообщаемых агентами оценок эффективностей.

Предположим, что каждый агент в любой ситуации предлагает наиболее эффективное решение и обозначим $m(\theta)$ – номер агента, сообщившего в ситуации $\theta \in \Omega$ максимальную оценку эффективности решения:

(5) $m(\theta) = \arg \max\limits_{i \in N} \{s_i(x_i, \theta)\}$.

Тогда команда в ситуации $\theta \in \Omega$ примет решение

(6) $z_s(\theta) = x_{m(\theta)}$,

рассчитывая на эффективность

(7) $G_s(\theta) = \max\limits_{i \in N} \{s_i(x_i, \theta)\}$.

В действительности же эффективность решения (6) будет равна $F_{m(\theta)}(x_{m(\theta)}, \theta)$.

Выражение (7) можно интерпретировать как *условие автономности* принятия командой решений.

Процедуры (1)-(4) и (5)-(7) совпадают, если

(8) $\forall \ \theta \in \Omega \ \ m(\theta) = k(\theta)$.

и агенты сообщают достоверную информацию, то есть

(9) $\forall \ \theta \in \Omega, \forall \ i \in N \ \ s_i(x_i, \theta) = F_i(x_i, \theta)$.

Так как агенты активны (обладают собственными интересами и самостоятельно принимают решения), то в общем случае они будут сообщать информацию, которая приведет к принятию наиболее выгодных для них коллективных решений. Значит, необходим анализ условий, при которых агентам выгодно сообщать достоверную информацию. Рассмотрим возможный вариант подобных условий.

Для этого введем целевые функции агентов и проанализируем «равновесие их игры», ведь для того, чтобы агенты сообщали достоверную информацию, в рамках *гипотезы благожелательности* (при прочих равных агент сообщит правду) достаточно, чтобы сообщение правды было равновесием Нэша их игры (*условие согласованности* принимаемых командой решений), то есть такой ситуацией игры, одностороннее отклонение от которой не выгодно ни одному из агентов.

Обозначим через $s(x, \theta) = (s_1(x_1, \theta), s_2(x_2, \theta), \ldots, s_n(x_n, \theta))$ – вектор сообщений агентов.

Введем целевую функцию i-го агента $f_i(F_{m(\theta)}(x_{m(\theta)}, \theta))$, зависящую от эффективности $F_{m(\theta)}(x_{m(\theta)}, \theta)$ принятого коллективного решения $z_s(\theta)$, $i \in N$. Отметим, что при этом предполагается, что целевая функция агента не зависит явным образом от ситуации и от принятого решения, а определяется только эффективностью последнего.

Сформулируем условие сообщения агентами достоверной информации.

Утверждение 6.1. Для автономного принятия командой согласованных решений (5)-(7) достаточно, чтобы целевая функция каждого агента была монотонна по эффективности коллективного решения.

Доказательство утверждения 6.1. Фиксируем произвольную ситуацию $\theta \in \Omega$. Предположим, что все агенты в этой ситуации предлагают наилучшие с их точки зрения решения и сообщают достоверную информацию об эффективности соответствующих решений.

Рассмотрим агента с номером $k(\theta)$, то есть того агента, который в данной ситуации предлагает наиболее эффективное решение (для простоты предположим, что такой агент единственен; если же их несколько, то нужно доопределить процедуру (1)-(2) любым способом, обеспечивающим однозначность принимаемых решений). Если он сообщит оценку, строго большую истинной, то будет принято то же решение, что и ранее, и значение его целевой функции не изменится. Значит, в силу гипотезы благожелательности, завышать свою оценку ему не имеет смысла. Если он сообщит оценку, строго меньшую истинной, то, в зависимости от оценок других агентов, будет принято либо то же решение, либо решение, предлагаемое другим агентом (чья заявленная эффективность окажется выше). Но реальная эффективность нового решения не выше эффективности исходного решения, следовательно, занижать оценку агенту с номером $k(\theta)$ не выгодно. Итак, рассматриваемому агенту манипулировать информацией не выгодно.

Рассмотрим теперь произвольного агента $j \neq k(\theta)$, то есть такого, истинная эффективность решения которого ниже максимальной из эффективностей. Если он исказит информацию, сообщая оценку эффективности своего решения ниже истинной его эффективности, то принимаемое коллективное решение, и, следовательно, выигрыш этого агента, не изменятся. Если же он завысит свою оценку выше максимальной из оценок других агентов, то будет принято предлагаемое им решение, эффективность которого не выше эффективности принимаемого ранее решения. То есть, и такое искажение информации j-му агенту не выгодно.

Получаем, что ни одному из агентов не выгодно искажать информацию, если другие агенты сообщают достоверную информацию. Следовательно, сообщение достоверной информации – равновесие Нэша игры агентов. •

Содержательно условие утверждения 6.1 (монотонность целевой функции каждого агента по эффективности коллективного решения) означает, что интересы членов команды согласованы между собой и, условно говоря, с «целями команды в целом». Другими словами, при этом коллективное решение является «командообразующим фактором», и каждый из членов команды должен быть заинтересован в том, чтобы принять наиболее эффективное решение. Тогда возможна автономная и согласованная деятельность команды, и никому из членов команды не выгодно искажать информацию.

Подчеркнем, что рассмотренная модель автономного принятия решений в команде является в некотором смысле «вырожденной» – полноценная игра агентов отсутствует, так как выигрыш каждого монотонен по эффективности итогового решения.

Пример 6.1. Частным случаем рассматриваемой модели автономного принятия решений являются *автономные механизмы экспертизы* [12]. Пусть от команды экспертов требуется предложить решение, как поступить в некоторой конкретной ситуации. В силу различного образования, опыта и т.д. одни эксперты могут оказаться более квалифицированными в одной области, другие – в другой, в зависимости от ситуации, для которой необходимо предлагать решение. Хотелось бы, чтобы в любой ситуации предлагаемое экспертами коллективное решение было наиболее эффективным, то есть желательно, чтобы эффективность коллектива экспертов имела вид (4). Предположим, как и выше, что каждый из экспертов знает собственную эффективность и не знает эффективностей остальных экспертов (следовательно, каждый может искажать информацию), но все эксперты точно идентифицируют ситуацию. Как организатор экспертизы может побудить экспертов предпочесть в любой ситуации наиболее эффективное решение?

Рассмотрим следующий механизм. Организатор экспертизы предлагает экспертам – «пусть каждый из вас сообщает остальным экспертам пару «предлагаемое решение и его эффективность» (ведь, как предполагалось выше, эксперт точно знает истинную эффективность того или иного решения, которое он предлагает в каждой ситуации). После этого вы сообщаете мне решение, имеющее в сложившейся ситуации наибольшую эффективность, а я стимулирую вас пропорционально эффективности этого предложенного решения».

Предложенный механизм прост – эксперты сами между собой решают, какое решение предложить, то есть работают в команде автономно. Возникает закономерный вопрос – а будут ли эксперты сообщать правду? В [12] показано, что если целевые функции агентов (экспертов) пропорциональны модулю разности между максимальной из заявленных эффективностей и реальной эффективностью:

$$f_i(F_{m(\theta)}(x_{m(\theta)}, \theta)) = a_i - b_i\,|F_s(\theta) - F_{m(\theta)}(x_{m(\theta)}, \theta)|,$$

где a_i и b_i – неотрицательные константы, $i \in N$, то сообщение экспертами достоверной информации в этом механизме является равновесием Нэша их игры. •

С точки зрения характерных свойств команды, рассмотренная модель принятия решений адекватно отражает такие свойства как: единство цели, совместная деятельность, автономность и коллективная ответственность (см. Табл. 1 и Табл. 2).

В заключение настоящего раздела отметим, что механизмы автономного принятия решений тесно связаны с *многоканальными механизмами*, отличительной особенностью которых является формирование решений (рекомендаций) в нескольких параллельных блоках («каналах») принятия решений. Причиной их распространенности и достаточно высокой эффективности является взаимодействие каналов, что позволяет выработать наилучшее управленческое решение. Подробное описание многоканальных механизмов, а также примеров и результатов их практического использования можно найти в [1, 8].

7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАТРАТ

В настоящем разделе рассматривается модель однородной команды, использующей единый ресурс, суммарные затраты на приобретение которого зависят от суммы действий, выбираемых членами команды. Условием устойчивого функционирования команды считается существование такой процедуры распределения ресурса, при которой возможен выбор агентами такого вектора ненулевых действий, который был бы одновременно устойчив по Нэшу и эффективен по Парето.

Рассмотрим следующую модель деятельности *команды* из n агентов, каждый из которых использует некоторый ресурс, «стоимость» которого зависит от суммарного спроса. Обозначим через $x_i \geq 0$ – действие i-го агента – количество ресурса, которое он использует, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$. В зависимости от своего типа $r_i \in \Omega_i$ и своего выбора x_i i-ый агент получает доход $h_i(x_i, r_i)$ и несет затраты $\lambda_i(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор действий агентов, то есть его целевая функция равна

(1) $f_i(x, r_i) = h_i(x_i, r_i) - \lambda_i(x),\ i \in N.$

Стоимость «ресурса», используемого агентами, зависит от суммы их действий $X = \sum_{i \in N} x_i$, то есть, известна функция «суммарных затрат» $C(X)$. Задачей является нахождение правила распределения затрат между агентами, то есть поиск функций $(\lambda_i(\cdot))_{i \in N}$, удовлетворяющих тем или иным требованиям.

Введем следующие предположения:

1. $\forall\ i \in N,\ \forall\ x \in \Re^n_+\ \lambda_i(x) \geq 0$;
2. $\forall\ i \in N,\ \forall\ x \in \Re^n_+\ \lambda_i(x)$ не убывает по x_i;
3. $\forall\ x \in \Re^n_+\ \sum_{i \in N} \lambda_i(x) = C(X)$;
4. $\forall\ i \in N\ \forall\ r_i \in \Omega_i\ \ h_i(0, r_i) = 0$;
5. $\forall\ i \in N,\ \forall\ x_{-i} \in \Re^{n-1}_+\ \lambda_i(x_{-i}, 0) = 0$;
6. $C(\cdot)$ – неубывающая функция, $C(0) = 0$;
7. функции дохода и функция затрат – гладкие.

Первое предположение означает, что затраты агента по получению ресурса неотрицательны (невозможно получение дохода от «продажи излишков», даже при нулевых действиях). В рамах второго предположения, чем больше ресурса использует агент, тем больше он за него платит. Третье предположение представляет собой балансовое ограничение – сумма «взносов» агентов равна суммарным затратам на ресурс. Четвертое, пятое и шестое предположение согласованы в том смысле, что, не используя ресурс, агенты не несут затрат и не получают дохода.

Содержательно рассматриваемая модель соответствует проблеме распределения затрат на создание общественного блага, от использования которого каждый из агентов получает некоторый выигрыш [57, 84, 108, 155, 157][33]. Примерами являются: разработка месторождения полезных ископаемых группой компаний, использование единых вычислительных или информационных ресурсов, оптовые закупки сырья производственным объединением, производство продукции в регионе с учетом затрат на подержание экологической безопасности и др. При этом функция затрат может быть, в том числе, выпуклой (например, в эколого-экономической интерпретации) или вогнутой (например, скидки при оптовых закупках – чем больше объем закупаемой партии, тем меньше стоимость единицы сырья).

Предположим, что все вышеописанные параметры «команды» являются общим знанием среди ее членов. В рамках рассматриваемой модели имеет место игра агентов. Равновесие Нэша:

$$(1)\ E_N(\lambda(\cdot), r) = \{x \in \Re^n_+ \mid \forall\, i \in N,\ \forall\, y_i \geq 0$$
$$h_i(x_i, r_i) - \lambda_i(x) \geq h_i(y_i, r_i) - \lambda_i(x_{-i}, y_i)\}$$

зависит от вектора типов агентов $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \Omega = \prod_{i \in N} \Omega_i$ и *процедуры* (механизма) *распределения затрат*

$$\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot), \dots, \lambda_n(\cdot)).$$

Определим множество векторов действий агентов, доставляющих максимум сумме их целевых функций:

$$(2)\ P(r) = \mathrm{Arg} \max_{x \in \Re^n_+} \Big[\sum_{i \in N} h_i(x_i, r_i) - C(X)\Big].$$

Очевидно, любая точка множества (2) эффективна по Парето.

Как известно из теории игр [29, 81, 127, 159], концепция равновесия Нэша отражает устойчивость исхода взаимодействия игроков относительно их индивидуальных отклонений, в то время

[33] *В упомянутых работах обычно исследуется либо характеризация механизмов распределения затрат, удовлетворяющих тем или иным требованиям* (*аксиомам*) *«справедливости», либо/и изучается неманипулируемость механизмов, основывающихся на сообщении агентами информации об индивидуальных параметрах* (*например, о выигрышах, получаемых от использования общественного блага*).

как эффективность по Парето соответствует коллективному оптимуму (в случае, если допустимы трансферты полезности между игроками, исход их взаимодействия будет соответствовать множеству (2) [24, 66]). Поэтому в рамках рассматриваемой теоретико-игровой модели будем считать условием устойчивого функционирования команды существование такой процедуры распределения ресурса, при которой возможен выбор агентами такого вектора действий, который был бы одновременно устойчив по Нэшу и эффективен по Парето: $\exists\ \lambda(\cdot)$:

(3) $\forall\ r \in \Omega\ \ P(r) \subseteq E_N(\lambda(\cdot), r)$.

Итак, спрашивается, возможно ли устойчивое функционирование команды, под которым условимся понимать выбор всеми агентами в равновесии ненулевых действий и выполнение условия (3) – принадлежность Парето-эффективной точки множеству равновесий Нэша? Ответ на этот вопрос неоднозначен – требуются дополнительные предположения. Рассмотрим некоторые из возможных вариантов, иллюстрирующих многообразие возможных результатов взаимодействия членов команды.

Вариант 1. Предположим, что $\{\lambda_i(\cdot)\}_{i \in N}$ – гладкие функции (можно ограничиться требованием дифференцируемости), целевые функции агентов и сумма их целевых функций вогнуты по действиям соответствующих агентов. Вектор действий x^* принадлежит множеству $P(r)$, если (при $X^* = \sum_{i \in N} x_i^*$) выполнено

(4) $h'_{ix_i}(x_i^*, r_i) = C'(X^*),\ i \in N$.

Если потребовать, чтобы вектор x^* был равновесием Нэша игры агентов, то из (1) в предположении «внутреннего решения» получим следующее условие:

(5) $h'_{ix_i}(x_i^*, r_i) = \lambda'_{ix_i}(x^*)\ ,\ i \in N$.

Из (4) и (5) получаем:

(6) $\lambda'_{ix_i}(x^*) = C'(X^*),\ i \in N$.

Из предположения 3 следует, что

(7) $\sum_{i \in N} \lambda'_{ix_i}(x^*) = C'(X^*)$.

Условия (6) и (7) противоречат друг другу. Таким образом, **при гладких функциях «затрат» агентов** анализ «дифференциальных» условий эффективности по Парето и устойчивости по

Нэшу приводит к выводу, что в этом случае **невозможно устойчивое функционирование команды**. Данный результат (с точностью до замены дохода на затраты и суммы действий на агрегированный результат команды) следует идеологии теоремы Б. Холмстрома (см. раздел 2.3 и [140]).

Пример 7.1. Рассмотрим *процедуру пропорционального распределения* затрат, в которой агенты делят между собой стоимость ресурса пропорционально выбираемым действиям:

$$(8)\ \lambda_i(x) = C(X)\ \frac{x_i}{\sum_{j \in N} x_j},\ i \in N.$$

Легко видеть, что процедура (8) является гладкой и удовлетворяет условиям 1-3 и 5.

Обозначим $X_{-i} = \sum_{j \neq i} x_j$. Подставляя (8) в (6) и суммируя по всем агентам, получим: $C(X^*) = X^* C'(X^*)$.

Подставляя (8) в (7) получим: $(n - 1)\ C(X^*) / X^* = 0$. Противоречие. •

Вариант 2. Пусть типы агентов (множество Ω) таковы, что последних можно упорядочить по эффективности в следующем смысле:

$$(9)\ \forall\ r \in \Omega\ \ h'_{1t}(t, r_1) \geq h'_{2t}(t, r_2)\ \geq \ldots \geq\ h'_{nt}(t, r_n)\ .$$

Из предположений 1-7 и условия (9) следует, что, если в силу свойств функции затрат агентам выгодно (с точки зрения суммы целевых функций) ненулевое суммарное производство, то множество (2) имеет следующую структуру: первый агент выбирает такое действие X^*, при котором $h'_{1X^*}(X^*, r_1)\ = C'(X^*)$, а действия остальных агентов равны нулю. При этом $\lambda_1(x) = C(x)$.

Такая оптимальная по Парето ситуация может оказаться неустойчивой по Нэшу. Кроме того, в рассматриваемом варианте устойчивое функционирование команды невозможно, так как все агенты, кроме первого, выбирают нулевые действия.

Пример 7.2. Предположим, что функции дохода агентов линейны: $h_i(x_i, r_i) = r_i\, x_i$, причем $r_1 > r_2 > \ldots > r_n$, а функция затрат $C(\cdot)$ строго выпукла. Тогда

$$\arg \max_{x \in \Re^n_+}\ [\sum_{i \in N} h_i(x_i, r_i)\ - C(X)] = (C'^{-1}(r_1), 0, \ldots, 0).$$

Если функция затрат $C(\cdot)$ строго вогнута, то агентам выгодно выбирать как можно бóльшие действия. •

Таким образом, **если члены однородной команды таковы, что их можно упорядочить по эффективности деятельности, и это упорядочение не зависит от «объемов производства», то устойчивое функционирование команды невозможно.**

Вариант 3. Откажемся от условий 2 и 5, а также от гладкости функций затрат агентов и воспользуемся общими подходами к решению задач коллективного стимулирования [70], кратко изложенными в разделе 2.3 выше.

Фиксируем вектор x^* действий агентов, доставляющих максимум суммы их выигрышей за вычетом суммарных затрат (см. выражение (2)).

Будем искать функции распределения затрат вида

(10) $\lambda_i(x) = \begin{cases} \omega_i, & x_i = x_i^* \\ C(x_i), & x_i \neq x_i^* \end{cases}, i \in N,$

удовлетворяющие условию[34]

(11) $\sum_{i \in N} \omega_i = C(X^*)$

и обеспечивающие выбор агентами вектора действий x^* как равновесия Нэша их игры. Для этого подставим (10) в определение равновесия Нэша (1), и будем определять условия на соответствующие значения $\{\omega_i\}_{i \in N}$:

(12) $h_i(x_i^*, r_i) - \omega_i \geq \max_{y_i \geq 0} [h_i(y_i, r_i) - C(y_i)], i \in N.$

Добавим также *условие участия* (необходимо обеспечить каждому агенту в равновесии неотрицательный выигрыш):

(13) $\omega_i \leq h_i(x_i^*, r_i), i \in N.$

В качестве отступления отметим, что мы априори отказываемся от возможности «неограниченно сильных штрафов», так как, если в выражении (10) считать бесконечными затраты агента в

---

[34] *Отметим, что условие (11) требует выполнения балансового ограничения лишь в равновесии. Однако этого достаточно, так как ниже доказано, что выбор агентами соотвествующих действий является их доминантной стратегией, то есть нарушения балансового ограничения не произойдет.*

случае выбора неравновесного действия, то выбор Парето-оптимального действия сразу становится для него единственно возможным вариантом. Возможность использования в командах (даже в виде «угрозы») неограниченных штрафов трудно интерпретируема.

