

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

---

Ю. С. Скляр

# ЭКОНОМЕТРИКА

## Краткий курс

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
2007

УДК 330.43 (075.8)  
ББК 65.в6.я73  
С43

Рецензент  
доцент кафедры информатики и математики ИиЭУ  
*Е. Ю. Стрельцова*

**Скляр Ю. С.**  
С43 Эконометрика. Краткий курс: учебное пособие. 2-е изд.,  
испр. / Ю. С. Скляр; ГУАП. – СПб., 2007. – 140 с.  
ISBN 5-8088-0225-3

Учебное пособие представляет собой краткое изложение основ эконометрики. Учебный материал соответствует государственному образовательному стандарту по дисциплине «Эконометрика» для экономических специальностей вузов.

В пособие включены два раздела, содержащие основные положения теории вероятности и математической статистики.

Предназначено для студентов экономических специальностей вузов.

УДК 330.43 (075.8)  
ББК 65.в6.я73

ISBN 5-8088-0225-3

© ГУАП, 2007  
© Скляр Ю. С., 2007

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Эконометрика» впервые включен в основную образовательную программу подготовки экономистов и информатиков-экономистов, определенную государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования второго поколения в 2000 г. Однако до настоящего времени обеспеченность курса учебниками и учебными пособиями явно недостаточна. Автор данного пособия сделал попытку создать краткий курс, строго соответствующий государственным образовательным стандартам и в то же время достаточно простой и удобный для усвоения, особенно студентами-заочниками.

Отбор и изложение материала имеют некоторые особенности по сравнению с существующими учебниками и учебными пособиями. Предполагается, что читатель изучил элементы теории вероятностей и математической статистики в объеме курса математики для экономистов. Тем не менее, мы сочли целесообразным в первых двух главах изложить без доказательств основные постулаты этих дисциплин. В результате пособие приобрело замкнутый характер.

Другой особенностью пособия является наличие некоторых, по нашему мнению, существенных разделов, которые обычно отсутствуют в традиционных курсах. Так, мы посчитали необходимым достаточно подробно изложить методы спектрального анализа временных рядов. Подробно рассмотрены методы факторного анализа и главных компонент. Существенное внимание уделено методам дисперсионного анализа, планированию экспериментов, поиску экстремума функции отклика.

В пособии практически отсутствуют примеры использования изучаемых моделей и методов. Здесь сказалось желание сделать курс действительно кратким. Автор предполагает издать вторую часть пособия под условным названием «Эконометрический практикум», где будут рассмотрены практические приемы эконометрических вычислений, в том числе с использованием табличных процессоров, математических, статистических и эконометрических пакетов.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту, заведующей кафедрой информатики и математики ИнЭУ, доценту Е. Ю. Стрельцовой за ценные замечания, способствовавшие улучшению пособия.

## 1. ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

### 1.1. Эконометрика как научная дисциплина. История становления и развития

Эконометрика как научная дисциплина в последние десятилетия переживает этап стремительного развития. Язык экономики все в большей степени математизируется. Отражением этого процесса является бурное развитие эконометрики – расширяется область ее применения, совершенствуются методы и аппарат эконометрических исследований.

Единого общепринятого определения эконометрики в настоящее время не существует даже среди основателей этого научного направления. Так, И. Фишер считает, что «эконометрика – это раздел экономики, занимающийся разработкой и применением статистических методов для измерения взаимосвязей между экономическими переменными». Ц. Грилихес отводит эконометрике еще более скромное место, полагая, что «эконометрика является не более чем набором инструментов, хотя и очень полезных». Пожалуй, наиболее полно отразил сущность эконометрики как науки Р. Фриш, давший новой науке ее название – «эконометрика». В журнале «Эконометрика» он писал: «Эконометрика – это не то же самое, что экономическая статистика. Она не идентична тому, что мы называем экономической теорией, хотя значительная часть этой теории носит количественный характер. Эконометрика не является синонимом приложений математики к экономике. Как показывает опыт, каждая из трех отправных точек – статистика, экономическая теория и математика – необходимое, но не достаточное условие для понимания количественных соотношений в современной экономической жизни. Это – единство всех трех составляющих. И это единство образует эконометрику».

Мы остановимся на следующем, достаточно общем и содержательном определении эконометрики.

*Эконометрика – это наука, которая изучает количественное выражение взаимосвязей экономических объектов и процессов, используя и разрабатывая для этой цели специфические математико-статистические методы.*

Первые эконометрические исследования относятся к XVII–XVIII вв. Первые «эконометристы» В. Петти, Г. Кинг и другие своими количественными исследованиями экономических процессов пытались достичь в экономике того, что И. Ньютон достиг в физике – открытия фундаментальных экономических законов в точном математическом выражении.

В XIX в. экономические исследования продолжили Л. Вальрас, С. Джевонс, А. Маршал и другие. Многие считают первой эконометрической работой книгу Г. Мура (1911 г.) «Законы заработной платы: эссе по статистической экономике». К этому же периоду относятся работы Р. Бенини по исследованию функций спроса, К. Жюгляра, С. Китчина, Н. Кондратьева по исследованию экономических циклов.

Важной вехой в развитии эконометрики стали работы по построению экономических барометров, в том числе Гарвардского барометра (У. Персон, У. Митчел, 1903–1914 гг.).

Окончательное оформление эконометрики как науки произошло 29 декабря 1930 г., когда по инициативе И. Фишера, Р. Фриша, Я. Тинбергена и других ученых на заседании Американской ассоциации развития науки было создано эконометрическое общество, на котором Р. Фриш дал новой науке название «эконометрика».

В 1941 году появился первый учебник по эконометрике Я. Тинбергена.

Существенное влияние на становление эконометрики оказало развитие вычислительной техники. Появление мощных компьютеров сделало реальностью аналитически сложные, многомерные эконометрические модели. Преодоление «проклятия размерности», вычислительных сложностей позволило существенно продвинуть эконометрические методы.

В настоящее время эконометрика заняла достойное место в ряду экономических наук и, в частности, в системе подготовки экономистов. По утверждению директора ЦЭМИ РАН академика В. Л. Макарова: «Современное экономическое образование держится на трех китах: макроэкономике, микроэкономике и эконометрике».

## 1.2. Особенности эконометрических методов

Поверхностный взгляд на эконометрику может породить впечатление, что эта наука есть не что иное, как математическая статистика, изложенная в экономических терминах.

Возможно, начальная стадия формирования и развития эконометрики как науки могла породить такое представление. Но по мере расширения области приложения и аппарата эконометрических исследований началось и по настоящее время продолжается формирование системы специфических методов эконометрики.

Особенности эконометрических исследований начинаются с проблемы данных. Информация может быть неполной, данные могут быть агрегированы, что ведет к искажению результатов. На уровне микроэкономики возникает проблема селективности выборки, когда выборка основывается не на всем поле данных, но смещена (селективное смещение) в ту или другую сторону в результате подмены, вольной или невольной, объективного отбора «удобной» выборкой. Специфика эконометрических измерений состоит также в наличии большого числа разнородных данных. Немалую проблему составляют точность и достоверность данных, полученных из различных источников.

Следующая особенность эконометрических методов проистекает из особенностей связей между экономическими переменными. Механизм связи зачастую закрыт, что может приводить к так называемой ложной корреляции, когда прямое и даже косвенное влияние одной переменной на другую отсутствует, а ненулевой коэффициент корреляции объясняется наличием общих причин, влияющих на обе переменные.

Проблемы доставляет также наличие мультиколлинеарности входных переменных, которая, в лучшем случае, приводит к некорректности регрессионных уравнений, а в худшем – к вырожденности информационной матрицы.

К существенным особенностям экономических закономерностей можно отнести появление систем одновременных уравнений, когда входные и выходные переменные формируются одновременно, под действием общих внешних факторов.

Можно отметить также такие проблемы, как наличие лагов, гетероскедастичность, то есть различие в дисперсиях возмущений

(ошибок) регрессионной модели, а также автокорреляция возмущений.

Приведенный, далеко не полный, перечень проблем анализа экономических закономерностей наглядно демонстрирует суть эконометрических методов, которые складываются в процессе преодоления трудностей, возникающих при попытке применения математической статистики для анализа экономических объектов (процессов).

В дальнейшем изложении мы будем четко выделять круг задач, решаемых методами классического статистического анализа, и те проблемы (и методы их решения), которые присущи сугубо эконометрическим исследованиям.

### 1.3. Основные этапы эконометрического анализа

Основные этапы эконометрического исследования при всех своих особенностях присущи любому научному исследованию.

Можно выделить шесть основных этапов в порядке естественного следования:

- постановки задачи;
- разработка теоретической модели;
- сбор данных;
- оценка параметров;
- апробация и интерпретация результатов;
- сопровождение модели.

Рассмотрим подробнее каждый из этих этапов и укажем основные проблемы, которые приходится решать при их реализации.

#### *Постановка задачи*

Формальной постановке задачи – разработке технических условий (требований) – должно предшествовать четкое определение цели исследований. В качестве цели может выступать одна из следующих проблем или их сочетание:

- анализ экономического объекта (процесса);
- имитационное моделирование поведения объекта (хода процесса) в различных ситуациях;
- прогноз экономического развития;
- выработка оптимального поведения экономического объекта.

Решение каждой из этих задач или их сочетания служит, естественно, для принятия управленческих решений.

После определения цели и в зависимости от нее разрабатывается техническое задание (требование), которое включает следующие элементы:

- описание цели исследования;
- описание предметной области;
- определение входных и выходных переменных;
- требования к точности входных и выходных переменных;
- требования к точности эконометрической модели;
- методику сбора данных или, по крайней мере, требования к такой методике.

Следует отметить, что техническое задание накладывает определенные обязанности как на разработчика модели, так и на заказчика. Имитационные и оптимизирующие модели могут быть достаточно сложными аналитическими и программными продуктами. Поэтому точная формулировка требований к модели является обязательным условием.

#### *Разработка теоретической модели*

На этом этапе после тщательного изучения предметной области выполняется разработка теоретической модели.

Основные задачи, решаемые на этом этапе, сводятся к следующим:

- формирование структуры модели;
- определение набора входных и выходных переменных;
- определение связей и их математическое описание;
- формулировка области определения входных переменных и ограничений, налагаемых на их возможные значения.

Разработка теоретической модели – один из важнейших этапов. Здесь, по сути дела, определяются структура и свойства модели. Одновременно возможна корректировка технического задания, так как изучение предметной области и создание соответствующей теоретической модели может изменить представление о возможностях модели, требованиях к точности и т. д.

#### *Сбор данных*

Этот этап также можно отнести к числу наиболее ответственных. Даже идеальная теоретическая модель при некачественных данных окажется неработоспособной.

Данные могут быть получены из различных статистических отчетов и предшествующих наблюдений. Это пассивный метод, и дос-

товерность таких данных зачастую сомнительна ввиду того, что в отчетах часто представляют желаемую ситуацию вместо действительной.

Активный метод требует проведения экспериментов. Эксперименты в экономике – мероприятие дорогостоящее, а иногда просто разорительное. Поэтому эксперименты, если они проводятся, должны опираться на статистические методы планирования, которые в свою очередь зависят от теоретической модели и целей исследования.

Специфика измерения экономических показателей состоит в наличии большого числа разнородных данных. Предпочтительны стоимостные показатели, обеспечивающие однородность данных. Но их использование не всегда возможно, и приходится вводить натуральные показатели. Наряду с количественными характеристиками в эконометрических моделях зачастую используются качественные показатели (пол, образование работника, местоположение объекта и т. д.), а также структурные характеристики, определяющие организацию объекта, его иерархическую схему, соподчиненность различных структур и процессов и т. д. Все эти обстоятельства на этапе сбора данных должны быть проанализированы, а сама схема сбора данных (проведения экспериментов) должна обеспечить репрезентативность выборки, то есть отсутствие грубых и систематических ошибок, случайный характер прочих ошибок.

#### *Оценка параметров*

Это, пожалуй, наиболее формализованный этап. Здесь для разработанной теоретической модели на основе полученной выборки определяются параметры модели, оценивается значимость параметров и модели в целом. Используется аппарат математической статистики, соответствующие пакеты прикладных программ. Но было бы ошибкой считать, что оценка параметров – чисто вычислительный этап. Именно на этом этапе может обнаружиться мультиколлинеарность входных переменных, гетероскедастичность и автокорреляция остатков, не говоря уже о том, что некоторые параметры модели могут оказаться статистически незначимыми. Поэтому результатом оценки параметров может быть существенный пересмотр теоретической модели и методов оценки ее параметров.

#### *Апробация и интерпретация результатов*

На этом этапе проводится проверка адекватности модели реальным процессам. Существует ряд методов верификации моделей. Для этих целей можно использовать имитационное моделирование реального процесса, реальные характеристики объекта (процесса) в предшествующие периоды, характеристики других аналогичных объектов.

Если модель признана адекватной, проводится интерпретация полученных результатов. Смысл ее состоит в том, чтобы, во-первых, найти качественное (феноменологическое) объяснение полученных количественных закономерностей и, во-вторых, сделать выводы о свойствах объекта, характеристиках процесса или явления, дать прогноз экономического развития, а в оптимизационных моделях – и об оптимальных управляющих воздействиях и результатах этих воздействий.

#### *Сопровождение модели*

Заключительным этапом эконометрических исследований является сопровождение модели на протяжении ее жизненного цикла, то есть уточнение параметров на основе новых данных, включение в модель новых элементов, реализацию на ее основе новых задач и т. д.

## 2. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В естествознании для описания закономерной связи между комплексом условий  $S$  и событием  $A$  используют одну из двух схем.

### *Детерминированная схема*

Если условия  $S$  созданы, то событие  $A$  происходит. Таковы, например, все классические законы механики, электротехники и ряда других наук.

### *Вероятностная схема*

При осуществлении условий  $S$  событие  $A$  может произойти, а может и не произойти.

Например, в одну и ту же землю на одинаковую глубину заложили 100 семян (комплекс условий  $S$ ), событие  $A$  – прорастание семян. Из 100 семян проросло 95 (событие  $A$  произошло), а 5 семян не проросло (событие  $A$  не произошло). В этом случае мы говорим о вероятности осуществления события  $A$  и интуитивно понимаем, что вероятность прорастания семени равна 0,95. Таким образом, вероятность характеризует степень неопределенности наших знаний о процессе или явлении. В этом разделе мы покажем, что даже неопределенность может быть точно описана и измерена, и на основе ее изучения можно делать вполне определенные, математически строгие выводы.

### 2.1. Основные определения и понятия

#### 2.1.1. Случайные события. Алгебра событий

Рассмотрим некоторый опыт (эксперимент), имеющий  $m$  возможных исходов. Например, при бросании монеты имеется два возможных исхода, при бросании двух игральных костей – 36 исходов, при извлечении карты из колоды – 52 возможных исхода. Тот или иной исход опыта есть случайное событие, не разложимое на более мелкие события. Такие события будем называть *элементарными случайными событиями*.

*Совокупность всех элементарных событий, относящихся к данному эксперименту, называют пространством элементарных событий  $\Omega$ .*

Пространство элементарных событий может быть дискретным, как в приведенных выше примерах, и непрерывным. Например, при

стрельбе по мишени попадание в некоторую точку мишени является элементарным случайным событием. Пространство элементарных событий здесь – совокупность всех точек (в математическом смысле) мишени при условии, что попадание в «молоко» исключено. Это пространство непрерывно и содержит несчетное количество элементарных событий. Наряду с элементарными событиями рассматривают сложные или составные события, состоящие из нескольких элементарных. Так, событие «на двух игральные кости в сумме выпало 6 очков» состоит из 5 элементарных: 1 – 5, 5 – 1, 2 – 4, 4 – 2, 3 – 3.

Теперь дадим более строгое определение случайного события.

*Составным случайным событием или просто случайным событием  $A$  называется некоторое подмножество  $A$ , состоящее из элементов пространства  $\Omega$ , что кратко записывается отношением*

$$A \subseteq \Omega.$$

Среди всех возможных множеств  $A \subseteq \Omega$  различают два крайних:

- пустое множество  $\emptyset$ , не содержащее ни одного элемента, отождествляют с невозможным событием, то есть с событием, которое в условиях эксперимента никогда не может произойти;
- все пространство  $\Omega$  есть достоверное событие, то есть событие, которое в условиях эксперимента всегда происходит.

По аналогии с операциями над множествами можно ввести операции над событиями. Совокупность таких операций вместе с их свойствами называют *алгеброй событий*. Рассмотрим основные операции над событиями.

*Объединением или суммой событий  $A$  и  $B$  называют событие  $A \cup B$ , состоящее в том, что происходит либо событие  $A$ , либо событие  $B$ , либо оба события одновременно. Аналогично определяется объединение произвольного числа событий.*

*Произведением событий  $A$  и  $B$  называют событие  $A \cap B$ , состоящее в одновременном наступлении событий  $A$  и  $B$ . Если  $A \cap B = \emptyset$ , то говорят, что события  $A$  и  $B$  не совместны.*

*Разностью событий  $A$  и  $B$  называют событие  $A \setminus B$ , которое состоит в том, что событие  $A$  произошло, а событие  $B$  не произошло.*

Событие

$$\bar{A} = \Omega \setminus A$$

называют событием, противоположным событию  $A$ . Очевидно:

$$A \cup \bar{A} = \Omega.$$

В качестве примера рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей. Пространство элементарных событий состоит из 36 возможных исходов\*. Пусть событие  $A$  – «выпало не более 6 очков», событие  $B$  – «выпало от 5 до 7 очков». Тогда:

- событие  $A \cup B$  – выпало не более 7 очков;
- событие  $A \cap B$  – выпало 5 или 6 очков;
- событие  $A \setminus B$  – выпало не более 4 очков;
- событие  $\bar{A}$  – выпало не менее 7 очков;
- событие  $\bar{A} \cap B$  – выпало 7 очков и т. д.

Невозможное событие – не выпало ни одного очка или выпало 13 очков и т. п.

### 2.1.2. Вероятность. Основные законы

Мы начнем с классического или, как его еще называют, *комбинаторного определения вероятности*. Пусть эксперимент имеет  $m$  возможных исходов, причем все исходы равновероятны. Событию  $A$  благоприятствует  $m_A$  исходов, то есть в  $m_A$  случаях событие  $A$  происходит. Тогда вероятность события  $A$  определяется равенством

$$P(A) = \frac{m_A}{m}.$$

Итак, *вероятностью случайного события в эксперименте с равновероятными элементарными исходами называют отношения числа исходов, благоприятствующих данному событию, к общему числу исходов*.

При бросании двух игральных костей событию «выпало 7 очков» благоприятствуют 6 исходов: 1 – 6, 6 – 1, 2 – 5, 5 – 2, 3 – 4, 4 – 3. Общее число исходов 36. Следовательно:

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

\* Кости считаются пронумерованными, так что выпадение  $i - j$  очков и  $j - i$  очков – различные элементарные события.

Классическое определение при всей его строгости и прозрачности имеет ограниченное применение ввиду требования равновероятности элементарных исходов, налагаемого на условия эксперимента. Более практичным представляется так называемое *частотное определение*.

Мы можем поставить следующий эксперимент. Будем бросать кость многократно, отмечая каждый раз номер грани. Подсчитав количество выпадений каждой грани  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  и зная общее число бросаний  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_6$ , получаем относительные частоты элементарных исходов

$$P_1 = \frac{m_1}{m}, P_2 = \frac{m_2}{m}, \dots, P_6 = \frac{m_6}{m}.$$

Если число бросаний достаточно велико, то относительные частоты с некоторым приближением могут быть приняты за вероятности соответствующих событий. В результате приходим к следующему определению вероятности.

*Вероятностью события  $A$  называется отношение числа исходов  $m_A$ , благоприятствующих событию  $A$  к общему числу исходов  $m$  в длинной серии экспериментов:*

$$P(A) = \frac{m_A}{m}.$$

Частотное определение, пожалуй, в наибольшей степени соответствует интуитивному представлению о вероятности. Однако понятие «длинная серия» весьма неопределенное. Если  $m \rightarrow \infty$ , то неопределенность снимается, но одновременно исчезает практический смысл определения. Мы будем считать частотное определение хорошим приближением теоретического понятия «вероятность». Наиболее строгим и всеобъемлющим является *теоретико-множественное определение вероятности*.

Пусть по-прежнему  $\Omega$  – пространство элементарных событий. Множество всех подмножеств этого пространства образует множество всех событий. На множестве всех подмножеств (событий) определяют неотрицательную функцию (меру)  $P(A)$ ,  $A \in \Omega$ , называемую вероятностью события  $A$  и обладающую следующими свойствами:

- 1)  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;

- 2)  $P(\emptyset) = 0$ ;
- 3)  $P(\Omega) = 1$ ;
- 4) если  $A_k \subset \Omega$ ,  $k=1, 2, \dots, n$  попарно не пересекаются, то

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

Следующие два свойства называют основными теоремами теории вероятностей.

*Теорема сложения вероятностей*

Пусть  $A, B \subset \Omega$ . В общем случае

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (2.1)$$

Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (2.2)$$

*Теорема умножения вероятностей*

Прежде чем формулировать два варианта этой теоремы, определим важнейшее понятие теории вероятности, понятие зависимости и независимости событий.

События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если тот факт, что событие  $A$  произошло, не изменяет вероятности появления события  $B$  и наоборот. В противном случае события  $A$  и  $B$  называются зависимыми.

В общем случае теорема умножения вероятностей имеет вид

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), \quad (2.3)$$

где  $P(A|B)$  называется условной вероятностью события  $A$  при условии, что событие  $B$  произошло. Аналогично определяется  $P(B|A)$ . Если события  $A$  и  $B$  независимы, то  $P(A|B) = P(A)$ ,  $P(B|A) = P(B)$  и

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (2.4)$$

Проиллюстрируем это довольно сложное понятие на примере. Из колоды в 52 карты выбирается наугад одна. Пусть  $A$  – событие «туз»,  $B$  – событие «пиковая масть»:

$$P(A) = \frac{4}{52}, \quad P(B) = \frac{13}{52}.$$

Если  $C$  – событие «туз пик», то

$$P(C) = \frac{1}{52}.$$

С другой стороны:

$$C = A \cap B.$$

Поскольку

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = P(A)P(B),$$

то события  $A$  и  $B$  независимы. Добавим в колоду джокера, который не имеет масти. Теперь

$$P(A) = \frac{4}{53}, \quad P(B) = \frac{13}{53}, \quad P(C) = \frac{1}{53}.$$

Очевидно:

$$P(C) \neq P(A)P(B),$$

и, следовательно, события  $A$  и  $B$  зависимы. Действительно, появление события  $B$  – «пиковая масть» изменяет вероятность появления события  $A$ , так как теперь известно, что карта не может быть джокером.

Следовательно:

$$P(A|B) = \frac{1}{13},$$

$$P(C) = P(B)P(A|B) = \frac{13}{53} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{53},$$

что и следовало ожидать.

### 2.1.3. Случайные величины

В заключение подраздела рассмотрим важнейшее понятие теории вероятностей – *понятие случайной величины*. Существует весьма обширный класс экспериментов, возможные исходы которых характеризуются числами. Так, в опыте с бросанием двух игральных костей такими числами являются суммы выпавших очков от 2 до 12. Случайными числами характеризуются годовое количество осадков,



дневная выручка магазина, продолжительность жизни и т. д. Рассмотренные примеры приводят нас к понятию случайной величины.

*Случайной величиной называется величина, связанная со случайным событием и принимающая в результате испытания числовое значение.*

Случайная величина может быть непрерывной или дискретной. Примером дискретной случайной величины может служить величина выигрыша (в очках) игрока в различных карточных играх. Каждой карте присваивается определенное количество очков. Поэтому выигрыш – дискретная случайная величина.

Дискретными случайными величинами являются число бракованных деталей в выборочной контрольной партии, число очков, полученных спортсменом при стрельбе по мишени, количество покупателей в магазине в фиксированный момент времени и т. д.

Класс непрерывных случайных величин гораздо шире. Это прежде всего многочисленные физические характеристики природных процессов и явлений, а также параметры различных технологических процессов. Токи, напряжения, мощности электротехнических и электронных устройств, температуры, давления, расходы тепловых и гидравлических агрегатов, параметры физических носителей информации – сигналов – все это примеры непрерывных случайных величин.

Исход эксперимента может характеризоваться некоторой конечной совокупностью числовых показателей. В этом случае говорят о векторной случайной величине или о случайном векторе. Таким случайным вектором является, например, вектор с координатами точки попадания пули в мишень, если за начало координат принять центр мишени.

В следующих подразделах мы подробно изучим основные характеристики случайных величин.

## 2.2. Распределение вероятностей и числовые характеристики случайных величин

### 2.2.1. Распределение вероятностей

Важнейшей характеристикой случайной величины является закон распределения вероятностей.

Говорят, что задано распределение вероятностей случайной величины  $\xi$ , если для любых  $x_1, x_2 \in R$  определена вероятность

$P(x_1 \leq \xi \leq x_2)$  того, что случайная величина  $\xi$  принимает значение из отрезка  $[x_1, x_2]$ .

В соответствии с делением случайных величин на дискретные и непрерывные законы распределения также делятся на дискретные и непрерывные.

Случайная величина имеет дискретное распределение, если каждому ее значению  $x_i$  сопоставлена вероятность появления этого значения  $P(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Тем самым задана дискретная функция  $f(x_i)$ , которую будем называть дискретной плотностью распределения. Определим также функцию распределения дискретной случайной величины  $F(x)$  согласно правилу

$$F(x) = P(\xi \leq x).$$

Функция  $F(x)$  – ступенчатая, полунепрерывная сверху с разрывами первого рода в точках  $x_i$ .

Ввиду дискретности случайной величины  $x$  значения  $F(x)$  на интервалах  $x_i < x < x_{i+1}$ , строго говоря, не определены. Тем не менее, такое определение (вернее, доопределение) полезно и широко используется в статистике. Поэтому мы сохраним его как удобную аналогию непрерывной функции распределения хотя бы по форме записи.

В качестве примера рассмотрим опыт бросания двух игральных костей. Дискретная плотность распределения  $f(x_i)$  задается табл. 2.1.

Таблица 2.1

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Дискретную функцию распределения зададим значениями в тех же точках (табл. 2.2).

Таблица 2.2

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p$	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

Доопределение до ступенчатой функции очевидно.

Сложнее обстоит дело с законами распределения непрерывных случайных величин. Проблема в том, что вероятность отдельно взятого значения случайной величины должна стремиться к нулю, иначе «несчетная сумма» этих вероятностей будет стремиться к бесконечности. По этой причине определить плотность распределения

непрерывной случайной величины аналогично дискретной плотности невозможно. Но можно вполне корректно определить по аналогии с дискретным случаем функцию распределения непрерывной случайной величины.

Пусть  $\xi$  – случайная величина и  $x$  – произвольное число. Тогда  $P(\xi \leq x)$  – вероятность того, что случайная величина  $\xi$  не больше, чем  $x$ , является функцией  $x$ :

$$F(x) = P(\xi \leq x), \quad (2.5)$$

и называется *функцией распределения непрерывной случайной величины*.

Отметим некоторые свойства функции распределения:

- 1)  $F(x)$  – неубывающая функция  $x$ ;
- 2)  $0 \leq F(x) \leq 1$ ;
- 3)  $P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ .

Пусть функция  $F(x)$  непрерывна на бесконечном интервале  $(-\infty, \infty)$ . Определим *плотность распределения вероятностей*  $f(x)$  выражением

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \quad (2.6)$$

Очевидно:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi. \quad (2.7)$$

Кроме того, по формуле Ньютона–Лейбница

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(\xi) d\xi = F(b) - F(a). \quad (2.8)$$

Наконец:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Эти факты вполне очевидны. Их доказательства мы не приводим.

Для векторных случайных величин вводят совместное распределение вероятностей. Пусть  $(\xi_1, \xi_2)$  – двумерная случайная величина. Совместная функция распределения задается равенством

$$F(x_1, x_2) = P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2).$$

Аналогично предыдущему вводят двумерную плотность распределения вероятностей  $f(x_1, x_2)$ , связанную с функцией распределения соотношением

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Вероятность попадания точки  $(\xi_1, \xi_2)$  в область  $B$  вычисляют по формуле

$$P((\xi_1, \xi_2) \in B) = \iint_B f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Если случайные величины  $\xi_1, \xi_2$  независимы, то

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2),$$

в противном случае

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2 | x_1) = f(x_2)f(x_1 | x_2).$$

### 2.2.2. Числовые характеристики случайной величины

Случайная величина полностью определяется законом распределения вероятностей. Но иногда закон распределения неизвестен, и приходится довольствоваться числовыми характеристиками случайной величины, оценки которых удастся получить на основании эксперимента. Важнейшие из них – математическое ожидание и дисперсия.