Кроме того, возможен и следующий достаточно простой вариант – использовать следующую систему стимулирования:

$$(10')\ \lambda_i(x) = \begin{cases} \omega_i, & x_i = x_i^* \\ h_i(x_i, r_i), & x_i \neq x_i^* \end{cases}, \ i \in N,$$

при которой вектор x^* будет равновесием Нэша игры агентов при любой процедуре распределения ресурса $\{\omega_i\}_{i \in N}$, удовлетворяющей условию (13). В рамках процедуры (10') в случае выбора «неравновесного» действия у агента изымается весь доход, при этом его выигрыш равен нулю (как и в случае нулевого действия). Как правило, такие процедуры характерны не для команд, в которых все агенты относительно равноправны, а для иерархических организационных систем, в которых управляющий орган наделен властью осуществлять существенное перераспределение выигрышей подчиненных ему агентов (включая, быть может, наложение штрафов, установление системы трансфертов и т.п.) [66, 67].

Вернемся к анализу условий (12). Отметим, что условие (12), записанное для каждого отдельного агента, не содержит обстановки игры для этого агента. Следовательно, если (12) имеет место, то x^* – *равновесие в доминантных стратегиях* (РДС) игры агентов (напомним, что РДС – такой вектор действий игроков, выбор соответствующей компоненты которого выгоден каждому из игроков, независимо от того, какие действия выбирают другие игроки [29]).

Обозначим $\hat{f}_i = \max\limits_{y_i \geq 0} [h_i(y_i, r_i) - C(y_i)]$ – тот выигрыш, который i-ый агент может получить, используя ресурс в одиночку (в отсутствии других агентов), $i \in N$. Из (12) получаем:

$$(14)\ \omega_i \leq h_i(x_i^*, r_i) - \hat{f}_i, \ i \in N.$$

<u>Утверждение 7.1.</u> Для устойчивого функционирования команды достаточно существования вектора $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, удовлетворяющего условиям (11) и (14).

Суммируя (14) по всем агентам, получаем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7.2. Для устойчивого функционирования команды необходимо выполнение следующего условия

(15) $C(X^*) \leq \sum_{i \in N} [h_i(x_i^*, r_i) - \hat{f}_i]$.

Условие (15) имеет простую содержательную интерпретацию: вспоминая, что $x^* = \arg \max_{x \in \Re_+^n} [\sum_{i \in N} h_i(x_i, r_i) - C(X)]$, запишем (15) в виде следующего *условия наличия синергетического эффекта*:

(16) $\max_{x \in \Re_+^n} [\sum_{i \in N} h_i(x_i, r_i) - C(X)] \geq \sum_{i \in N} \max_{y_i \geq 0} [h_i(y_i, r_i) - C(y_i)]$,

отражающего то свойство команды, что в ней максимальное значение суммы выигрышей агентов (при совместной деятельности) не меньше, чем сумма максимальных выигрышей агентов, действующих поодиночке (в системном анализе это свойство называют *эмерджентностью*).

Отметим, что «техника» анализа данного варианта процедур распределения затрат во многом аналогична методам исследования механизмов функционирования организационных систем с распределенным контролем [72].

Таким образом, **условием устойчивого функционирования команды является наличие синергетического взаимодействия ее членов**.

Пример 7.3. Предположим, что функции дохода агентов линейны: $h_i(x_i, r_i) = r_i x_i$, $i \in N$, а функция затрат выпукла и имеет вид $C(X) = X^2 / 2 R$, где $R > 0$. Вычисляем: $\hat{f}_i = (r_i)^2 R / 2$, $i \in N$. Условие (16) не выполнено.

Пример 7.4. Предположим, что $n = 2$, $h_1(x_1, r_1) = r_1 x_1$, $h_2(x_2, r_2) = r_2 x_2 + a$ при $x_2 > 0$, $r_1 > r_2$, $a > 0$, $C(X) = X^2 / 2$. Вычисляем: $\hat{f}_1 = (r_1)^2 / 2$, $\hat{f}_2 = (r_2)^2 / 2 + a$.

Если второй агент выбирает нулевое действие, то максимум суммы выигрышей агентов равен $(r_1)^2 / 2$.

Если второй агент выбирает близкое к нулю, но строго положительное действие ε, то суммарный выигрыш агентов равен $(r_1)^2 / 2 - (r_1 - r_2)\, \varepsilon + a$, то есть, условие (16) принимает вид:

$$\varepsilon \le \frac{a}{r_1 - r_2}.$$

Из (11)-(13) получаем, что процедура распределения затрат (ω_1, ω_2) должна удовлетворять следующей системе неравенств:

$$(17)\quad \begin{cases} \omega_1 \le r_1(r_1 - \varepsilon) \\ \omega_2 \le r_2\varepsilon + a \\ \omega_1 + \omega_2 = (r_1)^2 / 2 \end{cases}.$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $a = 1$. Тогда имеем при ограничении $\varepsilon \in (0; 1]$ целое множество процедур распределения ресурса:

$$\{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 = 2 - \omega_2;\ \omega_2 \le 1 + \varepsilon\},$$

при которых возможно устойчивое функционирование команды. •

В заключение настоящего раздела отметим, что при использовании процедуры распределения затрат (10) взаимная информированность агентов несущественна – вектор типов агентов не обязан быть общим знанием, так как «условие устойчивости» (12) для каждого агента включает только его собственный тип. Условие наличия синергетического эффекта (16) включает типы всех агентов, однако оно должно проверяться, скорее, на этапе синтеза механизма распределения затрат (создания условий деятельности команды) и требует лишь знания истинного вектора типов агентов, не опираясь на какую-то ни было рефлексию.

Итак, основные результаты исследования процедур распределения затрат заключаются в следующем. Во-первых, показано, что при гладких процедурах распределения затрат устойчивое функционирование команды невозможно. Во-вторых, доказано, что, если члены однородной команды таковы, что их можно упорядочить по эффективности деятельности, и это упорядочение не зависит от «объемов производства», то устойчивое функционирование команды также невозможно (наличие абсолютных лидеров разрушает «однородную» команду). И, наконец, в-третьих, обосновано, что условием устойчивого функционирования команды является наличие синергетического взаимодействия ее членов.

8. АДАПТАЦИЯ КОМАНД

Как отмечалось выше, одно из ключевых отличий команд от организаций заключается в том, что в первых, несмотря на присутствие лидера (как правило, неформального), отсутствует формальная иерархия. В организациях (а иерархия – непременный атрибут почти любой организации, кроме, наверное, сетевых организаций [68]) при изменении внешних условий или каких-либо других существенных параметров задача «перестройки» принципов и условий функционирования решается на более высоких уровнях иерархии, которые «транслируют» их «вниз». В настоящем разделе рассматриваются модели самостоятельной адаптации команд к изменяющимся условиям.

Приведем определения основных понятий. Адаптация тесно связана с саморазвитием и самоорганизацией. Под саморазвитием понимается самодвижение, связанное с переходом на более высокую ступень организации [97, с. 590] (под самодвижением – изменение объекта под влиянием внутренне присущих ему противоречий, факторов и условий). При этом внешние воздействия играют модифицирующую или опосредующую роль.

Более общим является понятие *самоорганизации* [97, с. 591] – процесса, в ходе которого создается, воспроизводится или совершенствуется организация сложной системы (термин «самоорганизующаяся система» ввел У.Р. Эшби [107]).

Отметим, что явления самостоятельного выбора агентами выполняемых ими функций, объемов работ и т.д. (см. модели команд в предыдущих разделах) могут интерпретироваться как самоорганизация команды (в отличие, опять же, от процесса централизованной организации деятельности, осуществляемого в иерархических организационных системах управляющим органом).

Адаптация (от лат. adaptatio – приспособление) – приспособление к условиям существования и привыкание к ним; в социальных системах – вид взаимодействия со средой, в ходе которого согласовываются требования и ожидания его участников [97, с. 12]. В рамках моделей команд под адаптацией будем понимать процесс изменения действий (включая в общем случае функции и объемы работ), выбираемых членами команды, на основе текущей информации в изменяющихся условиях.

Можно выделить несколько вложенных уровней адаптации любой системы – см. Рис. 13:

- изменение информированности о внешней среде;
- изменение поведения (действий, выбираемых на основе имеющейся информации);
- изменение параметров системы, позволяющее реализовывать более эффективное в изменившихся условиях поведение;
- целенаправленное изменение внешней среды (активная адаптация).

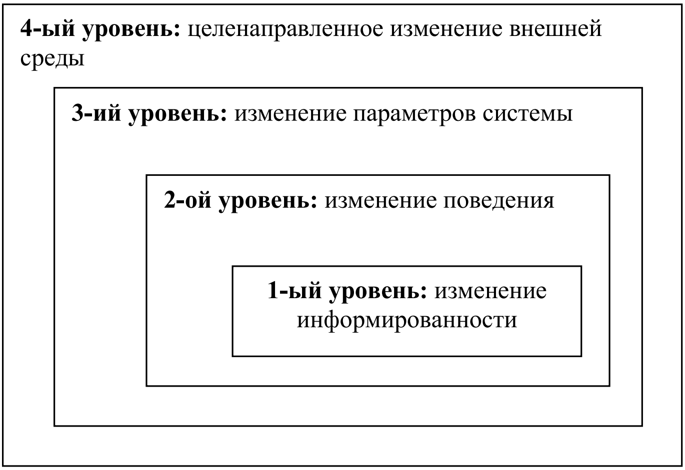

Рис. 13. Уровни адаптации

В настоящем разделе рассмотрены первые два уровня адаптации команд (третий уровень адаптации – *обучение* – анализируется в следующем разделе).

В теории управления накоплен значительный опыт решения задач адаптивного управления «техническими» системами – см., например, классические монографии [87, 102], а также обзор в [86]. Однако, опыт построения моделей адаптации социально-экономических систем, и, в частности, команд, на настоящий момент более чем скромен (см. монографию [101], посвященную адаптивным механизмам управления активными системами).

Члены команды рациональны (их интересы описываются целевыми функциями, и рациональность поведения каждого агента заключается в стремлении максимизировать свою целевую функцию), но в каждый момент времени принимают решения – выбрают свои действия – в условиях, в общем случае, неполной информированности. С течением времени они накапливают информацию о неопределенных параметрах. Возможны различные «стратегии» поведения агентов с точки зрения тех целей, которые они преследуют.

Первый вариант заключается в выборе в каждый момент времени таких действий, которые позволяли бы как можно быстрее получить максимум информации о неопределенных параметрах – идентифицировать их значения. Затем, когда этап *идентификации* закончен, агенты могли бы уже выбирать действия, максимизирующие их целевые функции. Такая «стратегия поведения» соответствует традициям теории идентификации [45, 103, 106].

Второй вариант заключается в выборе агентами в каждый момент времени действий, максимизирующих их выигрыши в текущем периоде, с «попутным» накоплением информации о состоянии природы. Именно эта «стратегия поведения» моделируется в настоящей работе.

И, наконец, третий – «синтетический» вариант заключается в выборе агентами таких траекторий (последовательности действий на заданный горизонт времени), которые максимизировали их накопленный (по времени) выигрыш с учетом эффектов идентификации. Соответствующие модели являются перспективным предметом будущих исследований.

Специфика команд заключается, в частности, в том, что каждый агент в качестве информации для корректировки своих представлений о неопределенном параметре может использовать не только результаты наблюдения за внешней средой, но и результаты наблюдения за действиями и результатами деятельности других агентов, пытаясь «объяснить», почему они выбрали именно эти действия. На Рис. 14 представлена структура модели адаптации команды.

Перейдем к описанию модели. «Условия существования» (см. определение адаптации выше) команды $N = \{1,2, \ldots, n\}$, состоящей из n агентов, отразим в модели значением *состояния природы* $\theta \in \Omega$, описывающим все существенные характеристики внешней среды. Агент с номером $i \in N$ имеет интервальную[35] информацию $\omega_i(\theta) \subseteq \Omega$ о состоянии природы, причем эта информация не противоречит истинному положению дел, то есть $\forall\ \theta \in \Omega,\ \forall\ i \in N$ $\theta \in \omega_i(\theta)$.

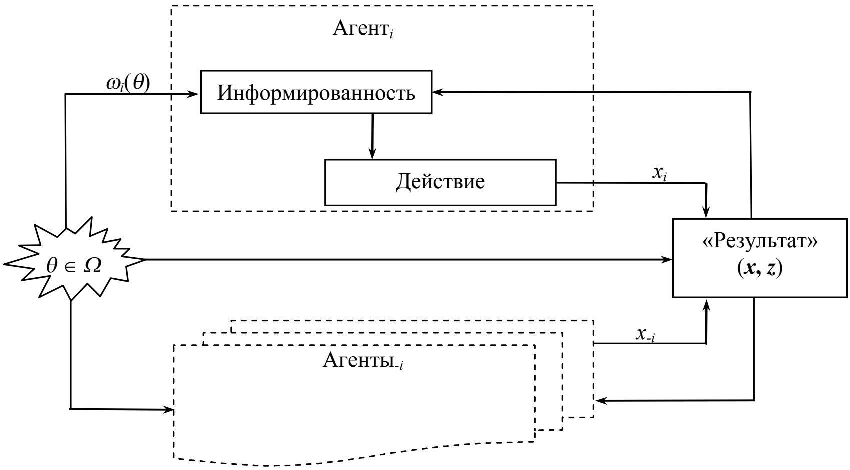

Рис. 14. Структура модели адаптации команды

Результат $z = G(\theta, x)$ команды в целом зависит от вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X' = \prod_{i \in N} X_i$ действий всех членов команды, где $x_i \in X_i$, и состояния природы θ. Будем считать, что каждый агент наблюдает вектор действий всех агентов, общий результат и выигрыши всех агентов.

Предположим, что выигрыш каждого агента зависит от состояния природы θ и результата z команды в целом: $f_i(z) = f_i(\theta, G(x, \theta))$, $i \in N$, причем множество агентов N, их действи-

[35] *Традиционно в теории управления при рассмотрении моделей адаптации большее внимание уделяется случаю вероятностной неопределенности относительно внешней среды. Использование развитого в этой области математического аппарата применительно к задачам адаптации команд представляется перспективным направлением будущих исследований.*

тельнозначные целевые функции $\{f_i(\cdot)\}$ и допустимые множества $\{X_i\}$, а также множество Ω возможных значений состояний природы, функция $G(\cdot)$ и факт наблюдения как результата и выигрышей, так и всего вектора действий каждым членом команды являются среди них общим знанием[36]. Если агенты выбирают свои действия одновременно и независимо, то имеет место их игра.

Обозначим множество параметрических (параметром является значение состояния природы – см. связь между информированностью и действием на Рис. 14) равновесий Нэша через

(1) $E_N(\theta) = \{\{x_i\}_{i \in N} \in X' \mid \forall\ i \in N, \forall\ y_i \in X_i$

$$f_i(\theta, G(\theta, x_1, \ldots, x_n)) \geq f_i(\theta, G(\theta, x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n))\}.$$

Если множество Ω_0 возможных значений состояний природы является общим знанием среди агентов, то, предполагая, что они устраняют неопределенность вычислением максимального гарантированного результата, получим следующее множество равновесий их игры:

$$E(\Omega_0) = \{\{x_i\}_{i \in N} \in X' \mid \forall\ i \in N, \forall\ y_i \in X_i\ \min_{\theta \in \Omega_0} f_i(\theta, G(\theta, x_1, \ldots, x_n)) \geq$$

$$\geq \min_{\theta \in \Omega_0} f_i(\theta, G(\theta, x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n))\}.$$

Обозначим $\pi(x) \subseteq \Omega$ – множество состояний природы, при которых наблюдаемый агентами вектор их действий является равновесием:

(2) $\pi(x) = \{\theta \in \Omega \mid \exists\ \Omega_0\colon \theta \in \Omega_0, x \in E(\Omega_0)\}$.

Обозначим $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in \Re^n$ – наблюдаемый агентами вектор значений их целевых функций.

Обозначим множество тех значений состояний природы, при которых (наряду с наблюдаемым результатом z) могут реализоваться наблюдаемые выигрыши агентов g через

(3) $\delta(g, z) = \{\theta \in \Omega \mid f_j(\theta, z) = g_j, j \in N\}$.

Проанализируем более детально информированность агентов. У i-го агента имеются, как максимум, четыре «источника информации» о состоянии природы:

1) априорная частная информация $\omega_i(\theta) \subseteq \Omega$;

---

[36] *Возможными расширениями модели являются предположения о том, кто из агентов какие величины наблюдает – ненаблюдаемыми для агента могут быть вектора действий других агентов, их выигрыши и т.д.* (*см. раздел 3*).

2) действия других агентов: наблюдая их и предполагая, что оппоненты действуют рационально (см. связь между информированностью и действием на Рис. 14), агент может (считая, что имеет место общее знание на первом уровне структуры информированности – см. Приложение и [78][37]) осуществлять рефлексию – оценивать ту информацию $\pi(x)$ о состоянии природы, на основании которой рационален выбор оппонентами именно этих действий;

3) выигрыши g агентов – на основании этой информации агенты могут сделать вывод о тех состояниях природы, при которых наблюдаемый результат приводит к наблюдаемым выигрышам – см. выражение (3);

4) множество $\rho \subseteq \Omega$ состояний природы, при которых наблюдаемый вектор действий агентов приводит именно к данному наблюдаемому значению z результата:

(4) $\rho(x, z) = \{\theta \in \Omega \mid G(\theta, x) = z\}$.

Отметим, что в силу введенных предположений информация пунктов 2)-4) является общим знанием среди агентов, то есть, с точки зрения друг друга они, наблюдая одни и те же параметры, должны одинаково (и предсказуемо для оппонентов) изменять свои представления о состоянии природы. То есть, общим знанием является информация

$$I(x, z, g) = \pi(x) \cap \rho(x, z) \cap \delta(g, z) \subseteq \Omega.$$

Этим предположением, наряду с предположением о том, что каждый агент считает, что имеет место общее знание на первом уровне структуры информированности, исключается из рассмотрения (но не из предметов дальнейших исследований) рефлексия агентов относительно информированности оппонентов.

На основании перечисленных источников информации i-ый агент может вычислить оценку $J_i \subseteq \Omega$ значения состояния природы как пересечение общего знания $I(x, z, g)$ с его частной информацией ω_i:

(5) $J_i(\omega_i, x, z, g) = \omega_i \cap I(x, z, g)$.

---

[37] *Возможны и более сложные случаи – когда имеет место нетривиальная взаимная информированность агентов. Тогда вместо параметрического равновесия Нэша* (1) *следует использовать информационное равновесие игры агентов.*

Обозначим θ_0 – фактическое значение состояния природы и рассмотрим последовательно в порядке усложнения несколько моделей: один агент – несколько агентов, статика – динамика[38].

Один агент, статика. Если агент принимает решение однократно, то на момент принятия решений о выбираемом им значении своего действия ему известно только множество $\omega \subseteq \Omega$ значений состояний природы. Будем считать, что, принимая решение в условиях интервальной неопределенности, агент использует принцип максимального гарантированного результата, то есть, выбирает действие:

(6) $x_{\text{МГР}}(\omega) = \arg \max\limits_{x \in X} \min\limits_{\theta \in \omega} f(\theta, G(\theta, x))$.

Так как рассматривается статическая ситуация (однократный выбор агентом своего действия), и другие агенты отсутствуют, то агент не может использовать информацию (4) о наблюдаемом им результате или своем выигрыше.

Пример 8.1. Пусть $n = 1$, $x \geq 0$, $\Omega = [1; 4]$, $\omega = [2; 4]$; $\theta_0 = 3$, $z = x / \theta$,

(7) $f(\theta, z) = (\theta - \alpha\, z)\, z - z^2 / 2$,

где $\alpha > 0$ – известная размерная константа. Содержательно, если интерпретировать агента как производителя некоторой продукции, спрос на которую зависит от объема производства, то θ может рассматриваться как уровень спроса (по объему и по качеству) – чем больше значение θ, тем выше цена $(\theta - \alpha\, z)$ и выше требования к качеству – для обеспечения одного и того же «объема» нужны бóльшие усилия – действие x. Чем выше объем производства, тем цена ниже.