*Математическим ожиданием*  $M(x)$  дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности

$$M(x) = m_x = \sum_{k=1}^n x_k p_k. \quad (2.9)$$

Для непрерывной случайной величины сумма заменяется интегралом, а дискретное распределение – плотностью распределения вероятностей

$$M(x) = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (2.10)$$

Как следует из определения, математическое ожидание есть взвешенное по вероятности среднее значение случайной величины.

Следующие свойства математического ожидания почти очевидны.

Среднее значение постоянной равно самой постоянной

$$M(a) = a.$$

Если  $a$  – неслучайная константа, то

$$\begin{aligned} M(ax) &= aM(x), \\ M(x+a) &= M(x) + a. \end{aligned}$$

Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме математических ожиданий отдельных слагаемых.

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей.

*Дисперсия случайной величины* характеризует разброс ее значений вокруг математического ожидания. По определению, дисперсия  $D(x)$  случайной величины равна математическому ожиданию квадрата ее отклонения от математического ожидания.

Таким образом, для дискретной случайной величины

$$D(x) = D_x = M(x - m_x)^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 P_k, \quad (2.11)$$

для непрерывной случайной величины

$$D(x) = D_x = M(x - m_x)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (2.12)$$

Случайная величина  $(x - m_x)$  носит название *центрированной*.

Следующие свойства дисперсии почти очевидны.

1. Дисперсия постоянной равна нулю.
2. Если  $a$  неслучайная константа, то

$$D(ax) = a^2 D(x), \quad D(x+a) = D(x).$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий отдельных слагаемых.

В ряде случаев вместо дисперсии пользуются среднеквадратичным отклонением  $\sigma(x) = \sigma_x$ , равным квадратному корню из дисперсии:

$$\sigma(x) = \sigma_x = \sqrt{D(x)}. \quad (2.13)$$

Эта характеристика имеет размерность самой случайной величины.

Пусть  $x$  и  $y$  – две, в общем случае, зависимые случайные величины. Степень зависимости (связи) двух случайных величин оценивается корреляционным моментом  $K(x, y)$ .

По определению, *корреляционным моментом*  $K(x, y)$  называется математическое ожидание произведения центрированных случайных величин  $x, y$

$$\begin{aligned} K(x, y) &= K_{xy} = M[(x - m_x)(y - m_y)] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Очень часто для оценки тесноты связи между двумя случайными величинами используют коэффициент корреляции

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (2.14)$$

Коэффициент корреляции – безразмерная величина и обладает очень наглядными и удобными свойствами.

1.  $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ .
2. Если  $\rho_{xy} = 0$ , то между случайными величинами отсутствует линейная связь.
3. Если  $\rho_{xy} = \pm 1$ , то между  $x$  и  $y$  имеется детерминированная линейная связь.

В остальных случаях между  $x$  и  $y$  имеется более или менее тесная случайная (стохастическая) зависимость.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Если случайные величины  $x$  и  $y$  независимы, то  $K_{xy} = \rho_{xy} = 0$ . Обратное неверно. Равенство нулю корреляционного момента означает лишь отсутствие линейной связи между  $x$  и  $y$ . Нелинейная зависимость между  $x$  и  $y$  может при этом существовать.

### 2.3. Нормальный закон распределения

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Число известных типов распределений весьма велико. Их изучение выходит за рамки пособия. Существует одно, наиболее часто встречающееся распределение, называемое нормальным. Мы рассмотрим его довольно подробно ввиду практической важности для целей эконометрического анализа. Другие распределения, используемые в конкретных задачах математической статистики, мы будем изучать по мере необходимости.

Плотность нормального распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.15)$$

причем математическое ожидание  $m_x = a$ , дисперсия  $D_x = \sigma^2$ .

Кривая нормальной плотности для двух значений дисперсии  $\sigma^2$  ( $\sigma_1 < \sigma_2$ ) изображена на рис. 1.

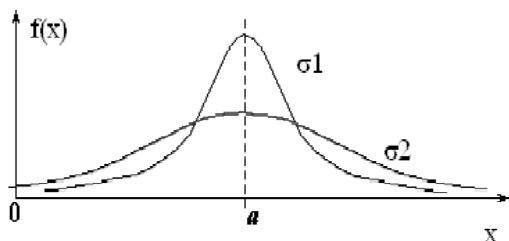


Рис. 1. Плотность нормального распределения

Функция распределения вычисляется стандартным образом

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$$

и изображена на рис. 2.

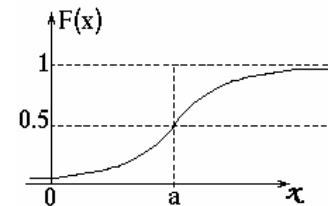


Рис. 2. Функция нормального распределения

Нормальное распределение достаточно хорошо изучено и широко используется в статистических вычислениях. Нормальное распределение симметрично относительно вертикальной прямой, проведенной через точку  $x = a$ . Среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  определяет остроту пика кривой плотности распределения. Конкретные значения  $f(x)$ ,  $F(x)$  зависят от характеристик  $m_x = a$ ,  $D_x = \sigma^2$ . Поэтому для табуляции функции распределения  $F(x)$  поступают следующим образом. Нормируют аргумент  $x$ , принимая равным нулю математическое ожидание, а дисперсию – равной единице, то есть вместо аргумента  $x$  вводят аргумент  $\xi_0 = \frac{x-a}{\sigma}$ .

В результате функция распределения принимает вид

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

Такое распределение называется *стандартным*. Его график приведен на рис. 3.

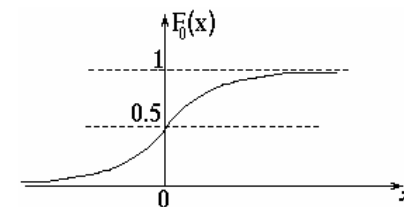


Рис. 3. Стандартное нормальное распределение

Стандартное распределение может быть легко протабулировано. Но можно пойти еще дальше.

Функция

$$\Phi(x) = F_0(x) - \frac{1}{2}$$

нечетная, то есть  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ . Поэтому таблицу значений достаточно составить для  $x > 0$ . Функция  $\Phi(x)$  называется функцией Лапласа. Используя равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = F_0(0) = \frac{1}{2},$$

ее можно представить в виде

$$\Phi(x) = F_0(x) - F_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

Таблица значений этой функции приведена в прил. (табл. П1).

Случайная величина  $\xi_0$ , имеющая стандартное распределение, называется *нормированной*.

Для нее

$$P(x_1 \leq \xi_0 \leq x_2) = F_0(x_2) - F_0(x_1).$$

Но так как, по определению:

$$F_0(x_1) = \Phi(x_1) + \frac{1}{2}, \quad F_0(x_2) = \Phi(x_2) + \frac{1}{2},$$

то

$$P(x_1 \leq \xi_0 \leq x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Если некоторое  $x < 0$ , то используют свойство нечетности

$$\Phi(x) = -\Phi(|x|).$$

Вернемся теперь к ненормированной случайной величине  $\xi$ . Совершенно очевидно, что если  $\xi$  изменяется в пределах от  $x_1$  до  $x_2$ :

$$x_1 \leq \xi \leq x_2,$$

то  $\xi_0$  изменяется в пределах

$$\frac{x_1 - a}{\sigma} \leq \xi_0 \leq \frac{x_2 - a}{\sigma}.$$

Отсюда немедленно получаем

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \quad (2.16)$$

Часто бывает необходимо найти вероятность того, что отклонение случайной величины от математического ожидания по модулю не превзойдет некоторого заданного числа  $\delta$ , то есть найти вероятность

$$P(a - \delta \leq \xi \leq a + \delta).$$

Для нормированной случайной величины  $a=0$ , поэтому

$$P(|\xi_0| < \delta) = 2\Phi(\delta).$$

Для ненормированной случайной величины в соответствии с (2.16)

$$P(|\xi - a| \leq \delta) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\delta}\right).$$

Полезно запомнить следующие соотношения:

$$P(|\xi - a| \leq \sigma) = 2\Phi(1) = 0,6826;$$

$$P(|\xi - a| \leq 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0,9544;$$

$$P(|\xi - a| \leq 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Последнее соотношение называют *правилом трех сигм*: значения случайной величины, распределенной нормально, с вероятностью 99,73% лежат в пределах

$$a - 3\sigma \leq x \leq a + 3\sigma.$$

Это правило можно сформулировать и так: отклонения от математического ожидания, большие чем  $3\sigma$ , практически невозможны.

Поскольку нормальное распределение является предельным для многих других распределений, то правило трех сигм часто применяют к другим распределениям.

В дальнейшем мы часто будем использовать характеристику распределения, называемую квантилем распределения. Удобно ввести ее на примере нормального распределения.

Квантилем  $x_p$  случайной величины  $\xi$ , имеющей распределение  $F(x)$ , называется решение уравнения

$$F(x_p) = p.$$

Таким образом, квантиль  $x_p$  – это такое значение случайной величины  $\xi$ , что

$$P(\xi < x_p) = p.$$

По сути дела, квантиль есть функция, обратная  $F(x)$ . Она введена и табулирована для удобства различных вычислений. В прил. (табл. П2) приведены квантили стандартного нормального распределения. При отсутствии таких таблиц для вычисления квантилей можно воспользоваться таблицей функции Лапласа (табл. П1).

Обозначим квантиль стандартного нормального распределения через  $u_p$ . Если  $p < \frac{1}{2}$ , то находим  $x_p$ , для которого  $\Phi(x_p) = \frac{1}{2} - p$ .

Очевидно:

$$u_p = -x_p.$$

Если  $p > \frac{1}{2}$ , то находим  $x_p$ , для которого  $\Phi(x_p) = p - \frac{1}{2}$ , и, соответственно:

$$u_p = x_p.$$

Наконец, квантиль общего нормального распределения  $U_p$  определяется равенством

$$U_p = a + \sigma u_p.$$

Пусть известны  $x_p$  и  $x_q$ ,  $q < p$ . Тогда

$$P(x_q < x < x_p) = p - q.$$

Квантиль  $x_{0,5}$  называется медианой и для нормального распределения  $x_{0,5} = a$ .

## 2.4. Предельные теоремы теории вероятностей

Случайные события и случайные величины подчинены определенным закономерностям, которые позволяют прогнозировать их поведение и качественно оценивать некоторые их характеристики. Оценки характеристик производятся при ограниченном числе наблюдений над случайными величинами. Поэтому принципиально важно знать, как ведут себя статистические оценки при увеличении числа наблюдений. Совокупность теорем, устанавливающих устойчивость таких оценок, называют законом больших чисел. Сюда относятся теоремы Бернулли, Пуассона, Чебышева, Маркова и др. Для наших целей закон больших чисел мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – независимые случайные величины, имеющие одинаковые распределения и, в частности, одинаковые математические ожидания  $a = M(x_k)$  и дисперсии  $\sigma^2 = D(x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Обозначим через  $\bar{x}$  их среднее значение

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Очевидно:

$$M(\bar{x}) = a, \quad D(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D(x_k) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Тогда, согласно неравенству Чебышева:

$$P(|\bar{x} - a| > \varepsilon) \leq M(\bar{x} - a)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Каково бы ни было  $\delta > 0$ , при достаточно большом  $n$ ,  $n > \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{\delta}$ , среднее арифметическое  $\bar{x}$  с вероятностью, не меньшей  $1 - \delta$ , будет удовлетворять неравенству

$$|\bar{x} - a| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  сколь угодно мало.

Практический смысл закона больших чисел можно понять, например, из теоремы Чебышева.

Если в  $n$  независимых опытах получены  $n$  значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  случайной величины  $x$ , то среднее арифметическое наблюдаемых значений сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.

Характерные закономерности наблюдаются также в распределениях случайных величин, которые образуются в результате сложения большого числа малых воздействий. Такими случайными величинами могут быть, например, суммарная бытовая электрическая нагрузка или суммарное потребление газа бытовыми потребителями в некоторый момент времени, суммарная выручка магазина за определенный период и т. д. Выражением подобных закономерностей является *центральная предельная теорема*.

Если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием  $a$  и дисперсией  $\sigma^2$ , то при  $n \rightarrow \infty$  закон распределения их суммы  $\sum_{i=1}^n x_i$  неограниченно приближается к нормальному

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a < \frac{\sum_{i=1}^n x_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Центральная предельная теорема при некоторых ограничениях справедлива и для сумм случайных величин, имеющих неодинаковые распределения.

Частный случай центральной предельной теоремы — *теорема Лапласа* — устанавливает, что при неограниченном возрастании  $n$  биномиальное распределение стремится к нормальному. Таким же свойством обладает рассматриваемое в следующем разделе распределение Стьюдента и некоторые другие распределения. Именно поэтому мы рассмотрели выше нормальное распределение достаточно подробно.

На этом мы заканчиваем краткое введение в теорию вероятностей. Читатель, желающий изучить курс теории вероятностей более основательно, может обратиться к обширной учебной литературе, список которой приведен в конце пособия.

### 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В этом разделе мы рассмотрим понятия и методы математической статистики, необходимые для построения и анализа эконометрических моделей, в том числе основные принципы выборочного метода, точечные и интервальные оценки параметров, методы проверки статистических гипотез.

#### 3.1. Выборочный метод

Суть выборочного метода состоит в следующем. Имеется некоторая, достаточно большая совокупность объектов, называемая *генеральной совокупностью*, характеристики которой необходимо изучить. Из этой совокупности извлекают  $n$  объектов, которые образуют *выборку объема  $n$* . Выборку подвергают детальному исследованию, и по его результатам делают выводы о характеристиках генеральной совокупности в целом. Так, например, выборочный метод используется для контроля качества продукции, социологических исследований, изучения общественного мнения путем выборочных опросов и т. д. Выборка должна носить случайный характер. Поэтому любое суждение о генеральной совокупности по выборке носит случайный, вероятностный характер.

В эконометрике генеральную совокупность, как правило, составляют возможные значения случайной величины, непрерывной или дискретной, а выборка образуется путем наблюдения некоторых значений этой случайной величины. Схема наблюдений сводится к следующему. Изучаемая случайная величина  $x$  принимает значения из некоторого множества  $X$  ( $x \in X$ ). В результате наблюдений получают  $n$  значений этой величины ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), которые образуют выборку объема  $n$ . Условия наблюдения таковы, что появление каждого элемента  $x_i, i=1, 2, \dots, n$ , равновероятно. Поэтому каждому элементу  $x_i$  приписывается вероятность  $1/n$ .

Для того чтобы выборка достоверно описывала генеральную совокупность, то есть была *репрезентативной*, наблюдения должны удовлетворять следующим требованиям:

– отсутствие систематических ошибок, то есть ошибок повторяющихся и примерно одинаковых во всех наблюдениях;

– отсутствие грубых ошибок, связанных с резким и значительным нарушением условий эксперимента в одном или нескольких наблюдениях;

– случайный характер прочих ошибок.

При соблюдении этих условий истинный результат наблюдений есть математическое ожидание соответствующей случайной величины.

#### 3.2. Точечные оценки параметров

Генеральная совокупность характеризуется рядом параметров, значения которых неизвестны. Такими параметрами могут быть генеральное среднее  $m_x$ , генеральная дисперсия  $D_x$  и др. По данным выборки можно получить оценки этих параметров, которые называются *точечными оценками*. Естественно потребовать, чтобы полученные по выборке оценки наилучшим образом приближали истинные значения параметров, то есть отвечали некоторым обязательным требованиям точности и эффективности. Таких требований три.

Пусть  $\theta$  – истинное значение параметра, а  $\theta_n$  – его точечная оценка по выборке объема  $n$ .

Оценка называется *состоятельной*, если при  $n \rightarrow \infty$  она сходится на вероятности к истинному значению параметра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1$$

для любого сколь угодно малого числа  $\varepsilon$ .

Оценка называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно истинному значению параметра, то есть

$$M(\bar{\theta}_n) = \theta.$$

Оценка называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех несмещенных оценок, найденных по той же выборке.

Обычно оценки обозначают теми же терминами, что и сами параметры, добавляя слово «выборочная».

Следующие оценки состоятельные, несмещенные и эффективные.

Выборочное среднее



$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i. \quad (3.1)$$

Выборочная дисперсия

$$\bar{D}_x = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = s_x^2. \quad (3.2)$$

Выборочное среднеквадратичное отклонение

$$s_x = \sqrt{\bar{D}_x}. \quad (3.3)$$

Выборочный корреляционный момент

$$\bar{K}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (3.4)$$

Выборочный коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\bar{K}_{xy}}{s_x s_y}. \quad (3.5)$$

Отметим одно важное обстоятельство. В выражениях для выборочной дисперсии и выборочного корреляционного момента вместо ожидаемого объема выборки  $n$  стоит величина  $n-1$ . Причина этого в том, что величина  $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$  является смещенной оценкой дисперсии, а  $\frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$  – смещенная оценка корреляционного момента.

Можно показать, что

$$M \left( \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \right) = \frac{n-1}{n} D_x,$$

$$M \left( \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} \right) = \frac{n-1}{n} K_{xy}.$$

Приведенные выше оценки  $D_x$  и  $K_{xy}$  – несмещенные. В общем случае в знаменателе оценки записывается так называемое число степеней свободы, равное объему выборки минус число параметров, используемых в выражении оценки и найденных по той же выборке.

В рассмотренном случае в выражениях оценки дисперсии и корреляционного момента использовано выборочное среднее. Поэтому в знаменателе соответствующих оценок записано  $n-1$ .

Выборочные оценки сами являются случайными величинами. Поэтому важно установить, насколько сильно они могут отклоняться от истинных значений параметров. На основании выборочных оценок можно установить интервалы, внутри которых с некоторой вероятностью находятся истинные значения параметров. Такие интервалы называются *доверительными*, а оценки такого типа – *интервальными*.

### 3.3. Интервальные оценки параметров

Интервальной оценкой параметра  $\theta$  называется интервал  $(\theta_1, \theta_2)$ , который с заданной вероятностью  $1-p$  покрывает неизвестное значение параметра.

Интервал  $(\theta_1, \theta_2)$  называется *доверительным интервалом*, а вероятность  $1-p$  – *доверительной вероятностью*. Вероятность  $p$  называется *уровнем значимости*.

Изучая нормальное распределение, мы установили, что случайная величина  $x$  с математическим ожиданием  $a$  и среднеквадратичным отклонением  $\sigma$  с вероятностью  $1-p$  лежит в интервале

$$a - \sigma U_{1-\frac{p}{2}} \leq x \leq a + \sigma U_{1-\frac{p}{2}},$$

где  $U_{1-\frac{p}{2}}$  – соответствующий квантиль стандартного нормального

распределения. Этот интервал и есть доверительный интервал для случайной величины  $x$ . Выборочные оценки являются случайными величинами. Если установлены их законы распределения, то аналогичным образом можно найти доверительные интервалы для истинных значений параметров. Расчеты выполняются в следующем порядке:

- устанавливается закон распределения оценки, а точнее, некоторой функции от нее, называемой *статистикой*;
- задается доверительная вероятность;
- определяются квантили распределения;
- вычисляются границы доверительного интервала.

### 3.3.1. Доверительный интервал для генерального среднего

Поскольку генеральная дисперсия  $\sigma^2$  неизвестна, используют выборочную дисперсию  $s^2$  и рассматривают статистику

$$t = \frac{\bar{x} - m_x}{s} \sqrt{n}. \quad (3.6)$$

Эта статистика имеет  $t$ -распределение Стьюдента с  $n-1$  степенями свободы. Распределение Стьюдента симметрично относительно оси ординат. По таблицам (прил. табл. П3) находят  $\left(1 - \frac{p}{2}\right)$ -квантиль распределения Стьюдента, так что с вероятностью  $1-p$

$$|t| \leq t_{1-\frac{p}{2}}^{(n-1)}.$$

Отсюда

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{p}{2}}^{(n-1)} \leq m_x \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{p}{2}}^{(n-1)} \quad (3.7)$$

есть доверительный интервал для генерального среднего  $m_x$ .

### 3.3.2. Доверительный интервал для генеральной дисперсии

Для построения доверительного интервала генеральной дисперсии используют статистику

$$\chi^2 = \sum \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2. \quad (3.8)$$

Эта статистика распределена по закону Пирсона ( $\chi^2$ -распределение) с числом степеней свободы  $n-1$ . Распределение  $\chi^2$  несимметрично, так как, по определению,  $\chi^2 \geq 0$ . Поэтому для доверительной вероятности  $1-p$  необходимо определить два квантиля,  $\chi_{\frac{p}{2}}^2$  и  $\chi_{1-\frac{p}{2}}^2$  (см. прил. П4). При этом доверительный интервал для  $\chi^2$  имеет вид

$$\chi_{\frac{p}{2}}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{1-\frac{p}{2}}^2.$$

Связь между  $s^2$  и  $\chi^2$  очевидна:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi^2$$

или

$$\chi^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}.$$

Отсюда с вероятностью  $1-p$  справедливо

$$\chi_{\frac{p}{2}}^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{p}{2}}^2$$

или

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{p}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{p}{2}}^2}. \quad (3.9)$$

Для среднеквадратичного отклонения получаем

$$s \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-\frac{p}{2}}^2}} \leq \sigma \leq s \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{\frac{p}{2}}^2}}. \quad (3.10)$$

Для коэффициента корреляции построить доверительный интервал довольно сложно. Но в прикладных задачах этого и не требуется, так как обычно необходимо оценить значимость коэффициента корреляции. Оценка значимости позволяет выяснить, является ли корреляция существенной (значимой) или полученное значение коэффициента корреляции несущественно и им можно пренебречь.

### 3.4. Проверки статистических гипотез.

#### Значимость коэффициента корреляции

Для оценки значимости коэффициента корреляции используется метод, называемый проверкой статистических гипотез. Ввиду того, что проверка статистических гипотез часто используется в статистических исследованиях, мы рассмотрим вначале общие принципы проверки, а затем проиллюстрируем их на примере оценки значимости коэффициента корреляции.

Из принципа практической невозможности следует, что события с очень малыми вероятностями можно считать практически невозможными. Так, согласно правилу трех сигм, отклонение нормально распределенной случайной величины от среднего значения более

чем на  $3\sigma$  имеет вероятность 0,0027. С практической точки зрения, такое событие считают невозможным. Если оно все же произошло, то есть все основания полагать, что оно не случайно, и делать соответствующие выводы.

Наибольшее значение вероятности, несовместимое со случайностью события, называется *уровнем значимости*. Уровень значимости напрямую связан с доверительной вероятностью. Пусть для оценки доверительного интервала случайной величины  $x$  выбрана доверительная вероятность, равная  $1-p$ . Это означает, что, с практической точки зрения, все значения случайной величины лежат на отрезке

$$x_{\frac{p}{2}} \leq x \leq x_{1-\frac{p}{2}},$$

где  $x_{\frac{p}{2}}, x_{1-\frac{p}{2}}$  – квантили соответствующего распределения вероятностей. Выход  $x$  за пределы отрезка не совместим со случайностью. Поэтому вероятность  $p$  события, несовместного со случайностью, есть уровень значимости этого события:

$$p = P((x < x_{\frac{p}{2}}) \cup (x > x_{1-\frac{p}{2}})).$$

Доверительную вероятность называют также уровнем достоверности события. Таким образом, уровень достоверности и уровень значимости в сумме всегда дают единицу. Несколько необычное обозначение доверительной вероятности  $1-p$  вызвано желанием четко выделить этот факт. Уровень значимости показывает, какова вероятность ошибиться, объявив изучаемое событие неслучайным. Рассмотренные принципы положены в основу проверки статистических гипотез. Конкретные гипотезы имеют самые различные формулировки, но по существу все сводится к гипотезе о распределении вероятностей той или иной случайной величины. Порядок проверки состоит в следующем.

Высказывается так называемая нулевая гипотеза  $H_0$  и исключаящая ее альтернативная гипотеза  $H_1$  относительно случайной величины  $x$ .

Определяется закон распределения вероятностей случайной величины  $x$ , соответствующий гипотезе  $H_0$ .

Задается уровень значимости  $p$  (доверительная вероятность  $1-p$ ). Определяются квантили распределения  $x_{\frac{p}{2}}, x_{1-\frac{p}{2}}$ .

Вычисляется выборочное значение случайной величины  $x_0$ . Если  $x_{\frac{p}{2}} \leq x_0 \leq x_{1-\frac{p}{2}}$ , то гипотеза  $H_0$  не отвергается. Если же  $x_0$  попадает в область  $x < x_{\frac{p}{2}}$  или  $x > x_{1-\frac{p}{2}}$ , называемую критической, то гипотеза отвергается.

Второе суждение гораздо категоричнее первого. Эта ситуация аналогична приему доказательства, называемого в математике контрпримером. Если высказана некоторая гипотеза, то для того, чтобы ее отвергнуть, достаточно привести один пример (контрпример), противоречащий гипотезе. Но даже тысяча примеров, подтверждающих гипотезу, не позволяют ее принять, так как тысяча первый пример может стать контрпримером, отвергающим гипотезу.

Принимая решение по результатам проверки, можно допустить ошибку. Различают ошибки первого и второго рода.

*Ошибка первого рода* состоит в том, что отвергается гипотеза, которая на самом деле верна. Вероятность такой ошибки равна уровню значимости  $p$  и по желанию исследователя может быть сделана достаточно малой.

*Ошибка второго рода* состоит в том, что гипотеза принимается, хотя на самом деле она не верна. Если обозначить вероятность ошибки второго рода через  $q$ , то величина  $1-q$  называется *мощностью критерия*. Вычисление мощности критерия – довольно трудная задача и здесь не рассматривается. Отметим очевидную связь мощности критерия с уровнем значимости: чем больше величина  $p$ , тем меньше ошибки второго рода и, следовательно, тем мощнее критерий.

В заключение оценим значимость выборочного коэффициента корреляции путем проверки соответствующей статистической гипотезы. При оценке значимости предполагают, что истинный коэффициент корреляции  $\rho = 0$  (нулевая гипотеза  $H_0$ ). В этих условиях статистика

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

имеет  $t$ -распределение Стьюдента с  $n-2$  степенями свободы.

Коэффициент корреляции  $r$  значим на уровне  $p$  (гипотеза  $H_0$  отвергается), если

$$|t| = \frac{|r| \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} > t_{1-p}^{(n-2)},$$

где  $t_{1-p}^{(n-2)}$  – квантиль распределения Стьюдента. При этом вероятность ошибки не более  $p$ .

#### 4. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

В естественных науках обычно имеют дело с функциональной зависимостью между двумя переменными вида

$$y = f(x),$$

где  $f$  – непрерывная или дискретная функция.

В эконометрических исследованиях чаще имеют дело с ситуацией, когда каждому значению переменной  $x$  соответствует (условное) распределение вероятностей переменной  $y$ . Такая зависимость называется *стохастической* или *вероятностной*. Эта зависимость неоднозначна, так как каждому значению  $x$  соответствует множество значений переменной  $y$ , распределенной по некоторому закону. Закон распределения, а точнее его параметры, зависят от значений переменной  $x$ . Поэтому в эконометрических исследованиях актуальной является задача поиска закономерностей изменения параметров закона распределения  $y$  в зависимости от  $x$ . Важнейшим параметром такого типа является условное математическое ожидание  $M(y|x)$ .

Зависимость между значениями одной из переменных и условным математическим ожиданием другой называется *корреляционной зависимостью*

$$M(y|x) = f(x).$$

В общем случае распределение  $y$  может зависеть от  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . В этом случае корреляционная зависимость имеет вид

$$M(y|x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Зависимую переменную  $y$  называют *выходной переменной*, *функцией отклика*, *результативным признаком* и т. д., независимую переменную называют также *входной переменной*, *фактором*, *регрессором* и т. д. Уравнения связи функции отклика и факторов называют *уравнением регрессии*, функцию  $f$  – *функцией регрессии*, а ее график – *линией регрессии*. В случае единственной входной переменной регрессию называют *парной*, в общем случае – *множественной*.

В уравнения связи кроме входных переменных входят некоторые постоянные коэффициенты. По условию вхождения переменных и постоянных коэффициентов (параметров) в уравнение регрес-

сии различают регрессию, линейную по переменным и (или) по параметрам и нелинейную по переменным и (или) по параметрам. В зависимости от этого уравнение регрессии может быть *линейным* или *нелинейным* по переменным и (или) по параметрам.

При исследовании экономических закономерностей законы распределения значений функции отклика неизвестны. Поэтому для приближенной оценки (аппроксимации) истинной функции регрессии используется выборочный метод.

Оценкой функции регрессии является выборочное уравнение регрессии

$$\hat{y} = \hat{f}(\mathbf{X}, \mathbf{A}),$$

где  $\mathbf{X}$  – вектор входных переменных;  $\mathbf{A}$  – вектор параметров.

При правильном определении вида функции  $\hat{f}$  и параметров  $\mathbf{A}$  функция  $\hat{f}$  будет сходиться по вероятности к истинной функции регрессии.