В соответствии с целевой функцией (7) выигрыш агента представляет собой разность между выручкой (произведением цены на объем производства) и затратами, которые описываются квадратичной зависимостью.

Если бы значение состояния природы было достоверно известно агенту, то ему следовало бы выбирать действие

---

[38] *Под «статикой» в рассматриваемой дискретной модели подразумевается однократный выбор агенами своих действий, под «динамикой» – последовательность таких выборов.*

(8) $x^*(\theta) = \dfrac{\theta^2}{2\alpha + 1}$,

максимизирующее целевую функцию, зависящую от состояния природы и его действия:

(9) $f_0(\theta, x) = (\theta - \alpha\, x / \theta)\, x / \theta - x^2 / (2\, \theta^2)$.

Так как целевая функция (7) монотонно возрастает по θ при любых допустимых действиях агента, то в соответствии с выражением (6)

(10) $x_{МГР}(\omega) = 4 / (2\, \alpha + 1)$.

Наблюдая (10) и либо результат $x_{МГР}(\omega) / \theta_0$, либо свой выигрыш $f(\theta_0, x_{МГР}(\omega) / \theta_0)$, а, тем более, обе эти величины одновременно, агент может однозначно оценить истинное значение θ_0 состояния природы. •

Пример 8.1 иллюстрирует ситуации, когда однократного наблюдения агентом соответствующей информации достаточно для восстановления истинного значения состояния природы. При этом нет нужды ни в повторных наблюдениях, ни в информации о выборах других агентов (если бы таковые имелись). Однако, возможны случаи, когда однократного наблюдения агенту недостаточно. Приведем пример.

<u>Пример 8.2.</u> Пусть $n = 1$, $x \geq 0$, $z = x$, $\theta = (\theta_p, \theta_c)$ $\Omega = [1; 4] \times [1; 4]$, $\omega = [2; 4] \times [2; 4]$; $\theta_0 = (3; 3)$,

(11) $f(\theta, x) = (\theta_p - \alpha\, x)\, x - x^2\, \theta_c / 2$,

где $\alpha \geq 0$ – известная размерная константа. Содержательно, в отличие от примера 8.1, состояние природы является двумерным вектором, первая компонента которого характеризует параметры цены, а вторая – параметры затрат.

Если бы значение состояния природы было достоверно известно агенту, то ему следовало бы выбирать действие

(12) $x^*(\theta) = \dfrac{\theta_p}{2\alpha + \theta_c}$.

Так как целевая функция (11) монотонно возрастает по θ_p и монотонно убывает по θ_c при любых допустимых действиях агента, то в соответствии с выражением (6)

(13) $x_{МГР}(\omega) = 1 / (\alpha + 2)$.

В рассматриваемом примере действие агента совпадает с его результатом, следовательно, единственным источником информации для агента является наблюдение своего фактического выигрыша. Из этого наблюдения он может сделать следующий вывод о множестве возможных значений состояния природы:

(14) $I = \{\theta \in \Omega \mid \theta_c = 2\ \theta_p\ (\alpha + 2) - 6\ \alpha - 9\}$.

Например, при $\alpha = 1$ из (5) получаем:

(15) $J = \{(\theta_p; \theta_c) \mid \theta_c = 6\ \theta_p - 15,\ \theta_p \in [17/6; 19/6]\}$.

Отметим, что непротиворечивость информации агента истинному положению дел, по-прежнему имеет место, то есть $J \subseteq \omega$ и $\theta_0 \in J$, $\theta_0 \in I$. •

Один агент, динамика. Возможность «повторного» использования информации, полученной в результате наблюдения за результатами деятельности, появляется в случае многократного повторения выбора агентом своего действия. Будем считать, что агенты выбирают свои действия на каждом шаге одновременно, а шаги «равномерны».

Пример 8.3. Пусть в условиях примера 8.2 $\alpha = 1$, и агент принимает решения последовательно несколько раз. После первого «шага» он обладает информацией (15). В соответствии с выражением (6) его действием на втором «шаге» будет выбор $x_{\text{МГР}}(J) = 17 / 31$. Наблюдая свой выигрыш при этом действии, агент может однозначно восстановить истинное значение состояния природы $\theta_0 = (3; 3)$.

Таким образом, в настоящем примере агенту достаточно было двух наблюдений (двух «шагов»), чтобы восстановить всю недостающую информацию. •

Нескольких агентов в статике рассматривать мы не будем, перейдя сразу к динамическому случаю.

Несколько агентов, динамика. Обозначим $x_i^t \in X_i$ – действие i-го агента в момент времени t, $x^{1,\,t}$ – совокупность векторов действий всех агентов за t периодов. К окончанию периода t общим знанием среди агентов является информация

$$I(x^t, z^t, g^t) = \pi(x^t) \cap \rho(x^t, z^t) \cap \delta(g^t, z^t) \subseteq \Omega.$$

На основании всех источников информации i-ый агент за t периодов может вычислить оценку $J_i^t \subseteq \Omega$ значения состояния природы как пересечение общего знания $I(x^t, z^t, g^t)$ с его частной информацией J_i^{t-1}, соответствующей предыдущему периоду:

(16) $J_i^t = J_i^{t-1} \cap I(x^t, z^t, g^t)$.

Другими словами, его оценка состояния природы сузится до множества

(17) $J_i^t(\omega_i, x^{1,t}, z^{1,t}, g^{1,t}) = \omega_i \cap \bigcap_{\tau=1}^{t} I(x^\tau, z^\tau, g^\tau)$.

Пример 8.4. Рассмотрим модель олигополии Курно [37, 155], функционирующей в условиях неопределенности.

Пусть $n = 2$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$, $z = x_1 + x_2$, $\Omega = [1; 5]$, $\omega_1 = [1; 4]$; $\omega_2 = [2; 5]$; $\theta_0 = 3$,

(18) $f_i(\theta, z) = (\theta - \alpha z) z - x_i^2 r / 2$,

где $\alpha > 0$, $r > 0$ – известные размерные константы. То есть, агенты различаются лишь своей информированностью о состоянии природы.

Если бы значение состояния природы было достоверно известно агентам, то им следовало бы выбирать действия

(19) $x_i^*(\theta) = \dfrac{\theta}{4\alpha + r}$, $i = 1, 2$.

Так как целевые функции (18) монотонно возрастают по θ при любых допустимых действиях агентов, то в соответствии с выражением (6) агенты в первом периоде выберут действия

(20) $x_1^1 = 1 / (4\alpha + r)$, $x_2^1 = 2 / (4\alpha + r)$.

В результате выбора таких действий, агенты, однократно наблюдая векторы действий и выигрышей, восстановят истинное значение состояния природы. •

Введем такое понятие, как «*время адаптации команды*» – время, за которое при неизменном значении состояния природы агенты на основании наблюдаемой информации могут однозначно идентифицировать состояние природы. Значение времени адаптации (продолжительности переходного процесса) определяется тем, какие параметры наблюдают агенты, размерностью вектора, описывающего состояние природы, а также свойствами точечно-множественных отображений (2)-(4) – см. аналогичные модели для «технических» систем в [40]. В примерах 8.1 и 8.4 время адаптации равнялось единице (одному периоду), в примере 8.3 – двойке.

Время адаптации сокращается (корректней говоря – не увеличивается) с увеличением числа наблюдаемых членами команды параметров и возрастает (корректней говоря – не уменьшается) с увеличением размерности вектора, описывающего состояние природы, и/или ростом априорной неопределенности (расширением множеств $\{\omega_i\}$, описывающих частную информацию агентов).

<u>Пример 8.5.</u> Пусть к условиям примера 8.4 добавляется третий агент с первоначальной информированностью $\omega_3 = [2{,}5; 3{,}5]$.

Если каждый агент по-прежнему наблюдает действия и выигрыши всех агентов, то значение состояния природы они смогут восстановить, как и в примере 8.4, за один шаг. Время адаптации может увеличиться, если «ухудшится» информированность агентов – сократится множество наблюдаемых ими параметров или наблюдаемыми станут лишь некоторые агрегированные характеристики, например, сумма действий всех агентов.

Поэтому предположим, что i-ый агент наблюдает свое действие x_i, свой выигрыш g_i и сумму действий всех агентов[39] z, причем факт таких наблюдений является среди агентов общим знанием.

При известных x_i, z и g_i уравнение

$$(\theta - \alpha\, z)\, z - x_i^2\, r / 2 = g_i$$

решается относительно θ однозначно, $i = 1, 2$. То есть с ростом числа агентов время адаптации в рассматриваемом случае не увеличивается. •

<u>Пример 8.6.</u> Предположим теперь, что в условиях примера 8.5 имеются два агента, каждый из которых наблюдает только свое действие и свой выигрыш. Тогда в результате наблюдений i-ый агент получает уравнение

(21) $(\theta - \alpha\, (x_1 + x_2))\, (x_1 + x_2) - x_i^2\, r / 2 = g_i$

с двумя неизвестными – x_{3-i} и θ, $i = 1, 2$.

Если каждый из агентов считает, что имеет место общее знание, то есть наделяет оппонента той же информированностью, какой обладает он сам, то он должен считать, что оппонен выберет то же действие, что и выбирает рассматриваемый агент (напомним, что в данном примере агенты различаются лишь своей информи-

---

[39] *Если агентов всего два, то каждый, зная сумму действий и свое действие, может вычислить действие оппонента. В случае, когда агентов уже три и больше, действия оппонентов на основании такой информации не могут быть восстановлены однозначно.*

рованностью о состоянии природы). Подставляя в (21) реальный выигрыш агента и

$$x_{3-i} = x_{\text{МГР}i}(\omega_i),$$

получим:

(22) $(\theta - 2\ \alpha\ x_i^1)\ 2\ x_i^1 - (x_i^1)^2\ r / 2 =$

$$= (\theta_0 - \alpha\ (x_1^1 + x_2^1))\ (x_1^1 + x_2^1) - (x_i^1)^2\ r / 2,$$

откуда i-ый агент может вычислить на конец первого периода нижнюю оценку

(23) $\theta_i^1 = (\theta_0 - \alpha\ (x_1^1 + x_2^1))\ (x_1^1 + x_2^1) / 2\ x_i^1 + 2\ \alpha\ x_i^1$

значения состояния природы, $i = 1, 2$.

Предположим, что $\alpha = r = 1$, тогда

$$x_1^1 = 0{,}2,\ x_2^1 = 0{,}4,\ \theta_1^1 = 4,\ \theta_2^1 = 2{,}6.$$

Во втором периоде агенты подставят соответствующие оценки θ_1^1 и θ_2^1 в выражение (19), то есть выберут действия

$$x_1^2 = 0{,}8,\ x_2^2 = 0{,}52,$$

подставят их в аналог выражения (22), вычислят новые оценки состояния природы и т.д.

В общем случае динамика оценок состояния природы агентами имеет вид (ср. с (22)):

(24) $\theta_i^t = (\theta_0 - \alpha\ (x_1^t + x_2^t))\ (x_1^t + x_2^t) / 2\ x_i^t + 2\ \alpha\ x_i^t$,

$$i = 1, 2,\ t = 1, 2, \ldots .$$

На основании этих оценок агенты будут выбирать действия (см. выражение (19))

(25) $x_i^t(\theta_i^{t-1}) = \dfrac{\theta_i^{t-1}}{4\alpha + r}$, $i = 1, 2,\ t = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, адаптация команды в рассматриваемом примере будет описываться системой (24)-(25) итерированных функций с начальными условиями (20), определяемыми на основании априорной информации агентов в соответствии с принципом максимального гарантированного результата.

На Рис. 15 и Рис. 16 представлены соответственно динамика оценок состояния природы агентами (первый уровень адаптации – см. Рис. 13) и динамика действий агентов (второй уровень адаптации – см. Рис. 13).

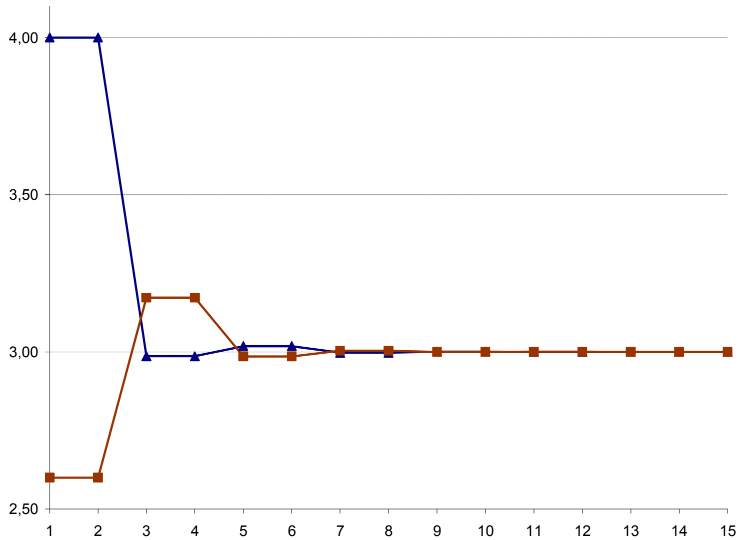

Рис. 15. Динамика оценок состояния природы агентами (первый агент – треугольники, второй – квадраты)

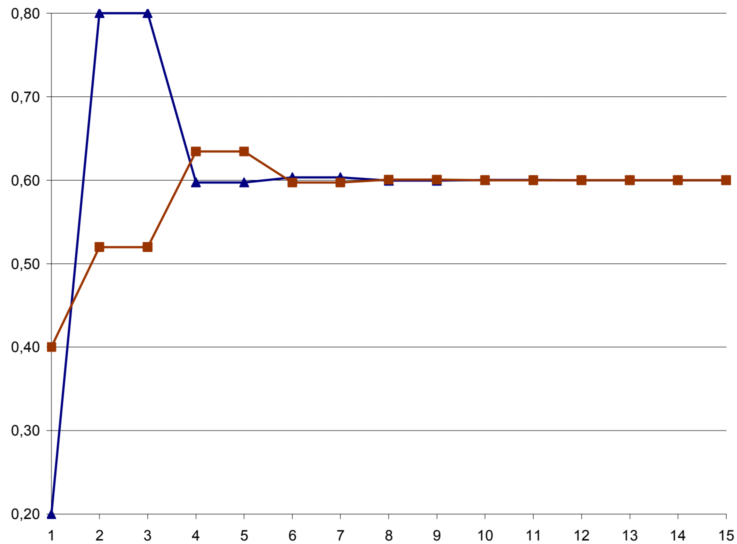

Рис. 16. Динамика действий агентов (первый агент – треугольники, второй – квадраты)

Видно, что процессы изменения агентами своих оценок сходятся (достаточно быстро – изменения через 8-10 шагов становятся малозаметными), причем сходятся они к истинному значению состояния природы. Кроме того, несмотря на различную априорную информированность, агенты в результате выбирают одинаковые действия (что вполне естественно, так как целевые функции агентов одинаковы). В рассматриваемом примере время адаптации, строго говоря, равно бесконечности, хотя время попадания в любую наперед заданную непустую окрестность истинного значения состояния природы конечно. •

Адаптация соответствует приспособлению, привыканию и т.п. к изменяющимся внешним условиям. Рассмотренные в настоящем разделе модели адаптации команд позволяют отражать эти эффекты. Приведем пример, иллюстрирующий процесс адаптации команды к резкому изменению внешних условий.

<u>Пример 8.7.</u> Предположим, что в условиях примера 8.6 на 11-ом шаге значение состояния природы изменилось и стало равно не 3, а 4, причем первоначальные оценки нового значения состояния природы были: у первого агента – 3,5, у второго – 4,5 (см. Рис. 17).

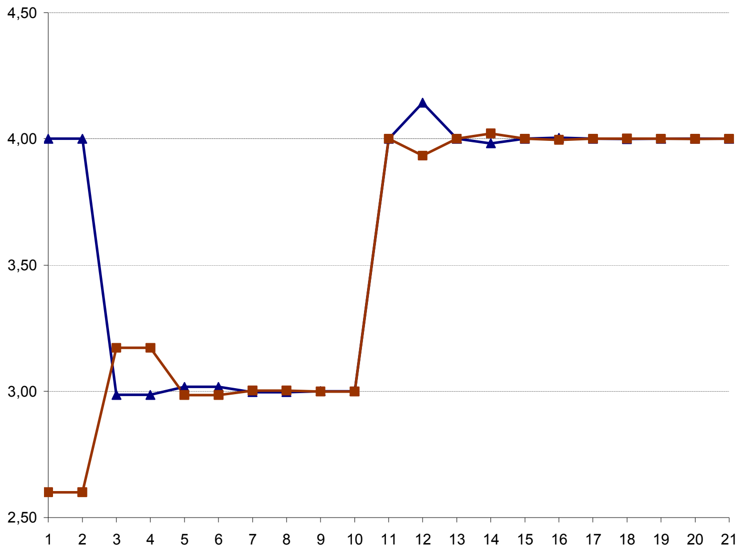

Рис. 17. Процесс адаптации команды к резкому изменению внешних условий на 11-*ом шаге* •

В рассматриваемом примере *характерное время изменения состояния природы* равно 10 шагам. Время адаптации команды меньше него – за 10 шагов переходный процесс почти закончился. Адаптацию имеет смысл рассматривать, если время адаптации не превышает характерного времени изменения внешней среды.

Изменение внешних условий может происходить и постепенно, соответственно команда должна адаптироваться и к «медленным» изменениям условий своего функционирования. Приведем пример.

Пример 8.8. Предположим, что в условиях примера 8.6 значение состояния природы на каждом шаге увеличивается на 0,1 (см. пунктирную линию на Рис. 18). На Рис. 18 и Рис. 19 представлены соответственно динамика оценок состояния природы агентами и динамика действий агентов.

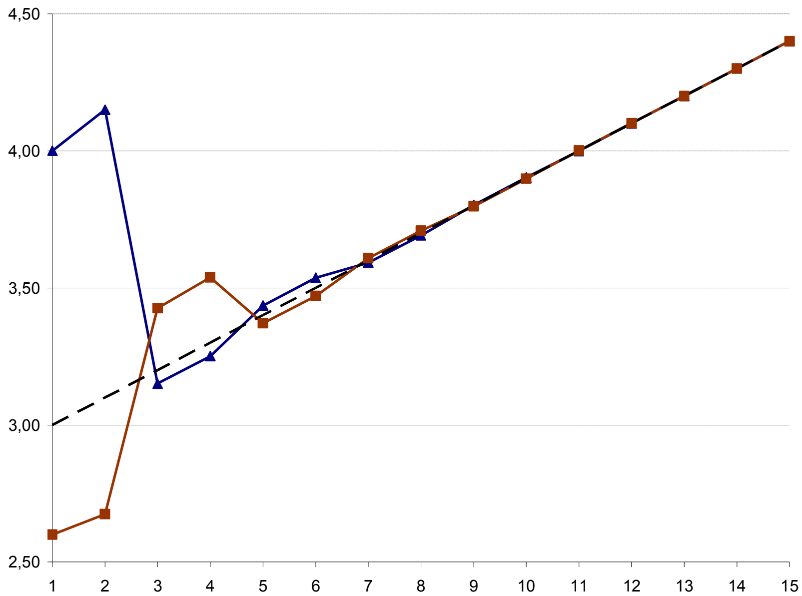

Рис. 18. Динамика оценок состояния природы агентами (первый агент – треугольники, второй – квадраты)

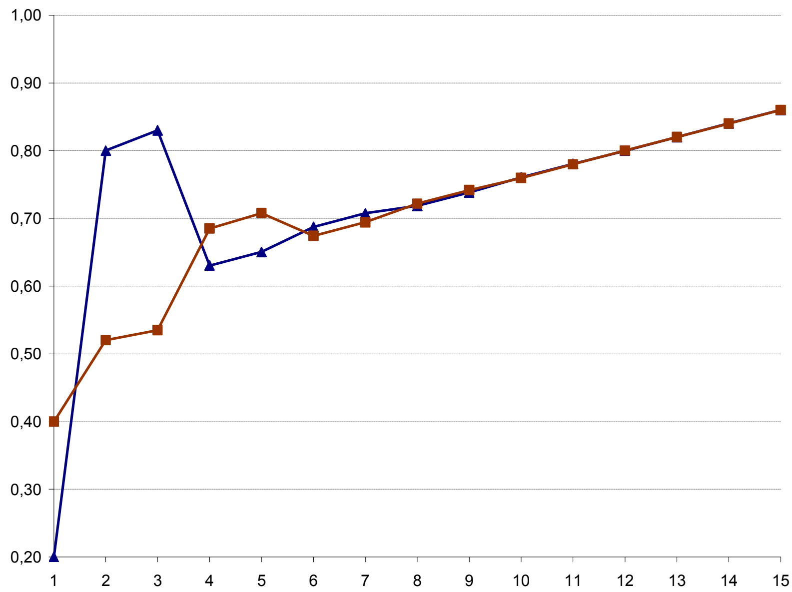

Рис. 19. Динамика действий агентов
(*первый агент – треугольники, второй – квадраты*)

В рассматриваемом примере скорость изменения состояния природы по отношению ко времени адаптации такова, что команда «успевает» отслеживать изменения. Возможны случаи – в условиях быстро (по отношению ко времени адаптации) менябщейся внешней среды – когда команд не сможет адаптироваться.

В завершение настоящего раздела подчеркнем, что выше вводилось предположение о том, что каждый агент наделяет оппонента той же информированностью, какой обладает он сам. Возможно отказаться от этого предположения и рассматривать более сложные структуры информированности агентов (см. Приложение), считая, то они будут выбирать действия, являющиеся информационным равновесием. Возможны также ситуации более сложной структуры «наблюдений» агентов – одни могут наблюдать одни параметры (например, действия и выигрыши одного множества агентов), другие агенты – другие параметры (например, действия и выигрыши другого множества агентов плюс некоторую информацию о состоянии природы). И так далее – все эти случаи, наверное, можно описывать по аналогии с рассмотренными выше.

Если адаптация в настоящем разделе рассматривалась как приспособление к условиям (в основном, внешним) существования и привыкание к ним и, фактически, зависела от информации об этих условиях[40], которой агенты обладают на момент принятия решений, то изменение параметров самой команды (см. третий уровень адаптации на Рис. 13) может рассматриваться как обучение[41]. Поэтому перейдем к рассмотрению моделей обучения в командах.

---

[40] *Конечно, в общем случае адаптация некоторой системы подразумевает не только изменение информированности и поведения* (*первые два уровня адаптации – см. выше*)*, но и изменение параметров самой системы* (*третий уровень адаптации*)*, например – типов агентов, как реакцию на изменяющиеся внешние условия. Кроме того, можно рассматривать и активную адаптацию, когда система целенаправленно влияет на внешнюю среду* (*четвертый уровень адаптации*).

[41] *Обучение и адаптация тесно связаны. Но обучение может происходить и при постоянных внешних условиях, а адаптация имеет место только при наличии их изменений.*

9. ОБУЧЕНИЕ В КОМАНДАХ

Члены команды в процессе совместной деятельности сознательно или неосознаваемо приобретают опыт как индивидуальной, так и совместной деятельности, то есть имеет место их научение (под научением понимается «процесс и результат приобретения индивидуального опыта» [41, с. 201]). Научение является частным случаем обучения – процесса овладения знаниями, умениями, навыками [5, с. 827]. Рассмотрим последовательно ряд моделей[42], отражающих эффекты научения членов команды в процессе их работы. Начнем с общей постановки задачи, затем рассмотрим модель индивидуального обучения в процессе деятельности и, наконец – модель обучения в команде из нескольких агентов.

Общая постановка задачи и модель процесса научения. Качественно в общем виде задача может быть сформулирована следующим образом. Каждый агент характеризуется некоторым первоначальным уровнем навыка (например, производительностью труда). В процессе осуществления деятельности производительность труда агента растет по мере приобретения опыта, совершенствования навыков и т.д. (имеет место обучение в процессе работы), причем скорость этого роста (так называемая скорость научения – см. формальное определение ниже) у каждого агента индивидуальна. Спрашивается, как оптимальным образом распределить во времени работу между агентами. Ведь один агент, уро-

---

[42] *В качестве отступления отметим, что процессы обучения технических и кибернетических систем являются предметом исследований в кибернетике и смежных дисциплинах на протяжении уже полувека. С одной стороны, даже краткий их обзор требует отдельной книги. Кроме того, команды – благодатный объект для математического моделирования на уровне аналогий. Возьмем, например, компьютерную нейронную сеть и объявим ее «командой», членами которой являются отдельные нейроны. Известно множество методов обучения нейронных сетей, и все эти методы можно интерпретировать в терминах «обучения команд». Или другой пример: «командой» можно объявить GRID-систему, осуществляющую распределенные вычисления. И так далее. С другой стороны, нас интересуют эффекты автономности активного поведения членов команды, поэтому в настоящем разделе акцент делается на обучении в процессе работы и оптимальном с точки зрения команды в целом распределении работ между ее членами.*

вень начальной квалификации которого низок, будучи с самого начала сильно загружен, быстро повысит свою квалификацию и сможет потом работать эффективно. С другой стороны, быть может, рациональным является загрузить сразу тех агентов, которые имеют более высокую начальную квалификацию? Ответы на эти вопросы не очевидны, тем более что необходимо доопределить, что понимается под «оптимальным» распределением работы между агентами. В качестве критерия эффективности могут выступать суммарные затраты агентов, время выполнения командой заданного объема работ, результат, достигнутый за фиксированное время, и т.д.

Перейдем к формализации рассмотренной ситуации – начав с наиболее простой модели, будем потом постепенно ее усложнять. При этом ограничимся случаем итеративного научения [63], соответствующего достаточно рутинным видам деятельности и представляющего собой многократное повторение обучаемой системой действий, проб, попыток и т.д. для достижения фиксированной цели при постоянных внешних условиях. Итеративное научение (ИН) лежит в основе формирования навыков у человека, условных рефлексов у животных, обучения многих технических (материализованных) и кибернетических (абстрактно-логических) систем и является предметом исследования педагогической и инженерной психологии, психофизиологии, педагогики, теории управления и других наук (см. обзор в [63]).

Постоянство как внешних условий, так и цели, позволяет проводить количественное описание ИН в виде кривых научения – зависимостей критерия уровня научения от времени или от числа повторений (итераций).

Многочисленные экспериментальные данные (см. [61, 63]) свидетельствуют, что важнейшей общей закономерностью итеративного научения является замедленно-асимптотический характер кривых научения: они монотонны, скорость изменения критерия уровня научения со временем уменьшается, а сама кривая асимптотически стремится к некоторому пределу. В большинстве случаев кривые итеративного научения аппроксимируются экспоненциальными кривыми.

Различают два аспекта научения. Первый аспект – результативный – при научении система должна достичь требуемого результата – качества выполнения действий с приемлемыми затратами времени, энергии и т.д. Второй аспект – процессуальный: адаптация, приспособление научаемой системы к некоторому виду действий в процессе деятельности (например, упражнения) и т.д. Соответственно, выделяют результативные характеристики итеративного научения и характеристики адаптации [61], которые относятся, как правило, к физиологическим компонентам деятельности – утомляемость и т.п. В настоящей работе речь идет именно о результативных характеристиках научения (характеристики адаптации зачастую имеют совсем другую динамику – см. также предыдущий раздел).

Как отмечалось выше, итеративное научение, как правило, характеризуется замедленно-асимптотическими кривыми научения, аппроксимируемыми экспоненциальными кривыми (см. Рис. 20):

(1) $r(t) = r^{\infty} + (r^0 - r^{\infty})\, e^{-\gamma t},\ t \geq 0,$

или дискретной последовательностью[43]

(2) $r^k = r^{\infty} + (r^0 - r^{\infty})\, e^{-\gamma k},\ k = 1, 2, \dots ,$

где t – время научения, k – число итераций (проб, попыток) с момента начала научения, $r(t)$ (r_k) – тип агента (уровень навыка, квалификация) в момент времени t (на k-ой итерации), $r^0 > 0$ – начальное значение (соответствующее моменту начала научения – первому периоду времени) типа, r^{∞} – «конечное» значение, $r^{\infty} \geq r^0$, γ – некоторая неотрицательная константа, определяющая скорость изменения типа и называемая скоростью научения [63].

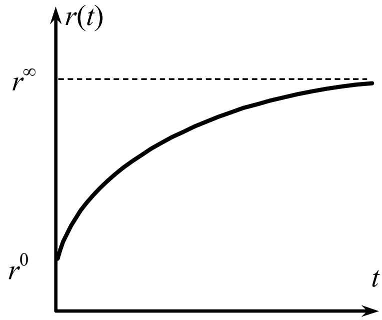

Рис. 20. Экспоненциальная кривая научения

[43] *Условимся в настоящем разделе верхним индексом обозначать номер периода времени, а нижним индексом – номер агента. В случае, когда рассматривается единственный агент, нижний индекс будем опускать.*

Обучение одного агента. Рассмотрим сначала модель научения (обучения – так как мы рассматриваем только процесс научения, то различий между этими терминами делать не будем) единственного агента. Обозначим $y^k \geq 0$ – выполняемый им в k-ом периоде времени объем работ. Если интерпретировать тип агента (уровень навыка) $r^k \in [0; 1]$ как долю успешных действий агента, то, выполняя в периоде k объем работ y^k, агент достигнет результата $z^k = r^k y^k$.

Тогда результат агента – суммарный объем работ, успешно выполненных агентом за k периодов времени, равен

(2) $Z^k = \sum_{l=1}^{k} r^l y^l$.

С другой стороны, агентом выполнен больший объем (успешных и неуспешных) работ:

(3) $Y^k = \sum_{l=1}^{k} y^l$.

Этот объем работ условно можно считать тем «опытом», который приобрел агент (см. [14, 141], а также обзор в [63]), то есть, его «эффективным внутренним временем» (прошедшим с момента начала обучения и потраченным на обучение), и подставить в показатель экспоненты (1). Получим:

(4) $r^k = 1 - (1 - r^0) \exp(- \gamma\, Y^{k-1})$, $k = 2, 3, \ldots$.

Обозначим $y^{1,\tau} = (y^1, y^2, \ldots, y^\tau)$, $\tau = 1, 2, \ldots$ и условимся считать, что $y^0 = 0$.

Объединяя (3) и (4), получим следующие выражения для соответственно объемов успешно выполненных работ и типов агента:

(5) $Z^k = \sum_{l=1}^{k} y^l \{1 - (1 - r^0) \exp(- \gamma \sum_{m=1}^{l-1} y^m)\}$,

(6) $r^k = 1 - (1 - r^0) \exp(- \gamma \sum_{l=1}^{k-1} y^l)$, $k = 2, 3, \ldots$.

Отметим, что при фиксированном суммарном объеме работ тип агента определяется выражением (4) однозначно и не зависит от того, как объемы работ распределены по периодам времени. Поэтому задача максимизации типа агента (достижения максимальной его квалификации) при фиксированном суммарном объеме работ Y^T в рамках рассматриваемой модели не имеет смысла.

В модели фигурируют три «макропараметра»: суммарный объем работ Y, число периодов T и результат Z. Искомой переменной является «траектория обучения» $y^{1,T}$.

Задачи оптимального обучения могут заключаться в экстремизации одной из переменных при фиксированных остальных переменных[44]. Таким образом, получаем, что целесообразно рассматривать следующие постановки.

1. Фиксируем суммарный объем работ Y, который может выполнить агент, и результат Z, который необходимо достичь. Требуется найти траекторию, минимизирующую время достижения результата:

$$(7)\quad \begin{cases} T \to \min \\ Y^T \leq Y \\ Z^T \geq Z \end{cases}.$$

Задачу (7) можно условно назвать задачей о быстродействии.

2. Фиксируем суммарный объем работ Y, которые может выполнить агент, и время обучения T. Требуется найти траекторию, максимизирующую результат Z:

$$(8)\quad \begin{cases} Z^\tau \to \max \\ Y^\tau \leq Y \\ \tau \leq T \end{cases}.$$

Задачу (8) можно условно назвать задачей об оптимальном обучении. Наверное, именно эта задача наиболее близка к проблемам педагогики, когда требуется за фиксированное время и при фиксированном объеме учебного материала так распределить его во времени (дидактические аспекты, то есть содержание, в силу рутинности предмета научения практически не имеют значения), чтобы максимизировать «объем усвоенного материала» (максимизировать «качество обучения»).

---

[44] *В более общем случае может существовать некоторый функционал, который подлежит экстремизации (например, затраты на обучение, качество обучения и т.д.), могут приниматься во внимание дополнительные ограничения, варьироваться могут одновременно несколько переменных и т.д. – все эти задачи представляют перспективный предмет будущих исследований.*

Так как выражение (5) монотонно по сумме объемов работ агента и длительности периода обучения, то задачу (8) можно записать в виде:

$$(9)\quad \sum_{l=1}^{T} y^l \exp(-\gamma \sum_{m=1}^{l-1} y^m) \to \min_{\{y^{1,T} | \sum_{\tau=1}^{T} y^\tau = Y\}} .$$

В выражение (9) уже не входит начальная квалификация агента r^0, то есть справедливо следующее утверждение.

Утверждение 9.1. Оптимальная траектория обучения не зависит от начальной квалификации агента.

Данный вывод представляет интерес для методики обучения, так как с точки зрения результатов отдельных независимых агентов существенны только индивидуальные различия скоростей их научения.

3. Фиксируем время обучения T и результат Z, который требуется достичь. Требуется найти траекторию обучения, минимизирующую суммарный объем работ:

$$(10)\quad \begin{cases} Y^\tau \to \min \\ \tau \le T \\ Z^T \ge Z \end{cases} .$$

Каждая из задач (7)-(10) может быть сведена к задаче (или набору задач) динамического программирования.

Пример 9.1. Решим задачу (8) для случая двух периодов. Если $T = 2$, то имеем два варианта. В первом $\tau = 1$, то есть $y^1 = Y$, тогда $Z^1 = r^0\, Y$. Во втором $\tau = 2$, и, учитывая, что $y^2 = Y - y^1$, получим:

$$Z^2(y^1) = Y - (1 - r^0)\, [y^1 + (Y - y^1) \exp(-\gamma\, y^1)].$$

Легко видеть, что максимум этого выражения по $y^1 \in [0; Y]$ не зависит от r^0. То есть, оптимальное распределение объемов работ по периодам не зависит от начальной квалификации агента.

Кроме того, чем больше γ, тем меньше оптимальное значение объема работ, выполняемого в первом периоде. То есть, чем выше скорость научения агента, тем больший объем работ он должен выполнять в последнем периоде (и, соответственно, тем меньший объем работ необходимо выделять на начальный период для повышения его начальной квалификации). •

Пример 9.2. Решим задачу (9) для случая $T = 11$, $r^0 = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}5$, $Y = 10$.

Динамика типов агента представлена на Рис. 21. Динамика оптимальных объемов работ представлена на Рис. 22.

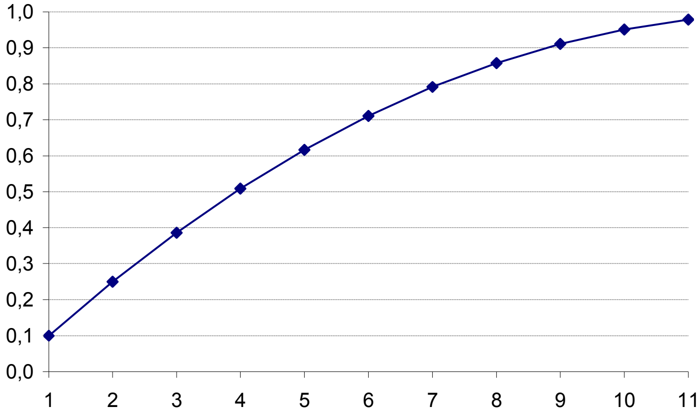

Рис. 21. Динамика типов агента в примере 9.2

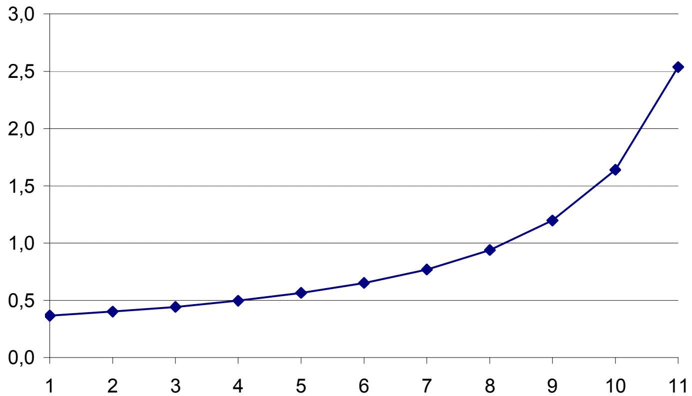

Рис. 22. Динамика оптимальных объемов работ в примере 9.2

Оптимальной стратегией обучения является увеличение объема работ агента со временем, причем, чем выше скорость обучения, тем более «выпуклой» является оптимальная траектория обучения. Качественно, данный вывод является следствием вогнутости[45] экспоненциальной кривой научения (см. выражение (1) и Рис. 21). •

Обучение нескольких агентов. До сих пор мы рассматривали одного агента. Обобщим полученные результаты на случай нескольких одновременно работающих агентов, причем сначала рассмотрим ситуацию, когда агенты полностью независимы (результаты и тип каждого не зависят от результатов и типов других), а потом проанализируем задачу об обучении зависимых агентов.

Рассмотрим команду $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, состоящую из n агентов. По аналогии с выражениями (5) и (6), получим следующие выражения для соответственно объемов успешно выполненных работ и типов агентов:

$$(11)\quad Z_i^k = \sum_{l=1}^{k} y_i^l \{1 - (1 - r_i^0)\exp(-\gamma_i \sum_{m=1}^{l-1} y_i^m)\},$$

$$(12)\quad r_i^k = 1 - (1 - r_i^0)\exp(-\gamma_i \sum_{l=1}^{k-1} y_i^l),\ k = 2, 3, \ldots,\ i \in N.$$

Если результат команды является суммой результатов агентов, то есть:

$$(13)\quad Z^k = \sum_{i=1}^{n} Z_i^k,\ k = 1, 2, \ldots,$$

то задача об оптимальном обучении команды (ср. с (8)) примет вид:

$$(14)\quad Z^T \to \max_{\{y_i^{1,T} | \sum_{\tau=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} y_i^\tau = Y\}},$$

то есть:

$$(15)\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{T} y_i^l \{1 - (1 - r_i^0)\exp(-\gamma_i \sum_{m=1}^{l-1} y_i^m)\} \to \max_{\{y_i^{1,T} | \sum_{\tau=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} y_i^\tau = Y\}}.$$

Задача (15) может быть решена методом динамического программирования.

[45] *Если кривая научения выпуклая (агент обучается все более и более эффективно), то оптимальная траектория обучения будет убывающей, то есть оптимальной стратегией обучения будет уже не увеличение, а уменьшение объема работ агента со временем.*

Легко видеть, что оптимальное решение задачи (15) в общем случае зависит и от индивидуальных скоростей научения агентов $\{\gamma_i\}$, и от их начальных квалификаций $\{r_i^0\}$.

Утверждение 9.2. Если скорости научения агентов одинаковы, то оптимальным распределением работ является выполнение всего объема работ агентом с максимальной начальной квалификацией. Если начальные квалификации агентов одинаковы, то оптимальным распределением работ является выполнение всего объема работ агентом с максимальной скоростью научения.