#### 4.1. Линейная парная регрессия

Линейная парная регрессия является одной из наиболее распространенных эконометрических моделей. Типичная постановка задачи имеет следующий вид.

Найдены  $n$  пар выборочных значений  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  двух величин  $(x, y)$ . Предполагается, что между ними имеется линейная зависимость, описываемая уравнением регрессии вида

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon, \quad (4.1)$$

где  $\varepsilon$  – случайная составляющая, учитывающая случайные и неучетные факторы.

Таким образом, каждое наблюдение может быть представлено в форме

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \varepsilon_i. \quad (4.2)$$

Линейная регрессионная модель называется *классической*, если она удовлетворяет следующим требованиям.

Входная переменная  $x$  – величина неслучайная, а возмущение  $\varepsilon_i$  есть случайная величина.

Математическое ожидание возмущения  $\varepsilon_i$  равно нулю:

$$M(\varepsilon_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Дисперсия возмущения  $\varepsilon_i$  постоянна для любого  $i$ :

$$D(\varepsilon_i) = \sigma^2.$$

Это условие называют также *условием гомоскедастичности*.

4. Возмущения  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_j$  не коррелированы:

$$M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Добавим еще одно, пятое требование.

5. Возмущение  $\varepsilon_i$  распределено по нормальному закону.

Тогда регрессионную модель называют *классической нормальной линейной регрессионной моделью*.

В дальнейшем, если это специально не оговорено, предполагается, что условия 1–5 выполнены.

Таким образом, задача регрессионного анализа заключается в определении несмещенных, состоятельных, эффективных оценок коэффициентов  $\alpha_0, \alpha_1$ , то есть в установлении выборочной линейной зависимости

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x. \quad (4.3)$$

##### 4.1.1. Метод наименьших квадратов

Эффективную оценку коэффициентов обеспечивает *метод наименьших квадратов*. Суть его состоит в следующем. Сумма квадратов отклонений выборочных  $y_i$  и аппроксимирующих  $\hat{y}_i$  значений выходной величины

$$Q = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$$

пропорциональна среднеквадратичной ошибке аппроксимации. Выбирая коэффициенты  $\alpha_0, \alpha_1$  из условия минимума этой ошибки

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0,$$

получаем линейную аппроксимацию с минимальной дисперсией.

Условия минимума имеют вид

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) x_i = 0$$

или после очевидных преобразований

$$a_0 n + a_1 \sum x_i = \sum y_i, \quad a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i.$$

Разделив оба уравнения на  $n$ , окончательно получаем

$$a_0 + \bar{x} a_1 = \bar{y}, \quad \bar{x} a_0 + \bar{x}^2 a_1 = \overline{xy}, \quad (4.4)$$

где параметры с чертой – соответствующие средние.

Решение системы линейных относительно  $\alpha_0, \alpha_1$  уравнений имеет вид

$$a_0 = \bar{y} - \bar{x} a_1 = \bar{y} - \bar{x} \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2}, \quad a_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2}. \quad (4.5)$$

Коэффициент  $\alpha_1$  называют *выборочным коэффициентом регрессии*.

Тесноту линейной связи ранее мы характеризовали с помощью коэффициента корреляции. Поэтому между коэффициентом регрессии  $\alpha_1$  и коэффициентом корреляции  $r$  должна существовать линейная зависимость. Действительно:

$$a_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum x_i y_i - \frac{1}{n^2} \sum x_i \sum y_i}{\frac{1}{n} \sum x_i^2 - \frac{1}{n^2} (\sum x_i)^2} = \frac{\left( \sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i \right) / n - 1}{\left( \sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2 \right) / n - 1} = \frac{\bar{K}_{xy}}{s_x^2} = \frac{\bar{K}_{xy}}{s_x s_y} \frac{s_y}{s_x} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}.$$

Таким образом:

$$a_1 = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} \quad \text{или} \quad r_{xy} = a_1 \frac{s_x}{s_y}. \quad (4.6)$$

Поэтому уравнение регрессии можно записать в виде

$$\bar{y} = a_0 + r_{xy} \frac{s_y}{s_x} x. \quad (4.7)$$

Иногда удобно записывать уравнение регрессии в отклонениях от соответствующих средних

$$\hat{y} - \bar{y} = a_1 (x - \bar{x}) \quad (4.8)$$

или в нормированных отклонениях

$$\frac{\hat{y} - \bar{y}}{s_y} = r \frac{x - \bar{x}}{s_x}.$$

#### 4.1.2. Оценка точности аппроксимации

Уравнение регрессии описывает усредненную зависимость выходной переменной от входной. Воздействие неучтенных, случайных факторов и ошибок наблюдений определяется остаточной дисперсией  $\sigma^2$ . Несмещенной оценкой  $\sigma^2$  служит выборочная остаточная дисперсия

$$s^2 = \frac{\sum (\hat{y} - y_i)^2}{n - 2}. \quad (4.9)$$

Число степеней свободы здесь равно двум, так как выражение для  $\hat{y}$  содержит два параметра  $a_0$  и  $a_1$ , найденные по той же выборке.

Определим доверительный интервал (точнее, доверительную полосу) для функции регрессии. Вначале определим дисперсию  $\hat{y}$  как функцию  $x$

$$D(\hat{y}) = D(\bar{y} + a_1(x - \bar{x})) = D(\bar{y}) + D(a_1)(x - \bar{x})^2,$$

так как  $(x - \bar{x})$  – величина неслучайная.

Дисперсия среднего

$$D(\bar{y}) = D\left(\frac{1}{n} \sum y_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum D(y_i) = \frac{n\sigma_y^2}{n^2} = \frac{\sigma_y^2}{n},$$

а ее выборочное значение равно  $\frac{s_y^2}{n}$ . Определим дисперсию  $D(a_1)$ .

Можно показать, что

$$\begin{aligned} D(a_1) &= D \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sigma_y^2}{\left(\sum (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \\ &= \frac{\sigma_y^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_y^2}{s_x^2(n-1)}. \end{aligned}$$

Выборочное значение  $D(a_1)$ , таким образом, равно

$$s_{a_1}^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2(n-1)}.$$

В результате

$$s_{\hat{y}}^2 = \frac{s_y^2}{n} + \frac{s_y^2(x - \bar{x})^2}{s_x^2(n-1)} = s_y^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{s_x^2(n-1)} \right), \quad (4.10)$$

то есть выборочная дисперсия  $s_{\hat{y}}^2$  есть квадратичная функция  $x$ .

Можно показать, что статистика

$$t = \frac{\bar{y} - M_x(y)}{s_{\hat{y}}}$$

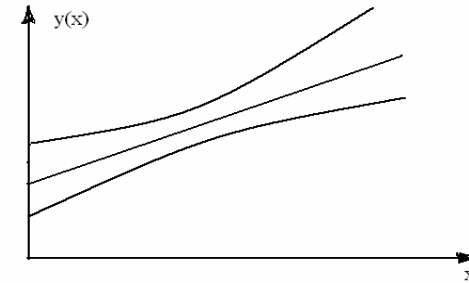
имеет  $t$ -распределение Стьюдента с  $n-2$  степенями свободы, а доверительный интервал  $M_x(y)$  для доверительной вероятности  $1-p$  имеет вид

$$\bar{y} - t_{1-\frac{p}{2}} \frac{s_{\hat{y}}}{\sqrt{n}} \leq M_x(y) \leq \bar{y} + t_{1-\frac{p}{2}} \frac{s_{\hat{y}}}{\sqrt{n}}. \quad (4.11)$$

Минимальный по ширине доверительный интервал соответствует  $x = \bar{x}$  и равен

$$\bar{y} - t_{1-\frac{p}{2}} \frac{s_y}{\sqrt{n}} \leq M_x(y) \leq \bar{y} + t_{1-\frac{p}{2}} \frac{s_y}{\sqrt{n}}.$$

Доверительная полоса для  $M_x(y)$  показана на рис. 4. Доверительный интервал для индивидуальных значений выходной переменной  $y$  несколько шире за счет остаточной дисперсии  $s^2$  и определяется по выборочной дисперсии  $s_{y_0}^2 = s_{\hat{y}}^2 + s^2$ .



**Рис. 4.** Доверительная полоса линии регрессии

При необходимости можно построить доверительный интервал для коэффициента регрессии  $\alpha_1$ , используя выборочный коэффициент  $a_1$  и распределение Стьюдента для статистики:

$$t = \frac{a_1 - \alpha_1}{s_y} s_x \sqrt{(n-1)}.$$

Наконец, при построении доверительного интервала истинной остаточной дисперсии  $\sigma^2$  используют статистику  $\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}$ , которая имеет распределение  $\chi^2$  Пирсона с  $n-2$  степенями свободы. На уровне значимости  $p$  доверительный интервал для  $\sigma^2$  имеет вид

$$\frac{(n-2)s^2}{\chi_{1-\frac{p}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-2)s^2}{\chi_{\frac{p}{2}}^2}.$$

#### 4.1.3. Оценка значимости уравнения регрессии

Как следует из предыдущего изложения, изменение выходной переменной  $y$  определяется двумя факторами: функциональной (в данном случае линейной) зависимостью выходной переменной от входной и неучтенными случайными факторами и ошибками наблюдения. Правомерно поставить вопрос, насколько значима зависимость, выраженная уравнением регрессии на фоне случайных ошибок. Ответ на этот вопрос дает сравнение выборочных дисперсий.

Изменчивость выходной переменной  $y$  характеризуется суммой квадратов отклонений

$$Q = \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (4.12)$$

или соответствующей дисперсией

$$s_y^2 = \frac{Q}{n-1}. \quad (4.13)$$

Изменение выходной переменной согласно уравнению регрессии можно оценить суммой квадратов отклонений

$$Q_R = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (4.14)$$

или дисперсией

$$s_R^2 = \frac{Q_R}{m-1}, \quad (4.15)$$

где  $m$  – число параметров в выражении для  $\bar{y}$ . Наконец, остаточная сумма квадратов и соответствующая дисперсия были определены ранее

$$Q_e = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

$$s^2 = \frac{Q_e}{n-m}.$$

$$Q = Q_R + Q_e. \quad (4.16)$$

Для выборочных дисперсий аналогичное равенство в общем случае не имеет места. Интуитивно ясно, что если  $s^2 \geq s_R^2$ , изменчивость, описываемая уравнением регрессии, соизмерима с ошибками наблюдения и, следовательно, выявленная зависимость незначима. Для оценки значимости используют статистику

$$F = \frac{s_R^2}{s^2},$$

которая имеет  $F$ -распределение Фишера с  $f_1 = m-1$  и  $f_2 = n-m$  степенями свободы. Нулевая гипотеза  $H_0$  утверждает, что  $F=1$ . В этом случае, задавая уровень значимости  $p$  и определяя для него квантиль  $F_{1-p}(f_1, f_2)$ , приходим к неравенству

$$\frac{s_R^2}{s^2} \leq F_{1-p}(f_1, f_2), \quad (4.17)$$

которое должно выполняться с вероятностью  $1-p$ .

Если  $\frac{s_R^2}{s^2} > F_{1-p}(f_1, f_2)$ , то гипотеза о незначимости уравнения

регрессии отвергается и регрессия признается значимой. При этом вероятность ошибки составляет величину  $p$ .

Значимость уравнения регрессии можно проверить другим способом. Уравнение регрессии незначимо, то есть выходная переменная  $y$  не зависит от входной  $x$ , если  $\alpha_1 = 0$ , а линия регрессии параллельна оси  $x$ . Принимая этот факт за нулевую гипотезу, можно утверждать, что статистика

$$t = \frac{a_1}{s} s_x \sqrt{n-1} \quad (4.18)$$

имеет  $t$ -распределение Стьюдента с  $n-2$  степенями свободы. Если фактическое значение  $t$  при заданном уровне значимости  $p$  по модулю больше табличного  $t_{1-p}$ :

$$|t_\Phi| > t_{1-p},$$

Можно показать, что



то гипотеза  $\alpha_1 = 0$  отвергается и уравнение регрессии признается значимым. Оба способа проверки значимости по  $F$ - и  $t$ -критерию равносильны.

Одной из наиболее эффективных оценок адекватности регрессионной модели является коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q} = 1 - \frac{Q_e}{Q}. \quad (4.19)$$

Коэффициент детерминации показывает, какая доля общей вариации выходной переменной  $y$  обусловлена зависимостью ее от входной переменной.

Очевидно, чем ближе  $R^2$  к единице, тем качественнее уравнение регрессии аппроксимирует эмпирическую зависимость.

Критерий значимости, основанный на коэффициенте детерминации, имеет вид

$$F = \frac{R^2(n-m)}{(1-R^2)(m-1)} > F_{1-p}(f_1, f_2),$$

где по-прежнему  $f_1 = m-1$ ,  $f_2 = n-m$ .

Можно показать, что

$$\frac{R^2(n-m)}{(1-R^2)(m-1)} = \frac{s_R^2}{s^2},$$

так что обе статистики дают одинаковые критерии значимости. Полезно отметить, что в случае парной регрессии  $R^2 = r^2$ , что удобно для вычислений. Использование коэффициента детерминации, пожалуй, более наглядно. В остальном обе статистики совершенно равноправны.

## 4.2. Множественная линейная регрессия

### 4.2.1. Выборочная оценка коэффициентов регрессии

В этом подразделе мы рассмотрим зависимость выходной переменной  $y$  от  $m$  входных переменных – факторов. Пусть  $y_i$  –  $i$ -е наблюдение. Тогда в соответствии с линейной регрессионной моделью для  $y_i$  получаем

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \dots + \alpha_m x_{mi} + \varepsilon_i,$$

где  $\alpha_j, j=0, 1, \dots, m$  – коэффициенты регрессии;  $\varepsilon_i, i=1, 2, \dots, n$  – случайная ошибка.

Здесь, как и ранее, предполагаем, что случайная ошибка  $\varepsilon_i$  удовлетворяет приведенным выше требованиям 1–5. Выборочное уравнение регрессии имеет вид

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m,$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_m$  – выборочные оценки коэффициентов регрессии. Обозначая через  $\mathbf{a}$   $m+1$ -мерный вектор-столбец выборочных коэффициентов регрессии, а через  $\mathbf{x}$   $m+1$ -мерный вектор-столбец  $(1, x_1, x_2, \dots, x_m)$ , уравнение регрессии можно записать в форме скалярного произведения

$$\hat{y} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle.$$

Введем следующие обозначения:  $\mathbf{y}$  – вектор-столбец  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ ;  $\mathbf{e}$  – вектор-столбец  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ ;  $\mathbf{x}_k$  – вектор-столбец  $(1, x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk})$ ;  $\mathbf{X}$  – матрица размером  $n \times (m+1)$ , строками которой являются векторы  $\mathbf{x}_k$ .

Тогда совокупность  $m$  наблюдений можно записать в матричной форме

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}.$$

Повторяя в точности алгоритм метода наименьших квадратов, приведенный в п. 4.1.1 последовательно получаем:

– вектор ошибок (отклонений)

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a};$$

– сумма квадратов отклонений

$$Q = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a});$$

– условия минимума

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

Если матрица  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  размером  $(m+1) \times (m+1)$  имеет ранг  $(m+1)$ , то вектор коэффициентов формально определяется выражением

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

Сформулируем дополнительное условие, которому должна удовлетворять классическая нормальная модель множественной регрессии.

*Условие б.*

Столбцы матрицы  $\mathbf{X}$  должны быть линейно независимы, то есть ее ранг равен  $m+1$ . В этом случае матрица  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  неособенная и имеет обратную матрицу. Заметим также, что для надежности статистических выводов число наблюдений  $n$  должно быть больше числа искоемых параметров  $m+1$ :

$$n > m+1.$$

#### 4.2.2. Оценка точности аппроксимации

Приведенные ниже результаты являются, по сути дела, матричным аналогом выражений, полученных в п. 4.2.1 для случая парной регрессии. Аналогом остаточной дисперсии является ковариационная матрица возмущений.

В силу условий 1–6 ковариационная матрица возмущений диагональна, причем элементы главной диагонали равны  $\sigma^2$ :

$$M(\mathbf{e}\mathbf{e}') = \sigma^2 \mathbf{E}_n,$$

где  $\mathbf{E}_n$  – единичная матрица порядка  $n$ .

Оценкой  $\sigma^2$  является по-прежнему выборочная остаточная дисперсия

$$s^2 = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - (m+1)}.$$

В выражении для  $s^2$  использовано  $m+1$  выборочных параметров – коэффициентов регрессии  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Поэтому число степеней свободы равно  $n - (m+1)$ .

Аналогом дисперсии параметра  $a_1$  (см. п. 4.1.2) является ковариационная матрица вектора оценок параметров  $\mathbf{a}$ , которая по определению равна

$$\mathbf{K}_a = M[(\mathbf{a} - \alpha)(\mathbf{a} - \alpha)'],$$

где  $\alpha$  – вектор истинных коэффициентов регрессии\*.

После несложных, хотя громоздких преобразований, матрицу  $\mathbf{K}_a$  получаем в виде

$$\mathbf{K}_a = s^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

Отметим, что матрица  $\mathbf{K}_a$  определяется по той же обратной матрице  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ , что и вектор параметров  $\mathbf{a}$ .

Теперь мы в состоянии найти доверительные интервалы для параметров регрессионной модели, доверительную полосу для функции регрессии и индивидуальных значений выходной переменной.

Обозначим через  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}_i$   $i$ -й диагональный элемент матрицы  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ . Тогда дисперсия коэффициента  $a_i$  запишется в виде

$$s^2_{ai} = s^2 [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]_i.$$

Задавая уровень значимости  $p$  и используя табличное значение распределения Стьюдента с  $n - (m+1)$  степенями свободы, получаем доверительный интервал для коэффициента  $\hat{a}_i$

$$a_i - s_{ai} t_{1-\frac{p}{2}} / \sqrt{n} \leq \alpha_i \leq a_i + s_{ai} t_{1-\frac{p}{2}} / \sqrt{n}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Доверительный интервал для остаточной дисперсии  $\sigma^2$  с уровнем значимости  $p$ , как и ранее, определяется с помощью распределения  $\chi^2$ , но с числом степеней свободы  $n - (m+1)$ :

$$\frac{(n - (m+1))s^2}{\chi^2_{1-\frac{p}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n - (m+1))s^2}{\chi^2_{\frac{p}{2}}}.$$

Для определения доверительной полосы функции регрессии необходимо вычислить среднеквадратичное отклонение  $\hat{y}$ . Матричный аналог соответствующего выражения п. 4.1.2 имеет вид

$$s_{\hat{y}} = s_y \sqrt{\mathbf{x}' (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}}$$

и является функцией вектора входных переменных  $\mathbf{x}$ . Доверительная полоса при этом имеет вид трубки в  $(m+1)$ -мерном пространстве переменных  $x_1, \dots, x_n, y$ :

\* Напомним, что  $M(a) = \alpha$ .

$$\hat{y} - t_{1-p} s_{\hat{y}} / \sqrt{n} \leq M(y|x) \leq \hat{y} + t_{1-p} s_{\hat{y}} / \sqrt{n}.$$

Число степеней свободы распределения Стьюдента здесь равно  $n-(m+1)$ .

Наконец, доверительный интервал для индивидуального значения  $y_0$  определяется по среднеквадратичному отклонению

$$s_{y_0} = \sqrt{s + s_y \mathbf{x}_0' (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0},$$

где  $x_0$  – фиксированное значение вектора  $\mathbf{x}$  и имеет вид

$$\hat{y}_0 - t_{1-p} s_{y_0} / \sqrt{n} \leq y_0 \leq \hat{y}_0 + t_{1-p} s_{y_0} / \sqrt{n}.$$

#### 4.2.3. Оценка значимости множественной регрессии

Как и в случае парной регрессии, имеет место разложение суммы квадратов отклонений выходной переменной от среднего значения:

$$Q = Q_R + Q_e.$$

Аналогично предыдущему

$$Q = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - n(\bar{y})^2.$$

Остаточная сумма квадратов

$$Q_e = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \langle \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{Y}\mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - 2\mathbf{a}' \mathbf{X}' \mathbf{y} + \mathbf{a}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \mathbf{a}.$$

Поскольку  $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{y}$ , то окончательно получаем

$$Q_e = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \mathbf{a}' \mathbf{X}' \mathbf{y}.$$

Наконец, сумма квадратов отклонений, обусловленных регрессией:

$$Q_R = Q - Q_e = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - n(\bar{y})^2 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + \mathbf{a}' \mathbf{X}' \mathbf{y}.$$

Таким образом:

$$Q_R = \mathbf{a}' \mathbf{X}' \mathbf{y} - n(\bar{y})^2.$$

Определим соответствующие дисперсии

$$s_R^2 = \frac{Q_R}{m}, \quad s_e^2 = \frac{Q_e}{n-(m+1)}.$$

Нулевая гипотеза утверждает, что истинные дисперсии  $\sigma_R^2$  и  $\sigma_e^2$  равны:

$$H_0 : \sigma_R^2 = \sigma_e^2.$$

В этом предположении должно соблюдаться неравенство

$$\frac{s_R^2}{s_e^2} \leq F_{1-p}(f_1, f_2),$$

где  $F_{1-p}(f_1, f_2)$  – квантиль распределения Фишера на уровне значимости  $p$  и при числах степеней свободы  $f_1 = m, f_2 = n - (m + 1)$ . Если это неравенство выполняется, то отличие дисперсий  $s_R^2$  и  $s_e^2$  можно считать случайным, а регрессию – незначимой. В противном случае гипотеза  $H_0$  отвергается и регрессия признается значимой.

Аналогично п. 4.1.3 можно оценить значимость по коэффициенту детерминации  $R^2$ , который, как и ранее, определяется выражением

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q}.$$

#### 4.3. Нелинейная регрессия

В предыдущих подразделах рассматривались регрессионные модели, линейные как по параметрам, так и по входным переменным. Для изучения таких моделей использовался классический аппарат математической статистики. Этот раздел эконометрики к настоящему времени имеет наиболее заверченный вид и может быть по праву отнесен к классическим результатам. В то же время следует отметить, что линейные модели имеют ограниченную область применения. В рамках линейной модели невозможно учесть эффект насыщения, характерный для многих социально-экономических явлений, эффект цикличности, отражающий повторяемость экономических процессов, и ряд других нелинейных эффектов.

Нелинейные регрессионные модели достаточно сложны и требуют, как правило, индивидуального подхода в каждом конкретном случае. В этом подразделе мы рассмотрим регулярные методы анализа, применяемые к некоторым классам нелинейных регрессионных моделей, которые в результате несложных преобразований приводятся к линейным.

#### 4.3.1. Модели множественной регрессии, линейные по параметрам

Общей формой таких моделей является регрессионное уравнение

$$y = a_0 + a_1 f_1(x_1) + a_2 f_2(x_2) + \dots + a_n f_m(x_m),$$

где  $f_i(x_i)$  – некоторая известная функция входной переменной  $x_i$ . Заменой переменных

$$z_i = f_i(x_i)$$

это уравнение может быть приведено к виду классической множественной регрессии

$$y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m.$$

Используя функциональную зависимость  $z_i = f_i(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , вместо информационной матрицы  $\mathbf{X}$  можно рассчитать информационную матрицу  $\mathbf{Z}$  и представить вектор наблюдаемых значений выходной величины в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{Za} + \mathbf{e}.$$

Дальнейшие результаты с точностью до обозначений совпадают с полученными в пп. 4.2.1–4.2.3.

#### 4.3.2. Модели парной регрессии, линейные по параметрам

Важный и интересный класс регрессионных моделей составляют модели парной регрессии, нелинейные по переменным, но линейные по параметрам. Общий вид таких моделей описывается уравнением

$$y = a_0 + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_m f_m(x),$$

где  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  – функции весьма широкого класса.

Единственным требованием к ним является определенность на промежутке  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$  возможных значений входной переменной  $x$ . Информационная матрица, которую мы по-прежнему обозначаем буквой  $\mathbf{X}$ , имеет вид

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 f_1(x_1) \dots f_m(x_1) \\ 1 f_1(x_2) \dots f_m(x_2) \\ \dots \\ 1 f_1(x_n) \dots f_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Для надежности статистических выводов необходимо, чтобы число наблюдений было больше числа параметров, то есть соблюдалось неравенство  $n > m$ . Ранг матрицы должен быть равен  $m + 1$ . Вектор наблюдаемых значений выходной величины может быть представлен в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xa} + \mathbf{e}.$$

Дальнейшие результаты в точности совпадают с полученными в пп. 4.2.1–4.2.3. Представляют интерес два важных частных случая рассматриваемой модели.

*Модель циклических процессов*

В моделях такого типа функции  $f(x)$  периодические:

$$f_i(x) = \sin(\omega_i x + \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Если периоды составляющих гармонии удовлетворяют условию  $T_i = \frac{T_1}{i}$ , то для анализа таких моделей можно использовать аппарат рядов Фурье. В противном случае применяется изложенный в пп. 4.2.1–4.2.3 аппарат анализа множественной линейной регрессии.

Модели циклических процессов весьма актуальны при изучении и прогнозировании временных рядов. Некоторые специфические методы анализа временных рядов, в том числе со скрытыми периодичностями, будут рассмотрены в следующем разделе.

*Модель полиномиальной парной регрессии*

В моделях этого типа функции  $f_i(x)$  имеют вид

$$f_i(x) = x^i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

так что аппроксимирующая зависимость представляется полиномом

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m.$$

Информационная матрица  $\mathbf{X}$  приобретает специфическую форму

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1x_1x_1^2 \dots x_1^m \\ 1x_2x_2^2 \dots x_2^m \\ \dots \\ 1x_nx_n^2 \dots x_n^m \end{pmatrix}.$$

Если  $n = m + 1$ , то коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_m$  можно выбрать так, что все наблюдаемые значения будут лежать в точности на кривой, определенной аппроксимирующим полиномом, то есть

$$y(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Полином такого вида называется полиномом Лагранжа, а его коэффициенты определяются решением системы линейных уравнений

$$\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{y}.$$

Если  $n \geq m + 1$ , то информационная матрица по определению имеет ранг  $m + 1$  при условии, что ни в одной из пар наблюдений значения входной переменной не совпадают, что вполне естественно. Таким образом, для случая  $n > m + 1$  применим в полном объеме аппарат, изученный в пп. 4.2.1–4.2.3.

Предлагаем читателю самостоятельно проделать все выкладки пп. 4.2.1–4.2.3 и получить аналогичные результаты для моделей пп. 4.3.1–4.3.2. Обратите внимание на тот факт, что вычисляемые при этом оценки относятся к преобразованным переменным, так что необходимы некоторые обратные преобразования для получения оценок в терминах исходных переменных.

### 4.3.3. Регрессия, нелинейная по параметрам и переменным

Наиболее общей формой нелинейных регрессионных моделей являются модели, нелинейные как по параметрам, так и по входным переменным. Сразу же отметим, что общих методов анализа таких моделей не существует. Более того, не существует даже сколько-нибудь систематической классификации моделей такого типа. Мы рассмотрим здесь некоторые примеры, которые при всем их разнообразии сводятся к линеаризации нелинейной регрессионной модели.

Исследование динамики социально-экономических процессов выявило наличие эффекта насыщения в изменении выходных переменных. В разное время было предложено несколько моделей процессов с насыщением. Рассмотрим некоторые из них.

Экспоненциальная модель вида

$$y = ke^{-\frac{\beta}{x}}$$

при  $\beta > 0$  представляет типичную кривую насыщения с асимптотой  $y = k$  и нулевым начальным значением. Логарифмируя левую и правую части:

$$\ln y = \ln k - \frac{\beta}{x},$$

делая замену переменной  $z = \frac{1}{x}$ , получаем

$$\ln y = \ln k - \beta z.$$

Наконец, вводя обозначения

$$u = \ln y,$$

$$a_0 = \ln k,$$

$$-\beta = a_1,$$

окончательно получаем уравнение линейной парной регрессии

$$u = a_0 + a_1 z.$$

Так называемая *логистическая кривая*

$$y = \frac{k}{1 + bc^{-at}}$$

при  $c > 1$  и  $a > 0$  также описывает кривую насыщения с асимптотой  $y = k$  и начальным значением  $\frac{k}{1+b}$ .

К сожалению, никакими преобразованиями эта кривая не может быть приведена к модели, линейной относительно параметров.

Хорошо известна производственная функция Кобба–Дугласа

$$y = ak^\alpha t^\beta,$$

где  $y$  – объем производства;  $k$  – затраты капитала;  $t$  – затраты труда.

Показатели  $\alpha, \beta$  являются коэффициентами частной эластичности. Логарифмируя левую и правую части:

$$\ln y = \ln a + \alpha \ln k + \beta \ln t$$

и вводя обозначения

$$\ln y = z,$$

$$\ln a = a_0,$$

$$\ln k = x_1,$$

$$\ln t = x_2,$$

$$\alpha = a_1,$$

$$\beta = a_2,$$

получаем линейную регрессионную модель

$$Z = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2.$$

В общем случае нелинейная модель имеет вид нелинейной функции вектора параметров  $\mathbf{a}$  и вектора переменных  $\mathbf{x}$

$$y = f(\mathbf{a}, \mathbf{x}).$$

Метод наименьших квадратов в самой общей форме приводит к необходимости минимизации функции

$$Q = \sum (y_i - f(\mathbf{a}, \mathbf{x}^{(i)}))^2 \rightarrow \min,$$

где  $y_i, \mathbf{x}^{(i)}$  –  $i$ -е наблюдение.

Решение задачи отыскания локального минимума функции  $Q$  по переменным параметрам  $\mathbf{a}$  численными методами (например, градиентным методом) особых проблем не представляет. Главная трудность состоит в том, что при сколько-нибудь сложной функции  $f$  минимизируемая функция  $Q$  оказывается многоэкстремальной. Поиск глобального минимума, который является решением исходной задачи, может оказаться весьма трудным.

#### 4.4. Мультиколлинеарность

В этом (и следующем) подразделе мы рассмотрим некоторые особенности практического применения классических линейных регрессионных моделей в “неклассических” ситуациях. Первой такой ситуацией является мультиколлинеарность, то есть существенная, значимая корреляционная зависимость между входными переменными.

Крайняя форма такой зависимости – линейная функциональная связь между двумя или большим числом входных переменных. В этом случае столбцы информационной матрицы  $\mathbf{X}$  оказываются линейно зависимыми, матрица  $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$  – особенная, и задача не имеет решения. К счастью, этот вариант мультиколлинеарности, как правило, – результат некорректной постановки задачи, что может быть немедленно выяснено и устранено исключением из теоретической модели соответствующих входных переменных.

В экономических исследованиях мультиколлинеарность проявляется обычно в скрытой форме, когда между двумя или несколькими переменными существует достаточно тесная стохастическая

зависимость, первым признаком которой является наличие больших абсолютных значений коэффициентов корреляции. Такой вид мультиколлинеарности возможен даже при корректной постановке задачи. Причиной возникновения мультиколлинеарности чаще всего является наличие в изучаемом объекте процессов, одновременно влияющих на некоторые входные переменные, но неучтенных в априорной теоретической модели. Это может быть результатом некачественного исследования предметной области или сложности взаимосвязей параметров изучаемого объекта.

Приведем один характерный пример. Суточные графики энергопотребления (нагрузки) различных узлов энергосистемы: предприятий, городов и сел, электрифицированного транспорта и т. д. – входные переменные в различных моделях анализа и оптимизации режимов энергосистем. При исследовании ковариационной матрицы графиков нагрузок обнаруживается весьма тесная корреляционная связь между некоторыми из них. Причины такой тесной корреляции очевидны:

- одинаковый суточный цикл труда и отдыха;
- режимы работы предприятий с односменной и двухсменной работой;
- режимы работы предприятий с непрерывным производством;
- режимы работы электрифицированного транспорта и т. д.

Таким образом, коррелированность графиков вполне объяснима. Можно пойти еще дальше и обнаружить единственную причину мультиколлинеарности графиков нагрузок – вращение Земли вокруг своей оси. Действительно, все трудовые и социальные процессы привязаны к суточному циклу изменения времени, а, следовательно, главный фактор высокой корреляции графиков – время. Этот, безусловно, справедливый вывод в практическом отношении ничего не дает, так как время служит только шкалой, к которой привязаны через режимы труда и отдыха графики энергопотребления. Сам механизм привязки весьма сложен и требует тщательного изучения, в том числе эконометрическими методами. Некоторые из них мы рассмотрим в настоящем подразделе.

Стохастическая мультиколлинеарность не является препятствием к применению классических регрессионных моделей. Но в этом случае матрица  $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$  плохо обусловлена. В результате оценки становятся чувствительными к исходным данным, наблюдаются значительные расхождения в величинах коэффициентов, то есть в полной

мере проявляются все признаки так называемых некорректных задач. Для устранения или уменьшения мультиколлинеарности используется ряд методов. Некоторые из них мы рассмотрим с той или иной степенью подробности.

#### 4.4.1. Метод пошагового исключения (отбора) факторов

Наиболее простой прием заключается в том, что из двух входных переменных, имеющих высокий коэффициент корреляции, одна переменная исключается. Эту процедуру можно применить несколько раз. При использовании этого приема возникают, по крайней мере, три проблемы:

- определение порогового значения коэффициента корреляции;
- выбор исключаемой переменной;
- оценка изменения значимости регрессионного уравнения при исключении той или иной входной переменной.

Более обоснованным представляется пошаговый отбор переменных, включаемых в регрессионное уравнение. Процедура отбора состоит в следующем.

*1-й шаг.* Из совокупности входных переменных выбирается переменная, имеющая наибольший парный коэффициент корреляции с выходной переменной. Для полученной модели парной регрессии подсчитывается коэффициент детерминации модели  $R_1^2$ .

*2-й шаг.* К выбранной переменной добавляется следующая из оставшейся совокупности, выбираемая из условия, чтобы коэффициент детерминации двумерной модели был наибольшим. Коэффициент детерминации двумерной модели  $R_2^2$  сравнивается с  $R_1^2$ . Если  $R_2^2$  существенно больше  $R_1^2$ , то приступают к выбору третьей переменной. В противном случае удовлетворяются одномерной моделью.

*Последующие шаги* осуществляются аналогично второму шагу. Процесс отбора заканчивается, когда очередная включаемая в модель переменная не дает существенного увеличения коэффициента детерминации.

#### 4.4.2. Метод главных компонент

Здесь и далее в этом подразделе будем предполагать, что математические ожидания входных переменных равны нулю, что достигается, например, центрированием входных переменных выбором

ными средними. Кроме того, векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{x}$  будем считать укороченными на нулевую координату:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^t, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^t,$$

так что уравнение регрессии имеет вид

$$y = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle.$$

Основная идея метода главных компонент состоит в таком преобразовании входных переменных, чтобы новые переменные были некоррелированными.

Ковариационная матрица входных переменных

$$\mathbf{K}_x = M(\mathbf{x}\mathbf{x}^t)$$

вещественная и симметричная и, следовательно, имеет вещественные собственные значения. Согласно известной теореме линейной алгебры, существует ортогональный базис, в котором матрица  $\mathbf{K}_x$  диагональная и вещественная. Этот базис состоит из  $m$  собственных векторов матрицы  $\mathbf{K}_x$ . Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны и определяются из условия

$$\mathbf{K}_x \mathbf{u}^i = \lambda_i \mathbf{u}^i, i = 1, 2, \dots, m,$$

где  $\mathbf{u}^i$ ,  $\lambda_i$  – собственный вектор и соответствующее ему собственное значение.

Собственные векторы определяются с точностью до произвольных сомножителей. Нормируем их так, чтобы длина каждого вектора равнялась единице:

$$\langle \mathbf{u}^i, \mathbf{u}^i \rangle = 1$$

и перенумеруем в порядке убывания собственные значения, так что

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m.$$

Составим из векторов  $\mathbf{u}^i$ , как из столбцов, матрицу  $\mathbf{U}$ . Линейное преобразование с матрицей  $\mathbf{U}$  является унитарным. Действительно, по определению матрицы  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^t = \mathbf{U}^t\mathbf{U} = \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

Унитарное образование обладает рядом полезных свойств.

1. Транспортирование матрицы  $\mathbf{U}^t$  равно обратной  $\mathbf{U}^{-1}$ . Действительно, так как

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{E}, \text{ то } \mathbf{U}^t = \mathbf{U}^{-1}.$$

2. Собственные значения матрицы  $\mathbf{U}$  равны 1, что следует из ее определения и предварительной нормировки векторов  $\mathbf{u}^i$ .

3. Преобразование  $\mathbf{U}$  сохраняет длину вектора

$$\langle \mathbf{Ux}, \mathbf{Ux} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Преобразуем вектор входных переменных по правилу

$$\mathbf{x} = \mathbf{Uz}, \mathbf{z} = \mathbf{U}'\mathbf{x}.$$

Регрессионное уравнение после преобразования переменных примет следующий вид:

$$y = \langle \mathbf{a}, \mathbf{Uz} \rangle = \langle \mathbf{U}'\mathbf{a}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{z} \rangle,$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{U}'\mathbf{a}$ .

Ковариационная матрица координат вектора  $\mathbf{z}$   $z_i, i = 1, 2, \dots, m$ , найденная по обычным правилам, приобретает диагональную форму

$$\mathbf{K}_z = M(\mathbf{zz}') = M(\mathbf{U}'\mathbf{xx}'\mathbf{U}) = \mathbf{U}'\mathbf{K}_x\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda},$$

где  $\mathbf{\Lambda}$  – диагональная матрица, элементами которой являются упорядоченные по убыванию собственные значения матрицы  $\mathbf{K}_x$ .

Из определения матрицы  $\mathbf{K}_z$  следует, что

$$M(z_i, z_i) = \lambda_i;$$

$$M(z_i, z_j) = 0, i \neq j.$$

Таким образом, новые переменные  $z_i, i = 1, 2, \dots, m$  некоррелированы, а их дисперсии равны  $\lambda_i$ . Новые переменные  $z_i$  называются в литературе *главными компонентами*, а изложенная выше процедура – *компонентным анализом*.

Подведем итог полученным результатам и наметим пути их использования. Формальный алгоритм сводится к следующим действиям.

1. Вычисляются элементы ковариационной матрицы  $\mathbf{K}_x$ , определяются ее собственные значения и соответствующие им собственные векторы.

2. Собственные векторы нормируются и упорядочиваются по абсолютной величине собственных значений.

3. Составляется матрица преобразования  $\mathbf{U}$ .

4. Векторы  $\mathbf{x}^i, i = 1, 2, \dots, n$  наблюдаемых значений входных переменных преобразуются по правилу

$$\mathbf{z}^i = \mathbf{U}'\mathbf{x}^i.$$

5. Методами классического множественного регрессионного анализа (подразд. 4.2) на основе преобразований данных  $\mathbf{z}^i$  определяются коэффициенты  $b_i, i = 1, 2, \dots, m$ .

При всех трудностях вычисления собственных векторов и собственных значений приведенный алгоритм достаточно просто реализуется. Главная проблема состоит в сколько-нибудь разумном истолковании и использовании полученных результатов.

При формировании исходной теоретической модели входные переменные  $x_i$  выбирались из числа экономических факторов на основе тщательного изучения предметной области. Аппарат множественного регрессионного анализа позволяет установить факт влияния входных переменных на выходной показатель, а также оценить количественно (коэффициенты  $a_i$ ) меру этого влияния. Истолкование и использование результатов здесь не составляло труда для специалиста в данной предметной области.

Главные компоненты представляют линейные комбинации исходных переменных и, вообще говоря, не имеют никакого экономического смысла. Единственным существенным инвариантом преобразования (кроме собственных значений  $\lambda_i$ ) является сумма дисперсий переменными  $x_i$  и  $z_i$ . Унитарное преобразование  $\mathbf{U}$  оставляет неизменным скалярное произведение. Поэтому

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{U}'\mathbf{x}, \mathbf{U}'\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Переходя к математическим ожиданиям, получаем

$$\sum s_{z_i}^2 = \sum \lambda_i = \sum s_{x_i}^2.$$

Этот факт будет существенно использован в дальнейшем для принятия соответствующих решений.

Приступая к анализу полученных результатов, прежде всего необходимо оценить соотношение дисперсий (собственных значений  $\lambda_i$ ) главных компонент. При наличии сильной мультиколлинеарности следует ожидать значительных различий (на порядок и больше) абсолютных величин собственных значений. Главные компоненты с малыми дисперсиями  $\lambda_i$  следует исключить. Ошибка при этом легко оценивается по сумме собственных значений исключенных главных компонент.

Из матрицы преобразований  $\mathbf{U}$  исключаются последние столбцы, соответствующие исключаемым главным компонентам. Если при этом число главных компонент оказалось небольшим, зачастую удастся приписать им вполне определенный экономический смысл. Это наиболее интересный случай, позволяющий выявить скрытые зависимости, установить новую систему экономических перемен-



ных, по-новому оценить структуру изучаемого объекта или процесса. Но даже если число значимых главных компонент оказалось достаточно большим, результаты компонентного анализа позволяют устранить последствия мультиколлинеарности.

Пусть  $\mathbf{X}$  – по-прежнему информационная матрица, но для укороченного вектора входных переменных  $\mathbf{x}$ . Выборочная ковариационная матрица  $\mathbf{K}_x$  определяется выражением

$$\mathbf{K}_x = M(\mathbf{X}'\mathbf{X}) / (n-1).$$

Основные неприятности мультиколлинеарности проистекают из-за того, что при ее наличии определитель  $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$  близок к нулю.

Матрица  $\mathbf{K}_x$  подобна матрице  $\mathbf{K}_z = \mathbf{\Lambda}$  по определению. Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения и одинаковые определители. Следовательно:

$$|\mathbf{K}_x| = |\mathbf{\Lambda}| = \prod_{i=1}^m \lambda_i.$$

Это выражение показывает, что ответственность за близость определителя  $|\mathbf{K}_x|$  к нулю несут последние наименьшие собственные значения матрицы  $|\mathbf{K}_x|$ . Напомним, что они же являются дисперсиями главных компонент. Если положить равным нулю некоторое малое собственное значение  $\lambda_i$ , то в соответствии с уравнением

$$\mathbf{K}_x \mathbf{U}^i = \lambda_i \mathbf{U}^i$$

нулевое значение примет собственный вектор  $\mathbf{U}^i$  и нулевым окажется столбец  $i$  матрицы  $\mathbf{U}$ . Приравняв нулю  $l$  последних, пренебрежимо малых собственных значений, получим матрицу  $\mathbf{U}_l$ , у которой равны нулю последние  $l$  столбцов и которая, следовательно, имеет ранг  $m-l$ . Преобразование

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}_l \mathbf{z}$$

в этом случае фактически выражает  $m$  координат вектора  $\mathbf{x}$  через  $m-l$  главных компонент. «Подправим» исходные данные согласно выражению

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{U}_l \mathbf{z}^i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Для исправленных исходных данных компоненты  $\mathbf{x}^j, j = 1, 2, \dots, m$  становятся явно линейно зависимыми, причем  $l$  из них являются линейными комбинациями  $m-l$  остальных. Таким образом, задача заключается в том, чтобы в исправленной матрице  $\mathbf{X}$  найти  $m-l$  линейно независимых столбцов. Задача эта хотя и трудоемкая, но

вполне разрешима. Получив совокупность линейно независимых столбцов в виде матриц  $\mathbf{X}_{m-l}$ , а уравнение множественной регрессии в виде

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^{m-l} a_j x_j,$$

можно использовать аппарат множественного регрессионного анализа для модели, свободной от мультиколлинеарности, причем для оценки параметров в матрицу  $\mathbf{X}_{m-l}$  можно «вернуть» прежние «исправленные» данные.

#### 4.4.3. Факторный анализ

Факторный анализ, в отличие от метода главных компонент, ориентируется не на дисперсии ковариационной матрицы, а на коэффициенты корреляции. Формально факторный анализ похож на метод главных компонент – факторы здесь также являются случайными величинами, а входные переменные выражаются через их линейные комбинации. Но на этом сходство оканчивается. Факторы не обязательно ортогональны и могут быть коррелированы между собой. Отбор факторов производится на основании анализа того, насколько присоединение нового фактора уменьшает остаточную корреляцию между входными переменными. В этом отношении факторный метод имеет общие черты с изложенным выше методом пошагового отбора. Существенная разница, помимо используемого аппарата, состоит в том, что в методе пошагового отбора отбираются (исключаются) входные переменные, имеющие вполне определенный экономический смысл. В факторном методе факторы – некоторые абстрактные переменные, назначение которых – меньшим числом исчерпать корреляцию входных переменных. Впрочем, в ряде случаев им удастся придать вполне определенный экономический смысл.

Итак, пусть  $z_1, z_2, \dots, z_k$  – факторы, а  $\mathbf{U}$  – матрица размером  $(m \times k)$ . Элементы  $u_{ij}$  матрицы называются факторными нагрузками. Число факторов  $k$  может быть задано, но может определяться в процессе построения факторной модели. Естественно, имеет смысл строить такую модель, если  $k < m$ . В случае мультиколлинеарности входных переменных это обычно имеет место. Задачей факторного анализа является, таким образом, определение числа необходимых

факторов и соответствующих факторных нагрузок, в результате чего входные переменные представляются в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{z}.$$

Существует ряд методов решения этой задачи. Мы рассмотрим наиболее наглядный из них, так называемый центроидный метод. Для простоты изложения положим  $k = 2$ . Пусть  $x_1, x_2$  – две входные переменные. Так как в принятых допущениях

$$s_1^2 = M \langle x_1, x_1 \rangle,$$

$$s_2^2 = M \langle x_2, x_2 \rangle,$$

$$\bar{K}_x = M \langle x_1, x_2 \rangle = r s_1 s_2,$$

то ковариационная матрица имеет вид

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} s_1^2 & r s_1 s_2 \\ r s_1 s_2 & s_2^2 \end{pmatrix}.$$

Из теории векторных пространств известно, что косинус угла между векторами  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  равен

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle}{|\mathbf{x}_1| |\mathbf{x}_2|}.$$

Отождествляя случайные величины  $x_1, x_2$  с векторами, а их длины – со среднеквадратичными отклонениями, находим, что угол между ними определяется выражением

$$\cos \theta = \frac{\bar{K}_x}{s_1 s_2} = \frac{r s_1 s_2}{s_1 s_2} = r.$$

Предположим, что угол  $\theta$  – острый. В противном случае знак одной из переменных можно изменить на противоположный. Тогда направление векторов (а в общем случае – пучка векторов) указывает, если так можно выразиться, направление корреляции. Сумма этих векторов после приведения ее к единичной длине определяет первый фактор  $z_1$ . Он отражает, в какой-то мере, среднее направление пучка. Пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы между факторами  $z_1$  и векторами  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  соответственно,  $\varphi_1 + \varphi_2 = \theta$ . Из чисто геометрических соображений находим

$$u_{11} = s_1 \cos \varphi_1;$$

$$u_{21} = s_2 \cos \varphi_2.$$

Обозначим вектор-столбец нагрузок первого фактора через  $\mathbf{U}^1$ . Тогда, выполняя замену переменных

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^1 \mathbf{z}_1,$$

мы тем самым учитываем влияние первого фактора, а матрица остаточных ковариаций принимает вид

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} - \mathbf{U}^1 \mathbf{U}^{1'}$$

или после некоторых преобразований

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} s_1^2 \sin^2 \varphi_1 & -s_1 s_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ -s_1 s_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & s_2^2 \sin^2 \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $s_1 \sin \varphi_1 = s_2 \sin \varphi_2$ , то суммы элементов по строкам и столбцам равны нулю. Для дальнейших операций следует изменить знаки элементов на противоположные в одной строке и в одном столбце. Проанализируем матрицу  $\mathbf{K}_0$ . Так как  $\varphi_1, \varphi_2$  – острые углы, то дисперсии в  $\mathbf{K}_0$  по сравнению с  $\mathbf{K}$  уменьшились, причем в точно известных соотношениях, определяемых величинами  $\sin \varphi_1, \sin \varphi_2$ . Корреляционные моменты также уменьшились и даже стали отрицательными. Степень уменьшения корреляции в общем случае установить довольно сложно, хотя в конкретном расчете эта оценка не представляет труда.

Пусть  $\theta = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ . В этом случае  $r = \cos \theta = 0$ , исходные слу-

чайные величины некоррелированы, факторные нагрузки равны нулю, факторами являются сами входные переменные. Другой крайний случай соответствует линейной функциональной зависимости между  $x_1, x_2$ , например,  $x_1 = kx_2$ , где  $k$  – некоторый числовой коэффициент. В этом случае  $\theta = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$  и факторные нагрузки равны дисперсиям

$$u_{11} = s_1;$$

$$u_{21} = s_2.$$

Матрица остаточных ковариаций нулевая. Это означает, что единственный фактор  $\mathbf{z}_1$  полностью исчерпал ковариационную матрицу. Вектор  $\mathbf{z}_1$  имеет единичную длину, поэтому факторные нагрузки равны длинам параллельных векторов  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ . Наконец, рассмотрим наиболее интересный для приложений случай мультиколлинеарности. Здесь углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  малы, уменьшение значений коэффициентов остаточной матрицы существенно, метод хорошо работает. Если ковариации уменьшились недостаточно, то аналогично предыдущему по матрице  $\mathbf{K}_0$  вычисляется нагрузка второго фактора. Эта процедура (в многомерных случаях) продолжается до тех пор, пока не будут получены приемлемые значения остатков.

#### 4.5. Регрессионные модели с переменной структурой

До сих пор мы рассматривали модели, в которых входные переменные имели количественный тип. В практике эконометрических исследований зачастую возникает необходимость учитывать влияние на выходную переменную факторов, уровни которых не могут быть описаны количественно.

Сам факт влияния (или не влияния) качественного фактора на выходную переменную может быть установлен методами дисперсионного анализа (разд. 8) и особых трудностей не вызывает. Проблемы возникают при попытке включения качественных факторов в число входных переменных регрессионной модели. Главная проблема состоит в том, что качественные факторы могут действовать на выходную переменную как аддитивно, так и мультипликативно. В первом случае их учет в регрессионной модели не представляет особых трудностей, во втором случае трудности могут стать непреодолимыми, что вынуждает строить регрессионную модель для каждого уровня качественного фактора. Рассмотрим обе эти ситуации на примерах.

Как известно, заработная плата работников бюджетной сферы определяется тарифной сеткой и в первом приближении может быть аппроксимирована прямой

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon,$$

где  $x$  – разряд работника;  $y$  – заработная плата.

Известно также, что при наличии у работника ученой степени кандидата или доктора наук ему выплачивается постоянная надбавка, зависящая от степени. Таким образом, в исходную модель желательно включить качественную переменную  $z$ , которая может принимать следующие значения:

- степени нет;
- степень кандидата наук;
- степень доктора наук.

Поскольку надбавки входят в модель аддитивно, можно было бы с каждым уровнем фактора  $z$  связать некоторое число, например 0, 1, 2, и включить переменную  $z$  в число регрессоров как обычную количественную входную переменную. Однако при таком подходе возникает две проблемы. Поскольку числовые уровни выбраны произвольно, зависимость надбавки от их значений может быть не-

линейной. Кроме того, даже если зависимость будет линейной, коэффициент при  $z$  может не иметь никакого экономического смысла.

В подобных случаях поступают следующим образом. Вводят две бинарные переменные  $z_1, z_2$  со следующими возможными значениями:

$$z_1 = \begin{cases} 1, & \text{если работник имеет степень доктора,} \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$
$$z_2 = \begin{cases} 1, & \text{если работник имеет степень кандидата,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Регрессионная модель принимает вид

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_{21} z_1 + \alpha_{22} z_2 + \varepsilon.$$

Нетрудно видеть, что эта модель правильно учитывает количественный и качественный факторы, причем коэффициенты  $\alpha_{21}, \alpha_{22}$  имеют смысл соответствующих надбавок. Аналогично можно ввести факторы, учитывающие пол работника, уровень образования, работающих пенсионеров и т. д.

Переменные, учитывающие качественные факторы, принято называть фиктивными. Название не совсем удачное, так как эти переменные учитывают особым образом совсем не фиктивные факторы.

Для анализа механизма мультипликативного действия качественных факторов рассмотрим следующий простой пример. Как известно, для увеличения производительности или пропускной способности различных агрегатов предусматривают возможность их параллельной работы. При малой нагрузке работает один агрегат, при увеличении нагрузки подключают параллельно второй, третий и т. д. Такая ситуация имеет место при параллельной работе трансформаторов подстанций, газоперекачивающих агрегатов, насосов, генераторов электростанций, паровых котлов и т. п. Наиболее наглядным является пример с параллельной работой трансформаторов.

Зависимость потерь электроэнергии в трансформаторе от его нагрузки имеет вид

$$P = \alpha_{01} + \alpha_{11} S^2,$$

где  $P$  – общие потери электроэнергии;  $\alpha_{01}$  – потери холостого хода;  $\alpha_{11} S^2$  – нагрузочные потери, зависящие от нагрузки  $S$ .

Тот факт, что уравнение регрессии нелинейное, для наших целей не имеет значения. При включении двух трансформаторов на параллельную работу

$$P = \alpha_{02} + \alpha_{12}S^2,$$

причем  $\alpha_{02} = 2\alpha_{01}$ ,  $\alpha_{12} = \alpha_{11}/2$ .

Введем фиктивную переменную  $z$  – «число включенных трансформаторов». Мы немедленно сталкиваемся с мультипликативными действиями этой переменной, кстати, введенной вполне естественным путем. Уравнение регрессии имеет вид

$$P = \alpha_{01}z + \frac{\alpha_{11}}{z}S^2$$

со всеми вытекающими трудностями.

В практике построения регрессионных моделей такого типа в энергетике, нефтяной и газовой промышленности используют следующий прием. На рис. 5 изображены кривые потерь в зависимости от нагрузки для одного (кривая 1) и двух (кривая 2) параллельно работающих трансформаторов.

Очевидно, что если нагрузка  $S$  меньше граничного значения  $S_r$ , то экономически выгодная работа одного трансформатора, при  $S > S_r$  – двух трансформаторов. Результирующая кривая  $P = f(S)$  представляет из себя типичную огибающую двух кривых:

$$P(S) = \begin{cases} \alpha_{01} + \alpha_{11}S_1 & \text{при } S < S_r; \\ \alpha_{02} + \alpha_{12}S_2 & \text{при } S \geq S_r. \end{cases}$$

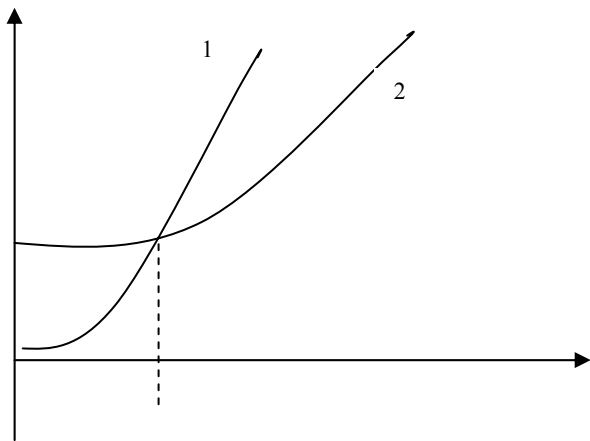


Рис. 5. Регрессионные кривые потерь электроэнергии

Таким образом, дополнительное условие минимума потерь позволило исключить из уравнений регрессии фиктивную переменную.

В общем случае введение и использование фиктивных переменных представляет непростую задачу, решение которой зависит в первую очередь от опыта исследователя.

## 5. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

*Временным рядом* называется упорядоченная совокупность значений случайной величины  $y$ , наблюдаемых в последовательные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Таким образом, временной ряд – это последовательность

$$y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n).$$

Характерной чертой временного ряда является то, что порядок в последовательности значений входной переменной  $t$  и выходной переменной  $y(t)$  существен. Входную переменную мы всегда будем называть временем, хотя, в принципе, она может быть и пространственной (длина, расстояние). К рядам типа временных относится, например, распределение температуры (давления) по высоте, толщины нити по длине и т. д. Параметр  $t$  может быть непрерывным, и тогда речь идет, вообще говоря, о случайном процессе  $y(t)$ . Реализацией такого процесса является, например, запись значений некоторого технологического параметра, осуществляемая самопишущим прибором. В курсе эконометрики рассматриваются в основном дискретные временные ряды, характерные для экономических процессов. В дальнейшем мы будем предполагать, что интервал между каждыми двумя соседними моментами времени один и тот же, то есть

$$t_{i+1} - t_i = \Delta t = \text{const}.$$

Выбирая в качестве единицы времени интервал  $\Delta t$ , можно считать, что переменная  $t$  принимает значения из натурального ряда чисел  $t = 1, 2, \dots, n$ . Тогда временной ряд образует последовательность

$$y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n.$$

Иногда нам потребуются значения ряда в моменты времени, предшествующие начальному. В таких случаях мы будем использовать обозначения  $y_{-1}, y_{-2}$  и т. д.

Характер дискретности, как и интервал  $\Delta t$ , зависит от характера процесса. Так, в данных о ежемесячном, ежеквартальном или годовом доходе предприятия дискретность обусловлена агрегацией, она же определяет и интервал дискретизации. Дискретность временного ряда урожайности пшеницы представляет пример существенной дискретности – урожай собирается раз в год. В случае непрерывных процессов, как правило, осуществляется их дискретизация, совмещенная зачастую с агрегированием. Так, на основе непрерывного процесса энергопотребления в зависимости от решаемых задач могут формироваться *графики энергопотребления*:

- суточные с интервалом в один час;
- недельные с интервалом в один день;
- месячные с интервалом в одну неделю;
- годовые с интервалом в один месяц;
- многолетние с интервалом в один год.