Пример 9.3. Рассмотрим задачу (15) для случая двух агентов при $T = 11$, $r_1^0 = 0{,}1$, $r_2^0 = 0{,}3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0{,}75$, $Y = 10$. При этом, в соответствии с утверждением 9.2, оптимальным является выполнение всего объема работ вторым агентом, то есть тем, чья начальная квалификация выше (напомним, что в настоящем примере скорости научения агентов одинаковы). На Рис. 23 приведена динамика оптимальных объемов работ (квадратики соответствуют второму агенту, ромбики – первому).

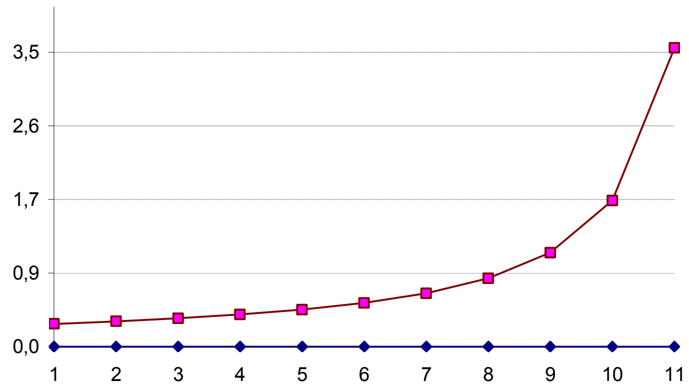

Рис. 23. Динамика оптимальных объемов работ в примере 9.3

Получили, что первый агент не выполняет никаких работ и не обучается. •

Решение задачи об оптимальном обучении в случае, когда все агенты имеют одинаковые скорости научения, получилось «вырожденным» – работает и обучается один агент, а остальные не работают и не обучаются. С одной стороны, такой коллектив вряд ли можно назвать полноценной командой, с другой стороны, необходимо признать, что в жизни такие ситуации встречаются нередко.

Рассмотрим, что произойдет, если агенты различаются и начальными квалификациями, и скоростями научения.

<u>Пример 9.4.</u> Если в условиях примера 9.3 выбрать скорость научения первого агента (чья начальная квалификация ниже, чем у второго агента) равной 3,0, то есть сделать ее существенно больше скорости научения второго агента (при неизменных всех остальных параметрах), то оптимальным решением будет выполнение всего объема работ уже не вторым, а первым агентом. •

Формально, структура решения задачи (15) – то, что весь объем работ выполняет один «лучший» (с точки зрения комбинации начальной квалификации и скорости научения) агент – обусловлена «аддитивностью» целевой функции и наличием большого числа переменных при единственном ограничении. Содержательно, в задаче могут присутствовать и другие ограничения, помимо ограничения на суммарный объем работ, выполняемый членами команды. Наиболее естественным представляется ограничение на максимальный объем работ, который каждый агент может выполнить за одну итерацию[46] (за один период времени).

<u>Пример 9.5.</u> Если в условиях примера 9.3 добавить ограничение на максимальный объем работ (равный, например, 0,5), который каждый агент может выполнить за один период времени, то в оптимальном решении будут загружены уже оба агента – динамика их типов представлена на Рис. 24, а динамика оптимальных объемов работ – на Рис. 25.

Если в данном примере добавить еще одного агента, то в оптимальном решении загружены будут по-прежнему два агента (имеются два ограничения – на суммарный объем работ и на объем работ, который каждый агент может выполнить в единицу времени, причем последнее ограничение одинаково для всех агентов). Если у каждого агента существует собственное ограничение на объем работ, который он может выполнить в единицу времени, то

---

[46] *Перспективным представляется рассмотрение моделей, в которых ограничение на объем работ, выполняемых агентом в единицу времени, завсист от квалификации агента.*

загружены будут уже все агенты (так как число ограничений превысит число агентов). •

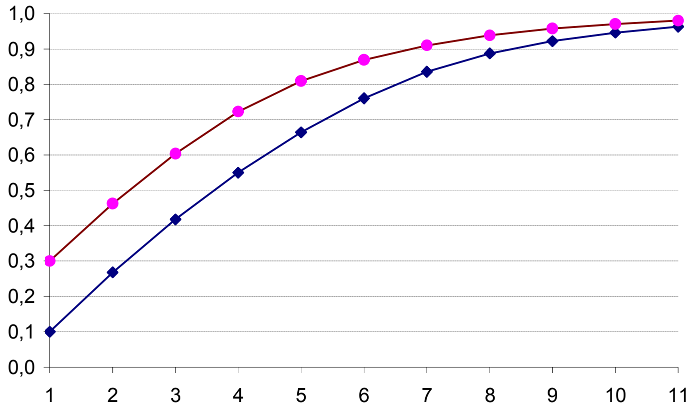

Рис. 24. Динамика типов агентов в примере 9.5

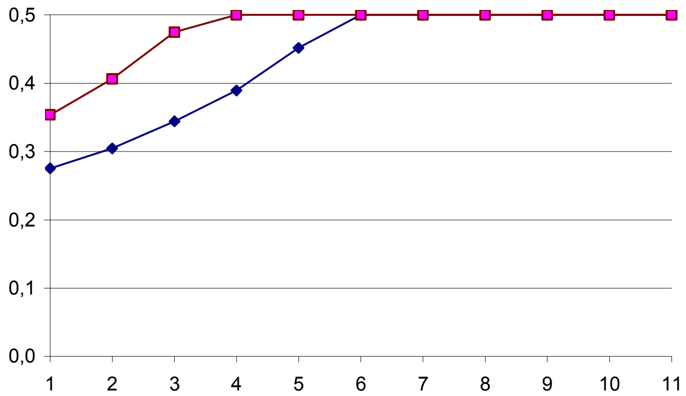

Рис. 25. Динамика оптимальных объемов работ в примере 9.5

Обучение в команде. До сих пор при рассмотрении научения агентов в процессе работы мы считали, что каждый агент учится только «на собственном опыте». Тем не менее, в командах имеет место обмен опытом, и агенты, наблюдая за деятельностью других (их успехами и трудностями), могут также приобретать опыт. Для того, чтобы отразить этот эффект, будем описывать «опыт», накопленный агентом, не только как сумму его собственных действий, но и добавим к этой сумме взвешенную сумму действий других агентов. В результате получим следующие выражения для соответственно объемов успешно выполненных работ и типов агентов:

$$(16)\ Z_i^k = \sum_{l=1}^{k} y_i^l \{1-(1-r_i^0)\exp(-\gamma_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \sum_{m=1}^{l-1} y_j^m)\},$$

$$(17)\ r_i^k = 1-(1-r_i^0)\exp(-\gamma_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \sum_{l=1}^{k-1} y_j^l),\ k = 2, 3, \dots,\ i \in N,$$

где константы $\{\alpha_{ij} \geq 0\}$ могут интерпретироваться как эффективности передачи опыта от j-го агента i-му, $i, j \in N$.

Тогда задача об оптимальном обучении примет вид:

$$(18)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{T} y_i^l \{1-(1-r_i^0)\exp(-\gamma_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \sum_{m=1}^{l-1} y_i^m)\} \to \max_{\{y_i^{1,T} | \sum_{\tau=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} y_i^\tau = Y\}}.$$

Пример 9.6. Рассмотрим задачу (18) в условиях примера 9.3 (скорости научения обоих агентов одинаковы, второй агент обладает большей начальной квалификацией) при матрице $||\alpha_{ij}|| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Качественно: первый агент обучается на своем опыте и на опыте второго агента (даже более эффективно, чем на своем). Второй же агент обучается только на своем собственном опыте. Динамика типов агентов представлена на Рис. 26, а динамика оптимальных объемов работ – на Рис. 27.

Первые шесть периодов первый агент не выполняет работ сам, а «наблюдает» за действиями второго агента. При этом квалификация первого агента растет гораздо быстрее, чем второго. Начиная с седьмого периода, оптимальным оказывается выполнение всего объема работ первым, а не вторым агентом[47].

[47] *Отметим, что, если ввести ограничение на объемы работ, выполняемых агентами за единицу времени, то структура решения изменится – см. обсуждение в примере* 9.5.

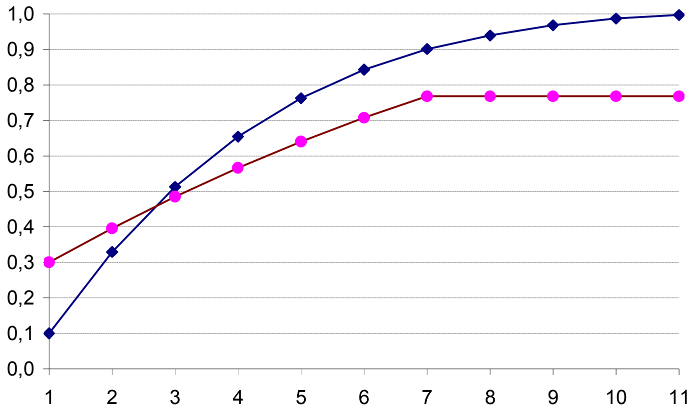

Рис. 26. Динамика типов агентов в примере 9.6

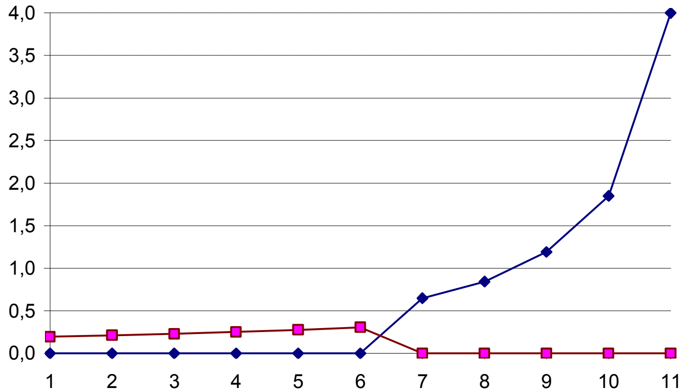

Рис. 27. Динамика оптимальных объемов работ в примере 9.6

Данный пример наглядно иллюстрирует, как недостаток начальной квалификации может быть успешно компенсирован эффективным обучением на чужом опыте. Возможна и другая (близкая) интерпретация. Можно считать второго агента учителем, тьютором, наставником, который, имея более высокую начальную квалификацию, обучает первого агента. В какой-то момент ученик «обгоняет» учителя и может работать самостоятельно. •

Итак, мы умеем ставить и решать задачи об оптимальном обучении команды в процессе работы. Спрашивается, а кто именно должен решать эти задачи и определять оптимальные объемы работ? Ответ зависит от того, в каком «режиме» функционирует команда. Если имеет место этап целенаправленного формирования и обучения команды[48] (а этот этап на практике может оказаться достаточно длительным), то объемы работ может распределять «учитель» (организатор обучения, тренинга и т.д.). При этом, правда, результат команды, как правило, не столь существенен, то есть не является главной целью. Вторым возможным вариантом является «режим реальной деятельности», которому, пожалуй, наиболее соответствует именно обучение в процессе работы. При этом члены команды могут самостоятельно выбирать оптимальные (с точки зрения и обучения, и результата) траектории обучения. Для этого необходимо, чтобы все существенные параметры (уровни начальной квалификации, скорости научения и т.д.) были общим знанием среди членов команды. То есть, как и в «рефлексивных моделях», приходим к выводу, что важнейшим условием стабильного и эффективного функционирования команды является наличие общего знания. И именно на формирование этого общего знания обычно нацелено большинство организационных и других усилий в процессе формирования и обучения команды.

Некоторые обобщения, выводы и перспективы. До сих пор мы предполагали, что уровень навыка каждого агента описывается зависимостью вида (1), то есть рассматривали достаточно рутинную деятельность. Рассмотрим несколько более сложный случай.

Так как итеративное научение является одним из частных случаев научения, то, помимо экспоненциальных кривых, соответствующих итеративному научению, встречаются кривые научения других типов, в том числе – логистические, которые аппроксимируются зависимостью (см. Рис. 28):

(19) $r(t) = r^0\, r^\infty / (r^0 + (r^\infty - r^0)\, e^{-\gamma t})$.

При этом скорость изменения $r(t)$ первоначально мала (некоторое время может требоваться на понимание задачи, идентификацию и осознание ситуации и т.п., то есть на первоначальную адаптацию), затем в окрестности точки перегиба скорость

---

[48] *Одной из целей обучения может быть повышение эффективности передачи опыта.*

увеличивается (система интенсивно обучается), а потом начинает уменьшаться.

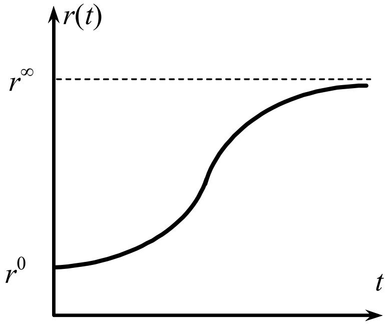

Рис. 28. Логистическая кривая научения

Пример 9.7. Решим задачу (9) для случая $T = 10$, $r^0 = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}75$, $Y = 10$ при условии, что динамика типа агента описывается логистической кривой (19). Динамика типов агента представлена на Рис. 29.

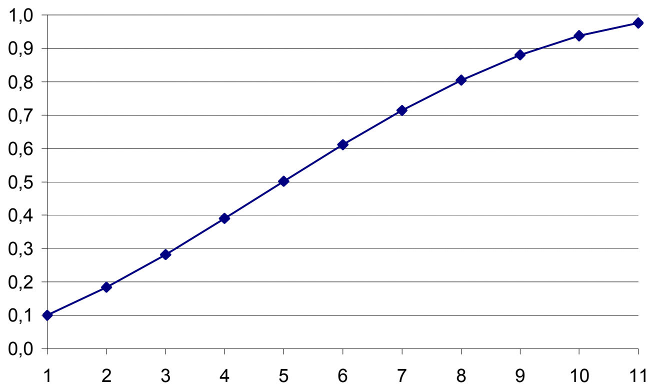

Рис. 29. Динамика типов агента в примере 9.7

Динамика оптимальных объемов работ представлена на Рис. 30.

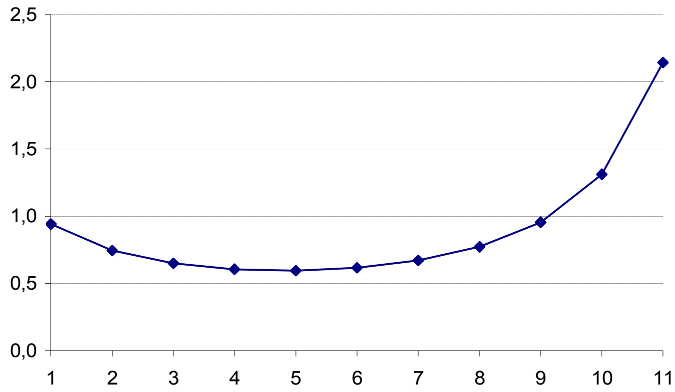

Рис. 30. Динамика оптимальных объемов работ в примере 9.7

Оптимальная стратегия обучения уже не столь тривиальна, как в примере 9.2 – сначала объем работ, выполняемых агентом, уменьшается, а затем начинает расти. •

Отметим, что результат утверждения 9.1 для команды, обучение членов которой описывается логистической кривой, не имеет места.

Задачи оптимального распределения работ между членами команды, научение которых описывается логистическим законом (19), формулируются аналогично соответствующим рассмотренным выше для экспоненциальных кривых научения задачам.

Таким образом, в настоящем разделе рассмотрены модели обучения в процессе работы. В рамках предположения о том, что объем уже выполненных агентом работ условно отражает накопленный им «опыт», сформулирована и решена задача об оптимальном обучении – выбора объемов работ, выполняемых агентами в те или иные промежутки времени. Проведенный анализ свидетельствует, что моделирование позволяет сделать следующие выводы:

- при фиксированном суммарном объеме работ одного агента результативные характеристики научения не зависят от того, как объемы работ распределены по периодам времени;

- решение задачи об оптимальном итеративном научении одного агента не зависит от его начальной квалификации;

- чем выше скорость научения агента, тем больший объем работ он должен выполнять в последних периодах (и, соответственно, тем меньший объем работ необходимо выделять на начальные периоды для повышения его начальной квалификации);

- оптимальной стратегией итеративного научения является увеличение объема работ агента со временем, причем, чем выше скорость обучения, тем более «выпуклой» является оптимальная траектория обучения. Если кривая научения выпуклая (агент обучается все более и более эффективно), то оптимальная траектория обучения будет убывающей, то есть оптимальной стратегией обучения будет уже не увеличение, а уменьшение объема работ агента со временем;
- если отсутствуют ограничения на индивидуальные объемы работ, то в команде весь объем работ выполняет «лучший» (с точки зрения комбинации начальной квалификации и скорости научения) агент;
- недостаток начальной квалификации агента может быть успешно компенсирован эффективным обучением как на его собственном, так и чужом опыте;
- важнейшим условием стабильного и эффективного функционирования команды является наличие общего знания, на формирование которого обычно нацелено большинство организационных и других усилий в процессе формирования и обучения команды.

В заключение настоящего раздела отметим, что существуют и более сложные (чем (1) и (19)) кривые научения – так называемые последовательные логистические кривые [63], соответствующие освоению различных смежных или все более сложных видов деятельности; обобщенные логистические кривые [59] и др. Их подробное рассмотрение выходит за рамки ограниченного объема настоящей работы, хотя, если известны законы научения членов команды (пусть даже эти законы довольно сложны), то задача оптимального распределения объемов работ может ставиться так, как это делалось выше. А вот поиск общего решения (желательно – аналитического) этой задачи является предметом будущих исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше проведен обзор и приведен ряд оригинальных результатов исследования математических моделей формирования и функционирования команд.

Полученные на сегодняшний день и приведенные в настоящей работе результаты вовсе не являются исчерпывающими. Тем не менее, они отражают общую методологию построения и изучения прикладных математических моделей функционирования организаций, которая может быть эффективно использована при решении широкого класса задач управления социально-экономическими системами.

С точки зрения теории следует признать, что многочисленные результаты изучения команд, полученные в психологии и социологии, на сегодняшний день в формальных моделях находят недостаточно полное отражение. Для многих моделей существуют определенные трудности в получении аналитических решений. Почти не учитывается «отраслевая» специфика (например, такой распространенный на практике класс команд, как спортивные команды, не стал еще предметом систематического формального теоретического исследования).

Перспективным направлением дальнейших прикладных исследований представляется расширение класса реальных организаций и команд, для которых формулируются и используются формальные модели управления.

<u>ПРИЛОЖЕНИЕ: РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ</u>

В настоящем приложении приводятся основные сведения об аппарате рефлексивных игр, используемом в настоящей работе при построении и анализе моделей, учитывающих иерархию взаимных представлений членов команды.

Модели принятия решений. Господствующая в науке на протяжении последнего полувека модель принятия субъектом решений (*гипотеза рационального поведения*) заключается в следующем: субъект стремится выбрать наилучшую в рамках имеющейся у него информации альтернативу. При этом в *модель принятия решений* входят, как минимум, множество альтернатив, из которого производится выбор, а также предпочтения субъекта на этом множестве, которые обычно описываются функцией полезности [29].

В случае, когда имеется только один субъект, дело обстоит достаточно просто – считается, что он выбирает из множества допустимых альтернатив такую альтернативу, на которой достигается максимум его функции полезности (выигрыша, предпочтения и т.д.) [24, 29, 57]. Отметим, что при этом существенной является *информированность* субъекта – та информация, которой он обладает на момент принятия решений о допустимых альтернативах, их предпочтительности, последствиях выбора той или иной альтернативы и т.д.