Анализ графиков энергопотребления позволяет решать задачи оперативного управления режимами (суточные графики), планирования профилактики и текущего ремонта оборудования (недельные и месячные графики), капитального ремонта оборудования, планирования поставок энергоресурсов (годовые графики) и, наконец, планирования развития генерирующих мощностей, электрических сетей и т. д. (многолетние графики).

### 5.1. Задачи анализа временных рядов

Изучая реальные ситуации, можно прийти к выводу, что в общем случае типичные временные ряды складываются из четырех составляющих:

- тренд, описывающий долговременную тенденцию изменения выходной переменной;
- сезонные колебания;
- периодические колебания относительно тренда;
- случайная, нерегулярная составляющая.

Дадим краткую характеристику выделенным составляющим.

*Тренд.* Определить понятие тренда довольно трудно. Вообще, под трендом понимают некоторое устойчивое, систематическое изменение, наблюдаемое в течение длительного времени и описывающее долговременную тенденцию развития изучаемого показателя. Главная трудность состоит в том, что понятия «длительный», «долговременный» весьма относительны. Если мы исследуем некоторые макроэкономические показатели за период 10–12 лет, то медленные и систематические изменения могут быть восприняты как тренд, хотя на самом деле эти изменения – лишь часть колебательного процесса с большим периодом, например «большие циклы» Кондратьева с периодами 45–60 лет. С другой стороны, если целью анализа является прогноз на 1–2 года вперед, очевидно, не очень важно, что представляют на самом деле исследуемые изменения – тренд или отрезок периодического процесса. Главное, чтобы про-

гноз был достаточно точным. Поэтому способ выделения тренда и его эконометрическая модель в значительной степени зависят от цели исследования. В следующем подразделе мы достаточно подробно рассмотрим методы сглаживания временных рядов с целью выделения тренда. Здесь же отметим лишь тот очевидный факт, что математическое описание тренда не представляет особых трудностей, если исследователь на основании тщательного изучения предметной области правильно определил долговременную тенденцию развития изучаемого процесса.

*Эффект сезонности.* Эта составляющая, пожалуй, наиболее легка для обнаружения, выделения и изучения. Здесь мы имеем дело с некоторым внешним циклическим механизмом, который в сочетании с внутренним механизмом поведения изучаемой системы формирует циклическое изменение выходных переменных. Периоды сезонных циклов могут иметь длительность в сутки, неделю, месяц, год, но в любом случае они отражают связь изучаемых процессов с календарем. Так, цикл с периодом в один год характерен для процессов производства (и потребления) сельскохозяйственной продукции. В производстве и потреблении электрической энергии наблюдаются суточные, недельные, месячные и годовые циклы, что вызвано как природными явлениями (смена времени года), так и трудовыми процессами, привязанными к календарю и часам суток. Следует отличать эффект сезонности от периодических колебаний вообще. Последние имеют период, не кратный календарным отрезкам времени и, что, пожалуй, более важно, их природа зачастую не ясна.

*Колебания и случайная компонента.* После выделения тренда и сезонных циклов остается временной ряд, представляющий случайные колебания более или менее регулярного типа. На этом этапе решается следующая задача: является ли остаточный ряд некоторой функциональной, периодической зависимостью или же он представляет случайную выборку из некоторой однородной генеральной совокупности. Чаще всего некоторый колебательный процесс наблюдается на фоне так называемого стационарного случайного процесса. В этом случае возникают задачи выделения колебаний и анализа стационарных остатков. Ниже соответствующие методы будут рассмотрены.

## 5.2. Определение тренда

Формально определение тренда состоит из трех этапов:

- выбора математической модели – аппроксимирующей функции  $f(t)$ ;
- определения параметров модели на основании наблюдаемых значений ряда  $y_t, t = 1, 2, \dots, n$ ;
- построения доверительных интервалов для параметров и уравнения тренда, оценки значимости тренда.

В качестве математической модели тренда выбирают кривую, наилучшим образом отражающую характер изучаемого ряда. В простейшем случае это может быть прямая

$$f(t) = a_0 + a_1 t_1,$$

в более сложном случае – полином порядка  $m$

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m.$$

Если ряд имеет характер процесса с насыщением, используют одну из стандартных кривых:

*экспоненциальную кривую*

$$f(t) = k e^{-\frac{\beta}{t}};$$

*логистическую кривую*

$$f(t) = \frac{k}{1 + b e^{-at}}$$

и другие.

Выбор модели – дело вкуса и опыта исследователя, но в любом случае она должна отвечать характеру изучаемого процесса. Параметры модели определяются методом наименьших квадратов. Оценка значимости, доверительные интервалы и полосы вычисляются стандартными методами, изложенными в разд. 4. Тот факт, что  $t$  принимает последовательные значения из натурального ряда чисел, в некоторых случаях существенно упрощает вычисления.

Другим, альтернативным методом сглаживания временного ряда является *метод скользящих средних*. Простейший вариант метода, давший ему название, состоит в следующем.

Пусть ряд состоит из  $n$  членов. Длину интервала сглаживания примем равной  $2m+1 < n$ . Определим среднее для первых  $2m+1$  членов исходного ряда и присвоим его значение члену сглаженного ряда с номером  $m+1$ . Сдвинем интервал сглаживания на один элемент

вправо, снова найдем среднее и присвоим его значение члену сглаженного ряда с номером  $m+2$ . Продолжим этот процесс до тех пор, пока правый конец интервала не совпадет с последним членом исходного ряда. Вычислим последнее среднее и присвоим его значение элементу сглаженного ряда с номером  $n - (m+1)$ . Результатом проделанной операции будет сглаженный ряд, имеющий дисперсию в  $2m+1$  раз меньше, чем исходный. Случайные колебания будут в какой-то степени сглажены. Недостатком нового ряда является отсутствие первых и последних  $m$  членов. Так что, если  $m$  достаточно велико, хорошо сглаженный ряд может оказаться слишком коротким. При небольших  $m$  сглаживание невелико. Выбор оптимальной длины интервала сглаживания определяется длиной исходного ряда, целями сглаживания и некоторыми другими факторами, о которых речь пойдет ниже.

Более совершенным способом сглаживания является аппроксимация ряда на интервале сглаживания полиномом степени, не превышающей числа точек интервала. Пусть по-прежнему число членов интервала сглаживания нечетно и равно  $2m+1 < n$ , а аппроксимирующий полином имеет степень  $k < 2m+1$ :

$$y = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k.$$

Ради удобства изложения изменим нумерацию внутри интервала сглаживания так, чтобы момент  $t = 0$  соответствовал середине интервала. В результате значения членов ряда внутри интервала будут обозначаться символами

$$y_{-m}, y_{-(m-1)}, \dots, y_0, \dots, y_{m-1}, y_m.$$

Определим коэффициенты полинома методом наименьших квадратов. Для  $a_0$  имеем

$$a_0 = c_1 y_{-m} + c_2 y_{-(m-1)} + \dots + c_{2m+1} y_m,$$

причем коэффициенты  $c_i$  зависят только от  $m$  и  $k$  и не зависят от величин  $y_i$ .

Значение  $y$  в точке  $t = 0$ , то есть в середине интервала, равно  $a_0$ :

$$y(0) = a_0.$$

Так как коэффициенты  $c_i$  не зависят от положения интервала сглаживания на временном ряду, то, вычислив однажды коэффициенты  $c_i$ , перемещая интервал длиной  $2m+1$  вдоль ряда и подставляя соответствующие значения  $y_i$  в выражении для  $a_0$ , получим сглаженный ряд, усеченный слева и справа на  $m$  членов.

В случае полиномиального сглаживания процедура дополнения недостающих отрезков в начале и в конце очевидна. Достаточно на первом и последнем шаге определить все коэффициенты  $a_i$  и вычислить недостающие значения сглаженного ряда подстановкой в полученные полиномы соответствующих значений  $t$ :  $-m, -(m-1), \dots, -1$  для первого отрезка;  $1, 2, \dots, m$  для последнего отрезка.

До сих пор мы не говорили о том, как выбрать степень полинома  $k$  и длину интервала сглаживания  $2m+1$ . Простых критериев здесь нет. Решение зависит от того, какие цели ставит исследователь, интересуется ли он остаточными эффектами или тренд выделяется, главным образом, для изучения общей тенденции. Некоторую помощь может оказать исследование влияния выделения тренда на оставшиеся компоненты.

Пусть ряд состоит из трех частей: тренда  $y_1$ , колебательной составляющей  $y_2$  и случайного элемента  $y_3$ :

$$y_t = y_{1t} + y_{2t} + y_{3t}.$$

Символом  $T$  обозначим операцию сглаживания методом скользящих средних:

$$T y_t = T y_{1t} + T y_{2t} + T y_{3t}.$$

В идеале  $y_{1t} = T y_{1t}$ . Исключая тренд, получим остаток в виде

$$y_t - T y_t = (y_{2t} - T y_{2t}) + (y_{3t} + T y_{3t}).$$

Рассмотрим качественно влияние выделения тренда на колебательную составляющую. Пусть вначале скользящая средняя есть просто средняя за интервал сглаживания. Если длина интервала  $2m+1$  равна или кратна периоду колебательной составляющей, то ряд  $y_{2t} - T y_{2t}$  в идеале представляет чистые колебания, так как среднее за период равно нулю. Этот очевидный факт весьма полезен для выделения периодических составляющих ряда. Если  $2m+1$  существенно меньше периода колебаний, то они воспринимаются скользящей средней как тренд и остаток  $y_{2t} - T y_{2t}$  практически не содержит колебательной составляющей или, по крайней мере, ее амплитуда мала. Если интервал сглаживания больше периода, то результат сглаживания зависит от соотношения их длин.

Рассмотрим влияние процедуры сглаживания на случайную компоненту  $y_{3t}$ . При обычном предположении о некоррелированности остатков  $y_{3t}$ , последовательные величины  $T y_{3t}$ , а значит и  $y_{3t} - T y_{3t}$ , уже не являются независимыми, так как значения  $y_{3t}$  и  $T y_{3t}$  зависят от

$(2m+1)-i+j$  общих величин  $y_{3t}$  и коррелированы, если  $i-j < 2m+1$ . Следовательно, ряд  $Ty_{3t}$  является более гладким по сравнению с  $y_{3t}$ . Сглаживание методом скользящего среднего чисто случайного ряда порождает положительную коррелированность сглаженного ряда, которая приводит к появлению периодичности (эффект Слущкого–Юла). Эти привнесенные процедурой сглаживания колебания могут быть похожи на колебательные процессы, встречающиеся в экономике. Поэтому, выделяя тренд, необходимо быть уверенным, что эта операция не порождает ложных колебательных процессов.

Сглаженный ряд, полученный по методу скользящего среднего, по-прежнему остается дискретным рядом, не имеющим аналитического описания. Поэтому после процедуры сглаживания обычно используют один из двух методов:

- аппроксимируют «гладкий» ряд подходящей гладкой функцией;
- выполняют на отдельных интервалах полиномиальную аппроксимацию с приспособкой решений на границах интервалов из условия непрерывности интервалов.

### 5.3. Сезонные колебания

Анализ сезонных колебаний облегчают два важных обстоятельства:

- период сезонных колебаний заранее известен;
- сезонные колебания, как правило, выражены настолько ярко, что нет необходимости доказывать их существование.

Простейшим способом выделения сезонных колебаний при аддитивном представлении временного ряда

$$y_t = y_{1t} + S_t + \varepsilon_t,$$

где  $y_{1t}$  – тренд,  $S_t$  – сезонная составляющая, является использование метода скользящего среднего с длиной интервала осреднения, равной периоду сезонных колебаний (подразд. 5.2)

Пусть  $T$  – по-прежнему оператор осреднения. Ряд

$$y_t - Ty_t = (S_t - TS_t) + (\varepsilon_t - T\varepsilon_t)$$

в идеале не содержит тренда и состоит из сезонной компоненты  $S_t - TS_t$  и сглаженной случайной составляющей  $\varepsilon_t - T\varepsilon_t$ .

Если влияние сезонности носит мультипликативный характер, то есть

$$y_t = y_{1t}S_t + \varepsilon_t,$$

то удобнее перейти к логарифмам

$$\log y_t = \log y_{1t} + \log S_t + \eta_t.$$

Предположим, что тренд тем или иным способом выделен и оставшийся ряд  $U_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$  представляет некоторый колебательный процесс и случайный остаток. Регулярным способом выделения периодической (в том числе сезонной) составляющей является разложение ее в ряд Фурье. Напомним, что периодическая функция  $U(t)$  разлагается в бесконечный ряд Фурье вида

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – основная (круговая) частота;  $T$  – период основной частоты.

Если коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$  найдены, то функция  $U(t)$  восстанавливается по ним с любой степенью точности. Числовой ряд

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

называется *дискретным спектром* периодической функции  $U(t)$ , а члены ряда  $a_k \cos(k\omega t)$ ,  $b_k \sin(k\omega t)$  – *гармоническими составляющими* или просто гармониками. Так как

$$A_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

то, ограничиваясь конечным числом членов ряда, можно получить приближенное спектральное представление функции  $U(t)$  с любой наперед заданной степенью точности.

Спектральный анализ временных рядов имеет одну существенную особенность, связанную с конечным набором значений ряда внутри периода основной частоты. Пусть в течение периода  $T$  произведено  $m$  наблюдений. Тогда внутри периода второй гармоники, имеющего длину  $T/2$ , окажется  $m/2$  наблюдений. Продолжая вычисления, получим, что для определения коэффициентов гармоники с номером  $m$  имеется всего одно наблюдение. Для получения более или менее надежных результатов необходимо иметь хотя бы 3–4 наблюдения на половину периода. Если такой объем данных обеспечить не удастся, гармонический анализ вообще не имеет смысла. В лучшем случае можно выделить первую гармонику.

Предположим, что необходимый объем данных имеется и число наблюдений за период  $T$  равно  $m$ .



Коэффициенты Фурье  $a_k, b_k$   $k$ -й гармоники вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{m} \sum_{t=1}^m U_t \cos \frac{2\pi k}{T} t; \quad b_k = \frac{2}{m} \sum_{t=1}^m U_t \sin \frac{2\pi k}{T} t.$$

Периодическая составляющая выделяется в виде суммы

$$\tilde{U}_t = \sum_k \left( a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right).$$

Остаток

$$\varepsilon_t = U_t - \tilde{U}_t$$

содержит невыделенные колебания с малым периодом и случайную составляющую. Периоды колебательных составляющих могут быть не кратны. В этом случае для определения амплитуд гармоник можно использовать методы множественной регрессии. Ограничения на применение методов гармонического анализа кажутся весьма жесткими. Тем не менее, многие процессы в экономике, характеризующиеся сезонностью, оказываются вполне подходящими для такого анализа. Процесс энергопотребления обнаруживает суточные, месячные и годовые циклы. Объем продаж целого ряда товаров, объем производства многих сельхозпродуктов и некоторые другие экономические показатели также обнаруживают периодичность, привязанную к календарю. Поэтому методы гармонического анализа следует признать актуальными не только в физических и технических, но и в экономических исследованиях.

#### 5.4. Стационарные временные ряды

После выделения тренда и сезонных колебаний образуется остаток, представляющий, как правило, стационарный временной ряд. Напомним некоторые определения и свойства стационарных случайных процессов применительно к временным рядам.

Временной ряд называется стационарным в узком смысле, если совместное распределение вероятностей  $F(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_m})$  зависит только от взаимного расположения моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , но не от самих значений этих величин. Иными словами, для стационарного, в узком смысле, временного ряда для любых  $\tau$  и  $m, t_m + \tau \leq n$  выполняется соотношение

$$F(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_m}) = F(y_{t_1 + \tau}, y_{t_2 + \tau}, \dots, y_{t_m + \tau}).$$

Для наших целей обычно будет достаточно стационарности в широком смысле.

Временной ряд называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционный момент зависит только от разности моментов времени, для которых он вычисляется:

$$\begin{aligned} M(y_t) &= \text{const}; \\ D(y_t) &= \text{const}; \\ K(y_t, y_{t+\tau}) &= \varphi(\tau). \end{aligned}$$

В эконометрических исследованиях, как правило, имеют дело с одной реализацией временного ряда. Поэтому очень важно, чтобы изучаемый ряд обладал свойством эргодичности.

Стационарный ряд называется эргодическим, если его дисперсия конечна, а математическое ожидание в любом сечении равно математическому ожиданию, вычисленному по реализации ряда. В этом подразделе требование эргодичности всегда предполагается выполненным.

##### 5.4.1. Автокорреляция

Одной из важнейших характеристик временного ряда является корреляция между последовательными членами. Такая корреляция носит название автокорреляции или сериальной корреляции. Теоретически коэффициент корреляции между двумя сечениями

$$\rho(t, t + \tau) = M(y_t - M(y_t))(y_{t+\tau} - M(y_{t+\tau})).$$

Для стационарных рядов коэффициент корреляции есть функция только интервала между сечениями  $\tau$ . Если, кроме того, ряд является эргодическим, то осреднение по сечениям можно заменить осреднением по времени, используя общее среднее и общую дисперсию ряда. Для коэффициентов корреляции имеем

$$r_k = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Совокупность коэффициентов  $r_k$  называется коррелограммой. По определению,  $r_{-k} = r_k$ , так что формально коррелограмма задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \dots & r_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая является неотрицательно определенной матрицей Лорана. Отметим также, что по мере увеличения  $k$  число слагаемых в числителе убывает и, следовательно, надежность оценок коэффициентов корреляции с ростом  $k$  падает. В случае стационарных временных рядов для увеличения надежности оценки можно использовать следующий прием. Увеличим длину ряда, полагая

$$y_{n+1} = y_1, y_{n+2} = y_2, \dots, y_{n+k} = y_k.$$

Тогда

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Если ряд стационарный, такая операция вполне правомерна. Коэффициент  $r_k$  при этом называют *циклической сериальной корреляцией* (автокорреляцией).

Анализ коррелограмм позволяет делать важные выводы о поведении временного ряда. Если  $r_k = 0$  при всех  $k$ , то члены ряда (остатки  $\varepsilon_t$ ) некоррелированы. Процесс такого вида называют *белым шумом*. Если распределение членов ряда нормальное, то процесс называют *гауссовским* (нормальным) *белым шумом*. Белый шум – это случайный процесс.

Важным типом стационарного ряда (процесса) является марковский процесс. Для наших целей определим марковский процесс следующим образом.

Ряд называется *марковским*, если распределение вероятностей значений случайной величины  $y_{t+1}$  зависит только от значений случайной величины  $y_t$ . Иными словами, поведение ряда в будущем зависит только от его состояния в настоящий момент времени и не зависит от предыстории. Без доказательства отметим, что если ряд марковский и  $\rho_1 = \rho$ , то  $\rho_k = \rho^k$ . Так как  $\rho < 1$ , то последовательность  $\rho^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  убывающая. Это свойство характерно не только для марковских, но и для стационар-

ных рядов вообще. Полагая ряд бесконечным и обозначая через  $\tau$  интервал (лаг) между двумя сечениями стационарного ряда, имеем

$$\rho(\tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Коррелограмма временного ряда вообще и стационарного в частности позволяет качественно оценить тесноту связи между последовательными членами ряда. Получив коэффициенты автокорреляции, следует оценить их значимость. Если автокорреляция значима, ее следует устранить, используя авторегрессионные модели или модели скользящей средней. Эти вопросы будут рассмотрены в следующем подразделе.

#### 5.4.2. Спектральное разложение

Сезонная составляющая ввиду явной периодичности имеет наглядное спектральное представление, позволяющее, по крайней мере, теоретически, выделить ее неслучайную часть как частичную сумму ряда Фурье. Стационарный остаток, образовавшийся в результате выделения тренда и регулярной сезонной составляющей, в общем случае, имеет квазипериодический характер. Поэтому спектральное представление может быть с успехом использовано и для анализа стационарных процессов.

Пусть  $\omega$  – круговая частота некоторой гармоники;  $U_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$  – стационарный ряд остатков с нулевым математическим ожиданием, и есть основания полагать, что  $U_t$  коррелирует с этой гармоникой. Сразу же отметим первую важную особенность: мы не утверждаем, что  $U_t$  содержит гармонику с частотой  $\omega$ , но лишь предполагаем, что  $U_t$  коррелирует с этой гармоникой, как может коррелировать один случайный процесс с другим. При этом амплитуды синусной и косинусной составляющих – случайные величины.

Рассмотрим случайные величины

$$a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sum U_t \cos \omega t,$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sum U_t \sin \omega t,$$

пропорциональные этим амплитудам, и определим величину, пропорциональную квадрату полной амплитуды гармоники:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= a^2(\omega) + b^2(\omega) = \frac{1}{n\pi} \left( \left( \sum U_t \cos \omega t \right)^2 + \left( \sum U_t \sin \omega t \right)^2 \right) = \\
&= \frac{1}{n\pi} \left( \sum U_t^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-k} U_t U_{t+k} (\cos \omega t \cdot \cos \omega(t+k) + \sin \omega t \sin \omega(t+k)) \right) = \\
&= \frac{1}{n\pi} \left( \sum U_t^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-k} U_t U_{t+k} \cos k\omega \right).
\end{aligned}$$

Так как при нулевом начальном среднем

$$\frac{1}{n} \sum U_t^2 = s^2;$$

$$\frac{1}{n} \sum U_t U_{t+k} = K(U_t, U_{t+k}); \quad r_k = \frac{K(U_t, U_{t+k})}{s^2},$$

то окончательно получаем

$$A(\omega) = \frac{s^2}{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} r_k \cos k\omega \right).$$

Величина  $s$  носит название интенсивности. Напомним, что  $A(\omega)$  пропорциональна амплитуде гармоники с частотой  $\omega$ . Полагая  $\omega$  переменной, получаем зависимость интенсивности от частоты.

Величина

$$S(\omega) = A(\omega) \frac{\pi}{s^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} r_k \cos k\omega$$

называется *спектральной плотностью* стационарного ряда. При этом мы считаем  $n$  достаточно большим.

Отметим следующую важную деталь. При гармоническом разложении сезонной составляющей мы стремились получить в явном виде хотя бы несколько первых гармоник для того, чтобы выделить регулярную периодическую составляющую. Здесь же мы ограничиваемся спектром, который лишь указывает на то, в какой степени стационарный ряд подчиняется некоторому основному ритму. Большого в экономических задачах требовать трудно. Отметим также явную связь спектральной плотности с коррелограммой.

Если все  $r_k$  равны нулю, то  $S(\omega) = 1$ , что в точности соответствует плотности белого шума. Это означает, что все гармонические составляющие белого шума имеют одинаково распределенные амплитуды.

Спектральная плотность марковского ряда имеет вид

$$S(\omega) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} r^k \cos k\omega.$$

В физике и технике спектральная плотность обычно отождествляется с энергией, которую несет гармоника частоты  $\omega$ , так что спектральный состав характеризует распределение энергии сигнала по гармоническим составляющим.

Представить экономический смысл интенсивности и спектральной плотности довольно сложно. Поэтому в экономических задачах чаще пользуются коррелограммами. Тем не менее, вычисление спектра стационарного ряда часто позволяет обнаружить скрытые периодичности, которые затем можно исследовать другими методами.

## 5.5. Авторегрессионные модели временных рядов

В предыдущем подразделе было отмечено, что даже после выделения тренда и периодических составляющих остаток ряда  $U_t$  может иметь коррелограмму, свидетельствующую о наличии некоторой скрытой зависимости между членами ряда. Поскольку остаток стационарный и эргодический и, следовательно, временной фактор полностью учтен, разумно предположить, что наблюдаемая зависимость объясняется предысторией, то есть влиянием предыдущих значений переменных на последующие. Другой механизм образования автокорреляции может состоять в том, что на остаток  $U_t$  влияет не только случайное возмущение  $\varepsilon_t$ , но и случайные возмущения  $\varepsilon_{t-1}$ ,  $\varepsilon_{t-2}$  и т. д. И в том и в другом случае можно устранить авторегрессию применением разностных моделей, называемых в дальнейшем авторегрессионными.

*Первой схемой* линейной авторегрессии является схема вида

$$U_t = -\alpha_1 U_{t-1} - \alpha_2 U_{t-2} - \dots - \alpha_m U_{t-m} + \varepsilon_t.$$

Здесь мы предполагаем, что значение члена ряда с номером  $t$  зависит от значений  $m$  предыдущих членов ряда с номерами  $t-1$ ,  $t-2$ , ...,  $t-m$ . Выбор величины  $m$  – дело довольно тонкое. Можно порекомендовать следующий прием. Вычислим частные коэффициенты автокорреляции  $r_{\text{част}}(\tau)$  для  $\tau = 1, 2, \dots$  и оценим их значимость. Если при  $\tau > m$  коэффициенты  $r_{\text{част}}(\tau)$  незначимо отличаются от нуля, то величину  $m$  можно принять в качестве порядка модели. Положим  $\alpha_0 = 1$  и запишем уравнение автокорреляции в виде

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i U_{t-i} = \varepsilon_t. \quad (5.1)$$

Коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  можно получить методом наименьших квадратов. Но удобнее использовать другой путь, учитывая, что перед построением авторегрессионной модели вычисляется коррелограмма.

Умножим уравнение (5.1) последовательно на  $U_{t-1}, \dots, U_{t-m}$ , возьмем математические ожидания и разделим на дисперсию ряда. Учитывая, что  $\rho_i = \rho_{-i}$ , получим систему уравнений вида

$$\rho_k + \alpha_1 \rho_{k-1} + \dots + \alpha_k \rho_{k-m} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

или в развернутой форме, с учетом того, что  $\rho_0 = 1$ :

$$\rho_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \rho_2 + \dots + \alpha_m \rho_{m-1} = 0;$$

$$\rho_2 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \rho_{m-2} = 0;$$

$$\rho_m + \alpha_1 \rho_{m-1} + \alpha_2 \rho_{m-2} + \dots + \alpha_m = 0.$$

Эти уравнения носят название уравнений Юла–Уокера. Решая их, находим выражения коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  через значимые коэффициенты автокорреляции  $\rho_1, \dots, \rho_m$ .

Так, для  $m = 1$  получаем простейший случай автокорреляционного ряда – марковский ряд

$$U_t + \alpha_1 U_{t-1} = \varepsilon_t.$$

Уравнение Юла–Уокера имеет вид

$$\rho_1 + \alpha_1 = 0,$$

то есть  $\alpha_1 = -\rho_1 = -\rho$ , и уравнение авторегрессии можно переписать в виде

$$U_t - \rho U_{t-1} = \varepsilon_t \quad (5.2)$$

или

$$U_t = \rho U_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Более сложный авторегрессионный ряд (ряд Юла) получаем при  $m = 2$

$$U_t + \alpha_1 U_{t-1} + \alpha_2 U_{t-2} = \varepsilon_t. \quad (5.3)$$

Из первых двух уравнений Юла–Уокера имеем

$$\rho_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 = 0;$$

$$\rho_2 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 = 0.$$

Отсюда

$$\alpha_1 = -\frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}.$$

Вторая схема линейной авторегрессии записывается в виде

$$U_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_m \varepsilon_{t-m} \quad (5.4)$$

и называется обычно *схемой скользящих средних*. Для выбора  $m$  здесь используется коррелограмма – величина  $m$  определяется количеством первых значимых коэффициентов корреляции. Для оценки коэффициентов  $\beta_i$  используется прием, который мы продемонстрируем на простейшей модели

$$U_t = \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}.$$

Этот процесс имеет теоретически бесконечную предысторию. Оборвем ее на элементе  $\varepsilon_0$  ряда. Тогда последовательно получаем

$$U_1 = \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_0;$$

$$U_2 = \varepsilon_2 + \beta \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \beta U_1 - \beta^2 \varepsilon_0;$$

$$U_3 = \varepsilon_3 + \beta \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \beta U_2 - \beta^2 U_1 + \beta^3 \varepsilon_0.$$

Наконец:

$$U_t = \varepsilon_t + \beta U_{t-1} - \beta^2 U_{t-2} + \dots + (-\beta)^k U_{t-k} + (-\beta)^{k+1} \varepsilon_0.$$

Сравним это выражение с уравнением первой схемы авторегрессии

$$U_t = \varepsilon_t + \alpha_1 U_{t-1} + \alpha_2 U_{t-2} + \dots + \alpha_k U_{t-k}.$$

Очевидно, они одинаковы с точностью до остаточного члена  $(-\beta)^{k+1} \varepsilon_0$ , если положить

$$a_k = (-\beta)^k.$$

Дисперсия остаточного числа

$$D((-\beta)^{k+1} \varepsilon_0) = \beta^{2(k+1)} D(\varepsilon_0) = \beta^{2(k+1)} \sigma^2$$

при  $|\beta| < 1$  достаточно быстро стремится к нулю. Поэтому модель скользящих средних (5.4) при достаточно большом  $k$  можно аппроксимировать авторегрессионной моделью. Оценки  $a_i$  коэффициентов  $\alpha_i$  могут быть получены методом наименьших квадратов или из уравнений Юла–Уокера. Оценка коэффициента  $\beta$  вычисляется по выражению

$$b = -\frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_i a_{i+1}}{\sum_{i=1}^k a_i^2},$$

где  $a_0 = 1$ .

Аналогичный результат можно получить для процессов более высокого порядка, но вычисления становятся сложными и здесь не приводятся.

В качестве *третьей схемы* рассматривают смешанную схему авторегрессии со скользящими средними в качестве ошибок

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i U_{t-i} = \sum_{i=0}^l \beta_i \varepsilon_{t-i}.$$

Оценки коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  можно получить с помощью итерационного процесса. Полагая заданными  $\beta_i$ , вычисляют в первом приближении  $\alpha_i$ , а затем на основе полученных  $\alpha_i$  вычисляют в первом приближении  $\beta_i$ . Процедура повторяется до получения приемлемых результатов.

## 5.6. Идентификация временного ряда. Прогнозирование

Подведем итог полученным в этом подразделе результатам. Анализ временного ряда начинается с выделения тренда. Для этой цели используется процедура метода наименьших квадратов. Выбор функции, аппроксимирующей тренд, определяется характером ряда, целями исследования и, не в последнюю очередь, опытом исследователя. Если ряд обнаруживает значительные колебания, то перед выделением тренда полезно его сгладить методом скользящего среднего.

Следующим этапом является выделение колебательных составляющих, в том числе сезонных колебаний. Простейший способ выделения периодической составляющей – метод скользящего среднего с интервалом сглаживания, равным периоду колебаний. Более тонкий метод – разложение колебательного процесса в ряд Фурье. Разумное сочетание обеих процедур позволяет выделить все явные колебательные составляющие.

После выделения тренда и колебательных составляющих образуется остаток  $U_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ , который представляет из себя стационарный эргодический ряд. В простейшем случае – это белый шум, и процесс анализа ряда на этом заканчивается. В более сложном случае остаток содержит скрытые колебания и (или) имеет место автокорреляция между членами ряда, что выясняется на основании анализа коррелограмм и спектра стационарного ряда  $U_t$ . В этом

случае для остатков ряда строится модель авторегрессии или модель скользящих средних, а, возможно, и смешанная модель. В результате получают такое представление ряда, в котором все регрессоры значимы, а остатки имеют вид белого шума. Описанная процедура называется *идентификацией временного ряда*.

Полученная модель используется как для анализа свойств изучаемого ряда, так и для прогнозирования. Возможно несколько вариантов прогноза. Аппроксимирующая зависимость

$$\hat{y} = \hat{y}(t)$$

представляет собой парную регрессию. Поэтому, как и для обычной парной регрессии, можно вычислить доверительную полосу

$$\hat{y} - t_{1-\frac{p}{2}} s_y / \sqrt{n} < M_t(y) \leq \hat{y} + t_{1-\frac{p}{2}} s_y / \sqrt{n},$$

где  $M_t(y)$  – истинное значение выходной переменной в момент времени  $t$ ;  $s_y$  – выборочное среднее квадратичное отклонение  $\hat{y}$ ;  $t_{1-\frac{p}{2}}$  –

соответствующий квантиль распределения Стьюдента.

Продолжая кривую  $\hat{y}(t)$  и доверительную полосу за пределы  $t = n$ , можно получить прогноз изучаемого показателя и его доверительные границы. Можно вычислить доверительный интервал индивидуального значения  $y$  для момента времени  $t = n+1$ , используя выборочную дисперсию

$$s_{y0} = s_y^2 + s^2,$$

где  $s^2$  – дисперсия случайных возмущений.

Наконец, если модель носит характер авторегрессии, то решение разностного уравнения

$$y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_k y_{t-k} = \varepsilon_t$$

также может быть продолжено за пределы  $t = n$ . Следует отметить, что во всех рассмотренных случаях речь идет о краткосрочном или среднесрочном прогнозе при условии, что основные тенденции развития процесса сохраняются.

## 6. ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Определяя в разд. 4 классическую линейную модель, мы потребовали выполнения четырех условий. Если отказаться от требований некоррелированности возмущений и одинаковости их дисперсий, то приходим к обобщенной линейной модели.

Итак, в обобщенной линейной модели соблюдаются следующие условия:

– входные переменные не случайны, а возмущения  $\varepsilon_i$  – случайные величины;

– математические ожидания случайных возмущений равны нулю:  $M(\varepsilon_i) = 0$ .

Ковариационная матрица возмущений  $\mathbf{K}_\varepsilon$  в общем случае симметричная, положительно определенная матрица. Рассмотрим особенности построения линейных регрессионных моделей для общего случая.

### 6.1. Обобщенная линейная регрессионная модель

Как и ранее, представим линейную множественную регрессию соотношением

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

а аппроксимирующую линейную функцию уравнением

$$\hat{\mathbf{y}} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle,$$

где  $\mathbf{a}$  – вектор выборочных оценок коэффициентов регрессии  $\boldsymbol{\alpha}$ .

Применим для оценки параметров метод наименьших квадратов и получим, как и ранее, вектор оценок  $\mathbf{a}$  в виде

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

Оценки  $\mathbf{a}$  по-прежнему несмещенные и состоятельные.

Вычислим ковариационную матрицу оценок  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{M}[(\mathbf{a} - \boldsymbol{\alpha})(\mathbf{a} - \boldsymbol{\alpha})'].$$

Опуская преобразования, запишем результат

$$\mathbf{K}_a = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{K}_\varepsilon\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1},$$

где  $\mathbf{K}_\varepsilon = \mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') -$  ковариационная матрица случайных возмущений. Напомним, что в классической модели

$$\mathbf{K}_a^{кл} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

Это означает, что при попытке использования обычного метода наименьших квадратов в обобщенной модели мы получили бы смещенную оценку ковариационной матрицы  $\mathbf{K}_a$ .

Кроме того, оценка  $\mathbf{a}$ , определяемая по классической схеме, оставаясь состоятельной и несмещенной, уже не будет эффективной, то есть не будет обеспечивать минимум дисперсии. Для получения эффективной оценки используется обобщенный метод наименьших квадратов.

### 6.2. Обобщенный метод наименьших квадратов

Согласно теореме Айткена, оценка

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}'\mathbf{K}_\varepsilon^{-1}\mathbf{X})\mathbf{X}\mathbf{K}_\varepsilon^{-1}\mathbf{y}$$

является состоятельной, несмещенной оценкой параметров  $\boldsymbol{\alpha}$  линейной обобщенной регрессионной модели.

Доказательство несмещенности тривиально в предположении  $M(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ . Рассмотрим свойство эффективности. Из линейной алгебры известно, что всякая квадратная симметричная матрица  $\mathbf{A}$  порядка  $n$  допускает представление  $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{T}'$ , где  $\mathbf{T}$  – квадратная невырожденная матрица порядка  $n$ . Поэтому можно найти такую матрицу  $\mathbf{T}$ , что

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{T}\mathbf{T}', \quad \mathbf{K}_a^{-1} = (\mathbf{T}\mathbf{T}')^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})'\mathbf{T}^{-1}.$$

Кроме того:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}_a(\mathbf{T}^{-1})^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{T}'(\mathbf{T}^{-1})^{-1} = \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная диагональная матрица порядка  $n$ .

Умножим обе части обобщенной модели на  $\mathbf{T}^{-1}$ :

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

и введем очевидные обозначения

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}^*.$$

Поскольку

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0,$$

то ковариационная матрица  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  равна

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}^*} &= \mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}^{*'}) = \mathbf{M}(\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{T}^{-1})'\boldsymbol{\varepsilon}') = \mathbf{M}(\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{T}^{-1})') = \\ &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')(\mathbf{T}^{-1})' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}_\varepsilon(\mathbf{T}^{-1})' = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Таким образом, ковариационная матрица преобразованных возмущений единичная и диагональная. Для преобразованных переменных имеет место классическая модель, для которой

$$\mathbf{b}^* = (\mathbf{X}^{*'}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^*\mathbf{y}^*$$

есть эффективная оценка параметров. Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{X}' \mathbf{K}_\varepsilon^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X} \mathbf{K}_\varepsilon^{-1} \mathbf{y}.$$

Можно показать, что оценка  $\mathbf{a}^*$  является точкой минимума обобщенного критерия

$$\mathbf{Q} = \langle (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^* \mathbf{a}), (\mathbf{y}^* - \mathbf{X}^* \mathbf{a}) \rangle = (\mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{a})' \mathbf{K}_\varepsilon^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{a}).$$

Для практического использования полученных результатов необходимо знать матрицу  $\mathbf{K}_\varepsilon$ . Эта матрица, как правило, неизвестна, а оценка ее элементов требует гораздо большего числа наблюдений, чем это возможно в практических ситуациях. Обобщенный метод практически реализуем, если на структуру матрицы наложить достаточно жесткие ограничения. Один из таких случаев рассматривается в следующем подразделе.

### 6.3. Гетероскедастичность

Частным случаем обобщенной модели является ситуация, когда корреляция случайных возмущений отсутствует, но их дисперсии неодинаковы. Матрица  $\mathbf{K}_\varepsilon$  принимает вид

$$\mathbf{K}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_m^2 \end{pmatrix},$$

причем  $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$  при  $i \neq j$ . Такая модель называется гетероскедастичной. Согласно теореме Айткена, вектор оценок имеет вид

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{X}' \mathbf{K}_\varepsilon^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{K}_\varepsilon^{-1} \mathbf{y}$$

и получается путем минимизации обобщенной суммы квадратов отклонений

$$Q^* = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2}.$$

Таким образом, обобщенный метод наименьших квадратов сводится здесь к минимизации взвешенной суммы квадратов отклонений. Веса  $1/\sigma_i^2$  обеспечивают «равный» вклад всех слагаемых. Именно по этой причине оценка  $\mathbf{a}^*$  оказывается эффективной. Зна-

чения  $\sigma_i^2$  на практике, как правило, неизвестны. Для оценки дисперсий можно использовать следующий прием.

Обычным методом наименьших квадратов вычисляются коэффициенты  $a_i$  и остатки  $e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Квадраты остатков аппроксимируются функцией

$$f(x) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j.$$

По полученному уравнению регрессии квадратов остатков вычисляются их прогнозные значения  $\hat{e}_i^2$  и оценки  $s_i = \sqrt{\hat{e}_i^2}$ . Пересчитываются значения входных и выходных переменных

$$y_{*i} = y_i / s_i, \\ x_{*ij} = x_{ij} / s_i, j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n.$$

По новым взвешенным значениям переменных определяется вектор оценок  $\mathbf{a}^*$ . При необходимости описанную процедуру можно повторять, придав ей итеративный характер, пока не будет получен приемлемый результат.

## 7. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ И СТРУКТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

### 7.1. Основные определения и понятия

В классическом регрессионном анализе входные переменные являлись неслучайными величинами, а случайные ошибки были связаны только с выходной переменной. Такая постановка задачи вполне правомерна в тех случаях, когда значения выходной переменной наблюдаются при заранее заданных, фиксированных значениях входных переменных. Так, при анализе большинства временных рядов значения входной переменной фиксируются в строго определенных моменты времени и, как правило, с одинаковыми интервалами между ними. В то же время существует обширный круг задач, в которых как выходная, так и входные переменные – случайные величины. В таких задачах деление переменных на входные и выходные определяется их экономическими свойствами. С математической точки зрения, эти переменные равноправны, и задача может быть сформулирована следующим образом. Имеется  $n$  реализаций некоторой многомерной случайной величины. Необходимо выяснить структурные соотношения между ними.

Поясним смысл понятия «структурные соотношения». Начнем с самого простого случая линейного парного соотношения. Пусть две математические величины заданы соотношением

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x. \quad (7.1)$$

Такое соотношение называется функциональным. Для определения  $\alpha_0, \alpha_1$  достаточно знать две пары значений  $(x, y)$  – две точки на плоскости  $x, y$ .

В экспериментальных науках, в том числе в эконометрике, для определения  $\alpha_0, \alpha_1$  из опыта получают набор из  $n$  значений  $x_i, y_i$  и вычисляют осредненные в среднеквадратичном смысле коэффициенты  $a_0, a_1$ . При этом, если значения  $x_i$  не случайны, мы имеем дело с классическим регрессионным анализом. Но во многих задачах эконометрики входная переменная  $x$  – также случайная величина, а выборочные значения  $x_i$  есть отдельные реализации  $x$ . Механизм случайности имеет двоякую природу. Зависимость  $y(x)$  может быть функциональной, и тогда механизм случайности связан с ошибками измерения. Так, измеряя многократно ток и напряжение на участке электрической цепи при неизменных условиях, мы можем получать различающиеся данные за счет ошибок измерения. Зависимость  $y(x)$

может быть случайной по существу, то есть соотношение между  $y$  и  $x$  может носить вероятностный характер и описываться некоторой двумерной функцией распределения, причем пара  $(x_i, y_i)$  в выборке является реализацией случайного вектора  $(x, y)$ . Так, изучая соотношение между ростом и весом человека по выборке, мы имеем дело именно с такой ситуацией. Наконец, допуская, что при измерении роста и веса могут быть ошибки измерения, получаем полное структурное соотношение между двумя случайными переменными. Переведем его на язык статистики. Ради простоты изложения рассмотрим приведенную выше функциональную модель (7.1). Пусть теперь  $x, y$  – случайные величины, а  $\xi$  и  $\eta$  – их наблюдаемые значения. Функциональной модели (7.1) соответствует следующая структурная модель:

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha_0 + \alpha_1 x_i, \\ \xi_i &= x_i + \varepsilon_i, \\ \eta_i &= y_i + \delta_i, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Дополнительно сделаем следующие предположения:

$$\begin{aligned} M(\varepsilon_i) &= M(\delta_i) = 0; \\ D(\varepsilon_i) &= \sigma_\varepsilon^2, D(\delta_i) = \sigma_\delta^2; \\ K(\varepsilon, \delta) &= K(x, \varepsilon) = K(x, \delta) = K(y, \varepsilon) = K(y, \delta) = 0. \end{aligned}$$

Покажем, что для оценивания  $\alpha_0, \alpha_1$  нельзя использовать аппарат метода наименьших квадратов.

Подставим  $x_i, y_i$  в структурное соотношение

$$\eta_i - \delta_i = \alpha_0 + \alpha_1 (\xi_i - \varepsilon_i)$$

или

$$\eta_i = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_i + (\delta_i - \alpha_1 \varepsilon_i).$$

Найдем ковариацию  $\eta$  с  $\xi$ .

$$K(\eta, \xi) = K(\alpha_0, \xi) + \alpha_1 K(\xi, \xi) + K(\xi, \delta) - \alpha_1 K(\xi, \varepsilon).$$

Так как  $K(\alpha_0, \xi) = K(\xi, \delta) = 0$  и  $K(\xi, \xi) = D(\xi)$ , то

$$K(\eta, \xi) = \alpha_1 D(\xi) - K(\xi, \varepsilon)$$

или



$$\alpha_1 = \frac{K(\eta, \xi)}{D(\xi)} + \frac{K(\xi, \varepsilon)}{D(\xi)}.$$

Заменяя корреляционные моменты и дисперсию выборочными характеристиками и учитывая, что

$$r = a_1 \frac{s_\xi}{s_\eta}, \quad a_1 = r \frac{s_\eta}{s_\xi},$$

последовательно получаем

$$\alpha_1 = \frac{\bar{K}(\eta, \xi)s_\eta}{s_\xi^2 s_\eta} + \frac{\bar{K}(\xi, \varepsilon)}{s_\xi^2} = \frac{\bar{K}(\eta, \xi)s_\eta}{s_\xi s_\eta s_\xi} + \frac{\bar{K}(\xi, \varepsilon)}{s_\xi^2}.$$

Таким образом:

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{\bar{K}(\xi, \varepsilon)}{s_\xi^2}.$$

Корреляционный момент не обращается в нуль, в том числе при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, оценка  $a_1$  коэффициента  $\alpha_1$  оказывается несостоятельной и смещенной. В структурной модели переменные  $x, y$ , по сути дела, равноправны, так как, с вероятностной точки зрения, пара  $(x_i, y_i)$  есть просто реализация случайного вектора  $(x, y)$ . Поэтому имеет смысл говорить о структурной зависимости между случайными величинами  $x$  и  $y$ . Обобщая сказанное выше на многомерный случай, обозначим  $y$  через  $x_0$ , а коэффициент  $\alpha_0$  положим равным единице. Тогда множественное линейное структурное уравнение будет иметь вид

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j x_j = c,$$

где  $c$  – некоторая константа. Как и ранее, все переменные  $x_i$  – случайные величины, измеренные с ошибками. Дословно повторяя приведенные выше рассуждения для многомерного случая, приходим к аналогичному выводу: МНК-оценки коэффициентов  $\hat{\alpha}_i$ ,  $c$  – несостоятельные и смещенные.

Общий вид структурных уравнений можно получить, допуская не одну, а несколько выходных переменных. Пусть  $y$  –  $l$ -мерный, а  $x$  –  $m$ -мерный случайные векторы переменных,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  – матрицы параметров размером  $(k \times m)$  и  $(k \times l)$  соответственно,  $\varepsilon$  –  $k$ -мерный вектор случайных ошибок. Тогда

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{By} = \varepsilon \quad (7.2)$$

наиболее общая форма структурных уравнений. Роль случайных векторов  $x$  и  $y$  мы обсудим несколько позже. А сейчас рассмотрим один из эффективных методов, применяемых для определения параметров структурных уравнений, который называется методом инструментальных переменных.

## 7.2. Метод инструментальных переменных

Метод инструментальных переменных рассмотрим для удобства сравнения результатов на примере модели множественной регрессии

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

для которой были получены МНК-оценки параметров  $\boldsymbol{\alpha}$  в виде

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

Если переменные  $x_j, j = 1, 2, \dots, m$  также случайные, то, как было показано выше, эти оценки смещенные и несостоятельные.

Метод инструментальных переменных заключается в том, что подбираются новые переменные  $z$ , которые наблюдаются одновременно с переменными  $x$ , коррелированы с  $x$  и не коррелированы с  $\varepsilon$ . Эти переменные называются *инструментальными*. Оценка параметров  $\boldsymbol{\alpha}$  имеет вид

$$\mathbf{a} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}, \quad (7.3)$$

где  $\mathbf{Z}'$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{y}$  – наблюдаемые значения соответствующих переменных. Докажем этот факт на примере парной регрессии. Ради простоты изложения положим, что  $x, y$  центрированы своими математическими ожиданиями. Пусть, как и ранее,  $\xi_i$  – наблюдаемое значение  $x$ ,  $\eta_i$  – наблюдаемое значение  $y$ . Обозначим через  $\zeta_i$  наблюдаемое значение инструментальной переменной  $z$ . В этом случае оценка коэффициента  $\alpha_1$  имеет простейший вид

$$a_1 = \frac{\sum \zeta_i \eta_i}{\sum \zeta_i \xi_i}$$

или

$$a_1 \sum \zeta_i \xi_i = \sum \zeta_i \eta_i.$$

Подставляем  $\xi_i$  и  $\zeta_i$ , получаем

$$a_1 \sum \zeta_i (x_i + \varepsilon_i) = \sum \zeta_i (\alpha_1 x_i + \delta_i).$$

Так как, по предположению,  $\zeta_i$  не коррелированы с  $\varepsilon_i$  и  $\delta_i$ , то

$$a_1 \sum \zeta_i x_i = \alpha_1 \sum \zeta_i x_i.$$

Поскольку  $\zeta_i$  и  $x_i$  коррелированы, следовательно:

$$a_1 \rightarrow \hat{a}_1, i \rightarrow \infty,$$

то есть оценка состоятельна. Аналогичным образом можно получить соответствующий результат и для многомерного структурного уравнения.

### 7.3. Двухшаговый метод наименьших квадратов

К сожалению, определить регулярными методами оптимальный набор инструментальных переменных не представляется возможным из-за предъявляемых к ним жестких требований:

- одновременная наблюдаемость с исходными переменными;
- экономический смысл;
- коррелированность с исходными переменными;
- некоррелированность с ошибками регрессии.

Поэтому в практике используют так называемый двухшаговый метод, суть которого состоит в следующем.

Пусть найден произвольный набор инструментальных переменных  $z_j$ , имеющих экономический смысл и не коррелированных с ошибками регрессии. Обозначим через  $\mathbf{Z}$  матрицу наблюдаемых значений  $z_j$ . Рассмотрим регрессию переменных  $x_j$  по переменным  $z_j$ . Это можно сделать, так как значения  $z_j$  и  $x_j$  наблюдаются одновременно. Если  $\boldsymbol{\beta}$  – вектор коэффициентов регрессии, то

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}^{(i)} + \boldsymbol{\nu}, \quad (7.4)$$

где  $\boldsymbol{\nu}$  – вектор случайных возмущений. Оценка  $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$  имеет вид

$$\mathbf{b}^{(i)} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{x}^{(i)} \quad (7.5)$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Определим аппроксимированные значения  $\hat{x}^{(j)}$

$$\hat{x}^{(j)} = \mathbf{Z}\mathbf{b}^{(j)} = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'x^{(j)}$$

и примем их за инструментальные переменные. Коррелированность  $\hat{x}^{(j)}$  с  $x^{(j)}$  очевидна. В то же время  $x^{(j)}$  не коррелированы с ошибками, так как выражаются в виде линейных комбинаций исходных инструментальных переменных  $z^{(j)}$ .

Вычисления  $\hat{x}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , есть первый шаг двухшаговой процедуры. На втором шаге, используя инструментальные переменные  $\hat{x}^{(j)}$ , получим оценки вектора  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}, \quad (7.6)$$

где  $\mathbf{X} = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}$  – матрица выборочных значений инструментальных переменных  $\hat{x}^{(j)}$ , в которой эти векторы являются столбцами.

Следующий пример достаточно наглядно демонстрирует как проблемы, связанные со структурными уравнениями, так и методы их решения.

Рассмотрим зависимость потерь электроэнергии от электрических нагрузок потребителей некоторого района. Пусть  $y$  – суммарные часовые потери электроэнергии, а  $x_1, x_2, \dots, x_m$  – мощности нагрузок комплексных потребителей (город, район, поселок и т. д.). Все указанные величины – случайные. Их значения одновременно фиксируются каждый час в течение суток. Таким образом, выборку составляют наборы  $y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n = 24$ . Предполагается, что потери линейно зависят от мощности нагрузки и, следовательно, структурное уравнение имеет вид

$$y = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j + \varepsilon.$$

Здесь  $\alpha_0$  – технические потери, не зависящие от нагрузок потребителей. Совершенно очевидно, что переменные  $x_j$  коррелируют с ошибкой  $\varepsilon$ , так как последняя равна сумме ошибок измерений и случайных возмущений, вносимых каждым потребителем:

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^m \alpha_j \varepsilon_j.$$

Поставленная задача интересна тем, что инструментальные переменные здесь определяются естественным путем. Действительно, нагрузка каждого комплексного потребителя представляет комби-

нацию в различных долях нагрузок типовых потребителей, таких как предприятия с одно-, двух- и трехсменной работой, общественный транспорт, коммунальные и жилищно-бытовые потребители и т. д. Каждый типовой потребитель имеет типовой график нагрузки. Типовой график  $z^{(k)}$  представляет неслучайную последовательность  $z_{ki}$ ,  $i=1, 2, \dots, 24$  мощностей по часам суток, соответствующую режиму работы типового потребителя.

Пусть в рассматриваемом районе имеется  $l$  типовых графиков.

Тогда фактический комплексный график  $\hat{x}^{(j)}$  можно представить в виде линейной комбинации типовых графиков  $z_k$

$$x_j = \sum_{k=1}^l \beta_{jk} z_k + \theta_j,$$

где  $\theta_j$  – ошибка.

Таким образом, типовые графики оказываются естественными инструментальными переменными. Если  $\beta^{(j)}$  – вектор коэффициентов регрессии, то связь между наблюдаемыми значениями  $x_j$  и значениями  $z_k$  имеет вид

$$\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{Z}\beta^{(j)} + \boldsymbol{\eta}^{(j)}$$

и, согласно методу наименьших квадратов, оценка  $\beta^{(j)}$

$$\mathbf{b}^{(j)} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{x}^{(j)}.$$

Нетрудно видеть, что полученное соотношение есть первый шаг двухшагового метода.

Второй шаг выполняется с инструментальными переменными  $\hat{x}_j$ . Остается показать, что  $z_k$  коррелирует с  $x_j$  и не коррелирует с  $\varepsilon$ . Корреляция  $z_k$  и  $x_j$  следует из определения типового графика. Корреляция  $z_k$  и  $\varepsilon$  отсутствует, так как  $z_k$  – не случайная величина, но предварительно заданный типовой график, не связанный со случайным характером потребления электроэнергии.

#### 7.4. Системы одновременных уравнений. Косвенный метод наименьших квадратов

Классическим примером структурных уравнений являются системы одновременных уравнений. Такие системы появляются в случае, когда входные и выходные переменные одновременно, хотя и не явно, зависят от некоторых внешних факторов. Введение этих факторов в структурные уравнения явным образом приводит к сис-

темам одновременных уравнений. В результате некоторые входные переменные становятся одновременно выходными и наоборот.

Рассмотрим следующий наглядный пример. Пусть  $Q_n$  – предложение тепловой энергии потребителям, а  $Q_c$  – спрос на нее, который может регулироваться самими потребителями. В рамках линейной модели предложение – линейная функция цены  $C$  на тепло, отпускаемое потребителю:

$$Q_n = \alpha_0 + \alpha_1 C + \varepsilon_n.$$

Спрос также определяется ценой, но еще и уличной температурой  $T$  и доходами населения  $D$ . В рамках линейной модели

$$Q_c = \beta_0 + \beta_1 C + \beta_2 T + \beta_3 D + \varepsilon_c.$$

Согласно закону сохранения энергии, в любой момент времени

$$Q_n = Q_c.$$

Следовательно, цена отпускаемого тепла должна зависеть от температуры окружающей среды и доходов населения. Эта цена формируется одновременно со спросом и предложением и зависит от величины  $T$  и  $D$ . Нетрудно видеть, что все переменные, входящие в приведенные уравнения, – случайные и входная переменная  $C$  коррелирует с ошибками  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_n$ . Переменные  $T$  и  $D$  с ошибками не коррелируют и являются внешними для системы. Такие переменные называются *экзогенными*. Переменные  $Q_n$ ,  $Q_c$  и  $C$  формируются внутри системы, или, как говорят математики, в силу этой системы. Такие переменные называются *эндогенными*. Приведенный пример показывает, что в системах одновременных (структурных) уравнений деление переменных на входные и выходные теряет смысл. Более важным является их деление на экзогенные (внешние) и эндогенные (внутренние).

В общем случае система одновременных уравнений имеет вид

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{By} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

и представляет систему структурных уравнений (см. подразд. 7.1). В дальнейшем будем считать, что  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^t$  – экзогенные переменные,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_e)^t$  – эндогенные переменные, а число уравнений системы в общем случае равно  $k$ .

Определение оценок элементов матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  оказывается весьма непростым делом и требует специальных методов. В этом подразделе мы рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда матрица  $\mathbf{B}$  квадратная и неособенная. В этом случае можно разрешить систему

структурных уравнений относительно эндогенных переменных  $y$ , выразив их через экзогенные переменные  $x$ :

$$y = -B^{-1}Ax + B^{-1}\varepsilon. \quad (7.8)$$

Так как экзогенные переменные не коррелированы с ошибками, то для каждого уравнения системы (7.8) можно применить обычный метод наименьших квадратов, причем МНК-оценки параметров будут состоятельные, несмещенные и эффективные. Результатом этой операции будет матрица оценок  $B^{-1}A$ . Если к тому же удастся выразить элементы матриц  $A$  и  $B$  через элементы матрицы  $B^{-1}A$ , то можно получить оценки матриц  $A$  и  $B - \hat{A}$  и  $\hat{B}$  соответственно. Изложенный метод носит название косвенного метода наименьших квадратов.

Необходимым условием его применимости является разрешимость структурных уравнений относительно эндогенных переменных. Но это условие гарантирует только получение оценок коэффициентов  $B^{-1}A$  преобразованных уравнений. Для получения косвенных МНК-оценок  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  необходимо (и достаточно), чтобы существовало обратное преобразование коэффициентов

$$B^{-1}A \rightarrow A, B.$$

Обратное преобразование возможно, если матрицы  $A$  и  $B$  с одной стороны и матрица  $B^{-1}A$  с другой стороны имеют одинаковое количество ненулевых элементов. Если указанное условие не выполняется, то косвенный метод наименьших квадратов неприменим. В этом случае возникает проблема идентифицируемости параметров структурной системы.