Если субъектов несколько, и выигрыш каждого зависит от выборов всех, то ситуация усложняется – для того, чтобы выбрать собственное действие субъект должен «предсказать», какие действия выберут его *оппоненты*. Моделями совместного принятия решений субъектами, интересы которых не совпадают, занимается *теория игр* [29, 127, 159], одной из основных задач которой является предсказание *решения игры* – устойчивого в том или ином смысле исхода взаимодействия рациональных субъектов (*игроков*, *агентов*).

Попробуем промоделировать ход рассуждений субъекта, принимающего решения. Пусть он считает, что его оппоненты выберут определенные действия. Тогда он должен выбрать свое действие, являющееся наилучшим при сложившейся обстановке. Но, если он считает своих оппонентов такими же рациональными, как и он сам, то он должен предположить, что при выборе своих действий они будут ожидать соответствующего выбора от него. Но тогда он должен учитывать и то, что оппоненты знают о том, что он считает их рациональными и так далее – получаем бесконечную цепочку «вложенных» рассуждений. Как же замкнуть эту бесконечную цепочку, какое решение принять в ситуации выбора? Наиболее распространенным способом такого «замыкания» является концепция так называемого *равновесия Нэша*. Равновесие Нэша – это ситуация игры, от которой никому из участников игры невыгодно отклоняться в одностороннем порядке. Иными словами: «если все оппоненты выбирают именно эту ситуацию, то и я ничего не выигрываю, отклоняясь от нее» – и так для каждого игрока.

Разумеется, тут есть много нюансов. Например: что, если равновесия Нэша не существует? или их несколько, и одни более выгодны для одного игрока, а другие – для другого? Бывает, как известно, и так, что ситуация равновесия оказывается для всех участников игры хуже, чем какая-то другая ситуация, не являющаяся равновесной. Все эти вопросы уже более полувека интенсивно обсуждаются специалистами (см. [29, 81, 99, 159]), однако их анализ выходит за рамки настоящей книги.

Рефлексия. Описанный выше процесс и результат размышлений агента о принципах принятия решений оппонентами и о выбираемых ими действиях называется *стратегической рефлексией* [78]. В отличие от стратегической рефлексии, в рамках *информационной рефлексии* субъект анализирует свои представления об информированности субъектов, представления об их представлениях и т.д.

Большинство концепций решения в теории игр (в том числе и равновесие Нэша) подразумевает, что игра, в которую играют участники (т.е. состав участников игры, множества их стратегий, функции выигрыша), является *общим знанием*, то есть игра известна всем игрокам (агентам); всем известно, что игра всем известна; всем известно, что всем известно, что игра всем известна и т.д., опять же, до бесконечности.

Конечно, общее знание (или, иначе говоря, *симметричное* общее знание) является частным случаем, а в общем случае представления агентов, представления о представлениях и т.д. могут различаться. Например, возможно *асимметричное* общее знание, при котором игроки понимают игру по разному, но само это различное понимание является общим знанием. Возможно также *субъективное* общее знание, когда игрок считает, что имеет место общее знание (а на самом деле его может не быть).

В общем случае *иерархия представлений* агентов называется *структурой информированности*. Моделью принятия агентами решений на основании иерархии их представлений является *рефлексивная игра* [78], в которой каждый агент моделирует в рамках своих представлений поведение оппонентов (тем самым порождаются *фантомные агенты* первого уровня, то есть агенты, существующие в сознании реальных агентов). Фантомные агенты первого уровня моделируют поведение своих оппонентов, то есть в их сознании существуют фантомные агенты второго уровня и т.д. Другими словами, каждый агент выбирает свои действия, моделируя свое взаимодействие с фантомными агентами, ожидая от оппонентов выбора определенных действий. Устойчивый исход такого взаимодействия называется *информационным равновесием* [78].

Но, после выбора реальными агентами своих действий, они получают информацию, по которой можно явно или косвенно судить о том, какие действия выбрали оппоненты. Поэтому информационное равновесие может быть как *стабильным* (когда все агенты – реальные и фантомные – получают подтверждение своих ожиданий), так и нестабильным (когда чьи-то ожидания не оправдываются). Кроме того, стабильные равновесия можно, в свою очередь, подразделить на *истинные* (те стабильные информационные равновесия, которые остаются равновесиями, если агенты оказываются адекватно и полностью информированными) и *ложные* [77].

Информационное управление. Равновесие рефлексивной игры агентов зависит от структуры их информированности. Изменяя эту структуру, можно соответственно менять информационное равновесие. Поэтому *информационным управлением* называют воздействие на структуру информированности агентов, осуществляемое с целью изменения информационного равновесия [77].

Задача информационного управления может быть на качественном уровне сформулирована следующим образом: найти такую структуру информированности агентов, чтобы информационное равновесие их рефлексивной игры было наиболее предпочтительно с точки зрения *центра* – субъекта, осуществляющего управление.

Сделаем важное терминологическое замечание. Под информационным управлением иногда понимают информационное воздействие – сообщение определенной информации. Мы же рассматриваем «информацию» как объект управления, а не как средство управления. Иными словами, мы исходим из того, что центр может сформировать у агентов ту или иную структуру информированности (из некоторого множества структур), и исследуем, что в результате этого получается. За рамками наших рассмотрений остается вопрос о том, как именно следует формировать эту структуру.

Для каждой конкретной модели решение задачи информационного управления может быть разбито на несколько этапов.

Первый (наверное, наиболее трудоемкий) этап, который можно назвать построением модели поведения агентов – исследование информационного равновесия, то есть определение зависимости исхода рефлексивной игры агентов от структуры их информированности.

Второй этап заключается в решении собственно задачи управления – зная зависимость информационного равновесия от структуры информированности, необходимо найти наилучшую для центра структуру информированности. Под «наилучшей» имеется в виду допустимая структура, которая (с учетом затрат центра на ее формирование) побудит агентов выбрать как информационное равновесие наиболее выгодный для центра набор действий.

Третий этап включает исследование свойств информационного управления – его эффективности, определяемой как значение целевой функции центра на множестве информационных равновесий игры агентов, стабильности (можно накладывать требование, чтобы реализуемое центром информационное равновесие было стабильным) и сложности.

С точки зрения задач формирования и функционирования команд информационное управление их деятельностью заключается в обеспечении условий получения членами команды достаточной информации, а также в формировании у них таких взаимных представлений, которые приводили бы, например – максимально быстро, к устойчивой работе команды.

Ниже приводятся теоретические результаты исследования рефлексивных игр [78, 105]. В том числе, в разделе П.1 вводится формальное определение рефлексивной игры и приводится описание ее решения – информационного равновесия. Раздел П.2 содержит определение стабильности информационного равновесия – его свойства, заключающегося в том, что ожидания всех агентов относительно поведения оппонентов оправдываются. В разделе П.3 стабильные информационные равновесия подразделяются на истинные (остающиеся равновесиями, когда агенты оказываются полностью и адекватно информированы друг о друге) и ложные. Условия существования истинных равновесий для случая, когда агенты наблюдают действия друг друга, рассмотрен в разделе П.4. Проблемы динамики структур информированности – изменения представлений агентов на основе получаемой в ходе игры информации – обсуждаются в разделе П.5.

П.1. Рефлексивные игры и информационные равновесия

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, ..., n\}$ *агентов* (игроков), информированность которых описывается *информационной структурой* $I = (I_1, I_2, ..., I_n)$, где $I_i = (\theta_i, \theta_{ij}, \theta_{ijk}, ...)$, $i, j, k \in N$, – структура информированности i-го агента, $i \in N$, $\theta_i \in \Omega$ – его представления о состоянии природы, $\theta_{ij} \in \Omega$ – его представления о представлениях j-го агента, $\theta_{ijk} \in \Omega$ – представления i-го агента о том, что j-ый агент думает о представлениях k-го агента и т.д. в общем случае до бесконечности [78].

Если задана структура информированности I, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и *фантомных* – то есть существующих в сознании других реальных и фантомных агентов). Выбор τ-агентом, где τ – некоторая последовательность индексов из множества N, своего действия x_τ в рамках гипотезы рационального поведения [78] определяется его структурой информированности I_τ, поэтому, имея эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет *рефлексию*). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Обозначим Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N, Σ – объединение Σ_+ с пустой последовательностью, $|\sigma|$ – количество индексов в последовательности σ (для пустой последовательности $|\varnothing|$ принимается равным нулю).

Если «обычная» *игра в нормальной форме* определяется как кортеж $\Gamma = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}\}$, то *рефлексивной игрой* Γ_I называется игра, задаваемая кортежем $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, I, \Omega\}$, где N – множество игроков (агентов), X_i – множество допустимых действий i-го игрока, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $X' = \prod_{i \in N} X_i$, $i \in N$, I – структура информированности. Другими словами, отличие рефлексивной игры от игры в нормальной форме заключается в том, что в первой информированность игроков не является *общим знанием*[49], а описывается некоторой информационной структурой.

Равновесием Нэша игры Γ в условиях общего знания называется такой вектор $x^* \in X$ действий игроков, одностороннее отклонение от которого не выгодно ни для одного из игроков, то есть:

(1) $\forall\ i \in N, \forall\ y_i \in X_i\ f_i(x) \geq f_i(y_i,\ x_{-i})$,

где $x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ – обстановка игры для i-го игрока, $x_{-i} \in X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$, $i \in N$.

Определим равновесие рефлексивной игры. Набор действий x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, называется *информационным равновесием* [78], если выполнены следующие условия:

1. структура информированности I имеет конечную сложность ν, то есть, дерево I содержит конечный набор попарно различных поддеревьев;

2. $\forall \lambda, \mu \in \Sigma_+\ \ \forall\ i \in N\ \ I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}{}^* = x_{\mu i}{}^*$;

3. $\forall\ i \in N, \forall\ \sigma \in \Sigma$

(2) $x_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg} \max\limits_{y_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \ldots, x_{\sigma i, i-1}^*, y_i, x_{\sigma i, i+1}^*, \ldots, x_{\sigma i n}^*)$.

Будем рассматривать регулярные структуры информированности [78], для задания которых введем вспомогательное понятие *регулярного конечного дерева* (РКД), которое определим рекуррентно. Пусть в игре участвуют n агентов. Если (в простейшем случае) все агенты одинаково информированы, то структура информированности имеет сложность n и единичную глубину. Будем представлять эту ситуацию в виде дерева, состоящего из корневой вершины, n ребер и n висячих вершин. Далее РКД может «расти»

[49] *Общим знанием называется факт, о котором известно всем агентам, а также всем агентам известно, что это всем известно и т.д. до бесконечности.*

следующим образом: к каждой висячей вершине τi, $\tau \in \Sigma$, присоединяется ровно $(n - 1)$ ребро, при этом возникает $(n - 1)$ висячая вершина τij, $j = 1, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n$. Построенное РКД будем интерпретировать так: если имеется висячая вершина τi, $\tau \in \Sigma$, то τi-агент одинаково информирован с τ-агентом (если τ – пустая последовательность, то τi-агент является реальным, и его субъективные представления совпадают с объективными).

Напомним, что, во-первых, максимальная глубина k_i РКД i-го реального агента в [78] названа *рангом* его *рефлексии*. Во-вторых, любая конечная регулярная информационная структура однозначно (с учетом *аксиомы автоинформированности* – $\forall\ i \in N$ $\forall\ \tau, \sigma \in \Sigma\ \ \theta_{\tau ii\sigma} = \theta_{\tau i\sigma}$ [78]) задается перечислением своих висячих вершин.

Обозначим множество параметрических (параметр – вектор $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \Omega^n$) равновесий Нэша

(3) $E_N(\boldsymbol{\theta}) = \{\{x_i\}_{i \in N} \in X' \mid \forall\ i \in N, \forall\ y_i \in X_i$

$$f_i(\theta_i, x_1, \ldots, x_n) \geq f_i(\theta_i, x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\}.$$

Предположим, что на нижнем уровне $\{\theta_{\tau ij}\}_{j \in N}$ конечной регулярной структуры информированности имеет место субъективное общее знание [78] фантомных агентов. Тогда с точки зрения τi-агента возможными являются равновесия их игры из множества $E_N((\theta_{\tau ij})_{j \in N})$. Определим множество наилучших ответов i-го агента на выбор оппонентами действий из множества $B \subseteq X_{-i}$ при множестве Ω возможных состояний природы:

(4) $BR_i(\Omega, B) = \bigcup\limits_{x_{-i} \in B,\, \theta \in \Omega} \operatorname{Arg} \max\limits_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i})$, $i \in N$,

а также следующие величины и множества

(5) $E_N = \bigcup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega^n} E_N(\boldsymbol{\theta})$,

(6) $X_i^0 = Proj_i\, E_N$, $i \in N$,

(7) $X_{-i}^k = \prod\limits_{j \neq i} X_i^k$, $i \in N$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

где

(8) $X_i^k = BR_i(\Omega, X_{-i}^{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, i \in N$.

Отображение $BR_i(\cdot, \cdot)$: $\Omega \times X_{-i} \to X_i$ называется *рефлексивным отображением* i-го агента, $i \in N$ [78]. В [78] доказано, что

$X_i^k \subseteq X_i^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, $i \in N$, то есть с ростом ранга рефлексии множества (8) возможных наилучших ответов агентов не сужаются.

Если структура информированности имеет конечную сложность, то можно построить *граф рефлексивной игры*, наглядно показывающий взаимосвязь между действиями агентов (как реальных, так и фантомных), участвующих в равновесии [78].

Вершинами этого ориентированного графа являются действия x_τ, $\tau \in \Sigma_+$, отвечающие попарно нетождественным структурам информированности I_τ, или компоненты структуры информированности θ_τ, или просто номер τ реального или фантомного агента, $\tau \in \Sigma_+$.

Между вершинами проведены дуги по следующему правилу: к каждой вершине $x_{\sigma i}$ проведены дуги от $(n - 1)$ вершин, отвечающих структурам $I_{\sigma ij}$, $j \in N \setminus \{i\}$. Если две вершины соединены двумя противоположно направленными дугами, будем изображать одно ребро с двумя стрелками.

Подчеркнем, что граф рефлексивной игры соответствует системе уравнений (1) (то есть определению информационного равновесия), в то время как решения ее может и не существовать.

Итак, граф G_I рефлексивной игры Γ_I, структура информированности которой имеет конечную сложность, определяется следующим образом:

- вершины графа G_I соответствуют реальным и фантомным агентам, участвующим в рефлексивной игре, то есть попарно нетождественным структурам информированности;

- дуги графа G_I отражают взаимную информированность агентов: если от одного агента (реального или фантомного) существует путь к другому агенту, то второй адекватно информирован о первом [78].

Если в вершинах графа G_I изображать представления соответствующего агента о состоянии природы, то рефлексивная игра Γ_I с конечной структурой информированности I может быть задана кортежем $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, G_I\}$, где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, G_I – граф рефлексивной игры.

Отметим, что во многих случаях рефлексивную игру более удобно (и наглядно) описывать именно в терминах графа G_I, а не дерева информационной структуры – см. многочисленные примеры в [78] и Рис. 32, Рис. 33, Рис. 34 ниже.

П.2. Стабильные информационные равновесия

Одной из особенностей «классического» равновесия Нэша является его самоподдерживающийся характер – если игра повторяется несколько раз, и все игроки кроме i-го выбирают одни и те же равновесные действия, то и i-му нет резона отклоняться от своего равновесного действия. Это обстоятельство очевидным образом связано с тем, что представления всех игроков о реальности адекватны – значение состояния природы является общим знанием.

В случае информационного равновесия ситуация, вообще говоря, может быть иной. Действительно, в результате однократного разыгрывания игры может оказаться, что какие-то из игроков (или даже все) наблюдают не тот результат, на который они рассчитывали. Это может быть связано как с неверным представлением о состоянии природы, так и с неадекватной информированностью о представлениях оппонентов. В любом случае, самоподдерживающийся характер равновесия нарушается – если игра повторяется во второй раз, действия игроков могут измениться.

Однако в некоторых случаях самоподдерживающийся характер равновесия может иметь место и при различных (и, вообще говоря, неверных) представлениях агентов. Говоря неформально, это происходит тогда, когда каждый агент (как реальный, так и фантомный) наблюдает тот результат игры, которого ожидает. Для формального изложения нам понадобится дополнить описание рефлексивной игры.

Напомним, что рефлексивная игра задается кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, I\}$. Дополним эту конструкцию набором функций $w_i(\cdot)\colon \Omega \times X' \to W_i$, $i \in N$, каждая из которых отображает вектор (θ, x) в элемент w_i некоторого множества W_i. Этот элемент w_i и есть то, что i-ый агент наблюдает в результате разыгрывания игры.

Функцию $w_i(\cdot)$ будем называть *функцией наблюдения* i-го агента [77]. Будем считать, что функции наблюдения являются общим знанием среди агентов, а также примем, что свое собственное действие агент всегда наблюдает.

Если $w_i(\theta, x) = (\theta, x)$, т. е. $W_i = \Omega \times X'$, то i-ый агент наблюдает как состояние природы, так и действия всех агентов. Если, напротив, множество W_i состоит из одного элемента, то i-ый агент ничего не наблюдает.

Пусть в рефлексивной игре существует информационное равновесие x_τ, $\tau \in \Sigma_+$ (напомним, что τ – произвольная непустая конечная последовательность индексов из N). Зафиксируем $i \in N$ и рассмотрим i-го агента. Он ожидает в результате игры пронаблюдать величину

(1) $w_i\,(\theta_i, x_{i1}, \dots, x_{i\,i-1}, x_i, x_{i\,i+1}, \dots, x_{in})$.

На самом же деле он наблюдает величину

(2) $w_i\,(\theta, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Поэтому требование стабильности для i-агента означает совпадение величин (1) и (2) (напомним, что эти величины являются элементами некоторого множества W_i).

Пусть величины (1) и (2) равны, т.е. i-агент и после разыгрывания игры не сомневается в истинности своих представлений. Однако является ли это достаточным основанием для того, чтобы он и в следующий раз выбрал то же действие x_i? Ясно, что ответ отрицательный, что продемонстрируем на следующем примере.

Пример П.1. [77]. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Omega = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$), приведенными на Рис. 31,

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (0,1) & (1,2) \\ (1,1) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

*Рис. 31. Матрицы выигрышей в примере П.*1

а граф рефлексивной игры имеет вид, изображенный на Рис. 32.

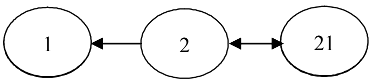

*Рис. 32. Граф рефлексивной игры в примере П.*1

Пусть при этом $\theta = \theta_1 = 1$, $\theta_2 = \theta_{21} = 2$, и каждый агент наблюдает свой выигрыш (т.е. функция наблюдения агента совпадает с его функцией выигрыша). Ясно, что информационным равновесием является набор $x_1 = x_2 = x_{21} = 2$, т. е. первый и второй агенты, а также 21-агент выбирают вторые действия. Однако реальное состояние природы $\theta = 1$ становится известным второму агенту после розыгрыша игры (и получения им выигрыша 0 вместо ожидаемого 2). Поэтому в следующий раз второй агент выберет действие $x_2 = 1$, что в случае повторяющейся игры побуждает и первого агента изменить свое действие (выбрать $x_1 = 1$). •

Таким образом, для стабильности равновесия необходимо чтобы и ij-агент, $i, j \in N$, наблюдал «нужную» величину. Он ожидает в результате игры пронаблюдать

(3) $w_j\,(\theta_{ij}, x_{ij1}, \ldots, x_{ij\,j-1}, x_{ij}, x_{ij\,j+1}, \ldots, x_{ijn})$.

На самом же деле (т. е. i-субъективно, ведь ij-агент существует в сознании i-агента) он наблюдает величину

(4) $w_j\,(\theta_i, x_{i1}, \ldots, x_{i\,j-1}, x_{ij}, x_{i\,j+1}, \ldots, x_{in})$.

Поэтому требование стабильности для ij-агента означает совпадение величин (3) и (4).