Структурный параметр называется *идентифицируемым*, если он может быть однозначно определен с помощью косвенного метода наименьших квадратов. В противном случае он называется *неидентифицируемым*.

Структурный параметр называется *сверхидентифицируемым*, если метод наименьших квадратов дает для него несколько различных оценок. Аналогичная терминология применяется для уравнений и системы в целом. Если хотя бы один коэффициент уравнения не может быть определен, уравнение называют неидентифицируемым. В этом случае система в целом также неидентифицируема.

Метод инструментальных переменных, изложенный в подразд. 7.2, естественно, применим и для систем одновременных уравнений, которые, по существу, являются структурными уравнениями.

Если система идентифицируема, то экзогенные переменные используются в качестве инструментальных переменных. Получаемые при этом оценки совпадают с оценками косвенного метода наименьших квадратов.

Сложнее обстоит дело, если система неидентифицируема. В этом случае к экзогенным переменным, используемым в качестве инструментальных, необходимо добавить некоторое количество «внешних» инструментальных переменных, наблюдаемых одновременно со структурными переменными.

Соответствующие процедуры изложены в подразд. 7.2.

### 7.5. Одновременное оценивание структурных уравнений. Трехшаговый метод наименьших квадратов

Косвенный метод сводится, по сути дела, к обычному методу наименьших квадратов для каждого из разрешенных относительно  $y_j$  уравнений

$$y = B^{-1}Ax + B^{-1}\varepsilon.$$

Введем обозначения

$$\delta = B^{-1}\varepsilon.$$

Из определения вектора  $\delta$  следует, что его составляющие коррелируют, то есть

$$K(\delta_i, \delta_j) \neq 0.$$

Поэтому можно применить ко всей системе одновременно обобщенный метод наименьших квадратов. Такой прием зачастую повышает точность оценок коэффициентов структурных уравнений. Ввиду громоздкости записи необходимых соотношений в общем виде, для иллюстрации метода ограничимся двумя уравнениями, разрешенными относительно эндогенных переменных:

$$y_1 = \beta_1 x + \varepsilon_1;$$

$$y_2 = \beta_2 x + \varepsilon_2.$$

Регрессионная модель имеет вид

$$y_1 = X_1 \beta_1 + \varepsilon_1;$$

$$y_2 = X_2 \beta_2 + \varepsilon_2.$$

Объединим обе модели в одну. Введем обозначения сложных векторов и матриц

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Объединенная модель имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Вычислим ковариационную матрицу

$$\mathbf{K}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} K_{\varepsilon 11} & K_{\varepsilon 12} \\ K_{\varepsilon 21} & K_{\varepsilon 22} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{K}_{\varepsilon 11} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$ ;  $\mathbf{K}_{\varepsilon 22} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$ ;  $\mathbf{K}_{\varepsilon 12} = \mathbf{K}_{\varepsilon 21} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$ .

МНК-оценка вектора коэффициентов  $\boldsymbol{\beta}$  имеет вид

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{K}_{\varepsilon}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{K}_{\varepsilon}\mathbf{y}.$$

Главная трудность состоит в оценке матрицы  $\mathbf{K}_{\varepsilon}^{-1}$ . Можно поступить следующим образом: оценить уравнения (7.9) по отдельности, найти остатки регрессии и по ним вычислить выборочные ковариации  $\mathbf{K}_{\varepsilon}$ .

Эффективной процедурой оценивания является также последовательное применение метода одновременного оценивания и двухшагового метода.

Первый метод позволяет устранить корреляцию случайных ошибок. Получив модель в виде

$$\hat{y}_j = \langle \mathbf{b}^{(j)}, \mathbf{x} \rangle + \varepsilon_j,$$

с некоррелированными остатками применяют двухшаговый метод наименьших квадратов. Вся процедура в целом называется *трехшаговым методом наименьших квадратов*.

## 8. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

До сих пор мы молчаливо предполагали, что все выборочные данные для проведения эконометрического анализа у нас имеются, причем в необходимом количестве и нужного качества. Но, как указывалось ранее, проблема данных в эконометрике не так проста, как может показаться на первый взгляд. Оставляя в стороне технические вопросы эконометрических измерений, рассмотрим главную проблему – способ получения данных. Естественным источником данных являются различные статистические отчеты о работе предприятий, объединений, регионов и страны в целом. Надежность их сомнительна, так как иногда желаемая картина выдается за действительную. Кроме того, система отчетных показателей зачастую не отвечает задаче конкретного эконометрического исследования по набору показателей, периодичности, точности и т. д. В подобных случаях необходимо проводить эксперименты. В экономике эксперимент, как правило, довольно дорогое мероприятие. Поэтому возникает задача получения максимума информации при ограниченных затратах, то есть задача оптимального планирования экспериментов. Вопросам планирования экспериментов и посвящается настоящий раздел. Теория планирования экспериментов в настоящее время представляет один из наиболее бурно развивающихся разделов математической статистики. Тем не менее, ее роль в эконометрике еще недостаточно оценена. Ниже излагаются основные принципы планирования экспериментов. Для более глубокого изучения читатель может обратиться к специальной литературе [6, 13].

Любое экспериментальное исследование объекта или процесса состоит из трех основных этапов:

- постановки задачи, выбора теоретической модели;
- планирования и проведения эксперимента;
- обработки и анализа результатов.

Основные задачи эконометрического исследования читателю известны из всего предшествующего изложения. Мы дополним их двумя важными моментами. Наши модели будут допускать теперь наличие качественных факторов, которые не могут быть учтены введением фиктивных переменных. Некоторые модели будут иметь оптимизационный характер, то есть будут предназначены для поиска оптимальных решений. Из всего разнообразия планов экспериментов мы остановимся на двух, в некотором смысле, противополо-

ложных: полностью рандомизированном и линейном оптимальном. Первый план предполагает полную случайность и независимость в расположении точек плана, чем исключается влияние на результат той или иной упорядоченности в проведении экспериментов. Второй план полностью детерминированный. Его цель – минимизация количества опытов и вычислений при сохранении достаточной надежности выводов.

Для обработки и анализа результатов мы, наряду с регрессионным анализом, будем использовать методы дисперсионного анализа.

### 8.1. Полностью рандомизированный план. Дисперсионный анализ

Предположим, что выходная переменная  $x$  зависит от нескольких факторов  $A, B, \dots$ , которые могут принимать как количественные, так и качественные уровни, которые мы будем обозначать теми же буквами с индексами  $A_i, B_i, \dots$ . При каждом сочетании факторов сделано одинаковое количество наблюдений величины  $x$ . Необходимо выяснить, влияют ли эти факторы на выходную переменную  $x$ . Если такое влияние обнаружено, то следует оценить степень влияния отдельных уровней и при необходимости, упорядочив уровни по степени влияния, создать дискретную модель изучаемого объекта или процесса.

#### 8.1.1. Однофакторный эксперимент

Пусть оценивается влияние на выходную переменную  $x$  единственного фактора  $A$ , имеющего  $m$  уровней  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . На каждом уровне путем случайной выборки получено  $n$  значений величины  $x$ . Таким образом, имеется  $mn$  значений  $x_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ . Вычислим среднее для каждого уровня фактора

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_j x_{ij}$$

и среднее по всей выборке

$$\bar{x}_{..} = \frac{1}{mn} \sum_{i,j} x_{ij}.$$

По сути дела, вопрос ставится так: «Насколько значимо различие средних  $\bar{x}_i$  и общего среднего  $\bar{x}_{..}$ ? Вызвано ли это различие действием фактора  $A$  или оно совершенно случайно?»

Этот вопрос можно было бы решить применением  $t$ -критерия Стьюдента, приняв за нулевую гипотезу равенство

$$\bar{x}_{..} = \bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_m.$$

Однако более надежным является сравнение дисперсий. Этот прием мы уже использовали для оценки значимости уравнений регрессии. Совокупность методов, основанных на анализе дисперсий, называется *дисперсионным анализом*. Рассмотрим основные приемы дисперсионного анализа на примере однофакторного эксперимента. Как уже известно читателю, изменчивость случайной величины оценивается суммой квадратов ее отклонений от среднего значения или соответствующей дисперсией. Вычислим следующие суммы квадратов:

*общая сумма квадратов*

$$Q = \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2;$$

*сумма квадратов между испытаниями*

$$Q_A = n \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2;$$

*сумма квадратов внутри испытаний (остаточная сумма квадратов)*

$$Q_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2.$$

Можно доказать путем раскрытия скобок и соответствующих преобразований, что

$$Q = Q_A + Q_0.$$

Это означает, что общую изменчивость  $Q$  мы разложили на изменчивость, вызванную действием фактора  $Q_A$ , и изменчивость, обусловленную случайными причинами  $Q_0$ . Разделив суммы квадратов на число степеней свободы, получим соответствующие оценки дисперсий:

*общая дисперсия*

$$s^2 = \frac{Q}{mn-1};$$

*дисперсия факторов*

$$s_A^2 = \frac{Q_A}{m-1};$$

остаточная дисперсия

$$s_0^2 = \frac{Q_0}{mn - m} = \frac{Q_0}{m(n - 1)}.$$

Нулевая гипотеза теперь состоит в равенстве дисперсий

$$H_0: s^2 = s_A^2 = s_0^2$$

и может быть проверена по критерию Фишера.

Зададим уровень значимости  $p$  и определим квантиль распределения Фишера  $F_{1-p}(m-1, m(n-1))$  с числом степеней свободы  $m-1$  и  $m(n-1)$ . Влияние фактора  $A$  признается значимым, если

$$F_\Phi = \frac{s_A^2}{s_0^2} > F_{1-p}(m-1, m(n-1)),$$

и незначимым в противном случае.

Если результаты дисперсионного анализа указывают на значимое различие в средних, то естественно возникает вопрос, какие средние существенно отличаются от общего среднего и (или) от других средних. Действительно, пусть, например, изучается влияние удобрений различных типов (фактор  $A$ ) на урожайность. Уровнями фактора  $A$  здесь являются типы удобрений. Очевидно, недостаточно установить, что влияние типа удобрения значимо. Важно понять, какие именно типы удобрений наиболее существенно влияют на урожайность, то есть установить значимость влияния отдельных уровней.

Наиболее простой способ состоит в сравнении средних между собой и (или) с общим средним по  $t$ -критерию Стьюдента. Алгоритм действий здесь очевиден и мы его опускаем. Более совершенным представляется метод ортогональных контрастов, основанный на сравнении дисперсий. Дадим необходимые определения.

Пусть  $X_i$  – сумма значений наблюдаемой величины на  $i$ -м уровне фактора  $A$ :

$$X_i = \sum_j x_{ij}.$$

Контрастом  $C_k$  называется сумма

$$C_k = \sum_{i=1}^m c_{ki} X_i$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^m c_{ki} = 0$$

и число наблюдений на каждом уровне одно и то же (в нашем случае  $n$ ). Два контраста  $C_k$  и  $C_e$  называются ортогональными, если

$$\sum_{i=1}^m c_{ki} c_{li} = 0.$$

Число контрастов не должно превосходить числа степеней свободы для средних по факторам, то есть величины  $m-1$ . Для каждого контраста определяется сумма квадратов

$$QC_k = \frac{C_k^2}{n \sum_{i=1}^m c_{ki}^2},$$

имеющая число степеней свободы, равное 1.

Нулевая гипотеза  $H_{0k}$  для контраста  $C_k$  имеет вид

$$H_{0k}: C_k = 0, k=1, 2, \dots, m-1.$$

Проверка гипотезы  $H_{0k}$  производится по  $F$ -критерию, сравнением суммы квадратов контраста с суммой квадратов ошибки  $Q_0$ , имеющей  $m(n-1)$  степеней свободы. Выводы зависят от вида контраста. Приведем пример.

Пусть  $m=4$ ,  $m-1=3$  и контрасты определяются векторами

$$\begin{aligned} C_1 &= (+1, 0, 0, -1); \\ C_2 &= (0, +1, -1, 0); \\ C_3 &= (+1, -1, -1, +1). \end{aligned}$$

Тогда соответствующие гипотезы имеют вид

$$\begin{aligned} H_{01}: X_1 &= X_4; \\ H_{02}: X_2 &= X_3; \\ H_{03}: X_1 + X_4 &= X_2 + X_3. \end{aligned}$$

Пусть, например, гипотезы  $H_{01}$  и  $H_{02}$  отвергаются, а гипотеза  $H_{03}$  принимается. Тогда можно сделать вывод о наличии значимого различия средних внутри групп (1, 4) и (2, 3) и отсутствии такого различия между самими группами.

Контрасты можно выбрать различными способами и, следовательно, можно сравнить любые, представляющие интерес комбинации средних. В нашем случае контрасты можно определить также для следующих векторов:

$$\begin{aligned} & (+1, 0, -1, 0); \\ & (0, +1, 0, -1); \\ & (+1, -1, +1, -1). \end{aligned}$$

Возможны и другие комбинации.

Метод ортогональных контрастов – лишь один из методов, применяемых после дисперсионного анализа. Для этих целей предложено несколько методов, в том числе основанных на множественном ранговом критерии [7, 13].

В заключение приведем формальную модель эксперимента. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \bar{x}_{i.} - \bar{x}. \\ e_{ij} &= x_{ij} - \bar{x}_{i.} \end{aligned}$$

Тогда выражение

$$\hat{x}_{ij} = \bar{x}_{..} + \Delta x_i + e_{ij}$$

представляет дискретную модель зависимости выходной переменной  $x$  от уровней исследуемого фактора. Доверительные интервалы для элементов модели вычисляются обычными методами (подразд. 3.3).

### 8.1.2. Двухфакторный эксперимент

Пусть теперь на выходную величину  $x$  влияют два фактора – фактор  $A$  с уровнями  $A_1, A_2, \dots, A_e$  и фактор  $B$  с уровнями  $B_1, B_2, \dots, B_m$ . Уровни могут быть как количественными, так и качественными. Рассмотрим вначале эксперимент, в котором при каждом сочетании уровней факторов имеется только одно наблюдение  $x_{ij}, i=1, 2, \dots, l, j=1, 2, \dots, m$ . Обозначим:

*общее среднее*

$$\bar{x}_{..} = \frac{\sum_i \sum_j x_{ij}}{lm};$$

*среднее по уровням A*

$$\bar{x}_{i.} = \frac{\sum_j x_{ij}}{m};$$

*среднее по уровням B*

$$\bar{x}_{.j} = \frac{\sum_i x_{ij}}{l}.$$

Определим суммы квадратов:

*общую*

$$Q = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2;$$

*средних фактора A*

$$Q_A = m \sum_{i=1}^l (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2;$$

*средних фактора B*

$$Q_B = l \sum_{j=1}^m (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2;$$

*остаточную*

$$Q_0 = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2.$$

Как и ранее, можно показать, что

$$Q = Q_A + Q_B + Q_0.$$

Таким образом, и в этом случае удается разложить общую сумму квадратов (изменчивость) на составляющие, определяемые влиянием факторов и ошибкой. В принципе, следовало бы выделить составляющую, соответствующую совместному действию обоих факторов  $Q_{AB}$ . Однако при наличии одного наблюдения на каждом сочетании уровней факторов сделать это невозможно. Так что совместное влияние, если оно есть, оказывается отнесенным к случайной ошибке.

Несмещенные оценки дисперсий равны:

$$s^2 = \frac{Q}{l-1}; \quad s_A^2 = \frac{Q_A}{l-1};$$

$$s_B^2 = \frac{Q_B}{m-1};$$

$$s_0^2 = \frac{Q_0}{(l-1)(m-1)}.$$

Фактические значения  $F$ -критерия вычисляются для каждого фактора:

$$F_{\Phi A} = \frac{s_A^2}{s_0^2}, \quad F_{\Phi B} = \frac{s_B^2}{s_0^2}.$$



Значимость влияния устанавливается стандартным способом. Аналогично предыдущему проводятся вычисления после анализа дисперсий. Формальная математическая модель эксперимента  $B$  имеет вид

$$\hat{y}_{ij} = \bar{x}_{..} + \Delta \bar{x}_{.} + \Delta \bar{x}_{i.} + \Delta \bar{x}_{.j} + e_{ij}.$$

Усложним задачу, допустив возможность параллельных наблюдений. Пусть при каждом сочетании факторов проводится  $n$  наблюдений. Дополнительно к предыдущим вычислениям определим среднее

$$\bar{x}_{ij.} = \frac{1}{n} \sum_k x_{ijk}.$$

Разложение общей суммы квадратов будет иметь вид

$$Q = Q_A + Q_B + Q_{AB} + Q_0,$$

где

$$Q = \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{x}_{ijk} - \bar{x}_{...})^2;$$

$$Q_A = mn \sum_i (\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...})^2;$$

$$Q_B = ml \sum_j (\bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...})^2;$$

$$Q_{AB} = n \sum_i \sum_j (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2;$$

$$Q_0 = \sum_i \sum_j \sum_k (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2.$$

Вычислим дисперсии

$$s_A^2 = \frac{Q_A}{l-1}; \quad s_B^2 = \frac{Q_B}{m-1};$$

$$s_{AB}^2 = \frac{Q_{AB}}{(l-1)(m-1)}; \quad s_0^2 = \frac{Q_0}{lm(n-1)}.$$

Определив фактические значения

$$F_{\Phi A} = \frac{s_A^2}{s_0^2}, \quad F_{\Phi B} = \frac{s_B^2}{s_0^2}, \quad F_{\Phi AB} = \frac{s_{AB}^2}{s_0^2},$$

можно установить значимость влияния отдельных факторов и их сочетаний.

Модель эксперимента имеет вид

$$\hat{x}_{ijk} = \bar{x}_{...} + \Delta \bar{x}_i + \Delta \bar{x}_j + \Delta \bar{x}_{ij} + e_{ijk}.$$

### 8.1.3. Факторные эксперименты $2^n$ .

#### Дробные реплики

В этом подразделе мы рассмотрим некоторые приемы, позволяющие уменьшить число опытов. В начале дадим несколько определений, принятых в теории планирования экспериментов.

Пусть имеется  $n$  факторов, каждый из которых варьируется на  $m_i$  уровнях,  $i=1, 2, \dots, n$ . Если в процессе эксперимента значение выходной переменной наблюдается при всех возможных сочетаниях уровней факторов, то такой эксперимент называется *полным факторным экспериментом* (ПФЭ). Число возможных сочетаний в полном факторном эксперименте

$$N = \prod_{i=1}^n m_i.$$

Очевидно, при большом числе факторов и уровней число наблюдений даже при отсутствии параллельных наблюдений может быть слишком большим.

Есть два пути уменьшения числа наблюдений:

- уменьшение числа уровней;
- уменьшение числа сочетаний.

Первый путь приводит к появлению экспериментов типа  $2^n$ ,  $3^n$ , имеющих два-три уровня. Второй путь заключается в построении так называемых дробных реплик. Вообще репликой называют набор значений выходной переменной, полученный при проведении эксперимента. Полному факторному эксперименту соответствует полная реплика. Если из полного набора сочетаний выбрать только некоторую часть, то получаем дробную реплику. Так говорят о полуреплике, четвертьреплике и т. д. Ниже мы рассмотрим эксперимент типа  $2^n$  и его дробные реплики. Такой выбор обусловлен тем, что эксперимент  $2^n$  наиболее часто используется для изучения локальных свойств нелинейных регрессионных уравнений, называемых в теории планирования экспериментов *функциями отклика*.

Для лучшего понимания существа дела рассмотрим вначале эксперимент типа  $2^2$ , то есть два фактора  $A, B$ , варьируемых на двух

уровнях каждый. Факторы могут быть как количественными, так и качественными. Вне зависимости от их типа значения каждого фактора принимают равными 0 или 1, причем в случае количественных уровней единица присваивается верхнему уровню, ноль – нижнему. Модель в этом случае имеет вид

$$x_{ij} = \bar{x} + A_i + B_j + AB_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i=1, 2; j=1, 2,$$

где  $A_i, B_j$  – эффекты факторов;  $AB_{ij}$  – эффект их сочетания.

В литературе для обозначения откликов значений выходной переменной на различных уровнях принята мнемоническая схема, согласно которой варианты испытаний и отклики обозначаются малыми буквами  $a, b$  в степени 0 или 1 в соответствии с уровнем. Таким образом, ПФЭ  $2^2$  имеет следующие варианты испытаний:

$$\begin{aligned} a^0 b^0 &= (1); a^1 b^0 = a; \\ a^0 b^1 &= b; a^1 b^1 = ab. \end{aligned}$$

Напомним, что (1),  $a, b, ab$  обозначают не только варианты, но и отклики, то есть соответствующее значение выходной переменной. Обозначения удобны тем, что позволяют наглядно вводить новые факторы. Для введения фактора  $C$  достаточно приписать справа предыдущие варианты, умноженные на  $C$ : (1),  $a, b, ab, c, ac, bc, abc$  и т. д.

Найдем средние эффекты факторов и их взаимодействия. Для вычисления эффектов факторов из верхних откликов вычтем нижние и усредним их:

$$\bar{A} = \frac{1}{2}[(a - (1)) + (ab - b)];$$

$$\bar{B} = \frac{1}{2}[(b - (1)) + (ab - a)].$$

Для вычисления эффекта взаимодействия найдем полуразность эффектов фактора  $A$  на двух уровнях фактора  $B$

$$\bar{A}\bar{B} = \frac{1}{2}[(ab - b) - (a - (1))].$$

Если эти эффекты различны, то взаимодействие существует.

Преобразуем полученные средние

$$2\bar{A} = -(1) + a - b + ab;$$

$$2\bar{B} = -(1) - a + b + ab;$$

$$2\bar{A}\bar{B} = (1) - a - b + ab.$$

Обратим внимание на то, что эффект взаимодействия можно получить, перемножив соответствующие коэффициенты в двух главных эффектах.

Запишем коэффициенты эффектов в виде векторов

$$\mathbf{A} (-1, +1, -1, +1);$$

$$\mathbf{B} (-1, -1, +1, +1);$$

$$\mathbf{AB} (+1, -1, -1, +1).$$

Нетрудно видеть, что эти векторы ортогональны, а, следовательно,  $2A, 2B, 2AB$  являются контрастами. Определим, как и выше, суммы квадратов контрастов

$$Q_A = \frac{(2\bar{A})^2}{4}; \quad Q_B = \frac{(2\bar{B})^2}{4}; \quad Q_{AB} = \frac{(2\bar{AB})^2}{4}.$$

Число степеней свободы каждой суммы квадратов равно 1. Поскольку параллельных наблюдений нет, взаимодействие невозможно отделить от ошибки, так что  $Q_0 = Q_{AB}$  и фактические значения  $F$ -критерия равны

$$F_A = \frac{Q_A}{Q_0}, \quad F_B = \frac{Q_B}{Q_0}.$$

Значимость влияния факторов определяется стандартным способом. Полученные результаты легко обобщаются на случай ПФЭ  $2^n$ . Для определения контрастов по откликам нужно брать отклики со знаком плюс, если фактор на верхнем уровне, и со знаком минус – если он на нижнем уровне. Контрасты для взаимодействий определяются перемножением соответствующих коэффициентов.

В общем случае основные соотношения при  $k$  наблюдениях в ячейке имеют вид

$$\text{КОНТРАСТ} = k2^{n-1} (\text{эффект});$$

$$Q_{\text{КОНТРАСТА}} = \frac{(\text{контраст})^2}{k2^n}.$$

Число степеней свободы контрастов равно единице. Число степеней свободы остаточной суммы квадратов равно  $2^n(k-1)$ .

Уменьшение числа уровней факторов существенно сокращает количество необходимых наблюдений. При грамотном выборе уровней можно получить достаточно надежный результат, тем более, что речь идет об установлении самого факта влияния. Тем не менее, и такой эксперимент в практических условиях может оказаться невозможным.

Кроме того, с ростом числа факторов растет число взаимодействий, равное числу сочетаний  $C_n^l$ , где  $l$  – число взаимодействующих факторов. Количество взаимодействий для первых четырех значений  $n$  приведено в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Число факторов	Главные эффекты	Парные	Тройные	Четверные	Пятерные	$N$
2	2	1	–	–	–	4
3	3	3	1	–	–	8
4	4	6	4	1	–	16
5	5	10	10	5	1	32

Если парные взаимодействия, как правило, поддаются разумному толкованию, то взаимодействия более высоких порядков зачастую трудно объяснить. Потому представляется целесообразным сократить число опытов, пренебрегая при этом некоторыми взаимодействиями.

Рассмотри эксперимент  $2^3$ . Коэффициенты ортогональных контрастов (опуская единицу) сведем в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Комбинация уровней	Эффект						
	$A$	$B$	$AB$	$C$	$AC$	$BC$	$ABC$
1	–	–	+	–	+	+	–
$a$	+	–	–	–	–	+	+
$b$	–	+	–	–	+	–	+
$ab$	+	+	+	–	–	–	–
$c$	–	–	+	+	–	–	+
$ac$	+	–	–	+	+	–	–
$bc$	–	+	–	+	–	+	–
$abc$	+	+	+	+	+	+	+

Выберем полуреплику (4 наблюдения)  $a, b, c, abc$ , выделенную в таблице жирными линиями. Нетрудно видеть, что контрасты

$$2A = a - b - c + abc;$$

$$2BC = a - b - c + acb$$

одинаковы. Следовательно, мы не можем различить эффект  $A$  и взаимодействие  $BC$ . Аналогично, невозможно различить  $B$  и  $AC$ ,  $C$  и  $AB$ . Таким образом, если не провести дополнительных исследований

в отношении значимости парных взаимодействий, невозможно определенно утверждать, какие именно эффекты, главные или парные взаимодействия влияют на выходную переменную.

Приведенный пример наглядно демонстрирует трудности, которые сопровождают попытки воспользоваться дробными репликами. Тем не менее, этот прием может оказаться эффективным при больших значениях  $n$ . Так, начиная с  $n=5$ , полуреплика позволяет выделить главные эффекты и парные взаимодействия. Взаимодействия более высоких порядков обычно относят к ошибкам. При  $n=7$  полуреплика позволяет разграничить главные эффекты, парные и тройные взаимодействия. Для выделения главных эффектов и парных взаимодействий достаточно четвертьреплики. В следующем подразделе мы вернемся к дробным репликам и обсудим регулярные способы их построения.

## 8.2. Регрессионный анализ и ортогональное планирование экспериментов

В предыдущем подразделе мы обсудили возможность сокращения числа наблюдений при использовании факторных экспериментов типа  $2^n$  и дробных реплик. Этот подход может быть с успехом использован в регрессионном анализе, в том числе нелинейном.

Рассмотрим уравнения регрессии вида

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_{ij} X_i X_j + \varepsilon,$$

учитывающие влияние отдельных факторов и их взаимодействий.

Число параметров здесь равно  $2^m$  и, следовательно, минимально возможное число экспериментов без параллельных наблюдений равно  $2^m$ . Для получения такого количества наблюдений достаточно варьировать каждую переменную на двух уровнях  $X_{i \min}$  и  $X_{i \max}$ . Абсолютные значения уровней выбирают, исходя из экономического смысла переменных и цели исследования. Иногда это малые вариации вокруг некоторых «номинальных» значений, в других случаях – это границы диапазонов возможных значений переменных. Если абсолютные уровни заданы, для дальнейшего удобно ввести нормированные значения входных переменных. Введем нормированные переменные  $x_i, i=1, 2, \dots, m$  следующим образом:

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i},$$

где  $X_{i0} = \frac{X_{i\min} + X_{i\max}}{2}$ ,  $\Delta X_i = \frac{X_{i\max} - X_{i\min}}{2}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ .

Нетрудно видеть, что нормированные переменные принимают значения  $\pm 1$ , причем для каждой переменной  $x_i$  значение  $+1$  соответствует  $X_{i\max}$ , значение  $-1$  соответствует  $X_{i\min}$ . Сохраняя обозначения коэффициентов, получим в результате уравнение регрессии в виде

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_{ij} x_i x_j + \varepsilon.$$

Для определения коэффициентов проведем факторный эксперимент  $2^m$ , который строится по правилам, изложенным в п. 8.1.3.

Рассмотрим структуру матрицы значений входных переменных  $\mathbf{X}$ .

Для  $m=2$

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_1 x_2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & +1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для  $m=3$

$$\mathbf{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1 x_2 & x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 x_3 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Анализируя структуру матриц  $\mathbf{X}^{(2)}$ ,  $\mathbf{X}^{(3)}$ , можно сделать следующие выводы, справедливые для любого  $m$ .

1. Первый столбец матрицы  $\mathbf{X}$  состоит из единиц.

2. Во втором столбце значения  $-1$  и  $+1$  чередуются, в третьем столбце чередуются пары  $(-1, -1)$  и  $(+1, +1)$ , в четвертом столбце – четверки  $(-1, -1, -1, -1)$  и  $(+1, +1, +1, +1)$ , и вообще, в столбце с номером  $i$  чередуются  $2^{i-1}$  значений  $x_i = -1$  и  $2^{i-1}$  значений  $x_i = +1$ .