В общем случае, т.е. для τi-агента, $\tau i \in \Sigma_+$, условие стабильности определим следующим образом.

Информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, будем называть *стабильным* при заданной структуре информированности I, если для любого $\tau i \in \Sigma_+$ выполняется

(5) $w_i\,(\theta_{\tau i}, x_{\tau i1}, \ldots, x_{\tau i\,i-1}, x_{\tau i}, x_{\tau i\,i+1}, \ldots, x_{\tau in}) =$

$= w_i\,(\theta_\tau, x_{\tau 1}, \ldots, x_{\tau\,i-1}, x_{\tau i}, x_{\tau\,i+1}, \ldots, x_{\tau n})$.

Информационное равновесие, не являющееся стабильным, будем называть *нестабильным*. В частности, информационное равновесие в примере П.1 является нестабильным. Следующее утверждение дает оценку сложности проверки стабильности информационного равновесия.

Утверждение П.1. [77]. Пусть структура информированности I имеет сложность ν, и существует информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$. Тогда система соотношений (5) содержит не более чем ν попарно различных условий.

П.3. Истинные и ложные равновесия

Стабильные информационные равновесия будем разделять на два класса – истинные и ложные равновесия. Определение предварим примером.

Пример П.2. Рассмотрим игру, в которой участвуют три агента с целевыми функциями

$$f_i(r_i, x_1, x_2, x_3) = x_i - \frac{x_i(x_1 + x_2 + x_3)}{r_i},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$. Целевые функции являются общим знанием с точностью до *типов* агентов – параметров $r_i > 0$. Вектор $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ типов агентов может интерпретироваться как состояние природы. При этом здесь и далее подразумевается, что свой собственный тип известен каждому агенту достоверно.

Граф рефлексивной игры имеет вид, изображенный на Рис. 33, при этом $r_2 = r_3 = r$, $r_{21} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = c$. Общим знанием является следующее: каждый игрок знает свой тип и наблюдает сумму действий оппонентов.

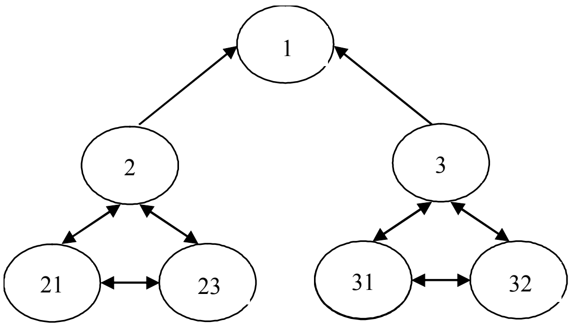

Рис. 33. Граф рефлексивной игры в примере П.2

Нетрудно вычислить единственное информационное равновесие этой игры:

(1) $x_2 = x_3 = (3\,r - 2\,c) / 4$,

$x_{21} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = (2\,c - r) / 4$,

$x_1 = (2\,r_1 - 3\,r + 2\,c) / 4$.

Условия стабильности (см. выражение (5) предыдущего раздела) в данном случае выглядят следующим образом:

(2) $x_{21} + x_{23} = x_1 + x_3$, $x_{31} + x_{32} = x_1 + x_2$.

Условия записаны для 2- и 3-агентов, поскольку для 1-, 21-, 23-, 31-, 32-агентов они тривиальны.

Подставляя (1) в (2), получаем, что необходимым и достаточным условием стабильности является равенство

(3) $2\,c = r_1 + r$.

Пусть условие (3) выполнено. Тогда равновесные действия реальных агентов таковы:

(4) $x_2 = x_3 = (3\,r - r_1) / 4$, $x_1 = (3\,r_1 - 2\,r) / 4$.

Предположим теперь, что типы агентов стали общим знанием (см. Рис. 34).

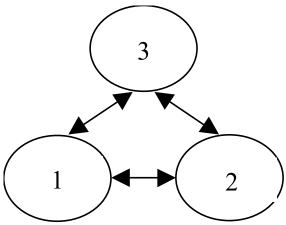

Рис. 34. Общее знание в примере П.2

Нетрудно убедиться, что в случае общего знания единственным равновесием будет (4).

Таким образом, при выполнении условия (3) имеет место несколько парадоксальная ситуация. Представления второго и третьего агентов не соответствуют действительности (см. Рис. 33), однако их равновесные действия (4) в точности такие, как были бы в случае одинаковой информированности (см. Рис. 34). Такое стабильное информационное равновесие называется истинным. •

Пусть набор действий $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Будем называть его *истинным* равновесием, если набор $(x_1, \ldots, x_n)$ является равновесием в условиях общего знания о состоянии природы θ (или о наборе $(r_1, \ldots, r_n)$ типов агентов).

Из приведенного определения, в частности, следует, что в условиях общего знания любое информационное равновесие является истинным. Рассмотрим еще один случай, когда этот факт имеет место.

Утверждение П.2. [77]. Пусть целевые функции агентов имеют вид

$$f_i\,(r_i, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i\,(r_i, x_i, z_i(x_{-i})),$$

а функции наблюдения – вид $w_i(\theta, x) = z_i(x_{-i})$, $i \in N$. Содержательно это означает следующее: выигрыш каждого агента зависит от его типа, его действия и функции наблюдения, зависящей от действий остальных агентов (но не от их типов).

Тогда любое стабильное равновесие является истинным.

Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, назовем *ложным*.

Таким образом, ложное равновесие – это такое стабильное информационное равновесие, которое не является равновесием в случае одинаковой информированности агентов (в условиях общего знания).

Пример П.3. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Omega = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$), приведенными на Рис. 35.

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \begin{pmatrix} (2,2) & (4,1) \\ (1,4) & (3,3) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (2,2) & (0,3) \\ (3,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 35. Матрицы выигрышей в примере П.3

Пусть, далее, в реальности $\theta = 2$, однако оба агента считают общим знанием $\theta = 1$. Каждый агент наблюдает пару (x_1, x_2), которая и является функцией наблюдения.

Информационным равновесием является выбор каждым агентом действия 1. Если бы общим знанием было бы реальное состояние природы, равновесным был бы выбор каждым агентом действия 2. Таким образом, выигрыши агентов в информационном равновесии оказываются бóльшими, чем если бы общим знанием было реальное состояние природы. •

П.4. Случай наблюдаемых действий агентов

В разделе П.1 приведено определение информационного равновесия, которое может интерпретироваться как набор субъективных равновесий – i-ый (реальный) агент, $i \in N$, обладающий структурой информированности I_i, определяет набор действий $(x^*_{i\sigma}(I_{i\sigma}))_{\sigma \in \Sigma}$, который является равновесием с его субъективной точки зрения. В частности, он ожидает от j-го реального агента, $j \in N$, выбора действия $x^*_{ij}(I_{ij})$ (напомним, что фантомный ij-агент является образом j-го агента в представлениях i-го).

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда функцией наблюдения является вектор действий всех агентов (именно этот случай, наверное, наиболее близок к задачам моделирования команд):

$$w_i(\theta, x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда *стабильным* является информационное равновесие $x^* = (x^*_{\sigma i})_{i \in N,\, \sigma \in \Sigma}$, удовлетворяющее следующему соотношению:

(1) $\forall\ i \in N, \forall\ \sigma \in \Sigma\ \ x^*_{\sigma i} = x^*_i$.

Соотношение (1) означает, что действие любого реального агента совпадает с действием, ожидаемым от него любым другим (реальным или фантомным) агентом.

Введем следующее предположение относительно целевых функций $f_i(\cdot)$ и множеств Ω, X_i:

П.1. $\forall\ i \in N$, $\forall\ \sigma \in \Sigma$, для любых представлений $\theta_{\sigma i} \in \Omega$ и $\theta'_{\sigma i} \in \Omega$ таких, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры $x^*_{\sigma i,-i} \in X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$

(2) $BR_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{\sigma i,-i}) \cap BR_i(\theta'_{\sigma i}, x^*_{\sigma i,-i}) = \varnothing$,

где $BR_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{\sigma i,-i}) = \operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{\sigma i 1}, \ldots, x^*_{\sigma i, i-1}, y_i, x^*_{\sigma i, i+1}, \ldots, x^*_{\sigma i n})$.

<u>Утверждение П.3. [77].</u> Пусть выполнено предположение П.1 и существует информационное равновесие x^*. Тогда x^* является стабильным информационным равновесием в том и только в том случае, если структура информированности игры такова, что

(3) $\forall\ i \in N, \forall\ \sigma \in \Sigma\ \ \theta_{\sigma i} = \theta_i$.

<u>Следствие.</u> Если выполнено предположение П.1, то стабильные информационные равновесия могут возникать только в рамках структур информированности, удовлетворяющих (3), то есть в

рамках структур информированности единичной глубины. При этом, в частности, невозможны ложные равновесия.

Уместно отметить аналогию между условием П.1 и «условием равноправия функций предпочтения» в [10, с. 259].

При ослаблении требования (1) результат утверждения П.3 теряет силу. Например, если считать «стабильным» информационное равновесие x^*, удовлетворяющее свойству

(4) $\forall\ i, j \in N\ \ x^*_{ji} = x^*_i$

(действие любого реального агента совпадает с действием, ожидаемым от него любым другим реальным агентом), то в рамках предположения П.1 существуют структуры информированности, не удовлетворяющие (3), при которых соответствующие информационные равновесия «стабильны» в смысле (4).

Утверждение П.3 важно как с точки зрения задач анализа, так и с точки зрения задач синтеза. Действительно, оно позволяет при исследовании свойств информационных равновесий для определенного класса ситуаций (определяемых предположением П.1) выделять при помощью условия (3) множества информационных структур, при которых информационные равновесия могут быть стабильными. С точки зрения задачи информационного управления, утверждение П.3 накладывает ограничения на множество управляющих воздействий, приводящих к стабильному равновесию игры управляемых субъектов.

Пусть теперь каждый из n агентов характеризуется своим типом $r_i \geq 0$, $i \in N$, и каждый агент знает свой тип, но, вообще говоря, не знает тип остальных агентов. Будем считать, что целевая функция i-го агента имеет вид $f_i(r_i, x)$, т. е. зависит от его собственного типа, но не от типов оппонентов. Относительно типов каждый из агентов имеет иерархию представлений, состоящую из следующих компонент: r_{ij} – представление i-го агента о типе j-го агента, r_{ijk} – представление i-го агента о представлениях j-го агента о типе k-го агента и т.д., $i, j, k \in N$.

Содержательное различие между обсуждениями в терминах неопределенного параметра θ и в терминах вектора типов $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Re^n_+$ состоит в следующем. В первом случае иногда естественным является предположение о том, что значение θ наблюдается агентами, которые могут на основании этого корректировать свои представления. Во втором случае предполагается, что вектор типов $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ непосредственно не наблюдаем, поэтому агенты могут корректировать свои представления лишь на основании наблюдаемых действий оппонентов. При этом согласно утверждению П.2 все стабильные равновесия являются истинными. Поэтому сосредоточим внимание на исследовании стабильности. Условие (1) и здесь будет задавать стабильное информационное равновесие, а предположение П.1 и утверждение П.3 перепишем следующим образом.

П.1$^{\mathbf{r}}$. $\forall\, i \in N$, $\forall\, \sigma \in \Sigma$, для любых представлений $r_{\sigma i}$ и $r'_{\sigma i}$ таких, что $r_{\sigma i} \neq r'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры $x^*_{\sigma i,-i} \in X_{-i}$

$$BR_i(r_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) \cap BR_i(r'_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \varnothing,$$

где $BR_i(r_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} f_i(r_{\sigma i}, x^*_{\sigma i1}, ..., x^*_{\sigma i,i-1}, y_i, x^*_{\sigma i,i+1}, ..., x^*_{\sigma in})$.

<u>Утверждение П.3$^{\mathrm{r}}$. [77].</u> Пусть выполнено предположение П.1$^{\mathrm{r}}$ и существует информационное равновесие x^*. Тогда x^* является стабильным информационным равновесием в том и только в том случае, если структура информированности игры такова, что

$$\forall\, i \in N,\ \forall\, \sigma \in \Sigma\ \ r_{\sigma i} = r_i.$$

Определим следующие множества:

- множество Ψ пар (x, I), таких, что $x \in X'$, $I \in \mathfrak{I}$ и вектор x является информационным равновесием при структуре информированности I, где $\mathfrak{I}$ – множество всевозможных структур информированности (отметим, что $\mathfrak{I}$ зависит от вектора типов r).
- множество $\Psi_X(I) \subseteq X'$ векторов действий агентов, являющихся информационными равновесиями в рамках структуры информированности I;
- множество $\Psi_I(x) \subseteq \mathfrak{I}$ информационных структур, в рамках которых вектор x действий агентов является информационным равновесием (решение обратной задачи).

Определим также подмножества этих множеств, выделяемые требованием стабильности информационного равновесия:

- множество Ψ^s пар (x, I), таких, что $x \in X'$, $I \in \mathfrak{I}$ и вектор x является стабильным информационным равновесием при структуре информированности I;

- множество $\Psi_X^s(I) \subseteq X'$ векторов действий агентов, являющихся стабильными информационными равновесиями в рамках структуры информированности I;
- множество $\Psi_I^s(x) \subseteq \mathfrak{I}$ информационных структур, в рамках которых вектор x действий агентов является стабильным информационным равновесием.

Обозначим: I_0 – структуру информированности единичной глубины, которая соответствует тому, что вектор r истинных типов агентов является общим знанием. Заметим, что $\Psi_X^s(I_0) = \Psi_X(I_0)$ – любое информационное равновесие, соответствующее общему знанию, является стабильным.

В терминах введенных множеств *истинное равновесие* образует любая пара $(x, I) \in \Psi^s$ такая, что $(x, I_0) \in \Psi$. Содержательно это означает, что вектор действий x останется (стабильным) информационным равновесием, если вектор типов станет общим знанием.

Ложное равновесие образует любая пара $(x, I) \in \Psi^s$ такая, что $(x, I_0) \notin \Psi$. Содержательно это означает, что вектор действий x перестанет быть информационным равновесием, если вектор типов станет общим знанием.

Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ – стабильное равновесие. Определим для каждого $i \in N$ следующие множества:

$$R_i = \{r_i \in \Re_+ \mid x_i^* \in BR_i(r_i, x_{-i}^*)\}.$$

Эти множества не зависят от структуры информированности. Поэтому они позволяют сформулировать два утверждения, проясняющие связь между структурой информированности и стабильностью равновесия.

<u>Утверждение П.4. [77].</u> Пусть x^* – стабильное равновесие. Если для любого $i \in N$ множество R_i состоит ровно из одного элемента, то вектор типов является общим знанием (и, соответственно, равновесие истинное).

<u>Утверждение П.5. [77].</u> Если равновесие x^* является стабильным при некоторой структуре информированности, то для элементов этой структуры при любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется $r_{\sigma i} \in R_i$.

Утверждение П.5 накладывает довольно жесткие требования на структуру информированности: если равновесие является стабильным, то все типы реальных агентов, а также представления о типах принадлежат множествам R_i.

П.5. Динамика структур информированности

Рассмотрим динамику поведения агентов – *повторяющуюся рефлексивную игру* (ПРИ)[50], заключающуюся в многократном повторении рефлексирующими агентами актов выбора своих действий. Динамические эффекты могут возникнуть, если в процессе игры агенты получают новую информацию, свидетельствующую о необходимости коррекции своих представлений – изменения значений компонентов структуры информированности. Таким образом, в ПРИ на каждом шаге выбор каждого агента состоит из двух этапов – коррекции компонентов структуры информированности и выбора действия, являющегося субъективным информационным равновесием в рамках новой структуры его информированности.

Определим *историю игры* – совокупность выбранных к рассматриваемому моменту времени действий агентов и реализовавшихся значений их целевых функций. Множество всевозможных историй игры, которые могут сложиться на очередном шаге, обозначим H. Каждый из агентов обладает в общем случае только частью информации об объективной истории игры – ему достоверно известны его собственные действия и значения его целевой функции, а также, быть может, действия и/или значения целевых функций некоторых оппонентов и/или какие-либо другие агрегированные характеристики результатов деятельности всех или части агентов. Назовем эту информацию $h_i \in H_i \subseteq H$ *субъективной историей игры i-го агента*.

На основании своей субъективной истории игры каждый агент оценивает правильность своих представлений, корректирует их тем или иным образом, и на следующем шаге выбирает действия на основании «новых» представлений.

В силу гипотезы рационального поведения активных агентов при выборе действий каждый из них стремится, чтобы его действие было наилучшим ответом на прогнозируемую обстановку в рамках имеющихся представлений о значении состояния природы. Поэтому *равновесием повторяющейся рефлексивной игры* можно

[50] *Отметим, что повторяющуюся рефлексивную игру не следует трактовать как игру в развернутой форме, так как в первой на каждом шаге все агенты выбирают свои действия одновременно и независимо.*

считать такую совокупность структур информированности игры в целом и векторов действий реальных агентов, что каждое из действий принадлежит соответствующему субъективному равновесию, определенному на основании данной структуры информированности. Такую совокупность представлений агентов и их действий будем называть *согласованной* – действия агентов совпадают с прогнозируемыми в рамках сложившейся структуры информированности и наоборот: структура информированности принадлежит множеству решений обратной задачи информационного управления [77].

Формализуем приведенные выше качественные рассуждения о динамике поведения агентов.

Выше были определены три множества: множество Ψ пар (x, I), таких, что $x \in X'$, $I \in \mathfrak{I}$ и вектор x является информационным равновесием при структуре информированности I, где $\mathfrak{I}$ – множество всевозможных РКД; множество $\Psi_X(I) \subseteq X'$ векторов действий агентов, являющихся информационными равновесиями в рамках структуры информированности I; множество $\Psi_I(x) \subseteq \mathfrak{I}$ информационных структур, в рамках которых вектор x действий агентов является информационным равновесием.

В более общем случае, обозначив $h(x) \subseteq H$ – множество всевозможных историй игры, которые могут сложиться при векторе действий $x \in X'$ на очередном шаге, $X(h)$ – множество векторов действий агентов, приводящих к реализации истории игры $h \in H$, определим:

- множество Ψ_h пар (h, I), таких, что $h \in H$, $I \in \mathfrak{I}$, $\exists\, x \in X'$: $h \in h(x)$ и вектор x является информационным равновесием при структуре информированности I;
- множество $\Psi_h(I) = \bigcup\limits_{x \in \Psi(I)} h(x) \subseteq H$ историй игры, реализуемых векторами действий, являющихся информационными равновесиями при структуре информированности I;
- множество $\Psi_h(h) \subseteq \mathfrak{I}$ информационных структур, в рамках которых существует вектор x действий агентов, являющийся информационным равновесием и приводящий к реализации данной истории, то есть $h \in h(x)$.

Определим *модель динамики информационной структуры* i-го агента, $i \in N$, как отображение $G_i(I_i, \Psi_h(h_i))$: $\mathfrak{I} \times 2^{\mathfrak{I}} \to \mathfrak{I}$ текущей информационной структуры i-го агента и множества $2^{\Im}$ информационных структур $\Psi_h(h_i)$, согласованных с наблюдаемой им на рассматриваемом шаге[51] историей игры h_i, во множество информационных структур.

Содержательно модель динамики информационной структуры описывает, как агент изменяет иерархию своих представлений в зависимости от ее текущего значения и множества информационных структур, которые согласованы с субъективной истории игры.

Формально последовательность информационных структур i-го агента и последовательность его действий при заданной начальной информационной структуре I_i^0 можно записать в следующем виде:

(1) $I_i^t \in G_i(I_i^{t-1}, \Psi_h(h_i^{t-1})), i \in N, t = 1, 2, \ldots, .$

(2) $x_i^t \in \Psi_X(I_i^t)$,

Равновесие ПРИ формально можно определить как множество векторов x с компонентами

(3) $x_i \in \Psi_X(I_i), i \in N$,

и информационных структур

(4) $I_i \in G_i(I_i, \Psi_h(h_i(x_i))), i \in N$.