3. Элементы столбцов, соответствующих произведениям входных переменных, получаются перемножением элементов столбцов с номерами, соответствующими индексам перемножаемых переменных.

Эти простые правила позволяют легко сформировать матрицу  $\mathbf{X}$  при любом  $m$ . Но, пожалуй, главным структурным свойством матрицы является ортогональность ее столбцов. Этот факт проверяется непосредственно и может быть доказан в общем виде.

Пусть  $\mathbf{x}^{(i)}$  – вектор-столбец матрицы  $\mathbf{X}$  с номером  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)} \rangle &= 0, \quad i \neq j \text{ и} \\ \langle \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(i)} \rangle &= m. \end{aligned}$$

Планы, обладающие таким свойством, называются *ортогональными*. Для ортогональных планов

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = m\mathbf{E},$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица порядка  $m$ . Поэтому вектор оценок параметров уравнения регрессии

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

Оценки  $\mathbf{a}$  не коррелированы, так как

$$\mathbf{K}_a = s^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{s^2}{m} \mathbf{E}.$$

Дисперсии оценок коэффициентов одинаковы и равны  $\frac{\sigma^2}{m}$ , а

оценки дисперсий одинаковы и равны  $\frac{s^2}{m}$ . Оценка дисперсии  $s^2$  может быть получена только при наличии параллельных наблюдений.

Ортогональные планы получили широкое распространение ввиду их простоты, наглядности и минимального объема вычислений. Последнее особенно важно в оптимизационных задачах эволюционного планирования в режиме реального времени. Мы обсудим эти вопросы несколько позже, а сейчас рассмотрим один важный, частный случай.

Рассмотрим уравнение линейной множественной регрессии

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i.$$

Число коэффициентов здесь равно  $m+1$ . Начиная с  $m=2$ , справедливо строгое неравенство

$$m+1 < 2^m.$$

Таким образом, при  $m>2$  для уменьшения числа экспериментов можно использовать дробные реплики ортогонального плана. Рассмотрим особенности построения дробных реплик на примере полуреплики плана  $2^3$ . При  $m=3$  число коэффициентов в уравнении линейной регрессии равно 4, а число наблюдений в полном факторном эксперименте равно 8. Следовательно, можно ограничиться полурепликой  $2^{3-1}$ , сохраняющей ортогональность плана. План  $2^2$  обладает всеми необходимыми свойствами, причем последний столбец полного плана, соответствующий произведению  $x_1 x_2$ , в полуреплике будет соответствовать переменной

$$x_3 = x_1 x_2.$$

Это соотношение называется генерирующим соотношением полуреплики  $2^{3-1}$ . Другим таким соотношением будет равенство

$$x_3 = -x_1 x_2,$$

генерирующее еще одну полуреплику  $2^{3-1}$ . Генерирующее соотношение достраивает двухмерный план без взаимодействия до дробной реплики трехмерного плана. Нетрудно видеть, что подобные реплики для эксперимента  $2^m$  есть факторные эксперименты типа  $2^{m-1}$  (полуреплика),  $2^{m-2}$  (четвертьреплики) и т. д. со своими генерирующими соотношениями. Поэтому число параметров  $m$ -мерной модели, которые могут быть определены в дробных факторных экспериментах, не может быть больше  $2^{m-1}$  в полуреплике,  $2^{m-2}$  в четвертьреплике и т. д. Так, при  $m=5$  полуреплика позволяет определить главные эффекты и парные взаимодействия, при  $m=7$  – главные эффекты, парные и тройные взаимодействия, а для определения главных эффектов и парных взаимодействий достаточно четвертьреплики.

В заключение приведем без доказательства одно важное свойство ортогональных планов. План, соответствующий линейной функции регрессии, назовем линейным. Согласно теореме Бокса, линейные ортогональные планы позволяют получить МНК-оценки пара-

метров с минимальной дисперсией. Такие планы называют также *линейными оптимальными планами*.

### 8.3. Центральные композиционные планы второго порядка

Нелинейная регрессионная модель, рассмотренная в предыдущем подразделе, является шагом вперед по сравнению с линейной моделью, так как позволяет учитывать эффект взаимодействия входных переменных. Кроме того, эта модель идеально соответствует факторному эксперименту  $2^m$  и наиболее полно использует преимущества ортогонального планирования. Тем не менее, она представляется несколько искусственной, так как не позволяет учесть нелинейные эффекты самих входных переменных, хотя бы в виде их квадратов.

Полная нелинейная полиномиальная модель второго порядка в нормированных переменных имеет вид

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^m \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

и содержит  $2^m + m$  неизвестных коэффициентов. Очевидно, для определения коэффициентов здесь уже недостаточно варьировать переменные на двух уровнях. В то же время эксперимент  $3^m$  дает избыточное количество наблюдений и, что еще более важно, не является ортогональным. Одним из возможных подходов является построение *центральных композиционных планов* (ЦКП) второго порядка. Ядром ЦКП является полный (или дробный) факторный эксперимент  $2^m$ , который достраивается до ЦКП следующим образом. Проводится эксперимент в центре полного факторного эксперимента, то есть при  $x_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Кроме того, проводятся эксперименты в «звездных» точках

$$x_i = \pm \beta_i, x_i x_j = 0, i \neq j$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Таким образом, общее число наблюдений становится равным

$$n = 2^m + 2m + 1.$$

Простые подсчеты показывают, что

$$2^m + 2m + 1 < 3^m$$

при всех  $m \geq 2$ . В общем случае ЦКП не является ортогональным. Но изменением звездного плеча  $\beta$  и преобразованием уравнения

регрессии его можно сделать ортогональным. Рассмотрим эту процедуру для  $m=2$ . Исходный ЦКП имеет вид

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_1x_2 & x_1^2 & x_2^2 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -\beta & 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ +1 & \beta & 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ +1 & 0 & -\beta & 0 & 0 & \beta^2 \\ +1 & 0 & \beta & 0 & 0 & \beta^2 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

План не ортогональный, так как

$$\sum x_{0j}x_{1j}^2 \neq 0; \quad \sum x_{0j}x_{2j}^2 \neq 0; \\ \sum x_{1j}^2x_{2j}^2 \neq 0.$$

Преобразуем его следующим образом. Значения квадратов переменных преобразуем по правилу

$$x_i^* = x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 = x_i^2 - \bar{x}_i^2, \quad i=1, 2.$$

При этом в модели преобразуется только первый коэффициент

$$\alpha_0^* = \alpha_0 + \alpha_{11}\bar{x}_1^2 + \alpha_{22}\bar{x}_2^2.$$

Остальные коэффициенты остаются без изменения.

В матрице независимых переменных изменяются два последних столбца. Пусть  $n_0$  – число наблюдений полного факторного эксперимента,  $n_0=2^m$ . Тогда в общем случае

$$\bar{x}_i^2 = (n_0 + 2\beta^2)/n, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Для  $m=2$

$$\bar{x}_i^2 = (4 + 2\beta^2)/8 = 0,5 + 0,25\beta^2.$$

Обозначим это среднее значение через  $c$ :

$$c = \bar{x}_i^2 = c(\beta).$$

Очевидно, что преобразование столбцов, соответствующих квадратам переменных, сводится к вычитанию величины  $c$  из всех элементов столбцов. В результате план приобретает следующий вид (табл. 8.3).

Таблица 8.3

План	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_1^*$	$x_2^*$
ПФЭ	1	-1	-1	1	$1-c$	$1-c$
	1	1	-1	-1	$1-c$	$1-c$
	1	-1	1	-1	$1-c$	$1-c$
	1	1	1	1	$1-c$	$1-c$
Звездный	1	$-\beta$	0	0	$\beta^2-c$	$-c$
	1	$\beta$	0	0	$\beta^2-c$	$-c$
	1	0	$-\beta$	0	$-c$	$\beta^2-c$
	1	0	$+\beta$	0	$-c$	$\beta^2-c$
Центр плана	1	0	0	0	$-c$	$-c$

В преобразованной матрице первый столбец ортогонален столбцам  $x_i^*$ . Действительно:

$$\sum_j x_{0j}x_{ij}^* = \sum_j x_{ij}^* = \sum_j x_{ij}^2 - n\bar{x}_i^2 = 0.$$

Подберем теперь величину  $\beta$  так, чтобы столбцы  $x_i^*$  были парно ортогональны. Можно строго показать, что при

$$\beta = \sqrt{(\sqrt{n_0n} - n_0)/2}$$

ортогональность столбцов  $x_i^*$  достигается. Для  $m=2$

$$\beta = \sqrt{(\sqrt{4 \cdot 9} - 4)/2} = 1;$$

$$c = (4 + 2 \cdot 1)/9 = \frac{2}{3}$$

и матрица независимых переменных преобразуется очевидным образом.

Центральные композиционные планы можно строить не только на основе полного факторного эксперимента  $2^m$ , но и используя в качестве ядра дробные реплики. Существуют и другие, достаточно экономные и эффективные ЦКП второго порядка. Минимальную избыточность ЦКП обеспечивает так называемый план Хартли. Представляет интерес ротатабельный план второго порядка, в ко-

тором дисперсия оценки функции  $y$  в некоторой точке зависит лишь от расстояния этой точки до центра плана. Эти и другие интересные варианты ЦКП читатель найдет в работе [6].

#### 8.4. Поиск экстремума функции отклика

Одной из центральных задач планирования эксперимента является поиск экстремума функции отклика. Задачи такого типа возникают при оптимизации технологических процессов, экономических показателей работы предприятий, регионов и экономики в целом, при разработке различных проектов и т. д. При всем различии конкретных постановок, суть всех подобных задач состоит в определении такого набора значений входных переменных (факторов), при котором выходная переменная (функция отклика), называемая также целевой функцией, принимает минимальное или максимальное значение. Экономические задачи такого типа формируются обычно как задачи максимизации прибыли, минимизации себестоимости продукции, издержек производства и т. д.

В классической постановке при решении подобных задач предполагается известной аналитическая зависимость целевой функции от входных переменных

$$y = f(x_1, \dots, x_m).$$

В зависимости от вида целевой функции используются методы линейного, нелинейного и динамического программирования, целочисленного программирования и т. п. К сожалению, во многих практически важных экономических и технологических задачах вид целевой функции неизвестен, а зависимость выходной переменной от входных носит вероятностный характер. Кроме того, решения на управление процессом принимаются в ходе самого процесса, зачастую в режиме реального времени. В этих условиях для поиска экстремума целевой функции весьма эффективно применение методов планирования экспериментов.

Ради определенности предположим, что необходимо определить максимум функции  $y=f(\mathbf{x})$ , причем текущее значение выходной  $y_0$  и входных  $x^{(0)}$  переменных известно. Примем эту точку за центральную точку плана, определим абсолютные значения возможных вариаций переменных  $\pm\Delta x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  и нормируем переменные так, как это было сделано в подразд. 8.2. Обозначения функции и переменные сохраним прежними. Предполагается, что переменные,

которые должны регулироваться, измеримы и могут варьироваться в небольших пределах. Значения целевой функции также могут быть измерены при различных сочетаниях регулируемых переменных. Примером такой ситуации может быть выбор оптимального сочетания цены, ассортимента и количества выпускаемой продукции в условиях неопределенности спроса с целью максимизации прибыли. Другим примером может служить выбор оптимального распределения нагрузки между электростанциями различных типов (ТЭЦ, ГРЭС, ГЭС) в энергосистеме с целью минимизации затрат на производство электроэнергии. Общей особенностью этих двух задач является то, что процесс производства продукции уже находится в рабочей области и проблема состоит в непрерывном улучшении некоторого основного синтетического показателя. Оба процесса допускают небольшие вариации входных переменных без ущерба для качества выпускаемой продукции. В практике поиска максимума (минимума) функций многих переменных широкое распространение получил *градиентный метод*. Суть его состоит в следующем. Как известно, вектор

$$\text{grad}f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right),$$

называемый градиентом, указывает направление наискорейшего возрастания функции  $f(\mathbf{x})$ . Определим значение градиента в точке  $\mathbf{x}^{(0)}$  и найдем точку  $\mathbf{x}^1$  согласно выражению

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \gamma_1 \text{grad}f(\mathbf{x})^{(0)}.$$

При подходящем выборе коэффициента  $\gamma_1$

$$f(\mathbf{x}^{(1)}) > f(\mathbf{x}^{(0)}).$$

Дальнейшее движение по градиенту в направлении скорейшего возрастания функции  $f(\mathbf{x})$  осуществляется аналогично. Текущий шаг имеет вид

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n-1)} + \gamma_n \text{grad}f(\mathbf{x})^{(n-1)}.$$

Теоретически в точке максимума

$$\text{grad}f(\mathbf{x}) = 0,$$

и движение автоматически прекращается. Выбор величины  $\gamma_n$  на шаге – непростая задача. Если выбрать  $\gamma = \text{const}$ , то шаг оказывается пропорциональным величине градиента. Это обеспечивает быстрый подъем на крутых «склонах» функции и медленный в окрестности максимума. Оставляя в стороне различные тонкости применения градиентного метода [6], сосредоточим внимание на одной единст-

венной проблеме: если вид функции  $f(\mathbf{x})$  неизвестен, то градиент невозможно определить аналитически, тем более, что зависимость  $y=f(\mathbf{x})$  носит вероятностный характер. Поэтому на каждом шаге будем искать не сам градиент, а его оценку. Если вариации  $\pm\Delta x_i$  малы и одинаковы по величине, то с достаточной степенью точности можно аппроксимировать функцию  $f(\mathbf{x})$  в окрестности точки  $(\mathbf{x})^{(0)}$  гиперплоскостью

$$\hat{y} = a_0^{(0)} + \sum_{i=1}^m a_i^{(0)} x_i.$$

Но тогда оценка градиента функции  $f(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^0$  совпадает с вектором коэффициентов  $(a_i^{(0)}, i=1, 2, \dots, m)$  уравнения линейной множественной регрессии

$$\text{grad } f(\mathbf{x})^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_m^{(0)})^t.$$

Для оценки коэффициентов  $a_i^{(0)}$  удобно использовать факторный эксперимент  $2^m$  или его дробные реплики. После выполнения шага в направлении градиента в новой точке  $\mathbf{x}^{(1)}$  вновь проводится факторный эксперимент для определения

$$\text{grad } f(\mathbf{x})^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_m^{(1)})^t.$$

Этот процесс повторяется, пока не будет достигнута точка максимума. Следует подчеркнуть, что ввиду вероятностного характера зависимости  $y=f(\mathbf{x})$  процедура оценки выполняется не только для градиента, но и для значений самой функции  $y=f(\mathbf{x})$ . В окрестности точки максимума целевая функция, как правило, имеет довольно плоский характер. Поэтому линейной аппроксимации для определения точки максимума может оказаться недостаточно. В этом случае используют нелинейную регрессионную модель второго порядка (см. подразд. 8.3) и, соответственно, центральный композиционный план.

Мы привели здесь, весьма схематично, только один из возможных методов решения оптимизационных задач. Ограниченные рамки пособия, к сожалению, не позволяют рассмотреть все тонкости градиентного процесса, другие интересные вероятностно-статистические методы поиска экстремума. За более подробными сведениями отправляем читателя к специальной литературе [6, 7].

Таблица III. Значения функции Лапласа  $\Phi(x)$

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,23	0,0910	0,46	0,1772	0,69	0,2549
0,01	0,0040	0,24	0,0948	0,47	0,1808	0,70	0,2580
0,02	0,0080	0,25	0,0987	0,48	0,1844	0,71	0,2611
0,03	0,0120	0,26	0,1026	0,49	0,1879	0,72	0,2642
0,04	0,0160	0,27	0,1064	0,50	0,1915	0,73	0,2673
0,05	0,0199	0,28	0,1103	0,51	0,1950	0,74	0,2703
0,06	0,0239	0,29	0,1141	0,52	0,1985	0,75	0,2734
0,07	0,0279	0,30	0,1179	0,53	0,2019	0,76	0,2764
0,08	0,0319	0,31	0,1217	0,54	0,2054	0,77	0,2794
0,09	0,0359	0,32	0,1255	0,55	0,2088	0,78	0,2823
0,10	0,0398	0,33	0,1293	0,56	0,2123	0,79	0,2852
0,11	0,0438	0,34	0,1331	0,57	0,2157	0,80	0,2881
0,12	0,0478	0,35	0,1368	0,58	0,2190	0,81	0,2910
0,13	0,0517	0,36	0,1406	0,59	0,2224	0,82	0,2939
0,14	0,0557	0,37	0,1443	0,60	0,2257	0,83	0,2967
0,15	0,0596	0,38	0,1480	0,61	0,2291	0,84	0,2995
0,16	0,0636	0,39	0,1517	0,62	0,2324	0,85	0,3023
0,17	0,0675	0,40	0,1554	0,63	0,2357	0,86	0,3051
0,18	0,0714	0,41	0,1591	0,64	0,2389	0,87	0,3078
0,19	0,0753	0,42	0,1628	0,65	0,2422	0,88	0,3106
0,20	0,0793	0,43	0,1664	0,66	0,2454	0,89	0,3133
0,21	0,0832	0,44	0,1700	0,67	0,2486	0,90	0,3159
0,22	0,0871	0,45	0,1736	0,68	0,2517	0,91	0,3186
0,92	0,3212	1,34	0,4099	1,76	0,4608	2,34	0,4904
0,93	0,3238	1,35	0,4115	1,77	0,4616	2,36	0,4909
0,94	0,3264	1,36	0,4131	1,78	0,4625	2,38	0,4913
0,95	0,3289	1,37	0,4147	1,79	0,4633	2,40	0,4918
0,96	0,3315	1,38	0,4162	1,80	0,4641	2,42	0,4922
0,97	0,3340	1,39	0,4177	1,81	0,4649	2,44	0,4927
0,98	0,3365	1,40	0,4192	1,82	0,4656	2,46	0,4931
0,99	0,3389	1,41	0,4207	1,83	0,4664	2,48	0,4934
1,00	0,3413	1,42	0,4222	1,84	0,4671	2,50	0,4938
1,01	0,3438	1,43	0,4236	1,85	0,4678	2,52	0,4941
1,02	0,3462	1,44	0,4251	1,86	0,4986	2,54	0,4945
1,03	0,3485	1,45	0,4265	1,87	0,4693	2,56	0,4948
1,04	0,3508	1,46	0,4279	1,88	0,4699	2,58	0,4951



Окончание табл. III

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
1,05	0,3531	1,47	0,4292	1,89	0,4706	2,60	0,4953
1,06	0,3554	1,48	0,4306	1,90	0,4713	2,62	0,4956
1,07	0,3577	1,49	0,4319	1,91	0,4719	2,64	0,4959
1,08	0,3599	1,50	0,4332	1,92	0,4726	2,66	0,4961
1,09	0,3621	1,51	0,4345	1,93	0,4732	2,68	0,4963
1,10	0,3643	1,52	0,4357	1,94	0,4738	2,70	0,4965
1,11	0,3665	1,53	0,4370	1,95	0,4744	2,72	0,4967
1,12	0,3686	1,54	0,4382	1,96	0,4750	2,74	0,4969
1,13	0,3708	1,55	0,4394	1,97	0,4756	2,76	0,4971
1,14	0,3729	1,56	0,4406	1,98	0,4761	2,78	0,4973
1,15	0,3749	1,57	0,4418	1,99	0,4767	2,80	0,4974
1,16	0,3770	1,58	0,4429	2,00	0,4772	2,82	0,4976
1,17	0,3790	1,59	0,4441	2,02	0,4783	2,84	0,4977
1,18	0,3810	1,60	0,4452	2,04	0,4793	2,86	0,4979
1,19	0,3830	1,61	0,4463	2,06	0,4803	2,88	0,4980
1,20	0,3849	1,62	0,4474	2,08	0,4812	2,90	0,4981
1,21	0,3869	1,63	0,4484	2,10	0,4821	2,92	0,4982
1,22	0,3883	1,64	0,4495	2,12	0,4830	2,94	0,4984
1,23	0,3907	1,65	0,4505	2,14	0,4838	2,96	0,49846
1,24	0,3925	1,66	0,4515	2,16	0,4846	2,98	0,49856
1,25	0,3944	1,67	0,4525	2,18	0,4854	3,00	0,49865
1,26	0,3962	1,68	0,455	2,20	0,4861	3,20	0,49931
1,27	0,3980	1,69	0,4545	2,22	0,4868	3,40	0,49966
1,28	0,3997	1,70	0,4554	2,24	0,4875	3,60	0,49984
1,29	0,4015	1,71	0,4564	2,26	0,4881	3,80	0,499928
1,30	0,4032	1,72	0,4573	2,28	0,4887	4,00	0,499968
1,31	0,4049	1,73	0,4582	2,30	0,4890	5,00	0,499997
1,32	0,4066	1,74	0,4591	2,32	0,4898	–	–
1,33	0,4082	1,75	0,4599	–	–	–	–

Таблица II. Квантили нормального распределения  $u_{1-p/2}$

$p$	$1-p/2$	$u_{1-p/2}$	$p$	$1-p/2$	$u_{1-p/2}$	$p$	$1-p/2$	$u_{1-p/2}$
0,80	0,60	0,25	0,15	0,925	1,44	0,01	0,995	2,58
0,50	0,75	0,67	0,10	0,95	1,64	0,005	0,9975	2,81
0,40	0,80	0,84	0,05	0,975	1,96	0,002	0,999	3,09
0,30	0,85	1,04	0,04	0,980	2,05	0,001	0,9995	3,29
0,25	0,875	1,15	0,02	0,990	2,33	0,0001	0,99995	3,89
0,20	0,90	1,28	–	–	–	–	–	–

Таблица 3. Квантили распределения Стьюдента  $t_{1-p/2}$

Число степеней свободы	Уровни значимости $p$						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,15	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,71

Окончание табл. ПЗ

Число степеней свободы	Уровни значимости $p$						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,67
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,37
$\infty$	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

Таблица П4. Квантили распределения Пирсона  $\chi^2_{1-p}$

Число степеней свободы	Уровни значимости $p$							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1

Продолжение табл. П4

Число степеней свободы	Уровни значимости $p$							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,4	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5

Окончание табл. П4

Число степеней свободы	Уровни значимости $p$							
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,8
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	10,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,8	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,3	37	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	40	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,4	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,8	46	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,2	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,6	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	46,9	50	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,3	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,6	53	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,3	56	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	53,7	57,5	59,7

Таблица П5. Квантили распределения Фишера  $F_{1-p}$

Число степеней свободы	Уровень значимости 0,20								
	1	2	3	4	5	6	12	24	$\infty$
1	9,5	12,0	13,1	13,7	14,0	14,3	14,9	15,2	15,6
2	3,6	4,0	4,2	4,2	4,3	4,3	4,4	4,4	4,5
3	2,7	2,9	2,9	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
4	2,4	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4
5	2,2	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,1
6	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0
7	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8
8	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7
9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7
10	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6
11	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6
12	1,8	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,5
13	1,8	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5
14	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5
15	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5
16	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,4
17	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,4
18	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4
19	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4
20	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4
22	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,4	1,4
24	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,4	1,3
26	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,4	1,4	1,3
28	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,4	1,3
30	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3
40	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,2
60	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3	1,2
120	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,4	1,3	1,1
$\infty$	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3	1,2	1,0

Продолжение табл. П5

Число степеней свободы	Уровень значимости 0,05								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,7	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,5	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Окончание табл. П5

Число степеней свободы	Уровень значимости 0,01									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5400	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,3	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	167	16,0	15,5	15,2	14,8	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,9	9,5	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,8	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,7	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,3	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,1	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	2,9
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,3	2,9	2,4
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,5	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,3	3,0	2,7	2,2
26	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,3	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	3,2	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,0	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,8	2,5	2,1	1,6
120	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,7	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,21	1,8	1,0

## Библиографический список

1. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998.
2. Кремер Н. Ш., Путко Б. А. Эконометрика. – М.: ЮНИТИ, 2003.
3. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2000.
4. Эконометрика / Под ред. Н. И. Елисейевой. – М.: Финансы и статистика, 2001.
5. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: Инфа-М, 1997.
6. Асатурян В. И. Теория планирования эксперимента. – М.: Радио и связь, 1983.
7. Хикс Ч. Основные принципы планирования экспериментов. – М.: Мир, 1967.
8. Лоули Д, Максвелл А. Факторный анализ как статистический метод. – М.: Мир, 1967.
9. Дубров А. М. Компонентный анализ и эффективность в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2002.
10. Кендалл М. Д., Стюарт А. Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973.
11. Кендалл М. Д., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976.
12. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967.
13. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. – М.: Физматиз, 1963.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.
15. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1966.

## Содержание

Предисловие .....	3
1. Предмет и методы эконометрического анализа .....	4
1.1. Эконометрика как научная дисциплина. История становления и развития .....	4
1.2. Особенности эконометрических методов .....	6
1.3. Основные этапы эконометрического анализа .....	7
2. Введение в теорию вероятностей .....	11
2.1. Основные определения и понятия .....	11
2.1.1. Случайные события. Алгебра событий .....	11
2.1.2. Вероятность. Основные законы .....	13
2.1.3. Случайные величины .....	16
2.2. Распределение вероятностей и числовые характеристики случайных величин .....	17
2.2.1. Распределение вероятностей .....	17
2.2.2. Числовые характеристики случайной величины .....	20
2.3. Нормальный закон распределения .....	23
2.4. Предельные теоремы теории вероятностей .....	28
3. Элементы математической статистики .....	31
3.1. Выборочный метод .....	31
3.2. Точечные оценки параметров .....	32
3.3. Интервальные оценки параметров .....	34
3.3.1. Доверительный интервал для генерального среднего .....	35
3.3.2. Доверительный интервал для генеральной дисперсии .....	35
3.4. Проверки статистических гипотез. Значимость коэффициента корреляции .....	36
4. Регрессионный анализ .....	40
4.1. Линейная парная регрессия .....	41
4.1.1. Метод наименьших квадратов .....	42
4.1.2. Оценка точности аппроксимации .....	44
4.1.3. Оценка значимости уравнения регрессии .....	47
4.2. Множественная линейная регрессия .....	49
4.2.1. Выборочная оценка коэффициентов регрессии .....	49
4.2.2. Оценка точности аппроксимации .....	51
4.2.3. Оценка значимости множественной регрессии .....	53
4.3. Нелинейная регрессия .....	54
4.3.1. Модели множественной регрессии, линейные по параметрам .....	55
4.3.2. Модели парной регрессии, линейные по параметрам .....	55
4.3.3. Регрессия, нелинейная по параметрам и переменным .....	57
4.4. Мультиколлинеарность .....	59
4.4.1. Метод пошагового исключения (отбора) факторов .....	61

4.4.2. Метод главных компонент .....	61
4.4.3. Факторный анализ .....	66
4.5. Регрессионные модели с переменной структурой.....	69
5. Анализ временных рядов.....	73
5.1. Задачи анализа временных рядов.....	74
5.2. Определение тренда .....	76
5.3. Сезонные колебания.....	79
5.4. Стационарные временные ряды.....	81
5.4.1. Автокорреляция .....	82
5.4.2. Спектральное разложение .....	84
5.5. Авторегрессионные модели временных рядов .....	86
5.6. Идентификация временного ряда. Прогнозирование.....	89
6. Обобщенная линейная модель .....	91
6.1. Обобщенная линейная регрессионная модель.....	91
6.2. Обобщенный метод наименьших квадратов.....	92
6.3. Гетероскедастичность .....	93
7. Функциональная и структурная зависимость.....	95
7.1. Основные определения и понятия .....	95
7.2. Метод инструментальных переменных.....	98
7.3. Двухшаговый метод наименьших квадратов.....	99
7.4. Системы одновременных уравнений. Косвенный метод наименьших квадратов .....	101
7.5. Одновременное оценивание структурных уравнений. Трехшаговый метод наименьших квадратов .....	104
8. Планирование экспериментов.....	106
8.1. Полностью рандомизированный план. Дисперсионный анализ ...	107
8.1.1. Однофакторный эксперимент .....	107
8.1.2. Двухфакторный эксперимент .....	111
8.1.3. Факторные эксперименты $2^n$ . Дробные реплики .....	114
8.2. Регрессионный анализ и ортогональное планирование экспериментов .....	118
8.3. Центральные композиционные планы второго порядка.....	122
8.4. Поиск экстремума функции отклика .....	125
Приложения .....	128
Библиографический список.....	137

Учебное издание

Скляров Юрий Сергеевич

ЭКОНОМЕТРИКА

Краткий курс

Учебное пособие

Редактор *А. Г. Ларионова*  
Верстальщик *А. Н. Колешко*

---

Подписано к печати 22.02.07. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 8,8. Уч.-изд. л. 8,5. Тираж 100 экз. Заказ №

---

Отпечатано с оригинал-макета автора  
Редакционно-издательский центр ГУАП  
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67