Как и в любых моделях динамики коллективного поведения [48, 62, 63, 80], при исследовании ПРИ возникают следующие задачи:

- получение условий существования равновесия ПРИ и его единственности;
- изучение устойчивости и скорости сходимости последовательностей (1) и (2) в зависимости от модели $G(\cdot)$ динамики информационной структуры;
- анализ областей притяжения различных равновесий и др.

Качественно сложность теоретического анализа свойств ПРИ обусловлена тем, что в них изменяются информационные структуры, и для одной и той же статической рефлексивной игры существует множество динамических аналогов, порождаемых разнооб-

---

[51] *Отметим, что в рамках рассматриваемой модели каждый агент изменяет свою структуру информированности на основании только наблюдаемых на текущем шаге результатов, а не на основании всей предшествующей траектории.*

разными моделями динамики информационных структур. Кроме того, различные модели динамики информационных структур порождают различные определения равновесия ПРИ (см. выражение (3)) – одна и та же пара (x, I) может быть равновесием ПРИ с одной моделью динамики информационных структур и не быть равновесием ПРИ с другой такой моделью.

Общие результаты исследования ПРИ на сегодняшний день отсутствуют, поэтому в [77, 105] и выше приведен анализ простейших частных случаев.

ЛИТЕРАТУРА[52]

1 Авдеев В.П., Бурков В.Н., Еналеев А.К., Киселева Т.В. Многоканальные организационные механизмы. – М.: ИПУ РАН, 1986.

2 Армстронг М. Практика управления человеческими ресурсами. – СПб.: Питер, 2005.

3 *Балашов В.Г., Заложнев А.Ю., Иващенко А.А., Новиков Д.А. Механизмы управления организационными проектами. – М.: ИПУ РАН, 2003.

4 Баркер А. Как еще лучше … управлять людьми. – М.: ФАИР-Пресс, 2002.

5 Большой энциклопедический словарь. – М.: Большая российская энциклопедия, 2002.

6 Бронштейн М. Управление командами для «чайников». – М.: Вильямс, 2004.

7 Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. – Тбилиси: Мецниереба, 1974.

8 *Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. – М.: Наука, 1989.

9 *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001.

10 *Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981.

11 *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Идентификация активных систем / Труды международной конференции «Идентификация систем и процессы управления». – М.: ИПУ РАН, 2000. С. 101 – 117.

12 *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997.

13 *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: Синтег, 1999.

14 Буш Р., Мостеллер Ф. Стохастические модели обучаемости. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962.

15 Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1972. Том 1 – 3.

[52] *Работы, отмеченные звездочкой, можно найти в свободном доступе в электронной библиотеке на сайте* www.mtas.ru. *Большинство англоязычных работ размещены в электронной библиотеке на сайте* www.jstor.org.

16 Вартанян А.А. Управление командой и организацией в бизнес-среде. – М.: Доброе слово, 2006.

17 Васильева О.Н., Засканов В.В., Иванов Д.Ю., Новиков Д.А. Модели и методы материального стимулирования (теория и практика). – М.: ЛЕНАНД, 2007.

18 Васин А.А. Модели динамики коллективного поведения. – М.: МГУ, 1989.

19 Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. – М.: МАКС пресс, 2005.

20 Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972.

21 Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ РАН, 2003.

22 *Выборнов Р.А. Модели и методы управления организационными системами с коррупционным поведением участников. – М.: ИПУ РАН, 2006.

23 Галкина Т.П. Социология управления: от группы к команде. – М.: Финансы и статистика, 2004.

24 *Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.

25 *Гламаздин Е.С., Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы управления корпоративными программами: информационные системы и математические модели. – М.: Спутник+, 2003.

26 Голован С.В. Эффект забывания в теории коллективной репутации. – М.: Российская экономическая школа, 1999.

27 *Губко М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур. – М.: ЛЕНАНД, 2006.

28 *Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. – М.: ИПУ РАН, 2003.

29 *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.

30 Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.

31 Дегтярев Ю.И. Системный анализ и исследование операций. – М.: Высшая школа, 1996.

32 *Ермаков Н.С., Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели репутации и норм деятельности. – М.: ИПУ РАН, 2005.

33 Зинкевич-Евстигнеева Т., Фролов Д., Грабенко Т. Технология создания команды. – СПб.: Речь, 2002.

34 Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979.

35 *Иващенко А.А., Новиков Д.А., Щепкина М.А. Модели и механизмы многокритериального стимулирования в организационных системах. – М.: ИПУ РАН, 2006.

36 Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. – М: Высшая школа, 1982.

37 Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.

38 *Караваев А.П. Модели и методы управления составом активных систем. – М.: ИПУ РАН, 2003.

39 Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979.

40 Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. – М.: Наука, 2006.

41 Краткий психологический словарь. – М.: ИПЛ, 1985.

42 Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980.

43 *Лефевр В.А. Конфликтующие структуры. – М.: Советское радио, 1973.

44 Лефевр В.А. Рефлексия. – М.: Когито-центр, 2003.

45 Лотоцкий В.А. Идентификация структур и параметров систем управления // Измерения. Контроль. Автоматизация. 1991. № 3-4. С. 30 – 38.

46 *Лысаков А.В., Новиков Д.А. Договорные отношения в управлении проектами. – М.: ИПУ РАН, 2004.

47 Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу. – М.: Наука, 1985.

48 Малишевский А.В. Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.

49 Маргерисон Ч.Д. «Колесо» командного управления. Путь к успеху через систему управления командой. – М.: Баланс Бизнес Букс, 2004.

50 Математические основы управления проектами / Под ред. В.Н. Буркова. – М.: Высшая школа, 2005.

51 Менар К. Экономика организаций. – М.: ИНФРА-М, 1996.

52 Мескон М., Альберт М., Хедоури Ф. Основы менеджмента. – М.: Дело, 1998.

53 Минцберг Г. Структура в кулаке: создание эффективной организации. – М.: Питер, 2001.

54 Михеев В.Н. Живой менеджмент проектов. – М.: Эксмо, 2007.

55 Михеев В.Н., Пужанова Е.О. Технология самоорганизации команды менеджмента проекта: системный подход / Труды 17-го Конгресса Совнет. Москва, 2006.

56 *Мишин С.П. Оптимальные иерархии управления в экономических системах. – М.: ПМСОФТ, 2004.

57 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.

58 Наврузов Ю. Структурирование хаоса. Практическое руководство по управлению командой. – М.: Баланс Бизнес Букс, 2005.

59 *Нижегородцев Р.М. Информационная экономика. – М.: МГУ, 2002.

60 Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. – М.: Синтег, 2007.

61 Новиков А.М. Процесс и методы формирования трудовых умений: профпедагогика. – М.: Высшая школа, 1986.

62 *Новиков Д.А. Динамика поведения систем с большим числом целенаправленных элементов // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 4. С. 187 – 189.

63 *Новиков Д.А. Закономерности итеративного научения. – М.: ИПУ РАН, 1998.

64 *Новиков Д.А., Иващенко А.А. Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы. – М.: ЛЕНАНД, 2006.

65 *Новиков Д.А. Институциональное управление организационными системами. М.: ИПУ РАН, 2003.

66 *Новиков Д.А. Механизмы стимулирования как инструмент согласования интересов участников организационных систем / Управление инновациями и стратегия инновационного развития России: Сборник научных трудов. – М.: Доброе слово, 2007. С. 43 – 55.

67 *Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.

68 *Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003.

69 *Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. – М.: ИПУ РАН, 2002.

70 *Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003.

71 *Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998.

72 Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007.

73 *Новиков Д.А. Управление проектами: организационные механизмы. – М.: ПМСОФТ, 2007.

74 *Новиков Д.А., Цветков А.В. Агрегирование информации в задачах стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 4.

75 *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. – М.: Апостроф, 2000.

76 *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз. – М.: ИПУ РАН, 2002.

77 *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Прикладные модели информационного управления. – М.: ИПУ РАН, 2004.

78 *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003.

79 Ожегов С.И. Словарь русского языка. – М.: Русский язык, 1988.

80 Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. – М.: Наука, 1977.

81 Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971.

82 Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985.

83 Паркер Г., Кропп З. Формирование команды. – СПб.: Питер, 2003.

84 *Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. – М.: ИПУ РАН, 2001.

85 Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.

86 Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002.

87 *Растригин Л.А. Адаптация сложных систем: методы и приложения. – Рига: Зинатне, 1981.

88 Роббинс С., Колутер М. Менеджмент. – М.: Вильямс, 2004.

89 Робертс Ф. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986.

90 Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. – М.: Мир, 1974.

91 Рыков А.С. Модели и методы системного анализа: принятие решений и оптимизация. – М.: МИСИС, 2005.

92 Салливан Э. Время – деньги. Создание команды разработчиков программного обеспечения. – М.: Русская редакция, 2002.

93 Словарь иностранных слов. – М.: Русский язык, 1982.

94 Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: философия, психология, информатика. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.

95 Томпсон Л. Создание команды. – М.: Вершина, 2006.

96 Управление персоналом: Учебник для вузов / Под ред. Т.Ю. Базарова, Б.Л. Еремина. – М: ЮНИТИ, 2002.

97 Философский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983.

98 Фоппель К. Создание команды. Психологические игры и упражнения. – М.: Генезис, 2002.

99 Харшаньи Д., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. – СПб.: Экономическая школа, 2001.

100 Хейз Н. Успех – один на всех. Основные аспекты эффективного руководства командой. – М.: Баланс Бизнес Букс, 2005.

101 Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. – М.: Наука, 1991.

102 Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. – М.: Наука, 1968.

103 Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М.: Наука, 1984.

104 Чалдини Р. Психология влияния. – СПб.: Питер, 2001.

105 *Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели информационного управления. – М.: ПМСОФТ, 2004.

106 Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.

107 Эшби У.Р. Введение в кибернетику. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.

108 Юдкевич М.М., Подколзина Е.А., Рябинина А.Ю. Основы теории контрактов: модели и задачи. – М.: ГУ ВШЭ, 2002.

109 Alchian A., Demsetz H. Production, information costs and economic organization // American Economic Review. 1972. Vol. 62. № 5. P. 777 – 795.

110 Arrow K. The theory of discrimination / Discrimination in labor markets. Ed. by O. Ashenfelter, A. Rees. – Princeton: Princeton University Press, 1973.

111 Arrow K.J., Radner R. Allocation of resources in large teams // Econometrica. 1979. Vol. 47. № 2. P. 361 – 386.

112 Basar T., Bansal R. The theory of teams: a selected annotated bibliography / Differential games and applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 186 – 201.

113 Bassan B., Gossner O., Scarsini M., Zamir S. Positive value of information in games // International Journal of Game Theory. 2003. № 7. P. 17 – 31.

114 Beaufils B., Branouy O. Reputation games and the dynamics of exchange network. – Lille: University of Science and Technology, 2004.

115 Beer M. Organization Change and Development: A System View. London: Scott-Glenview: Foresman & Co, 1980.

116 Bernheim B., Whinston M. Common agency // Econometrica. 1986. Vol. 54. P. 923 – 942.

117 Camerer C. Behavioral game theory. Experiments in strategic interaction. – Princeton: Princeton University Press, 2003.

118 Camerer C., Ho T., Chong J. Models of thinking, learning and teaching in games // American Economic Review. 2003. Vol. 93. P. 192 – 195.

119 Carpenter J., Bowles S., Gintis H. Mutual monitoring in teams: theory and experimental evidence on the importance of reciprocity. IZA Discussion Paper № 2106. – Middlebury, 2006. – 35 p.

120 Che Y., Yoo S. Optimal incentives for teams // American Economic Review. 2001. Vol. 91. P. 525 – 541.

121 Chell E. Participation and organization. – London: MacMillan, 1985.

122 Cole H., Mailath G., Postlewaite A. Social norms, savings behavior and growth // Journal of Political Economy. 1992. Vol. 100. P. 1092 – 1125.

123 Daft R.L. Management. – N.Y.: Dryden Press, 1988.

124 Fehr E., Fischbacher U. Social norms and human cooperation // Trends in cognitive sciences. 2004. Vol. 8 № 4. P. 185 – 190.

125 Fehr E., Schmidt K. A theory of fairness, incentives and contractual choices // The Quarterly Journal of Economics. 1999. Vol. 114. P. 817 – 868.

126 Friedman D. Evolutionary games in economics // Econometrica. 1991. Vol. 59. P. 637 – 666.

127 Fudenberg D., Tirole J. Game theory. – Cambridge: MIT Press, 1995.

128 Fudenberg D., Holmstrom B., Milgrom P. Short-term contracts and long-term agency relationship // Journal of Economic Theory. 1990. Vol. 52. № 1. P. 194 – 206.

129 Fudenberg D., Kreps D. Reputation in the simultaneous play of multiple opponents // Review of Economic Studies. 1987. № 4. P. 541 – 568.

130 Fudenberg D., Levine D. Reputation and equilibrium selection in games with a single patient player // Econometrica. 1989. Vol. 57. P. 251 – 268.

131 Fudenberg D., Tirole J. Sequential bargaining with incomplete information // Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. № 2. P. 221 – 247.

132 Grossman S., Hart O.D. An analysis of the principal-agent problem // Econometrica. 1983. Vol. 51. № 1. P. 7 – 45.

133 Groves T. Incentives in teams // Econometrica. 1973. Vol. 41. № 4. P. 617 – 641.

134 Groves T., Radner R. The allocation of resources in a team // Journal of Economic Theory. 1972. Vol. 4. № 2. P. 415 – 441.

135 Hackman J.R. Introduction: work teams in organizations: an oriented framework. – MA: Addison Wesley, 1990.

136 Hamilton B., Nickerson J., Owan H. Team incentives and worker heterogeneity: an empirical analysis of the impact of team on productivity and participation // Journal of Political Economy. 2003. Vol. 111. P. 465 – 497.

137 Hart O.D., Holmstrom B. Theory of contracts // Advances in economic theory. 5-th World Congress. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. P. 71 – 155.

138 Hart O. Norms and the theory of the firms. Harvard: Harvard Institute of Economic Research, 2001. Discussion paper № 1923. – 25 p.

139 Hart O.D. Optimal labor contracts under asymmetric information: an introduction // Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. № 1. P. 3 – 35.

140 Holmstrom B. Moral hazard in teams // Bell Journal of Economics. 1982. Vol. 13. P. 324 – 340.

141 Hull C.L. Principles of behavior and introduction to behavior theory. –New York: Appleton Century Company, 1943.

142 Kandori M. Social norms and community enforcement // Review of Economic Studies. 1992. Vol. 59. P. 61 – 80.

143 Katzenbach J., Smith D. Magic of teams. – Boston: Harvard Business School Press, 1993.

144 Kim K., Roush F. Team theory. – Chichester: Ellis Horwood, 1997.

145 Kocher M., Straub S., Sutter M. Individual or team decision-making – causes and consequences of self-selection. – Innsbruck: University of Innsbruck. Discussion Paper, 2004. – 25 p.

146 Kotenko I.V., Ulanov A.V. Agent-based simulation of DDOS attacks and defense mechanisms // Journal of Computing. 2005. Vol. 4. № 2.

147 Kreps D. Corporate culture and economic theory / Perspectives on positive political economy. Ed. By J. Alt, K. Shepsle. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. P. 90 – 143.

148 Kreps D., Wilson R. Reputation and imperfect information // Journal of Economic Theory. 1982. Vol. 27. P. 253 – 279.

149 Levine J. Multilateral contracting and the employment relationship // Quarterly Journal of Economics. 2002. Vol. 117. P. 1075 – 1103.

150 Lewis D. Convention: a philosophical study. – Cambridge: Harvard University Press, 1969.

151 Marino A., Zabojnik J. Internal competition for corporate resources and incentives in teams // The RAND Journal of Economics. 2004. Vol. 35. № 4. P. 710 – 727.

152 Marshak J. Elements for the theory of teams // Management Science. 1955. № 1. P. 127 – 137.

153 Marshak J., Radner R. Economic theory of teams. – New Haven – London: Yale Univ. Press, 1976.

154 McAfee R., MCMillan J. Optimal contracts for teams // International Economic Review. 1991. № 3. P 561 – 577.

155 Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.

156 Maynard S. Evolution and the theory of games. – Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

157 Milgrom P., Roberts J. Economics. Organization and Management. – N.Y.: Prentice-Hall, 1991.

158 Moreland R.L., Levine J.M. Socialization in small groups: temporal changes in individual group relations / Advances in Experimental Social Psychology. Vol. 15. – N.Y., 1982. P. 137 – 192.

159 Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. – London: Harvard Univ. Press, 1991.

160 Osterman P. How common is workplace transformation and who adapts it ? // Industry and Labor Relations Review. 1995. Vol. 47. P. 173 – 187.

161 Potters J., Sefton M., Heijden E. Hierarchy and opportunism in teams. – Tilburg: Tilburg University. Discussion paper № 2005-109. – 32 p.

162 Posner R.A. Social norms: an economic approach // American Economic Review. 1997. Vol. 87. № 2. P. 365 – 369.

163 Radner R. Team decision problems // The Annals of Mathematical Statistics. 1962. Vol. 33. № 3. P. 857 – 881.

164 Rasmusen E. Moral hazard in risk-averse teams // The Rand Journal of Economics. 1987. Vol. 18. № 3. P. 428 – 435.

165 *Ren W. Consensus seeking, formation keeping and trajectory tracking in multiple vehicle cooperative control. – Brigham: Brigham University. 2004.

166 Rey-Biel P. Inequity aversion and team incentives. – Barcelona: University of Barcelona. Discussion Paper. 2006. – 27 p.

167 Samuelson L. Evolution and game theory // The Journal of Economic Perspectives. 2002. Vol. 16. № 2. P. 47 – 66.

168 Shapiro C., Stiglitz J. Equilibrium unemployment as a worker discipline device // American Economic Review. 1984. Vol. 74. P. 433 – 444.

169 Schein E.H. Organizational culture and leadership: a dynamic view. – San Francisco: Josse-Bass Publishers, 1985.

170 Slivinsky A. Team incentives and organizational form. – University of Western Ontario. Discussion Paper, 2000. – 34 p.

171 Stengel B., Koller D. Team maxmin equilibria // Games and Economic Behavior. 1997. Vol. 21. P. 309 – 321.

172 Takashi U. Bayesian potentials and information structures: team decision problems revisited. – Yokohama: Yokohama National University, 2004.

173 Tambe M. Towards flexible teamwork // Journal of AI Research. 1997. Vol. 7. P. 17 – 24.

174 Tannenbaum S., Heard R., Salas E. Team Building and its Influence on Team Effectiveness: an Examination of Conceptual and Empirical Developments / Theory and Research in Industrial Organizational Psychology. Elsevier Science Publishers, 1992.

175 Tirole J. A theory of collective reputation (with applications to the persistence of corruption and to firm quality) // Review of Economic Studies. 1996. Vol. 63. P. 1 – 22.

176 Verma V. Managing the Project Team. The Human Aspects of Project Management. – Pennsylvania: PMI, 1997.

177 Vyrastekova J., Onderstal S., Koning P. Team incentives in public organizations. SPB Dicussion Paper № 60. Hauge, 2006. – 35 p.

178 Weibull J. Evolutionary game theory. – Cambridge: MIT Press, 1996.

179 Young P. The evolution of conventions // Econometrica. 1993. Vol. 61. P. 57 – 84.

Научное издание

НОВИКОВ Дмитрий Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ И ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ КОМАНД

ИД № 01389 от 30.03.2000
Гигиенический сертификат № 77.99.10.953.Д.005466.07.03
от 25.07.2003

Подписано в печать 21.11.07. Формат 60×90/16.
Усл. печ.л. 11,5. Тираж 1000 экз.

Издательство физико-математической литературы (ФИЗМАТЛИТ)
123182, Москва, ул. Щукинская, д.12, к. 1